HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Sidneyの分割アルズリズムの統一理論
Author(s)	関口, 恭毅
Citation	經濟學研究, 34(2), 14-28
Issue Date	1984-09
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/31649
Type	bulletin (article)
File Information	34(2)_P14-28.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

経済学研究 *34-2*
北海道大学 1984. 9

Sidney の分割アルゴリズムの統一理論

関 口 恭 毅

1. はじめに

先行関係制約のある順序づけ問題の解法に関する研究の最も一般的な成果は Sidney (1975, 1981) によるものである。

Sidney の分割アルゴリズム (decomposition algorithm) に関する理論は仕事列 (String) を基本的分析対象としており，そのために，個々の仕事（仕事列の構成要素）の集合上で成立することが確かめられた諸性質を，仕事列の集合の上で再構築することが必要であった。これが理論を複雑にしていると考えられる。

Sidney の理論は，順序づけ理論において基本的で，重要な概念の一つである隣接仕事対交換 (adjacent pairwise interchange, API) 法を分析の基本ツールとして利用している。この報告でも API 法を利用するが，これに加えて，合成仕事 (composite job) の概念をもう一つの基本的分析ツールとして利用する。

合成仕事は，仕事列に対して定義される仮想的な仕事である。Kurisu (1976), Lawler (1978), Sidney (1979), Maggu et al. (1981), Sekiguchi (1981, 1983) は，複雑な問題を，それと等価なもっと簡単な問題に変形するために合成仕事を利用して成功している。

合成仕事を利用すると，仕事列に関する議論を，もとの仕事に関する議論に還元することができる。この事実に立脚して Sidney の理論を単純化するのが，本稿の目的の一つである。

Sidney (1981) は彼の理論を一般化するために区間順序 (interval order) を導入した。その目的は，比較可能 (complete) ではあるが推移的 (transitive) ではない二項関係を利用して順序づけを行う場合に，局所的 (local) な比較の繰り返しによって確実に最適順列を得るには，単にある数値の集合を非減少順に並べるだけで良いようにすることであった。言い換えれば，推移的ではない二項関係に，暗黙の推移性を導入することであった。この方法は一応成功したが，分割アルゴリズムが初めて構築された対象である完了時刻の加重和を最小化する問題が，理論の適用範囲から除外されてしまったという意味で，成功は限定的なものであった。本稿では，推移性を導入するのに，区間順序を用いる方法をその一ケースとして含む，もっと包括的な手法を用い，その持つべき性質を検討することによって，Sidney 理論の統一を可能にする。

2. 準　備

ある属性を有する要素全体の集合を S とし S の有限部分集合を N とする。N の要素には1～n の通し番号を付し，N はこの通し番号の集合も表わすものとする。S は同じ属性値を持った要素を複数個含む **多重集合** (multiple set) である。S の要素は仕事 (job) と呼ばれる。S の部分集合の順列 σ を（部分）スケジュールと呼ぶ。$\{\sigma\}$は σ を構成する仕事の集合である。$\sigma_1 \cdot \sigma_2$ は σ_1 のあとに σ_2 をつないだスケジュールを表わし，σ_1 と σ_2 の **連接** (concatination) と呼ぶ。連接に言及するときは常に，$\{\sigma_1\} \cap \{\sigma_2\} = \phi$ が仮定される。σ の長さとは，$\{\sigma\}$ の要素数である。

評価関数 g は任意の長さのスケジュールから実数値への写像である。仕事を処理する場を工場 (shop) と呼ぶが，工場は g の値に影響を与え，しかも仕事の処理に応じて変化する“状態”を持っていると考えるのが一般的であろう。

スケジュール σ を処理する際の初期状態を IS で示すと，g の値は $g(\sigma:\mathrm{IS})$ と表わされる。g はある初期状態の下で，スケジュール σ を消化するときの費用関数である。ところで，各工場ごとに標準的な初期状態 IS_0 を定め得ると考えるのは自然なことと思われる。そのような初期状態の下での g の値を f で表わす。f では，初期状態が常に固定されているから，σ だけの関数と考えて良い。

$$f(\sigma)=g(\sigma:\mathrm{IS}_0)$$

f を**順序づけ関数**と呼び，以後は g ではなく f を利用する。f を g の代用に利用できるためには，

$$\forall\{\sigma_1\}=\{\sigma_2\}\subset S,\ \forall\mathrm{IS}$$
$$f(\sigma_1)\leqq f(\sigma_2)\rightarrow$$
$$g(\sigma_1:\mathrm{IS})\leqq g(\sigma_2:\mathrm{IS})$$

が成立しなければならない。順序づけ問題の数学的定式化においては g ではなく f を用いるのが慣例であるが，そのような定式化がなされている問題すべてについて，上の条件が成立しているわけではないことに注意すべきである。

N のすべての要素から成るスケジュール全体の集合を $\mathscr{P}(N)$ と記す。**拘束されない問題** (free prablem) とは次の $P(N)$である。

$$P(N):\underset{\sigma\in\mathscr{P}(N)}{\text{minimize}}\ f(\sigma)$$

尚，$[i]$ はスケジュールの i 番目の仕事を表わすものとする。

例.

I. 完了時刻の加重和最小化問題

$S=\{(w_i,\ p_i):p_i,\ w_i$ 実数，$w_i>0\}$

$$f(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\{w_{[i]}\sum_{k=1}^{i}p_{[k]}\}$$

この問題の初期状態は，工場が N の要素の処理に着手する時刻 t_0 とするのが妥当であるが，標準は，この時刻を 0 とする。この問題は，上述の条件を満たしている。

$$g(\sigma:t_0)=\sum_{i=1}^{n}\{w_{[i]}\ (t_0+\sum_{k=1}^{i}p_{[k]})\}$$

II. 総所要時間最小化フロー・ショップ問題

$S=\{(a_i,\ b_i):a_i,\ b_i$ 非負実数$\}$

$$T_1(\alpha\cdot[i])=T_2(\alpha)+a_{[i]}$$
$$T_2(\alpha\cdot[i])=max\begin{Bmatrix}T_1(\alpha\cdot[i])\\T_2(\alpha)\end{Bmatrix}+b_{[i]}$$

ただし，$T_1(\phi)=0,\ T_2(\phi)=0$

$$f(\sigma)=T_2(\sigma)$$

この問題の初期状態は，機械1と2が各々，N の要素の処理に着手できる時刻 $T_1(\phi)$，$T_2(\phi)$ である。機械が3台以上になるとこの問題の f は上記の条件を満足しなくなる。

N の上の非循環ネットワーク，$G=(N,\ E)$，$E\subset N\times N$ を**先行関係ネットワーク**と呼ぶ。$(i,j)\varepsilon E$は，仕事 i が仕事 j に先行すべきことを指示する。$\mathscr{P}(N,\ G)$ により，先行関係を満足する N の要素すべてから成るスケジュール全体の集合を表わす。

拘束された問題 (constrained problem) とは次の $P(N,\ G)$ である。

$$P(N,\ G):\underset{\sigma\varepsilon\mathscr{P}(N,G)}{\text{minimize}}\ f(\sigma)$$

$G_K=(K,E)$ は，$K\subset N$ により生成される G の部分ネットワークであり，$P(K,\ G)$ は G_K の先行関係を満たす K のスケジュールを求める，$P(N,\ G)$ の部分問題であるとする。

$P(N,\ G)$ あるいは G に関する $K\subset N$ の

先行集合 $F(K)=\{\mathrm{i}\varepsilon N\text{-}K:\exists\mathrm{j}\varepsilon K,(\mathrm{i,j})\varepsilon\mathrm{E}\}$

後続集合 $T(K)=\{\mathrm{i}\varepsilon N\text{-}K:\exists\mathrm{j}\varepsilon K,(\mathrm{j,i})\varepsilon\mathrm{E}\}$

平行集合 $I(K)=\{\mathrm{i}\varepsilon N\text{-}K:\forall\mathrm{j}\varepsilon K,(\mathrm{i,j})\not\varepsilon\mathrm{E},(\mathrm{j,i})\not\varepsilon\mathrm{E}\}$

とする。K は $F(K)=\phi$ なら**先頭集合** (initial set)，$T(K)=\phi$ なら**後端集合** (terminal set) と呼ばれる。特に，K が先頭集合であれば $N\text{-}K$ は後端集合である。

$K\subset S$ のすべての要素から成るスケジュールであることを特に明示するときには $\sigma(K)$ なる記法を用いる。

あるスケジュール σ に代わる**合成仕事**とは次の条件を満たす $J_\sigma\varepsilon S$ である。

$\forall\{\sigma_1\},\ \{\sigma_2\}\subset S$ に対し，

$$f(\sigma_1\cdot\sigma\cdot\sigma_2)=f(\sigma_1\cdot J_\sigma\cdot\sigma_2)+\Delta_\sigma$$

ただし，Δ_σ は σ_1，σ_2 には依存しない定数。

例

I. 完了時刻の加重和最小化問題

$J_\sigma=(w_\sigma,\ p_\sigma)$ とおくと，

$$w_\sigma=\sum_{i\varepsilon\{\sigma\}} w_i,\quad p_\sigma=\sum_{i\varepsilon\{\sigma\}} p_i$$

$$\Delta_\sigma=-\sum_{i=1}^{n-1}\{w_{[i]}\sum_{k=i+1}^{n} p_{[k]}\}$$

II. 総所要時間最小化フロー・ショップ問題

$J_\sigma=(a_\sigma,\ b_\sigma)$ とおくと，

$$a_\sigma=f(\sigma)-\sum_{i\varepsilon\{\sigma\}} b_i,\quad b_\sigma=f(\sigma)-\sum_{i\varepsilon\{\sigma\}} a_i$$

$$\Delta_\sigma=f(\sigma)-a_\sigma-b_\sigma=\sum_{i\varepsilon\{\sigma\}}(a_i+b_i)-f(\sigma)$$

ここで定義した2つの J_σ が，合成仕事の条件を満足していることを確認するには簡単な代数計算を行えば良い。

f が**SND** (series network decomposition) **特性**を持つとは，

$$\forall\{\sigma_2\}=\{\sigma_2'\}\subset S,\ \forall\{\sigma_1\},\ \{\sigma_3\}\subset S$$

$$f(\sigma_2)\leqq f(\sigma_2')\ \rightarrow\ f(\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\sigma_3)\leqq f(\sigma_1\cdot\sigma_2'\cdot\sigma_3)$$

が成立することである。例として引用されている2つの問題における f が **SND** 特性を満たすことを示すのは簡単である。例えば，Monma-Sidney (1979) を見よ。

合成仕事が**一致性** (coincidency) を持つとは，合成仕事の列 $J_{\sigma_1}\cdot J_{\sigma_2}$ に対する合成仕事を J_{12} とするとき，

$\forall\{\sigma_1\}$，$\{\sigma_2\}\subset S$ に対し，

$$J_{12}=J_{\sigma_1\cdot\sigma_2},\quad \Delta_{12}+\Delta_{\sigma_1}+\Delta_{\sigma_2}=\Delta_{\sigma_1\cdot\sigma_2}$$

が成立することである。2つの例題の合成仕事が一致性を持つことを示すには，やはり簡単な代数計算が必要なだけである。一致性はあるスケジュールに対する合成仕事は，そのスケジュールをいくつかの部分スケジュールに分割し，その各々に対する合成仕事を求めた上で，再度，合成仕事の合成を行うという方法で，一度にスケジュール全体に対する合成仕事を求めるのと同じ結果が得られることを要求している。

3. 拘束されない問題の解と二項関係

f は，S 上に次の1，2，3を満足する二項関係$\lesssim$を定義できるとき，**弱 API 特性**を持つと言われる。

1. 比較可能である。$\forall i,j\varepsilon S$，$i\lesssim j$ and/or $j\lesssim i$
2. 推移的である。$\forall i,j,k\varepsilon S$，$i\lesssim j$ and $j\lesssim k \rightarrow i\lesssim k$
3. $\forall i,j\varepsilon S$，$\forall\{\sigma_1\}$，$\{\sigma_2\}\subset S$，
   $i\lesssim j\ \rightarrow\ f(\sigma_1\cdot i\cdot j\cdot\sigma_2)\leqq f(\sigma_1\cdot j\cdot i\cdot\sigma_2)$

Smith (1956) は次のことを証明した。

〔定理1〕　$P(N)$ において，f が弱 API 特性を持つとき，$i\lesssim j$ であるとき i が j に先行するようなスケジュール $\sigma(N)$ は最適である。

特に，2. は暗黙のうちに $i<j, j\lesssim k\ \rightarrow\ i<k$ かつ $i\lesssim j, j<k\ \rightarrow\ i<k$ を要求していることに注意しておく。

題意のような二項関係を発見するには通常，$f(\sigma_1\cdot i\cdot j\cdot\sigma_2)\leqq f(\sigma_1\cdot j\cdot i\cdot\sigma_2)$ が成立するための条件を求める。3. は $i\lesssim j$が，$f(\sigma_1\cdot i\cdot j\cdot\sigma_2)\leqq f(\sigma_1\cdot j\cdot i\cdot\sigma_2)$ であるための十分条件であることを求めているが，このようにすることで一般には，必要・十分条件が求められる。必要・十分条件となるような二項関係の方が豊かな含意を持っているが，残念なことに，推移性を持たなくなることがある。

必要・十分条件となるような二項関係を$\otimes$で表わす。次の1′，2′，3′，4′ を満たす二項関係$\otimes$を検討する。この二項関係を**優先関係**と呼び，$i\otimes j$ であるとき i は j に優先する，あるいは i は j より優先度が高いと言う。尚，$i\otimes j$ だが $j\otimes i$ ではないとき $i\oslash j$と書く。

1′. 比較可能である。

2′. $\otimes$は推移的である。つまり，$\forall i,j,k\varepsilon S$

$$i\otimes j,\ j\otimes k\ \rightarrow\ i\otimes k$$
$$i\otimes j,\ j\oslash k\ \rightarrow\ i\otimes k$$
$$i\oslash j,\ j\otimes k\ \rightarrow\ i\otimes k$$

3′. $\forall i,j\varepsilon S$，$\forall\{\sigma_1\}$，$\{\sigma_2\}\subset S$

$$i\otimes j\ \leftrightarrow\ f(\sigma_1\cdot i\cdot j\cdot\sigma_2)\leqq f(\sigma_1\cdot j\cdot i\cdot\sigma_2)$$

4′. $\forall i,j\varepsilon S$，

$$i\otimes j\ \rightarrow\ f(i\cdot j)<f(j\cdot i)$$

Sidney(1981) は前述の Smith の結果を一般化して，次の定理を証明した。

〔定理2〕　S 上に二項関係$\lesssim$を定義できるとする。このとき，$i \lesssim j$ であれば i が j に先行するようなスケジュール $\sigma(N)$ は $P(N)$の最適スケジュールである。

2′は関係$\lesssim$が推移的ではないかもしれないことを含意しており，局所的に $i \lesssim j$ に従って求めたスケジュールが全体として定理2を満足しているという保証はない。最適スケジュールを求めるアルゴリズムを構成するためには，この欠点を改善する必要がある。

例.

I.　完了時刻の加重和最小化問題

$$f(\sigma_1 \cdot i \cdot j) = f(\sigma_1) + w_i \Big(\sum_{k \varepsilon \{\sigma_1\}} p_k + p_i \Big) + w_j \Big(\sum_{k \varepsilon \{\sigma_1\}} p_k + p_i + {}_j p j \Big)$$

$$f(\sigma_1 \cdot j \cdot i) = f(\sigma_1) + w_j \Big(\sum_{k \varepsilon \{\sigma_1\}} p_k + p_j \Big) + w_i \Big(\sum_{k \varepsilon \{\sigma_1\}} p_k + p_i + p_j \Big)$$

これから，

$$f(\sigma_1 \cdot i \cdot j) - f(\sigma_1 \cdot j \cdot i) = w_j p_i - w_i p_j$$

一方，$f(\sigma_1 \cdot i \cdot j \cdot \sigma_2)$ は $f(\sigma_1 \cdot i \cdot j)$ の単調増加関数であるから，$f(\sigma_1 \cdot i \cdot j) \leqq f(\sigma_1 \cdot j \cdot i)$ と $f(\sigma_1 \cdot i \cdot j \cdot \sigma_2) \leqq f(\sigma_1 \cdot j \cdot i \cdot \sigma_2)$ は同値である。そこで

$$i \lesssim j \leftrightarrow \frac{p_i}{w_i} \leqq \frac{p_j}{w_j}$$

と定義する。この場合，$\lesssim$は推移的であり，1′～4′ を満足するとともに，1～3をも満足している。

II.　総所要時間最小化フロー・ショップ問題

Johnson (1954) は次のようにすれば$\lesssim$が 1′～4′ を満足することを示した。

$i \lesssim j \leftrightarrow$ ①～③のうち少くとも1つを満足する。

① $a_i \leqq b_i, a_j \leqq b_j, a_i \leqq a_j$

② $a_i \leqq b_i, a_j \geqq b_j$

③ $a_i \geqq b_i, a_j \geqq b_j, b_i \geqq b_j$

この関係は，推移的ではない。例えば，$(a_i, b_i) = (5, 3)$，$(a_j, b_j) = (2, 2)$，$(a_k, b_k) = (3, 4)$ とすると，③により $i \lesssim j$，①により $j \lesssim k$ であるにもかかわらず②により $k \lesssim i$ である。しかし，良く知られているように，この問題では，

$i \lesssim j \leftrightarrow$ ①～③の中の1つを満足する。

① $a_i \leqq b_i, a_j \leqq b_j, a_i \leqq a_j$

② $a_i \leqq b_i, a_j > b_j$

③ $a_i > b_i, a_j > b_j, b_i \geqq b_j$

と定義すれば$\lesssim$は1～3を満足する。以下の検討との関連で，$\lesssim$の定義では，$\lesssim$の場合と異なり，$a_i = b_i$ であるとき $a_i \leqq b_i$としかなり得ないことに注目しておきたい。

〔定理3〕**(合成の優先度保存性)**

$$i \lesssim j \rightarrow i \lesssim J_{i \cdot j},\ J_{i \cdot j} \lesssim j$$
$$i \lesssim J_{j \cdot i},\ J_{j \cdot i} \lesssim j$$

証明。$i \lesssim j$でありながら $J_{i \cdot j} \lesssim i$ であるとする。4′より，$f(J_{i\,j} \cdot i) < f(i \cdot J_{i \cdot j})$。合成仕事の定義から，$f(J_{i \cdot j} \cdot i) = f(i \cdot j \cdot i) + \Delta_{i \cdot j}$，$f(i \cdot J_{i \cdot j}) = f(i \cdot i \cdot j) + \Delta_{i \cdot j}$ であるから，$f(i \cdot j \cdot i) < f(i \cdot i \cdot j)$。一方，3′を用いて$f(i \cdot i \cdot j) \leqq f(i \cdot j \cdot i)$ を得る。これは矛盾であり，$i \lesssim J_{i \cdot j}$でなければならない。残りの3つも同様にして証明できる。

$i \lesssim j$ であるとき，$J_{i \cdot j} \lesssim j$ が成立するであろうか。残念ながら一般的には成立しない。例えば，例 II は成立しない問題例である。しかし例 I がこの関係を満たすことは容易に確認できる。この点については後述する。

S が (fによって) **分割可能**であるとは，S が次の3条件を満足する S_1 と S_2 の和集合であることを言う。

1.　対 (i, j) の優先関係$\lesssim$の判定には，①$i, j \varepsilon S_1$，②$i \varepsilon S_1$，$j \varepsilon S_2$，③$i, j \varepsilon S_2$ の場合ごとに，特有の判定条件を用いる。

2.　(S_1 の S_2 に対する優先性)

$\forall i \varepsilon S_1 \setminus S_2$，$\forall j \varepsilon S_1 \cap S_2$，	$i \lesssim j$
$\forall i \varepsilon S_1$，$\forall j \varepsilon S_2$	$i \lesssim j$
$\forall i \varepsilon S_1 \cap S_2$，$\forall j \varepsilon S_2 \setminus S_1$	$i \lesssim j$

3.　(S_1, S_2 の完備性)

$\forall i, j \varepsilon S_1 \setminus S_2$　　$J_{i\cdot j} \varepsilon S_1 \setminus S_2$, $J_{j\cdot i} \varepsilon S_1 \setminus S_2$

$\forall i, j \varepsilon S_1 \cap S_2$　　$J_{i\cdot j} \varepsilon S_1 \cap S_2$, $J_{j\cdot i} \varepsilon S_1 \cap S_2$

$\forall i, j \varepsilon S_2 \setminus S_1$　　$J_{i\cdot j} \varepsilon S_2 \setminus S_1$, $J_{j\cdot i} \varepsilon S_2 \setminus S_1$

$\forall i \varepsilon S_1 \setminus S_2, \forall j \varepsilon S_1 \cap S_2$　$J_{i\cdot j} \varepsilon S_1 \setminus S_2$, $J_{j\cdot i} \varepsilon S_1 \setminus S_2$

$\forall i \varepsilon S_2 \setminus S_1, \forall j \varepsilon S_1 \cap S_2$　$J_{i\cdot j} \varepsilon S_2 \setminus S_1$, $J_{j\cdot i} \varepsilon S_2 \setminus S_1$

尚，S_1 あるいは S_2 の一方が空であっても良い。

この分割可能性の定義の中で，S_1 の S_2に対する優先性は2. の2番目の条件式に端的に表現されている。その1番目の条件式では，$j \otimes i$ とはならないことを要求している。3番目の条件式も同様である。3. では，前半の3つの条件式で $S_1 \setminus S_2 (S_1 \cap S_2,\ S_2 \setminus S_1)$ に属する2つの仕事の合成仕事が再度 $S_1 / S_2 (S_1 \cap S_2,\ S_2 \setminus S_1)$ に属することを求めている。後半の2つの条件式は，$S_1 \cap S_2$ に属する仕事は合成に関して中性であることを要求している。

$S_1 \cap S_2$ の要素の扱いについては説明が必要であろう。$i, j \varepsilon S_1 \cap S_2$ であるときには，i, j は共に S_1 の要素であると同時に S_2 の要素でもあるので，$i \otimes j$ かつ $j \otimes i$ であり，一見したところ，2. の2番目の条件式は間違っていると思われるかも知れない。しかし，そうではない。この条件式の意図は，i を S_1 の要素と解釈し，j を S_2 の要素と解釈して1. の②の場合の判定条件を用いると $i \otimes j$ であって，$j \otimes i$ とはならない，ということである。

例.

I.　完了時刻の加重和最小化問題

$S = S_1$, $S_2 = \phi$ とすれば良い。

II.　総所要時間最小化フロー・ショップ問題

$S_1 = \{(a_i, b_i) : a_i \leqq b_i\}$,　$S_2 = \{(a_i, b_i) : a_i \geqq b_i)\}$ とし，二項関係の判定条件は1. の①②③に対して$\otimes$の定義中の対応する番号の判定式を用いるものとすれば良い。

S の分割可能性と関連する，合成の性質を2つ定義しておく。

$\forall K \subset S$ に対し，

$\exists \sigma \varepsilon \mathscr{P}(K)$,　$J_\sigma \varepsilon S'$

$\longrightarrow \forall \sigma \varepsilon \mathscr{P}(K)$,　$J_\sigma \varepsilon S'$

ただし，S' は，$S_1 \setminus S_2$,　$S_1 \cap S_2$ あるいは $S_2 \setminus S_1$ のいずれかである。

が満たされるとき，合成仕事は**所属同一性**を持つ，と言う。

合成が**優先度強-保存性**を持つとは，

$\forall i, j \varepsilon S_1$,　$i \otimes j \ \rightarrow\ J_{i\cdot j} \otimes j$

$\forall i, j \varepsilon S_2$,　$i \otimes j \ \rightarrow\ i \otimes J_{i\cdot j}$

が成立することである。

例.

I.　完了時刻の加重和最小化問題

所属同一性は自明である。以下に示すように合成は優先度強-保存性を持っている。

$i \otimes j$ は $p_i / w_i < p_j / w_j$ と同値である。この時 $p_i / w_i < (p_i + p_j) / (w_i + w_j) < p_j / w_j$ であるから，$i \otimes J_{i\cdot j} \otimes j$ である。

II.　総所要時間最小化フロー・ショップ問題

定義に従えば $f(i \cdot j) = a_i + b_j + max(a_j, b_i)$ となるから，$J_{i\cdot j} = (a_{i\cdot j},\ b_{i\cdot j})$ とすると，

$$a_{i\cdot j} = a_i - b_i + max(a_j,\ b_i)$$

$$b_{i\cdot j} = b_j - a_j + max(a_j,\ b_i)$$

$i, j \varepsilon S_1$ とすると $a_i \leqq b_i$, $a_j \leqq b_j$, $a_i < a_j$ であるとき $i \otimes j$ である。この時，$a_{i\cdot j} - b_{i\cdot j} \leqq 0$ だから $J_{i\cdot j} \varepsilon S_1$。$a_{i\cdot j} - a_j \leqq 0$ (等号は $a_i = b_i$ のとき) であるから，$J_{i\cdot j} \otimes j$ である。従って，優先度強-保存性はない。一方，ある $\sigma \varepsilon \mathscr{P}(K)$ に対し，$J_\sigma \varepsilon S'$ は，S' が $S_1 \setminus S_2$,　$S_1 \cap S_2$ あるいは $S_2 \setminus S_1$ であれば，$\Sigma a < \Sigma b$, $\Sigma a = \Sigma b$, $\Sigma a > \Sigma b$ が各々対応し，任意の$\sigma \varepsilon \mathscr{P}(K)$ に対して $J_\sigma \varepsilon S'$ でなければならないことを意味する。従って，所属同一性を持っていることがわかる。

4.　UIR ならびに関連する諸性質

UIR (単一解釈制限, unique interpretation restriction) とは，1つの問題例 $P(N)$ あるいは $P(N,\ G)$ を解く過程で，ある $i \varepsilon S_1 \cap S_2$ を一度 S_l $(l = 1,\ 2)$ の要素と見なしたら，その問題例を解く間は，以後一貫して $i \varepsilon S_l$ と見なせ，という要請である。

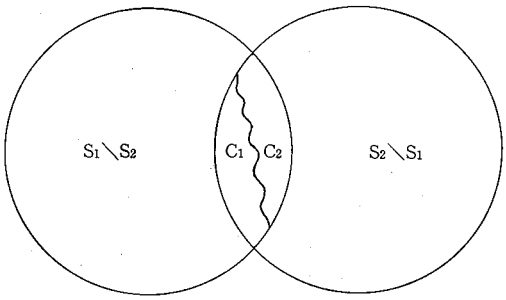


図 1　*UIR*

UIR の下で S の各要素対について関係⊗の判定を繰り返すと，結果的に，$S_1 \cap S_2$ を S_1 の要素と見なした C_1 と S_2 の要素と見なした C_2 に排他的に分割することになる。$S_1{}^*=(S_1 \setminus S_2) \cup C_1$，$S_2{}^*=(S_2 \setminus S_1) \cup C_2$ と定義すれば，分割可能性の条件 2. の 2 番目の式により，

$$\forall i \varepsilon S_1{}^*,\ \forall j \varepsilon S_2{}^* \qquad i \otimes j$$

となる。ただし，*UIR* によっては，C_1 あるいは C_2 が空であるかも知れない。

例.

I.　完了時刻の加重和最小化問題

$S_2=\phi$ であるから *UIR* は不要である。あるいは，*UIR* は任意で良いとも言える。

II.　総所要時間最小化フロー・ショップ問題

(i)　$i \varepsilon S_1 \cap S_2$ はすべて $i \varepsilon S_1$（あるいはすべて $i \varepsilon S_2$）と見なす。

(ii)　Sidney (1981) は $i \varepsilon S$ に対し次のような**区間関数** (interval function) を定義し，m_i（あるいは M_i）の非減少順に並べたスケジュールを分析に利用することを提案した。これは，m_i を利用するときは (i) の $i \varepsilon S_1$ とする *UIR* と，M_i を利用するときは $i \varepsilon S_2$ とする *UIR* と同値である。

$$[m_i,\ M_i]=\begin{cases} [-\dfrac{1}{a_i},\ -\dfrac{1}{a_i}] & if\ a_i<b_i \\ [-\dfrac{1}{a_i},\ \dfrac{1}{b_i}] & if\ a_i=b_i \\ [\dfrac{1}{b_i},\ \dfrac{1}{b_i}] & if\ a_i>b_i \end{cases}$$

(iii)　*UIR* の定義通りに，各 $i \varepsilon S_1 \cap S_2$ に対し，$i \varepsilon S_1$，$j \varepsilon S_2$ のどちらか一方を，任意に割り当てる。

UIR の下では二項関係⊗が推移性を回復するとき，f は **API 特性**を持つ，と言う。*UIR* の下では，$i \otimes j$ かつ $j \otimes i$ であるような対 (i, j) の中には，$i \otimes j$ あるいは $j \otimes i$ の一方だけしか適用されないようなものが発生する。従って，本来の関係⊗とは異ったものとなる。混乱を避けるために，**UIR の下での二項関係⊗を≲と記す**ことにする。

二項関係≲の判定には，($S_1 \cap S_2$ を C_1 と C_2 に分割することに起因して) ⊗の定義式中の，ある対 (i, j) に対して適用可能なものの中から，1 本を選択的に利用することになるので，3′ や4′ はもはや満足しなくなるが，関係≲は 3 を満足する。従って，f が *API* 特性を持つときには，(≲は 2 を満たすので) ≲は≤の条件 1，2，3 を満たすことになる。

例.

I.　完了時刻の加重和最小化問題

UIR は任意であり，⊗がそれ自身推移律を満たしていることを確認するのは易しい。この問題の f は *API* 特性を持っている。

2.　総所要時間最小化フロー・ショップ問題

$i \varepsilon S_1 \cap S_2$ を常に $i \varepsilon S_1$ と見なす *UIR* を利用すると，⊗の判定式は実質的に≤の判定式と等価な機能を持つ。従って，≲は≤とほとんど同じである。この問題の f も *API* 特性を持つことがわかる。

合成仕事が，そのもとになった仕事にくらべてどの程度の優先度を持つかを知ることは合成仕事を利用する解法を構築するうえで重要である。優先度の保存性はそのような知見の一つである。優先度の保存性と *UIR* の下での≲の推移性を用いれば，次の定理が証明できる。

〔定理 4〕**(合成の単調性)**

$i \lesssim j,\ i \lesssim k \rightarrow i \lesssim J_{j \cdot k},\ i \lesssim J_{k \cdot j}$

$j \lesssim i,\ k \lesssim i \rightarrow J_{j \cdot k} \lesssim i,\ J_{k \cdot j} \lesssim i$

証明。一般性を失うことなく $j \lesssim k$ として良い。従って，$j \lesssim J_{j \cdot k}$, $j \lesssim J_{k \cdot j}$。$i \lessdot j$ であるから $\lesssim$ の推移性により $i \lessdot J_{j \cdot k}$, $i \lessdot J_{k \cdot j}$。もう一方の関係も同様に証明できる。

定理4は，より優先度の低い仕事をどのように合成しても，優先度の高い仕事は作り出せないことを保証する。逆に，優先度のより高いものを合成したときには，やはり良い合成仕事を得るということでもある。

S は多重集合であることを思い出そう。UIR は，同等な2つの仕事の一方を C_1 に，他方を C_2 に分類しても良いことを指摘しておく。ここで，仕事 **i と j が同等**であるとは，i の属性値と j の属性値がすべて同じであることを言い，$i=j$ と書く。

〔定理5〕(**＊所属同一性**)

UIR に次のオプションを追加する。

「ある $\sigma \varepsilon \mathscr{P}(K)$ に対し $J_\sigma \varepsilon S_1 \cap S_2$ であるとき，すべての $\sigma \varepsilon \mathscr{P}(K)$ に対し，$J_\sigma \varepsilon C_l$ (l は K ごとに1か2に固定) とする」

このオプションを追加することによって，合成仕事が所属同一性を持つときには，任意の UIR は次式を満たす。

各 $K \subset S$ に対し，　$\forall \sigma \varepsilon \mathscr{P}(K)$,　$J_\sigma \varepsilon S_l^*$

ただし，$l=1$，2で K ごとに一方に固定する。

証明。定理を確立するには，J_σ が $S_1 \cap S_2$ の要素となる場合だけを検討すれば十分である。しかし，これは追加するオプションによって，定理の意図に沿うように分類される。

UIR (あるいは API 特性) と関連する合成仕事の性質を定義しておく。合成仕事が**同等一貫性**を持つ，とは

$\forall \{\sigma_1\} = \{\sigma_2\} \subset S$ に対し，$J_{\sigma_1} = J_{\sigma_2}$

が成立することである。合成仕事が**単調一貫性**を持つ，とは，UIR の下で任意の $\{\sigma_1\} = \{\sigma_2\} \subset S$ に対し次式が成立することである。

$$J_{\sigma_1} \lessdot J_{\sigma_2} \leftrightarrow f(\sigma_1) < f(\sigma_2) \quad if \ J_{\sigma_1}, J_{\sigma_2} \varepsilon S_1^*$$

$$J_{\sigma_1} \lessdot J_{\sigma_2} \leftrightarrow f(\sigma_1) > f(\sigma_2) \quad if \ J_{\sigma_1}, J_{\sigma_2} \varepsilon S_2^*$$

$$J_{\sigma_1} = J_{\sigma_2} \leftrightarrow f(\sigma_1) = f(\sigma_2)$$

同等一貫性は合成仕事が対応するスケジュール σ にではなく，スケジュールを構成する仕事集合 $\{\sigma\}$ に依存することを暗示している。これに対し，単調一貫性は，合成仕事が単にスケジュールに依存するだけではなく，スケジュールの良さと，作られる合成仕事の優先度の高さとの間に単調な関係が成立することを要求している。

例.

I.　完了時刻の加重和最小化問題

同等一貫性を持つことは合成仕事の定義から自明である。ただし，Δ_σ はスケジュールに依存する。

II.　総所要時間最小化フロー・ショップ問題

$J_\sigma \varepsilon S_1^*$ なら $a_\sigma \leqq b_\sigma$ である。$\{\sigma'\} = \{\sigma\}$ であれば σ' がなんであっても合成仕事の定義から

$$a_{\sigma'} - b_{\sigma'} = \sum_{i \varepsilon \{\sigma\}} a_i - \sum_{i \varepsilon \{\sigma\}} b_i = a_\sigma - b_\sigma \leqq 0$$

であり，$J_{\sigma'} \varepsilon S_1^*$ である。

$$a_\sigma - a_{\sigma'} = f(\sigma) - f(\sigma')$$

であるから，$J_\sigma, J_{\sigma'}$ の優先関係と $f(\sigma)$, $f(\sigma')$ の大小関係が単調一貫性の要求通りに対応していることがわかる。$J_\sigma \varepsilon S_2^*$ のときも同様である。従って，この問題の合成仕事は単調一貫性を持っている。

一貫性に関連する2つのことを注意しておく。まず，合成仕事が同等一貫性を持つときには，明らかに，所属同一性も持っているということである。その証明は同等一貫性の定義から自然に導かれる。

次に，単調一貫性は，$\lesssim$ ではなく $\lessdot$ で定義されているが，その含意は UIR の下でなければ満たされない場合があるということである。事実，例 II で $(a_1, b_1) = (2, 3)$, $(a_2, b_2) = (3, 2)$ の合成は UIR の下でなければ次のように単調一貫性を満たしていない。$f(1 \cdot 2) = 7$, $f(2 \cdot 1) = 8$ であるから，$J_{1 \cdot 2} = (a_{1 \cdot 2}, b_{1 \cdot 2}) = (2, 2)$, $J_{2 \cdot 1} = (a_{2 \cdot 1}, b_{2 \cdot 1}) = (3, 3)$, $\Delta_{1 \cdot 2} = 3$, $\Delta_{2 \cdot 1}$

$=2$ となる。従って，$f(1\cdot2)<f(2\cdot1)$ であるが，$J_{1\cdot2}\lessdot J_{2\cdot1}$かつ $J_{2\cdot1}\lessdot J_{1\cdot2}$ である。

前の節とこの節では，例題として引用した2つの問題を多様な側面から検討し，その特性を抽象化して，いくつかの性質を定義し，また可能なものは導出した。それらをここで整理しておく。

- S が分割可能であること。
- f が API 特性と SND 特性を持つこと。
- 合成仕事は一致性，単調あるいは同等一貫性，所属同一性を持つこと。
- 合成の優先度強-保存性。
- 合成の優先度保存性，単調性（API 特性の下で），所属同一性（UIR の下で）は他の性質から導き出された。

5. p*-最適対と最適スケジュール

Sidney の分割アルゴリズムを，合成仕事の概念を用いて再構成し，その正しさを証明するのが，この節と次節の目的である。

分割アルゴリズムは，与えられた仕事集合 N を一連の p^*-最適対に分割することによって最適スケジュールを見つける。その p^*-最適対をここで定義する。

拘束された問題 $P(N, G)$ の **p-最適対** (σ, K) とは次の条件を満たす仕事集合 $K\subset N$ とそのスケジュールの対である。

(1) K は G の先頭集合

(2) σ は $P(K, G)$ の最適スケジュール

(3) M を別の先頭集合，σ' を $P(M, G)$ の最適スケジュールとするとき，$J_\sigma\lesssim J_{\sigma'}$.

(4) $J_\sigma\varepsilon S_1{}^*$

対 (σ, K) は次の条件を満足するとき $P(N,G)$ の **p*-最適対**である。

(5) (σ, K) は p-最適対である。

(6) (σ', M) を別の p-最適対とするとき M は K の真部分集合ではない。

対 (σ, K) がp-最適（p^*-最適）であるとき，σ や K も p-最適（p^*-最適）であると言う。

p-最適対は，その合成仕事が $S_1{}^*$ に属し最も高い優先度を持つ先頭集合とその最適スケジュールである。p^*-最適な先頭集合は，p-最適な先頭集合の中で極小なものである。p^*-最適対に関する次の定理は分割アルゴリズムの正しさの証明において要の役割を演じる。

〔定理6〕

$P(N, G)$ において S は分割可能であり f は SND 特性と API 特性を持つとする。一致性と単調あるいは同等一貫性を持つ合成仕事を定義でき，これは所属同一性も持つとする。(σ, K) が p^*-最適対であり T は $P(K, G)$ の後端集合で σ_T は $P(T, G)$ の最適スケジュールとするとき，

$$J_{\sigma_T}\lesssim J_\sigma \text{ かつ } J_{\sigma_T}\varepsilon S_1{}^*.$$

証明。$T=K$ なら合成仕事の（単調あるいは同等）一貫性により $J_\sigma=J_{\sigma_T}$であり定理は成立する。$T\subsetneqq K$とする。定理が成立しないとし $J_\sigma\lessdot J_{\sigma_T}$ とする。一般性を失うことなく T は定理の成立しない最小の真部分集合とする。つまり，$L\subsetneqq T$ を $P(K, G)$ の後端集合であるとし，σ_L を $P(L, G)$ の最適スケジュールとするとき，

(A)　$J_{\sigma_L}\lesssim J_\sigma$.

$G_K=(K, E)$ において，$E_{K\text{-}T}=\{(i, j)\varepsilon E : i, j\varepsilon K\text{-}T\}$，$E_T=\{(i\cdot j)\varepsilon E : i, j\varepsilon T\}$ とする。$E'_K=E_{K\text{-}T}\cup E_T$ とし $G'_K=(K, E'_K)$ を定義する。G'_K は G_K の $K\text{-}T$ と T の間の枝をすべて除去したものである。$P(K, G'_K)$ は f の SND 特性と API 特性により次のような最適スケジュール σ' を持つ。

$$\sigma'=\alpha_1\cdot\beta_1\cdot\alpha_2\cdot\beta_2\cdot\cdots\cdot\alpha_r\cdot\beta_r\cdot\alpha_{r+1}$$

(B)　α_i, β_i は各々 $P(\{\alpha_i\}, E)$, $P(\{\beta_i\}, E)$ の最適スケジュールである。

(C)　$T=\bigcup_{l=1}^{r+1}\alpha_l$, $K-T=\bigcup_{l=1}^{r}\beta_l$.

(D)　$J_{\alpha_1}\lesssim J_{\beta_1}\lesssim J_{\alpha_2}\lesssim J_{\beta_2}\lesssim\cdots\cdots\lesssim J_{\alpha_r}\lesssim J_{\beta_r}\lesssim J_{\alpha_{r+1}}$

ただし，α_1, α_{r+1} の一方あるいは両方が空であっても良い。

$\{\beta_1\}$ は明らかに $G_{K\text{-}T}$ の先頭集合であるから，G の先頭集合でもあることに注意する。

$r \geqq 2$ とする。$\{\alpha_{r+1}\} \subsetneqq T$ であってしかも $\{\alpha_{r+1}\}$ は G_K の後端集合であるから (A) により，$J_{\alpha_{r+1}} \lesssim J_\sigma$。一方，$\lesssim$ は推移性を持つから (D) により，$J_{\beta_1} \lesssim J_{\alpha_{r+1}}$. 従って，$J_{\beta_1} \lesssim J_\sigma$。これは β_1 が p-最適であることを意味するから，σ の p^*-最適性に矛盾する。故に，$r=1$ でなければならない。α_{r+1} が空であるときには，α_r を用いて上と同様の論法で $r \geqq 3$ および $r=2$，$\alpha_1 \neq \phi$ は矛盾を生ずることを証明できる。$r=2$，$\alpha_1=\phi$ のときは $\sigma'=\beta_1 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2$ となるが，これは次に述べる $r=1$ で $\alpha_1=\phi$ の場合と同様にして証明できる。

$r=1$ とする。$\sigma'=\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)$ となる。$\alpha_1 \neq \phi$，$\alpha_2 \neq \phi$ であれば，上記 $\alpha_{r+1}=\phi$，$\alpha_1 \neq \phi$ の場合と同様にして証明できる。β_2 は $r=2$，$\alpha_3=\phi$ のときを包含するために，括弧つきで連接してある。まず，$\alpha_1=\phi$ とする。α_2 は定義により $P(T, G)$ の最適スケジュールであるから，(単調あるいは同等) 一貫性により，$J_{\sigma_T}=J_{\alpha_2}$ であり，仮定により $J_\sigma \lessdot J_{\alpha_2}$ である。σ は p^*-最適であるから，$J_\sigma \lessdot J_{\beta_1}$ である。$\beta_2 \neq \phi$ のときは合成の優先度保存性により，$J_{\alpha_2} \lesssim J_{\alpha_2 \cdot \beta_2}$ である。推移性により $J_\sigma \lessdot J_{\alpha_2 \cdot (\beta_2)}$。故に合成の単調性により $J_\sigma \lessdot J_{\beta_1 \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)}$。合成仕事が同等一貫性を持つときには $\{\sigma\}=\{\beta_1 \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)\}$ であるから，これは矛盾である。単調一貫性を持つときには，＊所属同一性によって $J_{\beta_1 \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)} \varepsilon S_1^*$ であるから $f(\sigma) < f(\beta_1 \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2))$ となるが，これは $\beta_1 \cdot \alpha_2 \cdot (\beta_2)$ が $P(K, G_K)$ よりも先行関係制約の緩い $P(K, G'_K)$ の最適スケジュールであることに矛盾する。従って $J_{\alpha_2} \lesssim J_\sigma$ である。合成の一貫性により，これは $J_{\sigma_T} \lesssim J_\sigma$ を意味する。$\alpha_2=\phi$ のときは $\sigma'=\alpha_1 \cdot \beta_1$ である。仮定により $J_\sigma \lessdot J_{\alpha_1}$ であり，かつ，σ の p^*-最適性から $J_\sigma \lessdot J_{\beta_1}$ であるから，合成の単調性により $J_\sigma \lessdot J_{\alpha_1 \cdot \beta_1}$ である。以下，$\alpha_1=\phi$ の場合と同様にして，$J_{\sigma_T} \lesssim J_\sigma$ でなければならないことが示される。最後に，$J_\sigma \varepsilon S_1^*$ であるから UIR の定義により $J_{\sigma_T} \varepsilon S_1^*$ である。

〔定理7〕

$P(N, G)$ は，単調一貫性以外の，定理6で要請された性質をすべて持っており，さらに，優先度強-保存性を持つものとする。(σ, K) を $P(N, G)$ の p^*-最適対とすると，$\sigma \cdot \sigma_{N-K}$ はこの問題の最適スケジュールである。ただし σ_{N-K} は $P(N-K, G)$ の最適スケジュールとする。

証明。$E_K=\{(i, j) \varepsilon E : i, j \varepsilon K\}$，$E_{N-K}=\{(i, j) \varepsilon E : i, j \varepsilon N-K\}$ とし，$E'=E_K \cup E_{N-K}$ とする。$G'=(N, E')$ とする。$P(N, G')$ の最適スケジュールは次の形式のものとする。

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot \cdots \cdot \alpha_r \cdot \beta_r \cdot \alpha_{r+1}$$

$K=\bigcup_{i=1}^{r}\{\beta_i\}$，$N-K=\bigcup_{i=1}^{r+1}\{\alpha_i\}$ であって，α_1，α_{r+1} の一方あるいは両方が空であっても良い。SND 特性により，一般性を失うことなく，α_i，β_i は各々 $P(\{\alpha_i\}, G)$，$P(\{\beta_i\}, G)$ の最適スケジュールであると考えて良い。

$r \geqq 2$ のとき，$\{\beta_1\}$ は $P(K, G)$ の，従って，$P(N, G)$ の先頭集合である。

$$J_{\beta_1} \lessdot J_{\beta_2} \lessdot \cdots\cdots \lessdot J_{\beta_r}$$

とする。優先度の保存性により，$J_{\beta_1} \lesssim J_{\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_r}$ であるから，$J_{\beta_1} \varepsilon S_2^*$ とすると S_1^*，S_2^* の定義により，$J_{\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_r} \varepsilon S_2^*$ となる。しかし，$J_\sigma \varepsilon S_1^*$ であるから＊所属同一性により，$J_{\beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_r} \varepsilon S_1^*$ でなければならない。従って，$J_{\beta_1} \varepsilon S_1^*$ である。$J_{\beta_1} \lessdot J_\sigma$ は σ の p^*-最適性に矛盾するから，$J_\sigma \lesssim J_{\beta_1}$ とする。$\lesssim$ の推移性により $J_\sigma \lessdot J_{\beta_r}$ となるが，$\{\beta_r\}$ は $P(K, G)$ の後端集合であるから定理6により $J_{\beta_r} \lesssim J_\sigma$ であるから矛盾である。以上から，ある $i \varepsilon \{1, 2, \cdots\cdots r-1\}$ に対して $J_{\beta_i} \gtrsim J_{\beta_{i+1}}$ でなければならないことがわかる。このとき，

(i) $J_{\alpha_{i+1}} \lessdot J_{\beta_{i+1}}$ なら $J_{\alpha_{i+1}} \lessdot J_{\beta_i}$ であるから，3′により $\cdots\cdots \alpha_i \cdot \alpha_{i+1} \cdot \beta_i \cdot \beta_{i+1} \cdots\cdots$ も最適スケジュールである。

(ii) $J_{\alpha_{i+1}} \gtrdot J_{\beta_{i+1}}$ なら α_{i+1} と β_{i+1} を交換して得る $\cdots\cdots \alpha_i \cdot \beta_i \cdot \beta_{i+1} \cdot \alpha_{i+1} \cdots\cdots$ なるスケジュールも最適である。

いずれにしろ，r は確実に1だけ減少できる。

これを $r=1$ になるまで繰り返せば良い。

$r=1$ のとき，$P(N,\ G')$ の $\alpha_1\cdot\beta_1\cdot\alpha_2$ なる最適スケジュールを考える。SND 特性により $\alpha_1\cdot\sigma\cdot\alpha_2$ も最適である。$J_{\alpha_1}\lessdot J_\sigma$ とする。すると優先度強-保存性により $J_{\alpha_1\cdot\sigma}\lessdot J_\sigma$, $J_\sigma\varepsilon S_1^*$ だから $J_{\alpha_1\cdot\sigma}\varepsilon S_1^*$ である。$K\cup\{\alpha_1\}$ は $P(N,\ G)$ の先頭集合であって，＊所属同一性により，$J_\gamma\varepsilon S_1^*$ (γ は $P(K\cup\{\alpha_1\},G)$ の最適スケジュールとする)である。さらに同等一貫性により $J_{\alpha_1\cdot\sigma}=J_\gamma$ である。従って，$J_\gamma\lessdot J_\sigma$ となる。これは σ が p-最適であることに矛盾する。そこで，$J_\sigma\lesssim J_{\alpha_1}$ とする。これは，$\sigma\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2$ も最適スケジュールであることを意味する。これは $P(N,\ G)$ の実行可能スケジュールでもあるから，$P(N,\ G)$ の最適スケジュールでもある。SND 特性により，$\sigma\cdot\sigma_{N-K}$ も $P(N,\ G)$ の最適スケジュールである。

合成仕事が単調一貫性を持つ問題に対して定理7と同じ性質を証明することが可能である。しかし，この場合には，定理7のように直接的な証明を行うのは難しい。そこで，少し証明のための準備を行う。

$P(N,\ G)$ に対し次の S-アルゴリズムによって定められる（部分）スケジュールを，**先頭順列** (start sequence) と呼ぶ。

S-アルゴリズム

(1) $s\leftarrow\phi$, $J\leftarrow N$.

(2) $P(J,G)$ のすべての先頭集合 K に対し，$J_\sigma\varepsilon S_2^*$ ならストップ ($\sigma\varepsilon\mathscr{P}(J,\ G)$)。$J_\sigma\varepsilon S_1^*$ なる K が存在するなら(3)へ。

(3) $P(J,\ G)$ の p-最適対 $(\sigma,\ K)$ を求める。

(4) $J_s\lesssim J_\sigma$ ならストップ ($\forall i\varepsilon S$ に対し，$i\lessdot J_\phi$ と仮定する)。さもなければ(5)へ。

(5) $s\leftarrow s\cdot\sigma$, $J\leftarrow J-K$.

(6) $J=\phi$ ならストップ，さもなければ(2)へ。

〔定理8〕

$P(N,\ G)$ は同等一貫性を除く，定理6で要請された性質をすべて持つものとする。$\sigma=\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\cdots\cdots\cdot\sigma_k$ を $P(N,\ G)$ の先頭順列とし，$\{\sigma\}=K$ とする。ただし，σ_i は S-アルゴリズムの(3)で i 番目に求められた p-最適な部分スケジュールである。この時，

(i) $j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k$ に対し，

$J_{\sigma_1}\lesssim J_{\sigma_1\cdot\sigma_2\cdots\sigma_j}$, $J_{\sigma_1\cdot\sigma_2\cdots\sigma_j}\lesssim J_{\sigma_1}$, $J_{\sigma_1\cdot\sigma_2\cdots\sigma_j}\varepsilon S_1^*$

(ii) σ は $P(N,\ G)$ の p-最適スケジュールである。

(iii) σ_{N-K} を $P(N-K,\ G)$ の p-最適スケジュールとすると，$J_\sigma\lesssim J_{\sigma_{N-K}}$

(iv) W を $P(K,\ G)$ の後端集合，σ_W を $P(W,\ G)$ の最適スケジュールとすると

$J_{\sigma_W}\lessdot J_\sigma$, $J_{\sigma_W}\varepsilon S_1^*$.

証明。(i) $j=1$ なら定理は成立する。定理が $j-1$ まで成立するものとする。S-アルゴリズムの (4) により $J_{\sigma_j}\lessdot J_{\sigma_1\cdot\sigma_2\cdots\sigma_{j-1}}\lesssim J_{\sigma_1}$ であるから優先度の保存性により $J_{\sigma_1\cdot\sigma_2\cdots\sigma_j}\lesssim J_{\sigma_1\cdot\sigma_2\cdots\sigma_{j-1}}\lesssim J_{\sigma_1}$。従って推移性により $J_{\sigma_1\cdot\sigma_2\cdots\sigma_j}\lesssim J_{\sigma_1}$。一方，$\sigma_1$ は p-最適であり $\{\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\cdots\cdot\sigma_j\}$ は先頭集合であるから，$P(\{\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\cdots\cdot\sigma_j\},\ G)$ の最適スケジュールを γ とすると $J_{\sigma_1}\lesssim J_\gamma$。$f(\gamma)\leqq f(\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\cdots\cdot\sigma_j)$ であるから単調一貫性により $J_\gamma\lesssim J_{\sigma_1\cdot\sigma_2\cdots\sigma_j}$ である。従って，$J_{\sigma_1}\lesssim J_{\sigma_1\cdot\sigma_1\cdot\cdots\cdot\sigma_j}$。ところで，$J_{\sigma_1\cdot\sigma_2\cdots\sigma_j}\varepsilon S_2^*$ とすると S_1^*, S_2^* の定義から，$J_{\sigma_1}\lessdot J_{\sigma_1\cdot\sigma_2\cdots\sigma_j}$ でなければならないから，$J_{\sigma_1\cdot\sigma_2\cdots\sigma_j}\varepsilon S_1^*$ である。

(ii) (i)により，$J_\sigma\varepsilon S_1^*$ である。σ_1 が $P(N,\ G)$ の，p-最適スケジュールであって，$J_\sigma\lesssim J_{\sigma_1}$ であるから，σ が $P(K,\ G)$ の最適スケジュールであることを示せば良い。σ が $P(K,G)$ の最適スケジュールではなく，γ が最適であるとしよう。$f(\gamma)<f(\sigma)$ であるが，これは単調一貫性により $J_\gamma\lessdot J_\sigma$ と同値であり，$J_\sigma\varepsilon S_1^*$ であるから，$J_\gamma\varepsilon S_1^*$ である。$J_\gamma\lessdot J_{\sigma_1}$ となるから，σ_1 が p-最適であることに矛盾する。従って σ は $P(K,\ G)$ の最適スケジュールである。

(iii) S-アルゴリズムの (4) から自明である。

(iv) $W_j=W\cap\{\sigma_j\}$ とし，$P(W_j,G)$ の最適ス

ケジュールを w_j と記す。W は $P(K, G)$ の後端集合であるから，W_j は $P(\{\sigma_j\}, G)$ の後端集合である。一方，$(\sigma_j, \{\sigma_j\})$ は $P(\{\sigma_j\}), G)$ の p^*-最適対である。なぜなら，この対は定義により $P(N-\{\sigma_1\cdot\cdots\cdot\sigma_{j-1}\}, G)$ の p^*-最適対であるが，この問題の p-最適対の中には $P(\{\sigma_j\}, G)$ の p-最適対がすべて含まれている。従って，

$$J_{w_j} \lesssim J_{\sigma_j} \lessdot J_{\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\cdots\cdot\sigma_{j-1}} \lesssim J_{\sigma_1}.$$

第一の優先関係は定理6，第2の優先関係は S-アルゴリズムの (4)，第3の優先関係は (i) による。従って，$J_{w_j} \lessdot J_{\sigma_1}$ である。

$J_{w_1\cdot w_2\cdot\cdots\cdot w_{j-1}}$ と $J_{w_j}(j=2, 3, \cdots, k)$ に対し優先度の保存性と合成仕事の一致性をくり返し適用することによって $J_{w_1\cdot\cdots\cdot w_k} \lesssim J_{w^*}$ (J_{w^*} は J_{w_j} の中で最も優先度の低いもの) となるが，$J_{w^*} \lessdot J_{\sigma_1}$ であるから $J_{w_1\cdot\cdots\cdot w_k} \lessdot J_{\sigma_1}$ である。$J_{\sigma_1} \varepsilon S_1^*$ であるから，S_1^*, S_2^* の定義から $J_{w_1\cdot\cdots\cdot w_k} \varepsilon S_1^*$ を得る。従って，＊所属同一性により $J_{\sigma_W} \varepsilon S_1^*$ 。σ_W は $P(W, G)$ の最適スケジュールであるから，単調一貫性により $J_{\sigma_W} \lesssim J_{w_1\cdot\cdots\cdot w_k}$。さらに，(i) により $J_{\sigma_1} \lesssim J_\sigma$ であるから全体を総合すると，$J_{\sigma_W} \lessdot J_\sigma$ となる。

次の定理は定理7とほとんど同じ形をしているが，p^*-最適対ではなく先頭順列に関するものであることに注意する必要がある。

〔定理9〕

$P(N, G)$ は定理8と同じ性質を持つものとする。σ を $P(N, G)$ の先頭順列とし $\{\sigma\}=K$ とおく。$\sigma_{N\text{-}K}$ を $P(N-K, G)$ の最適スケジュールとすると $\sigma\cdot\sigma_{N\text{-}K}$ は $P(N, G)$ の最適スケジュールである。

証明。定理7の証明におけるのと同様に E', G' を定義し，$P(N, G')$ の任意の最適スケジュールを $\alpha_1\cdot\beta_1\cdot\alpha_2\cdot\beta_2\cdot\cdots\cdot\alpha_r\cdot\beta_r\cdot\alpha_{r+1}$ とし，やはり定理7と同じ性質を持つものとする。(定理7とは K が p^*-最適なスケジュールの要素集合ではなく，先頭順列の要素集合であるところだけが異なる。)

$r \geqq 2$ のとき．$\{\beta_1\}$ は $P(K, G)$ の，従って $P(N, G)$ の先頭集合であることを指摘しておく。

$$J_{\beta_1} \lessdot J_{\beta_2} \lessdot \cdots\cdots \lessdot J_{\beta_r}$$

とする。優先度の保存性により $J_{\beta_1} \lesssim J_{\beta_1\cdot\beta_2\cdot\cdots\cdot\beta_r}$ であるから，$J_{\beta_1} \varepsilon S_2^*$ とすると S_1^*, S_2^* の定義により $J_{\beta_1\cdot\beta_2\cdot\cdots\cdot\beta_r} \varepsilon S_2^*$ となる。しかし，定理8 (i) により $J_\sigma \varepsilon S_1^*$ であるから＊所属同一性により，$J_{\beta_1\cdot\beta_2\cdot\cdots\cdot\beta_r} \varepsilon S_1^*$ でなければならない。従って，$J_{\beta_1} \varepsilon S_1^*$ である。$J_{\beta_1} \lessdot J_\sigma$ は σ の p-最適性 (定理8 (ii)) に矛盾するから $J_\sigma \lesssim J_{\beta_1}$ とする。推移性により $J_\sigma \lessdot J_{\beta_r}$ となるが，$\{\beta_r\}$ は $P(K, G)$ の後端集合であるから定理8 (iv) により $J_{\beta_1} \lesssim J_\sigma$ でなければならない。これは矛盾であるから，ある $i \varepsilon \{1, 2, \cdots, r-1\}$ に対して $J_{\beta_i} \gtrsim J_{\beta_{i+1}}$ でなければならない。このとき，

(i) $J_{\alpha_{i+1}} \lesssim J_{\beta_{i+1}}$ であれば，$J_{\alpha_{i+1}} \lesssim J_{\beta_i}$ でもあるから，3′により $\cdots\alpha_i\cdot\alpha_{i+1}\cdot\beta_i\cdot\beta_{i+1}\cdots$ も最適スケジュールである。

(ii) $J_{\alpha_{i+1}} \gtrdot J_{\beta_{i+1}}$ であれば，α_{i+1} と β_{i+1} を交換して得る $\cdots\alpha_i\cdot\beta_i\cdot\beta_{i+1}\cdot\alpha_{i+1}\cdots$ なるスケジュールも最適である。

いずれにしろ，r を確実に1だけ減少できる。これを $r=1$ になるまで繰り返せば良い。

$r=1$ のとき，$P(N, G)$ の $\alpha_1\cdot\beta_1\cdot\alpha_2$ なる最適スケジュールを考える。β_1 は $P(K, G)$ の最適スケジュールであるから単調一貫性により $J_{\beta_1}=J_\sigma$ である。α_1 は $P(N-K, G)$ の先頭集合の最適スケジュールであるから定理8 (iii) により $J_\sigma \lesssim J_{\alpha_1}$ である ($J_{\alpha_1} \varepsilon S_2^*$ であれば S_1^*, S_2^* の定義により $J_\sigma \lessdot J_{\alpha_1}$ である)。従って，$\sigma\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2$ も $P(N, G')$ の最適スケジュールである。SND 特性により $\sigma\cdot\sigma_{N\text{-}K}$ は $P(N, G')$ の最適スケジュールであるが，これは $P(N, G)$ の実行可能スケジュールであるから，この問題に対しても最適である。

定理9における σ の先頭には最初に見つけ

られた $P(N, G)$ の p^*-最適な部分スケジュールがあることから，次の系が導かれる。

この系が，同等一貫性を仮定した場合の定理7に相当する。定理7の場合とは，単調一貫性の故に，優先度強-保存性を必要としないところが異っている。

〔系〕

$P(N, G)$ は定理8と同じ性質を持つとする。(σ, K) を $P(N, G)$ の p^*-最適対とし，σ_{N-K} を $P(N-K, G)$ の最適スケジュールとすると，$\sigma\cdot\sigma_{N-K}$ は $P(N, G)$ の最適スケジュールである。

6. 分割アルゴリズム

前節の定理7と定理9の系は，次々に p^*-最適対 (σ, K) を求め，それを連接することによって $P(N, G)$ の最適スケジュールの前半部分が求められることを示している。これを整理したのが次の定理10である。

〔定理10〕

$P(N, G)$ は S が分割可能で，f は SND 特性，API 特性を持ち，一致性，単調あるいは同等一貫性，所属同一性を持つ合成仕事を定義できるとする。合成仕事が同等一貫性を持つときにはさらに優先度強-保存性も持つものとする。このとき，次の $PN1$ アルゴリズムで求められるスケジュール σ を，前半の連続した部分スケジュールとして持つ最適スケジュールを $P(N, G)$ は持つ。

PN1 アルゴリズム

(1) $\sigma\leftarrow\phi$, $J\leftarrow N$.

(2) $P(J, G)$ に p-最適な先頭集合がなければ (4) へ，あれば (3) へ.

(3) 1. (σ_K, K) なる $P(J, G)$ の p^*-最適対を求めよ.

2. $\sigma\leftarrow\sigma\cdot\sigma_K$, $J\leftarrow J-K$.

3. $J=\phi$ ならストップ，$J\neq\phi$ なら (2) へ.

(4) 休止.

定理10の証明は定理7あるいは定理9の系を繰り返し利用するだけであるから省略する。$PN1$ アルゴリズムが (3) でストップしたときには $J=\phi$ であるから，その時点の σ が $P(N, G)$ の最適スケジュールである。

$PN1$ アルゴリズムが (4) で休止するときは $J\neq\phi$ であり，この時点における $P(J, G)$ の先頭集合はどれも，その最適スケジュールに対する合成仕事が S_2^* に属していることになる。そこで，$P(J, G)$ の最適スケジュールを $PN1$ アルゴリズムで求められるようにするために，その逆順序問題 (reverse problem, McMahon-Burton(1967)，あるいは dual problem, Sidney (1981)) を定義する。

$\bar{G}$ を G の枝の向きをすべて逆転したネットワークとする。すなわち，

$\bar{G}=(N, \bar{E})$; $\bar{E}=\{(j, i) : (i, j)\varepsilon E\}$.

$\bar{\sigma}$ で σ とは逆順序のスケジュールを表わすことにし，$\bar{f}(\bar{\sigma})=f(\sigma)$ なる関係によって，逆順序づけ関数 $\bar{f}$ を定義する。このとき，$P(J, G)$ の**逆順序問題** $\bar{P}(J, \bar{G})$ を次のように定義する。

$$\bar{P}(J, \bar{G}) : \underset{\bar{\sigma}\varepsilon\mathscr{P}(J, \bar{G})}{\text{minimize}} \ \bar{f}(\bar{\sigma})$$

逆順序問題における合成仕事を次式で定義する。

$$J_{\bar{\sigma}}=J_\sigma, \ \Delta_{\bar{\sigma}}=\Delta_\sigma.$$

$\bar{P}(J, \bar{G})$ の各実行可能スケジュールに対応するスケジュールが $P(J, G)$ の実行可能スケジュールの中にあり，それらは互に送順序の順列であること，逆順序づけ関数や合成仕事が，もとの問題の逆順序のスケジュールに対応するものとして定義されていることに注目すれば，以下に述べるような性質を逆順序問題が持っていることを証明するには，形式的にもとの問題に話を移して，その確立された性質を利用すれば良いことは容易に理解できるであろう。

・$\bar{P}(J, \bar{G})$ で $i\lessgtr j \leftrightarrow P(J, G)$ で $j\lessgtr i$

・$J_{\bar{\sigma}}$ は合成仕事の条件を満たす.

・$P(J,\ G)$ で S が分割可能なら，$\bar{P}(J,\ \bar{G})$ でも分割可能であり，$\bar{S}_1=S_2$，$\bar{S}_2=S_1$ とすれば良い。

・$P(J,\ G)$ の f が SND 特性を持てば $\bar{f}$ も SND 特性を持つ.

・$P(J,\ G)$ で f が API 特性を持てば，$\bar{f}$ も API 特性を持つ。UIR は $\bar{C}_1=C_2$，$\bar{C}_2=C_1$ (つまり，$\bar{S}_1{}^*=S_2{}^*$，$\bar{S}_2{}^*=S_1{}^*$) とすれば良い。

・$P(J,\ G)$ の合成仕事が一致性，同等あるいは単調一貫性，所属同一性，優先度強-保存性を持てば，$\bar{P}(J,\ \bar{G})$ の合成仕事も対応する性質を持つ。

・$\bar{P}(J,\ \bar{G})$ においても，適当な条件の下で，優先度保存性，合成の単調性，＊所属同一性を導くことができる。

以上のことから，$\bar{P}(J,\ \bar{G})$ に対しても前節までに確立した諸定理，特に定理7，定理9の系，および定理10を適用できることがわかる。

〔定理11〕

$P(N,\ G)$ は定理10で要請された諸性質を持つとする。次の PN アルゴリズムで求められる。スケジュール $\sigma_1\cdot\sigma_2$ (あるいは (3) でストップするときには σ_1) は $P(N,\ G)$ の最適スケジュールである。

PN アルゴリズム

(1) $\sigma_1\leftarrow\emptyset$，$J\leftarrow N$.

(2) $P(J,\ G)$ ($\bar{P}(J,\ \bar{G})$) に p-最適な先頭集合がある限り，1，2の実行を繰り返す

　1. $P(J,\ G)$ ($\bar{P}(J,\ \bar{G})$) の p^*-最適対 $(\sigma,\ K)$ を求めよ.

　2. $\sigma_1(\bar{\sigma}_2)\leftarrow\sigma_1(\bar{\sigma}_2)\cdot\sigma$，$J\leftarrow J-K$.

(3) $J=\phi$ ならストップ。$J\neq\phi$ なら (4) へ.

(4) $\bar{P}(J,\ \bar{G})$ を作れ，$\bar{\sigma}_2\leftarrow\phi$.

(5) $\bar{P}(J,\ \bar{G})$ に p-最適な先頭集合がある限り (2) の1，2の実行を繰り返す。

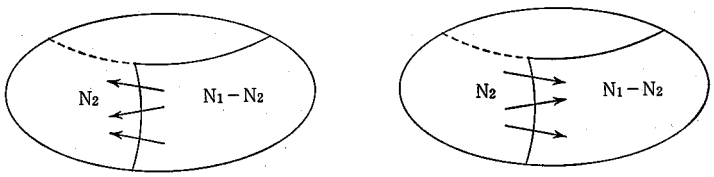
(6) $\sigma_1\cdot\sigma_2$ を作りストップ。

証明。PN アルゴリズムの (6) の時点で $J=\phi$ となっていれば，定理10により，$\bar{\sigma}_2$ は (4) の時点の $\bar{P}(J,\ \bar{G})$ の，従って，σ_2 は (3) の時点の $P(J,\ G)$ の最適スケジュールである。従って，SND 特性により $\sigma_1\cdot\sigma_2$ は $P(N,\ G)$ の最適スケジュールである。以下では (6) の時点では必らず $J=\phi$ であることを示す。

(4) の時点における J を N_1，(6) の時点における J を N_2 と書く。N_2 は $\bar{P}(N_1,\ \bar{G})$ の後端集合であるから，N_1-N_2 の任意の仕事に後続するか，平行であるかのいずれかである。これは $P(N_1,\ G)$ では N_2 が N_1-N_2の任意の仕事に先行するか，平行であるかのいずれかであること，つまり，N_2 が $P(N_1,\ G)$ の先頭集合であることを意味する。従って，PN アルゴリズムの(2)の条件により，$J_\gamma\varepsilon S_2{}^*$ (γ は $P(N_2,\ G)$ の最適スケジュール) である。$\bar{P}(N_1,\ \bar{G})$ と $P(N_1,\ G)$ の対応関係から，このことは $J_\gamma\varepsilon\bar{S}_1{}^*$ を意味する。これは PN アルゴリズムの (5) を終了するための条件に矛盾する。従って，$N_2=\phi$ である。

例.

II　総所要時間最小化フロー・ショップ問題



(N_1, $\bar{E}$)　　(N_1, E)

図 2　N_2 の $P(N_1, G)$ における位置

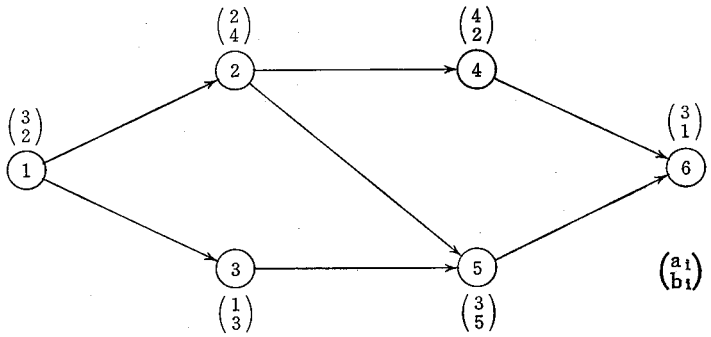


図 3　例　　題

図3の例題を PN アルゴリズムを利用して解く。

最初に (2) 1. へ進んだ時，p^*-最適となり得る先頭集合は $K_1=\{1, 2\}$, $K_2=\{1, 3\}$, $K_3=\{1, 2, 3\}$, $K_4=\{1, 2, 3, 5\}$ の4つである。この各々に対応する合成仕事は，$J_{1\cdot2}=(3, 4)$, $J_{1\cdot3}=(3, 4)$, $J_{1\cdot3\cdot2}=(3, 6)$ $J_{1\cdot3\cdot2\cdot5}=(3, 8)$ となる。従って，最初の p^*-最適対は $(1\cdot2, \{2, 1\})$ か $(1\cdot3, \{1, 3\})$ である。前者をとれば2番目の p^*-最適対は $(3, \{3\})$ であり，後者をとれば2番目は $(2, \{2\})$ である。いずれにしろ3番目は $(5, \{5\})$ となり，(3) へ進む。この段階で $\sigma_1=1\cdot2\cdot3\cdot5$, あるいは $\sigma_1=1\cdot3\cdot2\cdot5$ である。(4) で作る $\bar{G}$ は⑥→④であり，(5) では，最初に $(6, \{6\})$, 2番目に $(4, \{4\})$ なる p^*-最適対が求まる。従って，$\bar{\sigma}_2=6\cdot4$ であり (6) では $\sigma_1\cdot\sigma_2=1\cdot2\cdot3\cdot5\cdot4\cdot6$ あるいは $\sigma_1\cdot\sigma_2=1\cdot3\cdot2\cdot5\cdot4\cdot6$ となる。

7. まとめ

本稿では一般的な先行関係制約を課された順序づけ問題に対して，合成仕事と単一解釈制限 (UIR) の概念を導入することによって Sidney の理論を一般化した。彼の理論では包含できなかった完了時刻の加重和最小化問題をも含むようにするには，合成仕事が単調一貫性を持つかわりに，同等一貫性と優先度強-保存性を持つものとすれば良いことを示した。

理論の適用例としてはこの他に，総所要時間最小化フロー・ショップ問題だけを取り上げたが，Monma - Sidney(1979) や Sekiguchi(1984) に引用されている多数の問題に対して，適用可能である。また，本稿の接近法を利用すれば，直・平行先行関係制約の下での順序づけ問題の統一的解法である直・平行アルゴリズムの理論 (Monma - Sidney(1979) を単純化することが可能であるが，これらの話題は別報で扱うこととした。

分割アルゴリズムは，p^*-最適対を求める効率的な手順を与えていないという意味で未完成であることを指摘しておく。完了時刻の加重和最小化問題に関するこの話題は，Lawler(1978) で論じられている。

参考文献

〔1〕Johnson, S. M. (1954), "Optimal Two-and Three-Stage Production Schedules with Setup Times Included," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 1, No. 1, 61–68,

〔2〕Kurisu, T. (1976), "Two-Machine Scheduling under Required Precedence among Jobs," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 19, No. 1, 1–13.

〔3〕Lawler, E. L. (1978), "Sequencing Jobs to Minimize Total Weighted Completion Time Subject to Precedence Constrains," *Annals of Discrete Mathematics*, Vol. 2, 75–90.

〔4〕Maggu, P. L., Das, G. and Kumar, R. (1981),

"On Equivalent Job for Job-Block in 2×n Sequencing Problem with Transportation Times," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 24, 136–146.

〔5〕 McMahon, G. B. and Burton, P. G. (1967), "Flow Shop Scheduling with the Branch and Bound Method," *Operations Research*, Vol. 15, No. 3, 473–481.

〔6〕 Monma, C. L. and Sidney, J. B. (1979), "Sequencing with Series-Parallel Precedence Constraints," *Mathematics of Operations Research*, Vol. 4, No. 3, 215–224.

〔7〕 Sekiguchi, Y. (1981), "Inter- and Intra-Group-of-Jobs Schedule for Minimizing Makespan in a Two-Machine GT Shop," *Preprints of IEAC 8th Triennial World Congress, Kyoto, Japan*. XIV–164–XIV–169.

〔8〕 Sekiguchi, Y. (1983), "Optimal Schedule in a GT-Type Flow-Shop under Series-Parallel Precedence Constraints," *Journal of the Operations Research Society of Japan*. Vol. 26, No. 3, 226–252.

〔9〕 Sekiguchi, Y. (1984), "Optimal Schedules under Series-Parallel Precedence Constraints," *Hokudai Economic Papers*, Vol. XIII

〔10〕 Sidney, J. B. (1975), "Decomposition Algorithms for Single-Machine Sequencing with Precedence Relations and Deferral Costs," *Operations Research*. Vol. 23, No. 2, 283–298.

〔11〕 Sidney, J. B. (1979), "The Two-Machine Maximum Flow Time Problem with Series-Parallel Precedence Relations," *Operations Research*, Vol. 27, No. 4, 782–791.

〔12〕 Sidney, J. B. (1981), "A Decomposition Algorithm for Sequencing with General Precedence Constraints," *Mathematics of Operations Research*. Vol. 6, No. 2, 190–204.

〔13〕 Smith, W. E. (1956), "Various Optimizers for Single-Stage Production," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 3. No. 1,