経済学研究 35-1
北海道大学 1985. 6

価格不確実性下における競争企業の最適な投資および稼動率の決定

板谷淳一

1. はじめに

本稿では，不確実性下の企業の最適投資決定理論が考察される。最適投資決定理論については，今までに多くの研究者により，様々なモデルが作られ，精緻化，一般化が行なわれてきているが，不確実性下での投資行動に関する研究は比較的少ない。ルーカス〔6〕，ハルトマン〔2〕〔3〕，春名〔4〕，ピンダイク〔7〕らの研究が散見される程度である。

なかでも，春名〔4〕とハルトマン〔2〕〔3〕は，不確実性下のもとで多期間の計画期間をもつ動学企業モデルの中で，最適投資決定理論を展開している。さらに，彼らは企業の意志決定ルールにおける事前的調整変数と事後的調整変数を区別して分析している。すなわち，各期の期首において資本はすでに固定的生産要素であり，その調整は多期間にわたる投資行動を通じて行なわれる（事前的調整）。他方，労働投入は資本に比べて伸縮的であるため[1]，各期の確率変数が実現した後に，それをみて毎期，調整される（事後的調整）[2]。このように，彼らの分析は2つの生産要素の間に存在する伸縮性の差を明確に考慮して，企業の投資決定ルールが不確実性によってどのような影響を受けるかを明らかにしている。

しかしながら，彼らの分析はもう一つ重要な決定変数を見のがしているように思われる。それは，資本の稼動率である。実際，景気の後退局面などにおいて，資本の稼動率が生産調整において重要な役割を果たすことは，よく観察されることである。また，不確実性に直面している企業にとって，すでに企業が保有している資本ストックの完全操業を常に要求する通常の新古典派生産関数の仮定は，あまりに強すぎると言わざるを得ない。さらに投資が不可逆的である[3]という事実を考慮すると資本の稼動率の調整が可能か否かが，不確実性下の企業の投資決定に対して，重大な影響をもつことが容易に想像される。

本稿では，以上の理由により労働投入に加えて，資本の稼動率を事後的調整変数として明示的にモデルに導入する。われわれは，このように拡張された動学的企業モデルを用いて，不確実性下の投資行動の分析を進める。

われわれの分析は，危険中立的競争企業[4]に焦点を合わせる。春名〔4〕は，資本と労働市場に不確実性がなく，生産物市場のみに不確実性が存在する時[5]，危険中立的企業の投資決定ル

1）労働は費用や時間も伴わずに瞬時に調整可能だが，資本の瞬時的調整には無限大の費用がかかる。

2）本稿では確率変数が実現される前を事前と呼び，実現後を事後と呼ぶ。

3）負の投資を考えない。

4）危険中立企業とは利潤に対して線型の効用関数を有する企業のことである。

5）生産技術に対する不確実性も，もちろん除外する。

ールは不確実性からの影響を全く受けないで，危険回避的企業[6]のみが影響を受けると，結論している。さらに詳しく言えば，危険中立的企業では，最適資本ストックの水準，最適資本一労働比率，資本ストックの投資への効果等のすべてが不確実性の影響を被むることなく，確実性下の企業行動のそれと同一になり，他方，危険回避的企業の場合には，上述の関係がすべて確実性下の企業のそれから乖離することを導いた。

われわれがこれから展開するモデルでは，資本の稼動率が事後的調整変数として陽表的に考慮されることにより，上述の危険中立的企業に関する彼の結論が大きく修正されることが示される。すなわち，われわれの危険中立的企業の意志決定ルールはもはや生産物市場の不確実性から独立ではなくなり，稼動率関数の性質に依存することが示される。言い換えると，不確実性の投資決定の影響の仕方は，稼動率関数の形をきめる生産関数およびその技術上の諸パタメーター値によってきまることが論証される。

第2節では以下の分析で用いられる基本モデルが提示される。第3節では事後的決定ルールの導出とその特性が考察される。第4節では最適投資のため必要一十分条件が導出される。第5節では需要の不確実性が危険中立的企業の最適資本ストックの水準，最適資本一労働比率，および資本ストックの投資への効果が，比較検討される。第6節では本文で展開された議論の要約と，残された問題に対する簡単なコメントが与えられる。

2. モデル

われわれが対象とする企業は，T期間にわたる有限な計画期間内で生産一投資活動を行なう。各期 t において企業は2つの生産要素，すなわち，労働用役 N^t と資本用役 S^t を用いて産出物 Y^t を生産する。これらの変数の関係は次のような新古典派生産関数によって表わされる。

$$Y^t=F(S^t,\ N^t) \qquad \cdots\cdots(1)$$

ただし，t は期間 t を示す添字。

生産関数は，通常なされるように連続で2階微分可能な（厳密に）凹関数であり，各要素に関して正の限界生産力および「限界生産力逓減の法則」に従うものと仮定する。すなわち，

$$F_1=\frac{\partial Y}{\partial S}>0,\quad F_2=\frac{\partial Y}{\partial N}>0,$$

$$F_{11}=\frac{\partial^2 Y}{\partial S^2}<0,\quad F_{22}=\frac{\partial^2 Y}{\partial N^2}<0,$$

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}>0 \qquad \cdots\cdots(2)$$

さらに

$$F_{12}=F_{21}=\frac{\partial^2 Y}{\partial S\partial N}>0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

とする。最後の仮定は強すぎるように思われるかもしれないが，資本用役と労働用役が相互に補完的な投入要素という意味であり，実際の企業にしばしば観察される技術的関係である。

本稿では，通常の新古典派生産理論における資本用役に関する扱い方とは異なり，資本用役は資本ストック K と資本の稼動率 U の関数と考える。したがって，$S=S(U,K)$ と書くことができる。さらに，簡単化のために，資本用役関数は資本ストックと稼動率の積の形をとるものと仮定する。

$$S^t=U^tK^t \qquad \cdots\cdots(4)$$

ただし，$0\leqq U^t\leqq 1$

(4)式を(1)式に代入すると，

$$Y^t=F(U^tK^t,\ N^t) \qquad \cdots\cdots(5)$$

が得られる。

スミス〔8〕〔9〕らと同じように，資本の使用時の減耗率を資本ストックの稼動率の関数として考えることができる。いま，δ が資本減耗率を表わすものとすれば，次のように書ける。

$$\delta^t=\delta(U^t) \qquad \cdots\cdots(6)$$

ただし，$\delta'>0$，$\delta''>0$，$\delta(0)=\mathrm{const}>0$。この仮定は，資本の減耗率（あるいは資本1単位あたりのユーザー・コスト）が資本の稼動率の増

6）利潤に対して凹な効用関数を有する企業。

加とともに逓増することを意味する[7]。

資本の稼動率と減耗率の上述の関係を前提にすれば，粗投資 I^t と次期の資本ストック K^{t+1} の関係を次式のように表わすことができる。

$$K^{t+1}=(1-\delta(U^t))\ K^t+I^t \qquad \cdots\cdots(7)$$

ただし，$I^t \geqq 0$, $0<\delta<1$

$t=0, 1, \cdots T$

(7)式において，δ が定数ではなく U^t の関数になっているところが，われわれのモデルと他の投資行動モデルとを区別する重要な点になる。T 期末（計画期間の終了後）の残存資本ストックを，

$$K^{T+1} \geqq \underline{K} \qquad \cdots\cdots(8)$$

とする。この仮定は，残存資本ストックの水準が任意の非負の値をとりえるが，負の値が排除されることを意味する。また，ここではモデルの簡単化のために投資の調整費用を無視する。

われわれは競争企業を考察の対象とする。そのため，この企業は生産物市場，労働市場，および資本市場（投資財）[8] の各市場においてそれぞれの価格変数を所与のパラメーターと見なす。不確実性は生産物市場のみに導入され，生産物価格 P^t は各期の期首まで不確実な確率変数とされる。また，モデルの操作可能性を維持するために，各期の確率変数 P^t を確率過程として定式化するような複雑化を避け最も単純なケース，すなわち各期の P^t は独立かつ同一の確率密度関数をもっていると仮定する。言うまでもなく，企業はこの需要価格の密度関数を事前に知ってるものと仮定する。他方，各期の資本財の価格 J^t および賃金率 W^t は確率変数でないので，企業は計画期間全体にわたりその確定値の系列を事前に知っているものとする。

生産物価格が不確実であるという仮定のもとで，当該企業の投資および生産の決定プロセスは次のような2段階に分けられる。各期の資本ストックの水準および投資量に関する決定は，各期の需要価格が確実になる前すなわち事前的に決定される。その際，企業は長期の期待利潤を最大化するように最適な資本投入もしくは投資量を選択する。他方，労働投入と資本の稼動率は，各期の期首の資本ストックが所与であり，かつ需要価格が確実になった後に，短期の利潤を最大化するように決められる。このように企業の生産決定が2段階に分けられるのは，前述したように資本投入，労働投入および資本の稼動率を変化させる時の伸縮性の差によるものである。資本は他の調整変数に比べて最も固定的である一方，労働投入および資本の稼動率はより伸縮性は大きく，事後的に瞬時的な調整が可能であるからである。

3. 事後的決定

期首の資本ストックの水準 K^t と確率変数 P^t が確実になった後に，企業は労働投入 N^t と資本の稼動率 U^t を決定する。2つの操作変数はその期間内の短期利潤を最大にするように決められる。この時，需要価格 P^t はもはや確率変数でないので，短期の最適化問題は次のように定式化される。

$$\underset{\{U^t,\ N^t\}}{Max}\ \pi^t \equiv \underset{\{U^t,\ N^t\}}{Max}[P^tF(U^tK^t\ \ N^t) - W^tN^t - J^tI^t] \qquad \cdots\cdots(9)$$

$$\text{sub. to}\quad K^{t+1}=(1-\delta(U^t))\ K^t+I^t$$

$$0 \leqq U^t \leqq 1$$

ただし，K^t, K^{t+1}, J^t, W^t, および P^t を所与として

$t=0, 1, \cdots, T$

複雑化を避けるために，内点解の存在を仮定す

7) 資本の減耗率を稼動率の凸な増加関数として定式化できる理由は，次のように説明できる。資本設備の稼動率が非常に高い時，設備の維持費などの運転資金の急速な増大を招く。さらに，資本設備の酷使により耐用期間が短くなるなどの諸要因による。

8) 投資財市場すなわち新資本財市場のみを考え，中古資本財市場の存在を考えない。新資本財と中古資本財の間には物理的な差がないので，中古資本財を評価する時には新資本財の価格を用いる。

る[9]。その結果，最適化のための1階条件は次のように与えられる。

$$P^tF_1=\delta'(U^t)J^t \qquad \cdots\cdots(10)$$

$$P^tF_2=W^t \qquad \cdots\cdots(11)$$

$$t=0,\ 1,\ \cdots,\ T$$

目的関数 π^t は仮定により厳密な意味で擬凹な関数であり，かつ制約条件は凸であるので，2階の条件が満たされることになる。

(11)式を(10)式で割ると，

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{\delta'(U^t)J^t}{W^t} \qquad \cdots\cdots(12)$$

となる。(12)式は資本ストックが前もって決まっているもとでの企業の拡張径路を与える。さらに，この式は労働と資本の稼動率間の技術的限界代替率が両要素の限界使用者費用の比に等しくなることを意味する。

条件式(10)と(11)を U^t と N^t について解けば[10]次のような関数が得られる。

$$U^t=U(\underset{(-)}{K^t},\ \underset{(+)}{P^t},\ \underset{(-)}{W^t},\ \underset{(-)}{J^t}) \qquad \cdots\cdots(13)$$

$$N^t=N(\underset{(+)}{K^t},\ \underset{(+)}{P^t},\ \underset{(-)}{W^t},\ \underset{(-)}{J^t}) \qquad \cdots\cdots(14)$$

$$t=0,\ 1,\ \cdots,\ T$$

ただし，カッコ内の符号は各外生変数に関する偏微係数の符号を示す。

これら偏微係数の符号を求めるための詳しい計算過程については，本文末の数学付録の中で与えられている。

4.　事前的決定

本節において，長期の投資行動に関する最適化条件を考察する。各期の労働投入と資本の稼動率がすでに最適な水準に選ばれていることを前提にすると，企業の長期の最適化問題は以下のように定式化できる。

$$\underset{\{N^t,\ U^t,\ I^t\}_{t=0}^{T}}{Max}\ E\Big[\sum_{t=0}^{T}R^t(P^tF(U^tK^t,\ N^t)-W^tN^t-J^tI^t)\Big] \qquad \cdots\cdots(15)$$

$$\text{sub. to}\quad K^{t+1}=(1-\delta(U^t))K^t+I^t$$

$$K^{T+1}\geqq \underline{K}$$

$$I^t\geqq 0\quad t=0,\ 1,\ \cdots,\ T$$

$\{P^t\}_{t=0}^{T}$, $\{W^t\}_{t=0}^{T}$, および $\{J^t\}_{t=0}^{T}$ を与件として

だたし，E は期待値オペレーター，R は割引因子を表わす（$0<R<1$）。

(15)式が意味するところは，企業はある有限期間にわたるネットキャッシュフローの割引総額の期待値を最大化するような投資プランを実行可能な投資プランの中から選択するということである。問題(15)を解くために，われわれは確率的ダイナミック・プログラミングを用いる〔1〕。ダイナミック・プログラミングのアルゴリズムによれば[11]問題(15)は次のような関数方程式を逐次的かつ後進的に解くことと同値である。

$$EV(K^t)=\underset{\{U^t,N^t,I^t\}}{Max}E\big[P^tF(U^tK^t,\ N^t)-W^tN^t-J^tI^t+RV(K^{t+1})\big] \cdots\cdots(16)$$

$$\text{sub. to}\quad K^{t+1}=(1-\delta(U^t))K^t+I^t$$

$$K^{T+1}=\underline{K}\geqq 0$$

$$I^t\geqq 0\qquad t=0,\ 1,\ \cdots,\ T$$

事後的に決定された労働需要関数と資本の稼動率関数を(16)の目的関数に代入すると，

$$EV(K^t)=\underset{\{U^t,N^t,I^t\}}{Max}E\big[P^tF(U^t(K^t,\ P^t,\ W^t,\ J^t)K^t,N^t(K^t,P^t,W^t,J^t))-W^tN^t(\ \ /\!/\ \ )-J^tI^t+RV(K^{t+1})\big] \qquad \cdots\cdots(17)$$

を得る。この場合，評価関数 $EV(K^t)$ は資本ストックの水準，要素価格，および生産物価格（確率変数）の関数になっている。前節と同様に分析の複雑化を避けるために，内点解の存在を仮定する。(17)式を K^t で微分すると，次のような関係式が得られる。

---

9) この強い仮定が正当化されるために，保有している資本量が大きく，P^t が低く J^t が高く，あるいは減価償却費の増大が急激な企業を想定する必要がある。

10) (9)式の2階条件が満足されているので，陰関数の定理により(13)式および(14)式の形に解くことができる。

11) ベルマンの最適性原理を用いる。詳しくは〔1〕を参照せよ。

$$EV'(K^t)=E[P^tF_1(U^t+\frac{\partial U^t}{\partial K^t}K^t)$$

$$+P^tF_2\frac{\partial N^t}{\partial K^t}-W^t\frac{\partial N^t}{\partial K^t}+RV'(K^{t+1})$$

$$\times\{(1-\delta)-\delta'\frac{\partial U^t}{\partial K^t}K^t\}]$$

この式を整理すると,

$$EV'(K^t)=E[P^tF_1(U^t+\frac{\partial U^t}{\partial K^t}K^t)$$

$$+RV'(K^{t+1})\times$$

$$\{(1-\delta)-\delta'\frac{\partial U^t}{\partial K^t}K^t\}] \quad \cdots\cdots(18)$$

となる。$t=t+1$ とおけば,

$$EV'(K^{t+1})=E[P^{t+1}F_1(U^{t+1}+\frac{\partial U^{t+1}}{\partial K^{t+1}}K^{t+1})$$

$$+RV'(K^{t+2})\times$$

$$\{(1-\delta(U^{t+1}))-\delta'\frac{\partial U^{t+1}}{\partial K^{t+1}}K^{t+1}\}] \quad \cdots\cdots(19)$$

を得る。また,(17)式を I^t に関して微分して,左辺をゼロに等しいと置くと,

$$E[-J^t-RV'(K^{t+1})]=0$$

となり,この式を整理すると,

$$RE[V'(K^{t+1})]=J^t \quad \cdots\cdots(20)$$

を得る。同様に,

$$RE[V'(K^{t+2})]=J^{t+1} \quad \cdots\cdots(21)$$

を得る。(21)式を(19)式に代入すると

$$EV'(K^{t+1})=E[\mathbf{P}^{t+1}F_1(U^{t+1}+\frac{\partial U^{t+1}}{\partial K^{t+1}}K^{t+1})$$

$$+J^{t+1}\{(1-\delta(U^{t+1}))-\delta'\frac{\partial U^{t+1}}{\partial K^{t+1}}K^{t+1}\} \quad \cdots(22)$$

となる。さらに,(22)式を整理して,(20)式に代入すると

$$RE[P^{t+1}F_1U^{t+1}+J^{t+1}(1-\delta(U^{t+1}))]=J^t \cdots(23)$$

$$t=0,\ 1,\ \cdots,\ T$$

となる。(23)式は最適投資のための1階条件である。(23)式の左辺は,投資を1単位追加することによって生ずる次期の産出量増加分とその投資を転売したときに得られる収入の和から,減価償却費分を差しひいた残りの期待割引き価値を表わす。(23)式の右辺は,投資1単位の購入に伴う限界費用を表わす。したがって,(23)式は通常の投資1単位の変化させた時生ずる限界収入(ただし割引き価値)と限界費用の均等を意味する。ひとたび,各期の最適投資量 I^{t*} が(23)式によって決められると,各期の最適資本ストックの水準は次の関係式によって与えられる。

$$K^{t+1*}=(1-\delta(U^{t*}))K^{t*}+I^{t*} \quad \cdots\cdots(24)$$

そして $K^{T+1*}=\underline{K}$

$$t=0,\ 1,\ \cdots,\ T$$

次に,われわれは2階条件が満足されるかどうかを吟味する。そこで,(23)式における左辺のカッコ内の式を次のような関数で表わす。

$$\varphi(I^t)=P^{t+1}F_1U^{t+1}+J^{t+1}\{1-\delta(U^{t+1})\}\cdots(25)$$

この式を I^t について微分すると,

$$\frac{\partial\varphi(I^t)}{\partial I^t}=P^{t+1}F_{11}(U^{t+1}+\frac{\partial U^{t+1}}{\partial K^{t+1}}K^{t+1})U^{t+1}$$

$$+P^{t+1}F_{12}\frac{\partial N^{t+1}}{\partial K^{t+1}}U^{t+1}+P^{t+1}F_1\frac{\partial U^{t+1}}{\partial K^{t+1}}$$

$$-J^{t+1}\delta'\frac{\partial U^{t+1}}{\partial K^{t+1}}$$

となる。これを整理すると,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial I^t}=P^{t+1}F_{11}(U^{t+1}+\frac{\partial U^{t+1}}{\partial K^{t+1}}K^{t+1})U^{t+1}$$

$$+P^{t+1}F_{12}\frac{\partial N^{t+1}}{\partial K^{t+1}}U^{t+1} \quad \cdots\cdots(26)$$

となる。(10)式および π^t が厳密な意味で擬凹という事実を使えば,われわれは,

$$P^{t+1}F_{11}(U^{t+1}+\frac{\partial U^{t+1}}{\partial K^{t+1}}K^{t+1})+P^{t+1}F_{12}\frac{\partial N^{t+1}}{\partial K^{t+1}}$$

$$-\delta''(U^{t+1})\frac{\partial U^{t+1}}{\partial K^{t+1}}J^t<0 \quad \cdots\cdots(27)$$

を得る。(27)式,(13)式,および関数 δ の性質を用いれば,われわれは最終的に次の関係式を得る。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial I^t}=P^{t+1}F_{11}(U^{t+1}+\frac{\partial U^{t+1}}{\partial K^{t+1}}K^{t+1})U^{t+1}$$

$$+P^{t+1}F_{12}\frac{\partial N^{t+1}}{\partial K^{t+1}}U^{t+1}<\delta''(U^{t+1})\frac{\partial U^{t+1}}{\partial K^{t+1}}\times$$

$$J^{t+1}U^{t+1}<0 \quad \cdots\cdots(28)$$

$$t=0,\ 1,\ \cdots,\ T$$

(28)式により,2階条件が満足されていることが確かめられた。したがって,この一意な最適解は第1図中の限界費用曲線 J^t と関数 $\varphi(I^t)$ の交点Aに対応する I^{t*} によって表わされる。

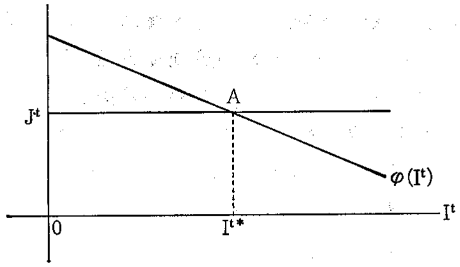

図 1

5.　不確実性と要素投入への効果

本節において，需要の不確実性が危険中立的企業の資本投入，投資量，および資本／労働比率に対してどのような影響を及ぼすかを考察する。

最初に，最適資本投入量への不確実性の効果を調べる。前節の結果より，最適資本投入の水準は(23)式により与えられることが知られているので，もう1度書けば，

$$E[P^{t+1}F_1U^{t+1}+J^{t+1}(1-\delta(U^{t+1})) -J^t/R]=0 \quad \cdots\cdots(23)$$

である。大カッコ内を次の関数で表わせば

$$\phi(K^{t+1})=P^{t+1}F_1U^{t+1}+J^{t+1}(1-\delta(U^{t+1})) -J^t/R \quad \cdots\cdots(29)$$

となる。(10)式と(11)式を用いて，関数 $\phi(K^{t+1})$ を次のように書くことができる。

$$\phi(K^{t+1})=J^{t+1}\delta'(U^{t+1})U^{t+1} +J^{t+1}(1-\delta(U^{t+1}))-J^t/R \quad \cdots\cdots(30)$$

われわれは，危険中立的企業への不確実性の影響を調べるために，ハルトマン〔2〕〔3〕によって用いられた次の補助定理を使う。

補助定理

凸な実数値関数（あるいは凹な実数値関数）の期待値は，その独立変数に対して平均保存的拡散 (mean preserving spread)[12] を行なった時，増加もしくは変化しない（あるいは減少もしくは変化しない)。

この補助定理の証明については，ハルトマン〔3〕の補助定理1の証明を参照せよ。この補助定理によれば，最適資本ストックに対する不確実性の影響は関数 $\phi(〃)$ の確率変数 P に関して凸あるいは凹かという特性に依存することになる。

そこで，$\phi(〃)$ を P^{t+1} について微分する。

$$\frac{\partial\phi(K^{t+1})}{\partial P^{t+1}}=J^{t+1}\delta''\frac{\partial U}{\partial P^{t+1}}U^{t+1} \quad \cdots\cdots(31)$$

さらに，(31)を P^{t+1} についてもう1度微分すると，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial P^{t+1,2}}=J^{t+1}\delta'''\left(\frac{\partial U^{t+1}}{\partial P^{t+1}}\right)U^{t+1} +J^{t+1}\delta''\frac{\partial^2 U^{t+1}}{\partial P^{t+1,2}}U^{t+1} +J^{t+1}\delta''\left(\frac{\partial U^{t+1}}{\partial P^{t+1}}\right)^2 \quad \cdots\cdots(32)$$

となる。(32)式の符号を決めるためには，さらに δ''' や $\frac{\partial^2 U^{t+1}}{\partial P^{t+1,2}}$ の符号に関する情報が必要とされる。議論を先に進めるために，資本の減耗率について次のような2次関数を仮定する。すなわち，

$$\delta(U)=\frac{1}{2}aU^2+b \quad a,\ b>0 \quad \cdots\cdots(33)$$

その結果，われわれは，

$$\frac{\partial^2\phi(K^{t+1})}{\partial P^{t+1,2}}=J^{t+1}\delta''\frac{\partial^2 U^{t+1}}{\partial P^{t+1,2}} +J^{t+1}\delta''\left(\frac{\partial U^{t+1}}{\partial P^{t+1}}\right)^2 \quad \cdots\cdots(34)$$

を得る。(34)式において第2項は正であるが一般に第1項は負になる。加わえて，$\frac{\partial^2 U^{t+1}}{\partial P^{t+1,2}}$ の符号は生産関数の3階微係数に依存する。残念ながら，生産関数の3階微係数についてあまり多くのことは知られていない。したがって，確定的な結果を得ようとすれば生産関数の具体的な形を特定化しなければならない。

そこで，われわれは1つの具体的な例として次のようなコブ・ダグラス生産関数を仮定する。

$$Y=(UK)^{\alpha}N^{\beta} \quad \alpha+\beta<1 \quad \cdots\cdots(35)$$

12) $f(x)$ と $g(x)$ を確率密度関数とする時，$f(x)$ が $g(x)$ の「平均保存的拡散」であるとは，$f(x)$ が $g(x)$ の平均値を保存しつつ，分布の比重を中央部分から周辺部分へと拡散させることによって得られた関数であること。

(35)式を用いて，問題(9)を解くと

$$U^t=\left(\frac{W^t}{P^t}\right)^{\frac{1}{c}}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{c}}\left(\frac{J^t a}{W^t \alpha}\right)^{\frac{1-\beta}{c}}(K^t)^{\frac{\alpha+\beta-1}{c}} \quad \cdots\cdots(36)$$

$$t=0,\ 1,\ \cdots,\ T$$

ただし $c=\alpha+2(\beta-1)<0$ を得る。稼動率 U^t を P^t に関して微分すれば,

$$\frac{\partial U^t}{\partial P^t}=-\frac{1}{c}\left(\frac{W^t}{P^t}\right)^{\frac{1+c}{c}}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{c}}\left(\frac{J^t a}{\alpha W^t}\right)^{\frac{1-\beta}{c}}\times (K^t)^{\frac{1-\alpha-\beta}{c}}>0 \quad \cdots\cdots(37)$$

となる。さらに，P^t で微分すれば,

$$\frac{\partial^2 U^t}{\partial P^{t,2}}=\frac{1+c}{c^2}\left(\frac{W^t}{P^t}\right)^{\frac{1+2c}{c}}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{c}}\left(\frac{J^t a}{W^t \alpha}\right)^{\frac{1-\beta}{c}}\times (K^t)^{\frac{1-\alpha-\beta}{c}}\gtreqless 0 \quad \cdots\cdots(38)$$

となる。(38)式の不等号の向きは，パラメーター α および β の大きさによって決まる。したがって前述の補助定理を使えば，次のように場合分けができる[13]。

$1-\alpha-2\beta<$ の時　$E(K^{t+1})>\bar{K}^{t+1}$

$1-\alpha-2\beta=0$ の時　$E(K^{t+1})\geqq\bar{K}^{t+1}$　…(39)

$1-\alpha-2\beta>0$ の時　$E(K^{t+1})\lesseqgtr\bar{K}^{t+1}$

ただし，$\bar{K}^{t+1}$は確実性下の最適資本ストック。

以上の結果は，繰り返すまでもなく生産関数の形とそのパラメーター値に依存しており，異なる形の生産関数を用いれば異なる結果になることが十分に予想される。

同様な議論により，われわれは不確実性が最適投資量にどのような効果をもたらすかを吟味できる。K^t が t 期の期首において，すでに与えられているので，(29)式を I^t に関する関数としても考えることができる。すなわち,

$$\tilde{\phi}(I^t)=P^{t+1}F_1U^{t+1}+J^{t+1}(1-\delta(U^{t+1}))-J^t/R \quad \cdots\cdots(40)$$

となる。したがって，危険中立企業の最適投資量に対する不確実性増大の比較静学は，最適資本ストックの場合と全くパラレルな議論ができる。前述の補助定理と資本減耗率関数の仮定により，次のような結果を得る。

$$E(I^t)\lesseqgtr\bar{I}^t$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial^2 U^{t+1}}{\partial P^{t+1,2}}U^{t+1}+\left(\frac{\partial U^{t+1}}{\partial P^{t+1}}\right)^2\gtreqless 0$$

（複号同順）　……(41)

ただし，$\bar{I}^t$ は確実性下の最適投資量。

$E(I^t)$ は不確実性下（平均保存的拡散のもとで）での最適投資量。

さらに，より確定的な比較静学の結果を得るために，前述のコブ・ダグラス生産関数を仮定すれば,

$1-a-2\beta<0$ の場合，$E(I^t)>\bar{I}^t$

$1-\alpha-2\beta=0$ の場合，$E(I^t)\geqq\bar{I}^t$　……(42)

$1-\alpha-2\beta>0$ の場合，$E(I^t)\lesseqgtr\bar{I}^t$

となる。言うまでもなく，不確実性の増大（平均保存的拡散の意味で）は(42)式の不等式間の差を広げる。

次に，資本／労働比率に対する需要の不確実の影響を考察する。(23)式を(11)式で割ると,

$$E\left[\frac{F_1U^{t+1}}{F_2}\right]=E\left[-\frac{\partial N^{t+1}}{\partial K^{t+1}}\right]=\frac{J^t/R-J^{t+1}\{1-E(\delta(U^{t+1}))\}}{W^{t+1}} \quad \cdots\cdots(43)$$

となる。今までに得られた結果を用いれば，次のようになる。

$$E\left[\frac{F_1U^{t+1}}{F_2}\right]=\frac{J^t/R-J^{t+1}\{1-E(\delta(U^{t+1}))\}}{W^{t+1}}\lesseqgtr\frac{J^t/R-J^{t+1}\{1-\delta(\bar{U}^{t+1})\}}{W^{t+1}}=\frac{F_1\bar{U}^{t+1}}{F_2} \quad \cdots\cdots(44)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial^2 U^{t+1}}{\partial P^{t+1,2}}U^{t+1}+\left(\frac{\partial U^{t+1}}{\partial P^{t+1}}\right)^2\lesseqgtr 0 \quad \cdots\cdots(45)$$

（複号同順）

ただし $\bar{U}^{t+1}$ は確実性下の最適稼動率。

さらに，もしコブ・ダグラス生産関数（$\alpha+\beta<1$）を仮定すれば，(39)および(42)に類似した結果が得られる。

最後に，需要の不確実性が危険中立的企業の投資－資本ストックの関係にどのような影響をもつかを調べる。(23)式をK^tについて微分すれば,

$$RE\left[P^{t+1}F_{11}\left(U^{t+1}+K^{t+1}\frac{\partial U^{t+1}}{\partial K^{t+1}}\right)U^{t+1}+P^{t+1}F_{12}\frac{\partial N^{t+1}}{\partial K^{t+1}}U^{t+1}\right]\frac{\partial K^{t+1}}{\partial K^t}=0 \quad \cdots\cdots(46)$$

13) 不確実性の増大とは平均保存的拡散による。

となる。さらに，次の関係式を用いる。

$$\frac{\partial N^{t+1}}{\partial K^{t+1}}=-\frac{F_{21}}{F_{22}}\left(U^{t+1}+K^{t+1}\frac{\partial N^{t+1}}{\partial K^{t+1}}\right) \quad \cdots\cdots(47)$$

$$\frac{\partial K^{t+1}}{\partial K^{t}}=(1-\delta(U^{t}))-\delta'\frac{\partial U^{t}}{\partial K^{t}}+\frac{\partial I^{t}}{\partial K^{t}} \quad \cdots\cdots(48)$$

(47)式と(48)式を(46)式に代入すると，

$$RE\Big[\Big\{P^{t+1}\Big((U^{t+1}+K^{t+1}\frac{\partial U^{t+1}}{\partial K^{t+1}}\Big)U^{t+1}$$

$$\Big(\frac{F_{11}F_{22}-F_{12}{}^{2}}{F_{22}}\Big)\Big\}\times$$

$$\Big\{(1-\delta)-\delta'\frac{\partial U^{t}}{\partial K^{t}}+\frac{\partial I^{t}}{\partial K^{t}}\Big\}\Big]=0 \quad \cdots\cdots(49)$$

となる。生産関数に関する仮定と(28)式より，

$$\frac{\partial I^{t}}{\partial K^{t}}=-(1-\delta(U^{t}))+\delta'\frac{\partial U^{t}}{\partial K^{t}}<0 \quad \cdots\cdots(50)$$

$$t=0,\ 1,\ \cdots,\ T$$

となる。(50)式は，t 期の資本ストックの増加（あるいは減少）が t 期の投資量を減少（あるいは増加）させる。この結果は春名〔4〕やハルトマン〔3〕らの結果と一致する。しかしながら彼らのとわれわれの結果の間には以下に示されるような本質的な相違が存在する。彼らのモデルでは，資本の稼動率が陽表的にモデルに組み込まれていないので，彼らが導出した(51)式からわかるように投資—資本の関係は不確実性から独立になる。

$$\frac{\partial I^{t}}{\partial K^{t}}=-(1-\delta)<0 \quad \cdots\cdots(51)$$

$$t=0,\ 1,\ \cdots,\ T$$

ただし，δ（≡減耗率）は定数。

対照的に，われわれのモデルは(50)式より明らかなように，もはや不確実性より独立でなくなる。なぜならば，t 期の資本ストックの水準が確実な場合と不確実な場合とでは異なるため，それが稼動率 U^{t} に影響することによって，(50)式の値は確実な場合と不確実な場合では異なることになる。両者の大小関係については，(50)式だけからでは不明である。

6．結　び

本稿において，われわれは不確実性が危険中立的競争企業の投資決定に対して，いかなる影響を及ぼすかを分析してきた。その結果を簡単に要約すれば，次のようになる。第1に，資本の稼動率を調整変数にもつ危険中立的企業の投資決定は，要素価格に不確実性がなくても，もはや不確実性（生産物価格）から独立でなくなり，確実性下の企業のそれとは異なる。第2に，不確実性の資本ストック，投資量および資本－労働比率等への影響の仕方は，完全に生産技術すなわち生産関数の形に依存する。われわれの例ではコブ・ダグラス生産関数を用いたが，より一般的なＣＥＳ生産関数を用いれば，結果は異なったものになると予想される。

最後に，残されたモデルの一般化および課題について簡単に触れて終わる。第1に，本稿では競争的企業のみを考察しているが，資本の稼動率という調整変数はむしろ独占企業にとって適切な調整変数である。本稿の分析の独占企業への拡張は，需要価格を産出量の関数にすることによって容易になされうる。しかしながら，価格および産出量の調整のタイミングの相違による様々な独占企業のタイプを分析する必要がある。第2に，本稿では，危険回避的企業の投資行動については分析されていない。その分析を行なうことは可能だが，一般的に比較静学による符号は不確定になり，(41)式のような条件の導出は不可能になる。第3に，われわれは投資の調整費用を無視したが，これをモデルに含めてモデルのリアリティを高めることは可能である。しかしながら，その結果，やはり比較静学による符号は不確定になる。

数学付録

この数学付録では，本文でその導出手続きの詳細を与えなかった(13)式および(14)式の各外生変数に関する偏微係数とその符号を求める。事後的決定のための1階条件(10)と(11)を次のように書く。

$$PF_{1}-\delta'(U)J=0 \quad \cdots\cdots(10)'$$

$$PF_2-W=0 \qquad \cdots\cdots(11)'$$

ただし，ここでは添字の t を省略する。

(10)'式と(11)'式を全微分すれば，次のようなベクトル形の連立方程式体系が得られる。

$$[\mathrm{A}]\begin{bmatrix} dU \\ dN \end{bmatrix}=[\mathrm{B}]\begin{bmatrix} dK \\ dP \\ dW \\ dJ \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(52)$$

ただし

$$[\mathrm{A}]=\begin{bmatrix} PF_{11}K-\delta''J & PF_{12} \\ PF_{21}K & PF_{22} \end{bmatrix}$$

および，

$$[\mathrm{B}]=\begin{bmatrix} -PF_{11}U & -PF_1 & 0 & \delta'(U) \\ PF_{21}U & -PF_2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

行列Aのヤコピアン行列式は次のような式で与えられる。

$$|\mathbf{A}|=P^2K(F_{11}F_{22}-F_{12}^2)-\delta'PJF_{22}>0$$

クラメールの公式を用いて(52)式を解けば，

$$\frac{\partial U}{\partial K}=\frac{-P^2U(F_{11}F_{22}-F_{12}^2)}{|\mathbf{A}|}<0$$

$$\frac{\partial U}{\partial P}=\frac{-P^2F_1F_{22}+PF_2F_{12}}{|\mathbf{A}|}>0$$

$$\frac{\partial U}{\partial W}=\frac{-PF_{12}}{|\mathbf{A}|}<0$$

$$\frac{\partial U}{\partial J}=\frac{\delta'PF_{22}}{|\mathbf{A}|}<0$$

および，

$$\frac{\partial N}{\partial K}=\frac{P\delta''JF_{21}U}{|\mathbf{A}|}>0$$

$$\frac{\partial N}{\partial P}=\frac{-F_2(PF_{11}K-\delta'')}{|A|}>0$$

$$\frac{\partial N}{\partial W}=\frac{PF_{11}K-\delta''}{|\mathbf{A}|}<0$$

$$\frac{\partial N}{\partial J}=\frac{-PKF_{21}\delta'}{|\mathbf{A}|}<0$$

となる。

参考文献

[1] Bertsekas. D. P., Dynamic Programming and Stocnastic Control, Academic Press, 1976.

[2] Hartman, R., "Adjustment Costs, Price and Wage Uncertainty and Investment," RES vol. 40, No. 2, 1973.

[3] ———, "The Effects of Price and Cost Uncertainty on Investment," JET, vol. 5., 1972.

[4] Haruna, S., "Investment and Input Choices of a Monopolistic Firm under Demand Uncertainty: A Long Run Analysis", ERQ, vol 33 (August), 1982.

[5] Ishii, Y., "On the Theory of Monopoly under Demand Uncetainty," Zeitschrift für Nationalökonomie, vol. 39, 1979.

[6] Lucas, R. E. Jr., "Investment under Uncertainty", Econometrica, vol. 39, 1971.

[7] Pindyck, R. S., "Adjustment Costs, Uncertainty and tha Behavior of the Firm", AER, June, 1982.

[8] Smith, K. R., "The Effect of Uncertainty on Monopoly Price, Capital Stock and Utilization of Capital", JET, Vol. 1 (June), 1969.

[9] ———, "Risk and the Optimal Utilization of Capital", RES, 1970.

謝　辞

本稿作成過程において内田和男助教授および小野造助教授より有益なコメントをいただいた。また，近経研究会では小林好宏教授，永田信助教授および他の参加メンバーより同様に貴重なコメントをいただいた。この場を借りて感謝の意を表わしたい。もちろん，ありうべき誤りはすべて筆者の責任である。