経済学研究 37-3
北海道大学 1987. 12

<研究ノート>

情報ネットワークの性能評価手法：拡散近似

木 村 俊 一

1. まえがき

コンピューター・ネットワーク，高度情報通信網（INS, ISDN）等のネットワーク構造をもつ情報通信システムは，現代社会の情報伝達における重要な役割を果たしている。待ち行列ネットワーク（Queueing Network；以下，QNと略す）は，これらの情報ネットワークシステムの性能を評価するための数学モデルとして，計算機科学，通信工学，OR，応用確率論等の広範な分野の研究者によって精力的に研究されてきた。

特に，その状態推移がマルコフ連鎖によって記述できることからマルコフ型と総称されるQNに対しては，スループットや応答時間等の待ち特性量を計算するための効率のよい数々のアルゴリズムが開発されている［3, 14］。しかし，マルコフ連鎖として定式化するために設けられた仮定は，現実にはほとんど満たされていないために，最終的にはシミュレーションに頼っているのが現状である。

現実問題において現れるマルコフ性が成立しない一般的なQNを厳密に理論解析することは極めて難しく，不可能であると言った方が適当かもしれない。このような状況下では，近似解法への期待は当然の帰結であるといえる。

本講演[1]では，非マルコフ型QNを近似解析する手法の1つとして，

- 拡散近似 (diffusion approximation)

の基本的な考え方と，これまでに得られている主要な結果について解説する。

1）本稿は，日本オペレーションズ・リサーチ学会1985年度秋季研究発表会（期日：昭和60年10月2日・3日，場所：東京工業大学）における招待発表講演の内容に加筆したものである。

2. 待ち行列ネットワーク

用語の統一をはかるために，客，ジョブ，パケット等のサービスを受けるものを総称して『客』，窓口，I/O デバイス，電話交換機等のサービス施設を総称して『ノード』と呼ぶことにする。

近似の対象とする非マルコフ型QNは，Jackson ［12］ によって最初に解析された開いた（open）QNのある一般化に相当し，以下の仮定によって特徴付けられている：

QNは，全部で K（$\geqq 1$）個のノードによって構成されている。QN内の各ノードは待合室に制限のない単一窓口・先着順サービスの待ち行列で，客はQNの外部から到着して少なくとも1ヶ所以上のノードでサービスを受けた後，最後にはQNの外部へ去って行く（図1参照）。

QN外部から各ノードへの客の到着過程および各窓口でのサービス過程は，独立な一般再生過程であるとする。ノード i におけるこれらの再生過程に対し，到着およびサービス過程の再生時間間隔を，それぞれ，確率変数 u_i および v_i で表すことにする。また，u_i と v_i のモーメントを次の記号で表す。

$$\lambda_i = E[u_i]^{-1}, \qquad c_{ai}^2 = \lambda_i^2 Var[u_i]$$

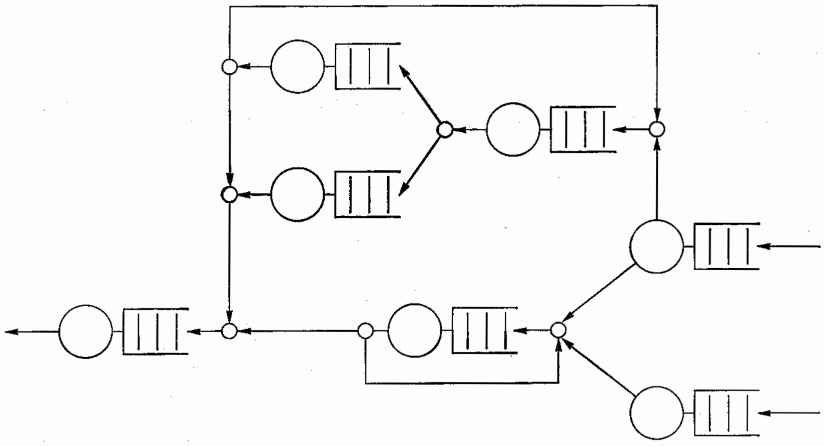

図1　開いた待ち行列ネットワーク

$$\mu_i = E[v_i]^{-1}, \qquad c_{si}^2 = \mu_i^2 Var[v_i]$$

ノード i でのサービスを終えた客は，確率 p_{ij} でノード j へ推移し，確率 $1-\Sigma_{j=1}^{K} p_{ij}$ でQN外部へ退去する。行列 $P=(p_{ij})$ は，QNの外部を吸収状態，内部のノード番号を過渡状態とする吸収マルコフ連鎖の推移確率行列の部分行列で，過渡状態間の推移を表し，経路行列(routing matrix) と呼ばれる。ここでは，$(I-P)^{-1}$ が存在することを仮定する（ただし，$I=(\delta_{ij})$：単位行列)。この仮定は，客がQN内にいる間の各ノードへの平均訪問回数が，有限の値をとることを意味している。

$\gamma=(\gamma_1, \cdots, \gamma_K)$ を連立一次方程式系

$$\gamma = \lambda + \gamma P \tag{1}$$

の唯一の解とする。ただし，$\lambda=(\lambda_1, \cdots, \lambda_K)$。明らかに，

$$\gamma = \lambda(I-P)^{-1} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} P^n \tag{2}$$

で与えられる。方程式系(1)は，トラフィック率方程式 (traffic rate equations) と呼ばれ，γ_i はノード i への客の総到着率を表している。ノード i におけるトラフィック密度 (traffic intensity) は，γ_i を用いて，$\rho_i=\gamma_i/\mu_i$ によって定義される。

3. 拡散近似

3.1. 多次元拡散過程

この小節では，非マルコフ型QNの拡散近似についての予備知識として，ある多次元拡散過程に関する用語と若干の定義をまとめておく(詳細については文献［7］を参照のこと)。

$R_+^K=[0, \infty)^K$ を状態空間とするある斉次な K 次元拡散過程 $X=\{X(t)\,;\,t\geqq 0\}$ を考える。X は，状態空間の内部では，漂流ベクトル $b=(b_1, \cdots, b_K)$，共分散行列 $A=(A_{ij})$ によって特徴付けられる K 次元ブラウン運動過程として振舞う。すなわち，微少時間 $h>0$ の間の X の増分 dX を

$$dX_i(h) = X_i(h) - X_i(0), \quad i=1, \cdots, K \tag{3}$$

とおくとき，b および A は

$$b_i = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E[dX_i(h) \mid X_i(0)] \tag{4}$$

$$A_{ij} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E[dX_i(h) dX_j(h) \mid X_i(0), X_j(0)] \tag{5}$$

$$1 \leqq i, \ j \leqq K$$

で定義される。X は境界に達したとき，各境界超平面に固有な一定の反射角にしたがって瞬時

に状態空間の内部へ反射される。境界 $X_i(t)=0$ における反射角ベクトルを $(R_{i1}, \cdots, R_{iK})$ で表し，このベクトルを第 i 行とする $K\times K$ 行列を R で表すことにする。図2は，$K=2$ の場合の境界における反射の例を示している。X は，情報として (b, A, R) が与えられれば，その確率的性質を完全に定めることができるので，$X=\mathrm{RBM}(b, A, R)$ (Reflected Brownian Motion) と表すことにする。

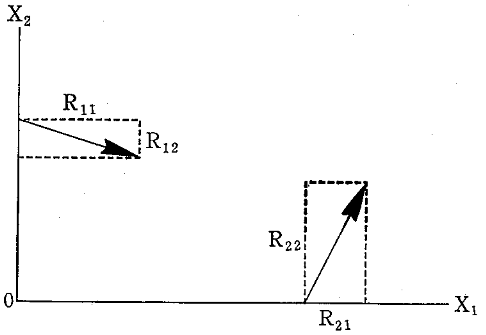

図2　境界における反射 ($K=2$)

3.2. 重負荷極限定理

2節で記述した非マルコフ型QNのある系列を考える。この系列の第 n 番目のQNのパラメータは，K を除いて n に依存してもよいとし，$n\to\infty$ に対し，それぞれ有限の極限値

$$\lambda_i(n)\to\lambda_i,\qquad c_{ai}^2(n)\to c_{ai}^2$$
$$\mu_i(n)\to\mu_i,\qquad c_{si}^2(n)\to c_{si}^2$$
$$P_{ij}(n)\to P_{ij},\qquad 1\leqq i,\ j\leqq K$$

をもつことを仮定する。$n\geqq 1$ に対し，

$$\nu(n)=\lambda(n)+\mu(n)P(n) \tag{6}$$

によって $\nu(n)=(\nu_1(n),\cdots,\nu_K(n))$ を定義する。さらに，

$$b_i(n)=\sqrt{n}\,(\nu_i(n)-\mu_i(n)),\quad 1\leqq i\leqq K \tag{7}$$

と定義し，有限の極限値

$$b_i(n)\to b_i,\qquad n\to\infty$$

をもつものと仮定する。

第 n 番目のQNのノード i における時刻 t での（サービス中の客を含む）客数を $Q_i^{(n)}(t)$ で表し，

$$\hat{Q}_i^{(n)}(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}Q_i^{(n)}(nt),$$
$$n\geqq 1,\ t\geqq 0,\ 1\leqq i\leqq K \tag{8}$$

とおく。このとき，次の定理が成り立つ。

定理 [15]

$$\hat{Q}^{(n)}\Rightarrow\hat{Q}=\mathrm{RBM}(b,\ A,\ I-P),\quad n\to\infty \tag{9}$$

ただし，

$$A_{ii}=\lambda_i c_{ai}^2+\mu c_{si}^2(1-2p_{ii})+\sum_{k=1}^{K}\mu_k p_{ki}(1-p_{ki}+p_{ki}c_{sk}^2), \tag{10}$$

$$A_{ij}=-\{\mu_i c_{si}^2 p_{ij}+\mu_j c_{sj}^2 p_{ji}+\sum_{k=1}^{K}\mu_k p_{ki}p_{kj}(1-c_{sk}^2)\}, \tag{11}$$
$$1\leqq i,\ j\leqq K.$$

この定理は，重負荷時にはQNの系内客数過程が K 次元反射拡散過程に弱収束することを示している。漂流ベクトル b は，もし存在するならば，(1)，(6)，(7)より

$$b_i=\gamma_i-\mu_i,\qquad 1\leqq i\leqq K \tag{12}$$

で与えられる。

この定理の内容を具体的にみるために，$K=2$ 個のノードをもつ Jackson 型QNに対し，境界における反射の様子を調べてみよう。時刻 t における系内客数過程を $Q(t)=(Q_1(t),\ Q_2(t))$ で表し，$Q_2(t)=0$ かつ $Q_1(t)>0$ である瞬間を考える。このとき，直後に起こりうる事象は，次の5つの内の何れかである [1]。

Ⅰ．ノード2を退去した客はノード1へ推移する。

Ⅱ．ノード2を退去した客はノード2へ推移する。

Ⅲ．ノード2を退去した客はQN外部へ推移する。

Ⅳ．QN外部からノード1へ客が到着する。

V．QN外部からノード2へ客が到着する。

表1は，これらの事象が起こりうる確率と，そのときの $Q(t)$ の変化の方向を示している。

表1 2ノード Jackson 型 QN の境界特性

事象	確率	変化の方向
I	$\mu_2 p_{21}/\Lambda$	$(+1,\ -1)$
II	$\mu_2 p_{22}/\Lambda$	$(0,\ 0)$
III	$\mu_2(1-p_{21}-p_{22})/\Lambda$	$(0,\ -1)$
IV	λ_1/Λ	$(+1,\ 0)$
V	λ_2/Λ	$(0,\ +1)$

ただし，$\Lambda=\lambda_1+\lambda_2+\mu_2$ である。境界到着後の推移変化を表す確率変数ベクトルを $\theta=(\theta_1, \theta_2)$ とおくと，表1より，その期待値は

$$E[\theta]=\frac{1}{\Lambda}(\mu_2 p_{21}+\lambda_1,\ -\mu_2(1-p_{22})+\lambda_2) \tag{13}$$

と求めることができる。重負荷時においては

$$\gamma_2=\mu_2 \tag{14}$$

が成立すると考えられるから，(1)を用いて

$$E[\theta]=\frac{1}{\Lambda}(\gamma_1(1-p_{11}),\ \gamma_1 p_{12})$$
$$=\frac{\gamma_1}{\Lambda}(1-p_{11},\ p_{12}) \tag{15}$$

を得る。(15)は定数倍を無視すると行列 $R=I-P$ の第1行に相当し，定理の結果が確かめられた。

3.3. 拡散方程式

拡散近似の1つのメリットは，QNの種々の待ち特性量の計算が，ある微分方程式を解くことに帰着される点にある。$X=\mathrm{RBM}(b, A, R)$ $(R=I-P)$ に対しては，その確率密度関数

$$p(x, t|x_0)dx=P\{X(t)\in dx|X(0)=x_0\} \tag{16}$$

は，次の2階偏微分方程式を満足することが知られている [6, 8]。

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}A_{ij}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{K}b_i\frac{\partial p}{\partial x_i},\quad x\in R_+^K \tag{17}$$

境界条件：

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K}(2A_{ij}-A_{ii}R_{ij})\frac{\partial p}{\partial x_j}-b_i p=0,\quad x_i=0 \tag{18}$$

初期条件：

$$p(x,\ 0|x_0)=\delta(x-x_0). \tag{19}$$

X が正再帰的であると仮定すると，X は定常密度 π をもつ。(17), (18)より，π は

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}A_{ij}\frac{\partial^2\pi}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{K}b_i\frac{\partial\pi}{\partial x_i}=0,\quad x\in R_+^K \tag{20}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{K}(2A_{ij}-A_{ii}R_{ij})\frac{\partial\pi}{\partial x_j}-b_i\pi=0,\quad x_i=0 \tag{21}$$

を満足する。

もし，拡散過程 X が Jackson 型QNの系列の極限の場合 ($i.e.$, $c_{ai}=c_{si}=1$) は，π は積形式解

$$\pi(x)=\prod_{i=1}^{K}d_i\exp(-d_i x),\quad x\in R_+^K \tag{22}$$

で表される。ただし，

$$d_i=-2(bR^{-1})_i/A_{ii}. \tag{23}$$

Harrison & Reiman [8] は，非マルコフ型QNであっても，条件

$$A_{ij}=\frac{1}{2}(A_{ii}R_{ij}+A_{jj}R_{ji})/R_{ii} \tag{24}$$

が成立するとき，かつそのときに限り(20), (21)は積形式解をもつことを証明した。しかし，この条件が成立しないときには，(20), (21)の解を陽に求めることは特別な場合 ($e.g.$, [2, 4, 5, 10, 11]) を除いて一般には困難である。

Remark 1. 非マルコフ型QNに対する拡散

近似についての Kobayashi [13] の先駆的な研究は，境界における反射角を考慮していない。彼は，(20)より，定常密度に対する積形式解

$$\pi(x)=\prod_{i=1}^{K}\hat{d}_i\exp(-\hat{d}_i x),\quad x\epsilon R_+^K \tag{25}$$

を導いた。ただし，

$$\hat{d}=-2bA^{-1}. \tag{26}$$

この解は明らかに境界条件(21)を満たしていない。しかし，数学的な厳密さは別として，境界における反射角を考慮することで，どの程度近似精度が改良されたかといった定量的な議論はこれまでほとんどなされておらず，(22)と(25)の実用上の価値についての評価は定まっていない。

Remark 2. Takahashi & Akimaru [16] は，境界条件として基本復帰 (elementary return) 境界を用いた拡散近似を提案している。基本復帰境界は境界における滞在時間とその直後の跳躍を考慮に入れることができるために，軽負荷時の系内客数過程を忠実に表せるという利点をもっているが，その反面，重負荷時には境界周辺の確率密度が跳躍のために過度に希薄になるという欠点をもっている。また，陽な解が得られるのは $K=2$ の場合に限られている。この基本復帰境界を用いた拡散近似解についても，(22)，(25)との数値的な比較はなされていない (cf. [9])。

Remark 3. X が正再帰的であるための必要十分条件については，はっきりとはわかっていない。しかし，(23)より，

$$(bR^{-1})_i<0,\qquad 1\leqq i\leqq K \tag{27}$$

ではないかと推測されている [8]。

4. あとがき

最後に，ＱＮに対する拡散近似を利用するにあたっての注意点をまとめておく。まず第1に，重負荷時における近似解であることを常に念頭においておく必要がある。単一窓口待ち行列の拡散近似と比べて，ＱＮの拡散近似では近似誤差を把握しにくい面があるので，負荷が軽いノードにおける近似解の精度は低いと考えた方が良いであろう。また，第2点として，2-モーメント近似であることから，$c_{si}>1$ または $c_{ai}>1$ となるノードについては，やはりその近似精度を信頼し過ぎない方が賢明である。第3点として，近似精度を向上させるために，厳密解を取り入れた改良を工夫することが重要である。軽負荷時でのＱＮの挙動を考慮した境界条件や拡散パラメータの修正に加え，Jackson 型ＱＮと整合する離散化法等が有効な手段と考えられる。

ＱＮの拡散近似に関する研究は，Bell 研究所を中核とする理論派と，計算機科学を背景とする実用派に大きく二分していて，この２つのグループの拡散近似という近似手法についての考え方には，かなりのギャップがあるように思われる。数学的厳密さの点からみれば，後者には相当いい加減なものも多い。また，定量的に近似の精度を評価するという意識は前者には欠けているようである。

私自身の考え方は，どちらかといえば，理論派に対してやや批判的である。数学的厳密さの上に安住して拡散近似本来の近似モデルという性格を見失ってはいけないと思う。微分方程式をいくら厳密に解いたところで，所詮近似解であることには変わりはない。しかし，このことは数学的厳密さを決して否定しているわけではない。理論的正当性をもたない近似モデルは，もはや『近似』の名に値しないことを常に自戒すべきである。

参考文献

[1] Coffman, E. G. and M. I. Reiman, "Diffusion Approximatins for Computer / Communications Systems," *Mathematical Computer Performance and Reliability*, G. Iazeolla, P. J. Courtois and A. Hordijk (eds.), pp. 33-53, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[2] Foschini, G. J., "Equilibria for Diffusion Models of Pairs of Communicating Computers-Symmetric Case," *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-28, 273-284 (1982).

[3] Gelenbe, E. and I. Mitrani, *Analysis and Synthesis of Computer Systems*, Academic Press, New York, 1980.

[4] Harrison, J. M., "Assembly-like Queues," *J. Appl. Prob.*, Vol. 10, 354-367 (1973).

[5] Harrison, J. M., "The Diffusion Approximation for Tandem Queues in Heavy Traffic," *Adv. Appl. Prob.*, Vol. 10, 886-905 (1978).

[6] Harrison, J. M., *Brownian Motion and Stochastic Flow System*, John-Wiley & Sons, New York, 1985.

[7] Harrison, J. M. and M. I. Reiman, "Reflected Brownian Motion on an Orthant," *Ann. Prob.*, Vol. 9, 302-308 (1981).

[8] Harrison, J. M. and M. I. Reiman, "On the Distribution of Multidimensional Reflected Brownian Motion," *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 41, 345-361 (1981).

[9] Harrison, J. M. and A. J. Lemoine, "Sticky Brownian Motion as the Limit of Storage Processes," *J. Appl. Prob.*, Vol. 18, 216-226 (1981).

[10] Harrison, J. M. and L. A. Shepp, "A Tandem Storage System and Its Diffusion Limit," Research Report, 1983.

[11] Harrison, J. M., H. Landau, B. Logan and L. A. Shepp, "Stationary Distribution of Reflecting Brownian Motion in a Planar Region," Research Report, 1983.

[12] Jackson, J. R., "Networks of Waiting Lines," *Operations Res.*, Vol. 5, 518-521 (1957).

[13] Kobayashi, H., "Application of the Diffusion Approximation to Queueing Networks I : Equilibrium Queue Distributions," *J. ACM*, Vol. 21, 316-328 (1974).

[14] Kobayashi, H., *Modeling and Analysis: An Introduction to System Performance Evaluation Methodology*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1978.

[15] Reiman, M. I., "Open Queueing Networks in Heavy Traffic," *Math. Operations Res.*, Vol. 9, 441-458 (1984).

[16] Takahashi, H. and H. Akimaru, "Analysis of Queueing Systems via Multi-Dimensional Elementary Return Process," *Teletraffic Issues in Advanced Information Society, ITC 11*, M. Akiyama (ed.), pp. 3. 3A-1～7, North-Holland, Amsterdam, 1986.