北海道大学 *38-1*
経済学研究 1988. 6

＜研究ノート＞

M/G/s 待ち行列に対する拡散近似の展開

木 村 俊 一

1. はじめに

待ち行列の拡散近似（diffusion approximation）モデルは，単一窓口待ち行列から待ち行列ネットワークまでの実に様々な待ち行列システムに対し適用されてきた。その近似の内容も，単に定常状態における待ち特性量を解析するばかりでなく，システムの制御や過渡状態の解析にも応用され，幅広い展開を見せている。近似精度にまだ改善すべき点は見られるものの，重負荷近似として強力な近似手法の１つであるといえるだろう。

厳密な解析が困難な M/G/s 待ち行列に対しても，これまでいくつかの異なった拡散近似モデルが提案されている。しかし，残念ながら，近似精度については拡散近似以外の発見的な近似のそれを超えるまでには至っていないのが実状である。本稿の目的は，従来の拡散近似モデルを整理し，近似精度をさらに改善するためには何が必要なのかを明らかにすることにある。本稿は次のように構成されている。まず第２節では，M/G/s 待ち行列に対する拡散近似の一般的な枠組みを示す。さらに，これまでに提案されてきた拡散モデルの特徴をまとめ，個々のモデルのもつ問題点を明らかにする。また第３節では，従来の拡散近似モデルがもつ共通の問題点のうち，拡散パラメータの決定に関して新しい考え方を提案する。最後に第４節では，残る問題点のうち，特に離散化の問題について今後の可能な展開の方向について述べることにする。

以下の節で述べられる拡散近似の内容は，M/G/s 待ち行列に限らずより一般の複数窓口待ち行列に対しても適用可能である。しかし，これまでの研究の経緯および今後の改良の可能性を考慮して，本稿では M/G/s 待ち行列に限定して議論を進めることにする。

2. M/G/s 待ち行列の拡散近似

近似の対象とする M/G/s 待ち行列は先着順サービス規範にしたがう標準的なシステムであるとする：客はパラメータ λ のポアソン過程にしたがってシステムに到着する。s 個の窓口での客のサービス時間は独立で同一の分布 $B(\cdot)$ にしたがう確率変数で，その平均及び変動係数（＝標準偏差／平均）をそれぞれ μ^{-1} および c で表わす。また，システムは定常状態にあること，i. e.，$\rho=\lambda/s\mu<1$ を仮定する。

時刻 t におけるシステム内の客数を $Q(t)$ で表わすとき，重負荷時（i. e.，$\rho\simeq1$）には過程 $\{Q(t);t\geq0\}$ はある時間的に斉次な拡散過程 $\{X(t);t\geq0\}$ によって近似することができる。この事実は，厳密には，重負荷に漸近するパラメータをもつシステムの系列を考え，その系内客数過程の系列が拡散過程に弱収束することを示すことで証明され，重負荷極限定理と呼ばれている（Iglehart & Whitt (1970)）。この定理より，$\{X(t)\}$ は $\rho=1$ のとき，定義域が $R_+=[0,\infty)$ で原点に反射壁をもつ拡散過程になることが示される。また，R_+ の内部では $\{X(t)\}$ の挙動は次の２つの拡散パラメータに

よって完全に特徴づけられる。

$$a(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E[\{\varDelta_h X\}^2 \mid X(0)=x] \qquad (1a)$$

$$b(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}E[\varDelta_h X \mid X(0)=x] \qquad (1b)$$

ただし，$\triangle_h X=X(h)-X(0)$。$a(x)$ および $b(x)$ はそれぞれ無限小分散および無限小平均と呼ばれ，M/G/s 待ち行列に対しては，

$$a(x)=\lambda+s\mu c^2 \qquad (2a)$$

$$b(x)=\lambda-s\mu \qquad (2b)$$

であることが重負荷極限定理の結果として導かれる。

M/G/s 待ち行列に対する拡散近似モデルは，この重負荷極限定理に基づいて定式化されている。定式化にあたってまず問題になるのが拡散パラメータの定め方である。重負荷極限定理では行列長が非常に長い（理論的には無限大の）局面を想定しているために，$b(x)$ および $a(x)$ に課せられる条件 $X(0)=x$ が全く効いていない。すなわち，$X(0)<s$ という状況は無視され，$X(0)\geqq s$ という状況下における拡散パラメータのみが極限定理の中で意味を持ちえている。このことは，$X(0)<s$ という状況に対してはなんらかの発見的近似が必要であることを示唆している。また，同様の理由から，原点における境界条件についても重負荷極限定理はそれほど確かな情報を与えているわけではないことがわかる。$X(0)=0$ という事象は，極限定理が意味をもつ状況下ではほとんど（確率0でしか）起こり得ないから，反射壁という境界条件は，単に過程 $\{X(t)\}$ が負になり得ないことを表わしているだけで，境界における過程の挙動を正確に反映したものとは言えない。以上より，$\rho<1$ の状況を考慮する拡散近似モデルの定式化にあたっては，

Ⅰ．系内客数が窓口数以下のときの拡散パラメータ

Ⅱ．原点における境界条件

の2点に工夫が必要になってくる。

以下では，このⅠ，Ⅱを中心にして，これまでに提案されたM/G/s 待ち行列に対する拡散近似モデルを整理してみよう。

A．Halachmi & Franta (1978) の拡散近似モデル

GI/G/s 待ち行列に対し最初に提案された拡散近似モデルであり，重負荷極限定理の結果を直接的に取り入れている。まずⅠについては，M/M/s 待ち行列に対する無限小平均，無限小分散の表現を連続化して，M/G/s 待ち行列に対し，

$$a(x)=\lambda+\min(x,s)\mu c^2 \qquad (3a)$$

$$b(x)=\lambda-\min(x,s)\mu \qquad (3b)$$

とおいている。明らかに(3)は，$x\geqq s$ では重負荷極限定理の結果と一致しており，また，M/M/s 待ち行列に対しては正確な漸近値を与えている。Ⅱの原点における境界条件については，極限定理の結果にしたがい反射壁を仮定している。

Halachmi & Franta のモデルの最大の欠点は，拡散過程の密度関数が複雑な形をしているためにその扱いが容易でないことにある。すなわち，過程 $\{X(t)\}$ の定常状態における密度関数を $p(x)$ で表わすと，Halachmi & Franta の解は

$$p(x)=\begin{cases} K_1 q_1(x), & 0\leqq x\leqq s \\ K_2 q_2(x), & x>s \end{cases} \qquad (4)$$

で与えられる。ここで，

$$q_1(x)=(\lambda+\mu c^2 x)^{d-1}\exp(-2c^{-2}x) \qquad (5)$$

$$q_2(x)=\exp\{-2b(s)x/a(s)\} \qquad (6)$$

$$d=\frac{2\lambda(c^2+1)}{\mu c^4} \qquad (7)$$

であり，K_1，K_2 は未定定数で，条件

$$K_1\int_0^s q_1(x)\,dx+K_2\int_s^\infty q_2(x)\,dx=1 \qquad (8)$$

$$K_1 q_1(s)=K_2 q_2(s+0) \qquad (9)$$

によって決定され，陽に求めることはできない。

B．Kimura (1983) の拡散近似モデル

Halachmi & Franta のモデルのもつ欠点を取り除くために提案されたモデルであり，I，IIの両方にわたって新たな工夫が施されている。まずIについては，Halachmi & Franta のモデルの欠点が(3)が x の連続関数であることに起因していることに着目して，次の区分的定数関数を用いた拡散パラメータを提案している (Kimura (1987) 参照)。

$$a(x)=\lambda+\min([x],s)\mu c^2 \tag{10a}$$

$$b(x)=\lambda-\min([x],s)\mu \tag{10b}$$

ここで，$[x]$ は x より小さくない最小の整数を表わす。(10)は Halachmi & Franta のモデル同様，重負荷極限定理および M/M/s 待ち行列に対する結果と整合している。IIについては，極限定理の結果とは異なり反射壁を採用していない。これは，Halachmi & Franta のモデルの軽負荷時における低い近似精度を考慮したためで，システムが空である確率をより明確に定めるために基本復帰境界を用いている。基本復帰境界とは，簡単に言うと，過程 $\{X(t)\}$ が原点に到達したときにある指数分布にしたがう時間だけそこにとどまり，その後 R_+ 内部へ跳躍して過程が再開する境界のことをいう。この挙動は，ちょうど M/G/s 待ち行列が空である事象の前後の系内客数過程の挙動に対応している。

この定式化によると，過程 $\{X(t)\}$ の定常密度関数 $p(x)$ は次の常微分方程式系の解として与えられる。

$$\frac{1}{2}a_1p_1'(x)-b_1p_1(x)=\lambda\pi_0, \quad 0<x\leqq 1 \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}a_kp_k'(x)-b_kp_k(x)=0, \quad k-1<x\leqq k,\ k=2,\cdots\cdots,s \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}a_sp_{s+1}'(x)-b_sp_{s+1}(x)=0, \qquad x>s \tag{13}$$

ここで，$k=1,\cdots\cdots,s$ に対し，

$$a_k=a(k) \tag{14a}$$

$$b_k=b(k) \tag{14b}$$

であり，π_0 はシステムが空である確率を表わしている。また，$p_k(x)$ $(k=1,2,\cdots,s+1)$ は(11)－(13)の対応する各区間への $p(x)$ の制限を表わしている。さらに，付加的な条件として

$$\lim_{x\to 0}p_1(x)=0 \tag{15}$$

$$\lim_{x\to\infty}p_{s+1}(x)=0, \tag{16}$$

解の連続性の条件として

$$\lim_{x\to k-1}p_k(x)=p_{k-1}(k-1), \quad k=2,\cdots\cdots,s+1 \tag{17}$$

が課せられている。(11)－(17)を解くと $p(x)$ が π_0 を含む形で陽に求められる。この π_0 も正規化条件

$$\pi_0+\int_0^\infty p(x)dx=1 \tag{18}$$

より陽に求めることができる。

Kimura のモデルは Halachmi & Franta のモデルと比べ，解が扱い易い形で求められる点および近似精度の点で優れているが，基本復帰による境界からの跳躍のために原点周辺の確率密度が過度に希薄になるという欠点をもっている。この密度関数の歪みのために，軽負荷時での系内客数分布に対する近似精度は期待したほどは改善されていない。

C．Yao (1985) の拡散近似モデル

Kimura のモデルのもつ原点周辺での確率密度の歪みを補正する1つの方法は，重負荷極限定理が示すように，境界条件として反射壁を用いることである。Yao のモデルは，Iについては Kimura のモデルと同じ拡散パラメータ (i. e., (10))，IIについては Halachmi & Franta のモデルと同じ反射壁を用いている。

しかし，これだけの工夫では大幅な近似精度の向上は見込めないために，拡散近似の範囲をはずれた式変形を導入している。すなわち，密度関数の連続性を無視して制限関数 $p_k(x)$ をそれぞれ独立に扱い，M/M/s 待ち行列の結果を利用して関数列 $\{p_k(x)\}$ の相互関係を与えている。これにより，密度関数の連続性を崩すことを代償に軽負荷時での近似精度の向上をはかっている。しかし，$\{p_k(x)\}$ の相互関係の与え方として M/M/s 待ち行列の結果を利用したために，窓口数以下の系内客数に対する確率密度は M/M/s 待ち行列の対応する系内客数分布の影響を強く受けており，数値的にも両者に大きな差はない。つまり，本質的には Yao のモデルは系内客数が窓口数以下のときには M/M/s，窓口数以上のときには拡散近似を用いたものに他ならない。

3. 拡散パラメータに対する新たな提案

2節で紹介した3つの拡散近似モデルは，M/M/s 待ち行列に対してはかなりの近似精度をもっているが，M/D/s 待ち行列に対してはあまり高い精度をもっていない。この理由は，1つには拡散過程が連続時間連続状態マルコフ過程であるということにもよるが，いま1つの理由としては，連続関数と区分的定数関数という違いはあるものの3つのモデルの拡散パラメータがすべて M/M/s 待ち行列の漸近的特性をもとに決められているということが影響している。この節では，システムからの退去時間間隔に対する自然な近似をもとにして，重負荷極限定理および M/M/s 待ち行列とも整合する新しい拡散パラメータを提案する。

時間区間 $[0,t)$ 間のシステムへの累積到着客数およびシステムからの累積退去客数をそれぞれ $A(t)$ および $D(t)$ で表わすと，次の自明な式が成り立つ。

$$Q(t)=Q(0)+A(t)-D(t) \tag{19}$$

$A(t)$ はポアソン過程でありその漸近的特性は既知であるが，$D(t)$ は一般には再生過程ではなく，その漸近的特性を知るためには退去時間間隔の確率構造を明確にする必要がある。2節で用いた拡散パラメータは，この退去時間間隔をサービス時間と同一視して導かれている。ここでは，次の自然な近似を用いて退去時間間隔の確率構造を定めることにしよう。

【近似（Tijms et al. (1981))】

(a)サービス終了直後にシステム内に k $(1\leqq k<s)$ 人の客が残っているときには，次のサービス終了時点までの時間は確率変数 $V_k=\min(v_1^e,\cdots,v_k^e)$ と同じ分布にしたがう。ここで，$\{v_i^e;i=1,\cdots,k\}$ は定常残余サービス時間分布

$$B_e(t)=\mu\int_0^t\{1-B(u)\}du \tag{20}$$

にしたがう独立な確率変数列であるとする。

(b)サービス終了直後にシステム内に $k(\geqq s)$ 人の客が残っているときには，次のサービス終了時点までの時間は確率変数 v/s と同じ分布にしたがう。ここで v は分布 $B(\cdot)$ にしたがう確率変数である。

この近似は，M/G/s 待ち行列を(a)のとき M/G/∞待ち行列，(b)のときサービス能力が s 倍の M/G/1 待ち行列とみなすことに相当している。

拡散パラメータが Kimura のモデルと同様に区分的定数で与えられるものとして，近似(a)，(b)を用いると，$k=1,\cdots\cdots,s-1$ に対して

$$a_k=\lambda+(\gamma_{2k}-\gamma_{1k}^2)/\gamma_{1k}^3 \tag{21a}$$

$$b_k=\lambda-\gamma_{1k}^{-1} \tag{21b}$$

$k=s$ に対して

$$a_s=\lambda+s\mu c^2 \tag{22a}$$

$$b_s=\lambda-s\mu \tag{22b}$$

を得る。ここで，$n=1,2$ に対して

$$\gamma_{nk}=E[V_k^n]=n\int_0^\infty x^{n-1}\{1-B_e(x)\}^k dx \tag{23}$$

である。一般には，$\{\gamma_{nk}\}$ の計算は容易でないが，サービス時間分布が指数分布（i. e., M/M/s）のときには，

$$a_k=\lambda+k\mu \tag{24a}$$
$$b_k=\lambda-k\mu,\qquad k=1,\cdots,s-1 \tag{24b}$$

となり，また一定時間分布（i. e., M/D/s）のときには

$$a_k=\lambda+k(k+1)\mu/(k+2) \tag{25a}$$
$$b_k=\lambda-(k+1)\mu,\qquad k=1,\cdots,s-1 \tag{25b}$$

で与えられるため，変動係数がそれほど大きくない（e. g., $c^2\leqq 2$ 程度の）一般分布 $B(\cdot)$ に対しては，(24)と(25)の内挿近似を用いれば実用上問題はないと考えられる。すなわち，$k=1,\cdots$ $\cdots,s-1$ に対して

$$a_k=\lambda+\{c^2+(1-c^2)(k+1)/(k+2)\}k\mu \tag{26a}$$
$$b_k=\lambda-(k+1-c^2)\mu \tag{26b}$$

Kimura および Yao のモデルの拡散パラメータ（i. e., (10)）と比較すると，(22)，(26) は $c^2<1$（$c^2>1$）のとき無限小平均では小さく（大きく），無限小分散では大きく（小さく）評価していることがわかる。このため一概には待ち特性量への影響は予測できず，数値的検討が必要である（Kimura (1988)）。

4. おわりに

本稿では拡散近似モデルを定式化する際の問題点として，拡散パラメータと境界条件の2つを取り上げた。この2つが定まれば，後は拡散方程式を解くことで定常確率密度が導出できることになる。しかし，実際にはこれだけでは近似精度を改善するには不十分であり，Yao のモデルも行なわれているように，M/G/s 待ち行列に対して厳密に，あるいは近似的にでも成り立つ性質をモデルの中に取り入れる必要がある。このためには，取り入れる性質の数に等しい自由度を新たにモデルの中に設けなければならない。Yao の用いた方法は，関数列 $\{p_k(x)\}$ の連続性をはずすことで s 個の新たな自由度を与えることを意味していた。

密度関数の不連続化以外に新たな自由度を導入する方法としては，密度関数の離散化があげられる。ここで離散化とは，密度関数 $p(x)$ から系内客数分布 $\{\pi_k;k\geqq 0\}$ を "切り出す" ことをいう。Kimura (1986) は GI/G/1 待ち行列の拡散近似モデルに対して，この離散化の段階での厳密解の取り入れを提案している。M/G/s 待ち行列に対しても基本的にこのアプローチは可能であり，M/M/s 待ち行列と整合する系内客数分布を密度関数から切り出すことができる（Kimura (1988)）。

参考文献

Halachmi, B. and W. R. Franta, 1978. "A Diffusion Approximation to the Multi-Server Queue," *Management Sci.*, 24, 522–529.

Iglehart, D. L. and W. Whitt, 1970. "Multiple Channel Queue in Heavy Traffic," *Adv. Appl. Prob.*, 2, 150–177.

Kimura, T., 1983. "Diffusion Approximation for an M/G/m Queue," *Operations Res.*, 31, 304–321.

Kimura, T., 1986. "Refining Diffusion Approximations for GI/G/1 Queues : A Tight Discretization Method," *Teletraffic Issues in an Advanced Information Society, ITC11*, Vol. 1, 3. 1A. 2. 1–7, M. Akiyama (ed.), North-Holland.

Kimura, T., 1987. "A Unifying Diffusion Model for State-Dependent Queues," *Optimization*, 18, 265–283.

Kimura, T., 1988. "A Refined Diffusion Model for the M/G/s Queue," in preparation.

Tijms, H. C., M. H. van Hoorn and A. Federgruen, 1981. "Approximations for the Steady-State Probabilities in the M/G/c Queue," *Adv. Appl. Prob.*, 13, 186–206.

Yao, D. D., 1985. "Refining the Diffusion Approximation for the M/G/m Queue," *Operations. Res.*, 33, 1266–1277.