経済学研究 *38-4*
北海道大学 1989. 3

<研究ノート>

サヴェジ書における殆ど一様な分割 (2) 定量的確率

園 信太郎

1. 目的

サヴェジ［1］第3章第3節の33頁最後の段落から36頁最後から第二番目の段落までにおける議論を簡潔且つ精確に再構成する事がこの論述の目的である。しかし最後の節である第5節において視る様に筆者の提示する証明の様式はサヴェジ氏の様式とは異なったものである。但しサヴェジ氏の様式については末尾の付録において述べる。

サヴェジ氏は同書の34頁から35頁にかけて定理2を提示し且つその証明の概略を35頁から36頁にかけて展開している。この略式証明を論理的により精確なものへと精錬する事がこの筆者の論述の中心的作業である。この作業の副産物として第5節において視る様に，サヴェジ氏の定理2の仮定を満たす定性的確率に対して概一致する定量的確率は定量的に精密である事が示され，さらにまたこの結果に基づいてこの様な概一致する定量的確率は，若しそれが存在するのならば，一意的に定まる事が示される。この様な径路により一意性を確立する流儀は付録において述べるサヴェジ氏の流儀との比較において典雅とは言い難い。しかしそれは定性的確率と殆ど一様な分割とに関する論証の連鎖を一歩一歩確立する事により殆ど自然に概一致する定量的確率の一意性を捕えると言う事において論理的に堅実であり且つ一貫していると筆者は判断するのである。また概一致する定量的確率が定量的に精密である事を先に確立する事により「何故一意的に定まるのか」が感性的に把握されやすくなると思うのである。

またサヴェジ氏の36頁第 8a 段においては暗黙の内に従属選択の原理が利用されているが以下の論述の第5節の［定義16］及び［命題20］に対する［証明］において視る様に，ここでは従属選択の原理を明確な様式において利用する事にした。

なお付録の最初の［注意］において指摘する様にサヴェジ氏が36頁において導入している二つの補助不等式 (8) 及び 6b はサヴェジ氏の論述様式を尊重するのならばより精密な二つの不等式へと置き換える事が正当であり，またさらには以下の第5節の［命題22］の証明中の式6において視る様に，この精密化された 6b はさらにより精密な，しかもサヴェジ氏の議論よりもより簡潔な論述によって得られる，一個の不等式によって置き換える事ができるのである。

［注意］ 1を最初の元とする自然数系列をNと表記し且つNの元を自然数と呼ぶ。従って零としての0は自然数系列の中には含まれない。また A 及び B の各各を任意の集合とし且つ f を A から B への任意の写像とする場合，f の定義域を $\mathrm{dom}(f)$ と表記する。即ち $\mathrm{dom}(f)=A$ である。また C を A の任意の部分集合とする場合，C の f による像を $f[C]$ と表記する。即ち $f[C]=\{y \mid x \in C$ を満たす或 x が存在して $y=f(x)\}$ である。また D を B の

任意の部分集合とする場合，D の f による逆像を $f^{-1}[D]$ と表記する。即ち $f^{-1}[D]=\{x\mid x\in\mathrm{dom}(f)$ 且つ $f(x)\in D\}$ である。

また n 及び m の各各を $N\cup\{0\}$ の任意の元とする場合，n 以下の自然数の全体及び m より大であり且つ n 以下である自然数の全体を各各 $N[n]$ 及び $N[m;n]$ と表記する。即ち「$N[n]=\{x\mid x\in N$ 且つ $x\leqq n\}$ 且つ $N[m;n]=\{x\mid x\in N$ 且つ $m\lneqq x$ 且つ $x\leqq n\}$」である。$N[0]=\phi$，$N[n]=N[0;n]$，及び $N[m;n]=N[n]\setminus N[m]$ の各各が従う。

2. 殆ど一様な分割

この節においては［定義1］から［定義9］までを導入する。また［命題1］から［命題8］までを示す。［命題6］，［命題7］，及び［命題8］がこの節の目標である。殆ど一様な分割は［定義9］において導入する。

［注意］以下のこの論文における議論においては任意の可測空間 $\langle S,\ \mathfrak{A}\rangle$ を固定する。

［定義1］f を任意の集合とする。「f は $\mathfrak{A}$ 値列である」或いは略式に「f は列である」と言う事は「$n\in N$ を満たす或 n が存在して f は $N[n]$ から $\mathfrak{A}$ への写像である」と言う事であると定義する。この n を「f の長さ」と呼ぶ。f の長さは一意的に定まる。また「f は $\mathfrak{A}$ 値 n 重列である」或いは「f は n 重列である」と言う表現も用いる。

［記号］任意の $\mathfrak{A}$ 値列 f 及び f の定義域の任意の部分集合 J に対して

$$\langle f;J\rangle=\cup\{f(j)\mid j\in J\}$$

によって記号 $\langle\cdot\ ;\ \cdot\rangle$ を導入する。

［定義2］f を任意の $\mathfrak{A}$ 値列とし且つ a を f の定義域からそれ自身への任意の全単射とする。合成写像 $f\circ a$ を「f の a 変換」と呼ぶ。f の a 変換も亦 $\mathfrak{A}$ 値列であり且つその長さは f の長さに等しい。g を f の a 変換とし且つ n を f の長さとする場合「$N[n]$ の任意の部分集合 J に対して，$\langle g;J\rangle=\langle f;a[J]\rangle$ 且つ $\langle f;J\rangle=\langle g;a^{-1}[J]\rangle$」が従う。

［定義3］f を任意の $\mathfrak{A}$ 値列とし且つ n を f の長さとする。また m を任意の自然数とする。除法原理により「$n=a\cdot m+b$ 且つ $a\in N\cup\{0\}$ 且つ $b\in N[m-1]\cup\{0\}$」を満たす $\langle a,\ b\rangle$ が一意的に存在する。この $\langle a,\ b\rangle$ を用いる。

「$j\in N[m]$ を満たす任意の j に対して，$j\in N[b]$ ならば $K(a,\ b;\ j)=N[a\cdot(j-1);\ a\cdot j]\cup\{a\cdot m+j\}$ 且つ $j\in N[b;\ m]$ ならば $K(a,\ b;\ j)=N[a\cdot(j-1);\ a\cdot j]$」によって有限列 $\langle K(a,\ b;\ j);\ j\in N[m]\rangle$ を定義する。さらに「$j\in N[m]$ を満たす任意の j に対して $g(j)=\langle f;\ K(a,\ b;\ j)\rangle$」によって $N[m]$ を定義域とする写像 g を定義する。この g を「f の m 重変形」と呼ぶ。f の m 重変形 g は $\mathfrak{A}$ 値 m 重列である。

［定義4］f を任意の集合とする。「f は $\mathfrak{A}$ 値分割である」或いは略式に「f は分割である」る言う事は「f は $\mathfrak{A}$ 値列であり且つ各各が f の定義域に属する任意の元である j 及び k に対して，$j\neq k$ ならば $f(j)\cap f(k)=\phi$」と言う事であると定義する。f の長さを n とする場合，「f は $\mathfrak{A}$ 値 n 重分割である」或いは「f は n 重分割である」と言う表現も用いる。また A を $\mathfrak{A}$ の任意の元とする場合において，f の値域の合併が A に等しい即ち $A=\langle f;\mathrm{dom}(f)\rangle$ ならば，「f は A に対する分割である」と表現する。分割 f に対して「I 及び J の各各が f の定義域の任意の部分集合ならば，$\langle f;\ I\cap J\rangle=\langle f;\ I\rangle\cap\langle f;\ J\rangle$ 且つ $\langle f;\ I\rangle\setminus\langle f;\ J\rangle=\langle f;\ I\setminus J\rangle$」が従う。また定義域 $\mathrm{dom}(f)$ からそれ自身への任意の全単射 a に対して，分割 f の

a 変換も亦分割となる。m を任意の自然数とする場合，f の m 重変形も亦分割である。

［注意］以下で定義する定性的確率についてはサヴェジ［1］第3章第2節特に31頁の最後の段落から33頁の問6まで，及び園［2］，［4］，及び［5］の各各第2節，第3節，及び第5節を参照する事を勧める。

［定義5］$\preccurlyeq$ を任意の集合とする。「$\preccurlyeq$ は可測空間 $\langle S, \mathcal{A}\rangle$ 上の定性的確率である」と言う事は「$\preccurlyeq$ は以下の性質1から性質5までを満たす」と言う事であると定義する。

性質1。$\preccurlyeq$ は $\mathcal{A}$ 上の二項関係である。
性質2。各各が $\mathcal{A}$ の任意の元である A 及び B に対して，$A\preccurlyeq B$ 或いは $B\preccurlyeq A$。
性質3。各各が $\mathcal{A}$ の任意の元である A，B，及び C に対して，「$A\preccurlyeq B$ 且つ $B\preccurlyeq C$」ならば $A\preccurlyeq C$。
性質4。「$A\cap C=\phi$ 且つ $B\cap C=\phi$」を満たす各各が $\mathcal{A}$ の任意の元である A，B，及び C に対して，$A\preccurlyeq B$ と $A\cup C\preccurlyeq B\cup C$ とは同値である。
性質5。$S\preccurlyeq\phi$ には非ず且つ $\mathcal{A}$ の任意の元 A に対して $\phi\preccurlyeq A$。

また「$A\preccurlyeq B$ には非ず」を「$B\not\preccurlyeq A$」と表記する。

［注意］以下のこの論文における議論においては $\langle S, \mathcal{A}\rangle$ 上の任意の定性的確率 $\preccurlyeq$ を固定する。また $\mathcal{A}$ に属する元を「事象」と呼ぶ事もある。例えば，「$\mathcal{A}$ に属する任意の元 A」を「任意の事象 A」と表現するのである。

［定義6］「各各が任意の事象である A 及び B に対して，「$A\preccurlyeq B$ 且つ $B\preccurlyeq A$」と言う場合且つその場合に限って「$A\mathrel{\dot{\approx}}B$」」によって $\mathcal{A}$ 上の二項関係 $\dot{\approx}$ を定義する。$\dot{\approx}$ は $\mathcal{A}$ 上の同値関係である。

［定義7］f を任意の集合とする。「f は非減少的列である」と言う事は「f は $\mathcal{A}$ 値列であり且つ各各が f の定義域に属する任意の元である j 及び k に対して，$j\leqq k$ ならば $f(j)\preccurlyeq f(k)$」と言う事であると定義する。また a を f の定義域からそれ自身への任意の全単射とする場合，「a は列 f を非減少化する全単射である」と言う事は「f の a 変換は非減少的列である」と言う事であると定義する。

［命題1］f を任意の $\mathcal{A}$ 値列とする。列 f を非減少化する或全単射が存在する。

［注意］次の証明においては帰納的定義による関数の導入を用いる事はない。

［証明］f の長さを n とする。

$K=\{k\,|\,k\in N[n]$ 且つ「$f|N[k]$ を非減少化する或全単射が存在する」$\}$

と置く。「$K\subseteqq N[n]$ 且つ $1\in K$」が従う。また「「$k\in K$ 且つ $k\lneqq n$」を満たす任意の k に対して $k+1\in K$」。これを示す。

「$k\in K$ 且つ $k\lneqq n$」を満たす任意の k を固定する。$k\in K$ より $k\in N[n]$ が従う。ところが $k\lneqq n$。故に $k+1\in N[n]$ が従う。また列 $f|N[k]$ を非減少化する或全単射が存在する。この全単射を固定して b と表記する。

「$l\in N[k]$ を満たす任意の l に対して $f(b(l))\preccurlyeq f(k+1)$」の場合を考える。「$l\in N[k+1]$ を満たす任意の l に対して，「$l\in N[k]$ ならば $b'(l)=b(l)$」且つ「$l=k+1$ ならば $b'(l)=k+1$」」によって $N[k+1]$ を定義域とする写像 b' を定義する。この b' は列 $f|N[k+1]$ を非減少化する全単射である。

「$m \in N[k]$ を満たす或 m が存在して $f(k+1) \not\preccurlyeq f(b(m))$」の場合を考える。$m(*)=\min\{m \mid m \in N[k]$ 且つ $f(k+1) \not\preccurlyeq f(b(m))\}$ と置く。「$m \in N[k+1]$ を満たす任意の m に対して，「$m \in N[m(*)-1]$ ならば $b^*(m)=b(m)$」且つ「$m=m(*)$ ならば $b^*(m)=k+1$」且つ「$m \in N[m(*);k+1]$ ならば $b^*(m)=b(m-1)$」」によって $N[k+1]$ を定義域とする写像 b^* を定義する。b^* は $N[k+1]$ からそれ自身への全単射である。さらに b^* は列 $f \mid N[k+1]$ を非減少化する全単射である。これを示す。$l \lneqq m$ を満たす各各が $N[k+1]$ の任意の元である l 及び m を固定する。

$m \lneqq m(*)$ の場合を考える。「$l \in N[m(*)-1]$ 且つ $m \in N[m(*)-1]$」が従う。故に「$f(b^*(l))=f(b(l))$ 且つ $f(b^*(m))=f(b(m))$」。ところが b は $f \mid N[k]$ を非減少化する全単射である。故に $f(b(l)) \preccurlyeq f(b(m))$ が従う。故に $f(b^*(l)) \preccurlyeq f(b^*(m))$ が従う。

$m=m(*)$ の場合を考える。$l \in N[m(*)-1]$ が従う。故に「$f(b^*(l))=f(b(l))$ 且つ $f(b^*(m))=f(k+1)$」。ところが $l \lneqq m(*)$。故に $m(*)$ の最小性より $f(b(l)) \preccurlyeq f(k+1)$ が従う。故に $f(b^*(l)) \preccurlyeq f(b^*(m))$ が従う。

「$l \lneqq m(*)$ 且つ $m(*) \lneqq m$」の場合を考える。「$l \in N[m(*)-1]$ 且つ $m \in N[m(*);k+1]$」が従う。故に「$f(b^*(l))=f(b(l))$ 且つ $f(b^*(m))=f(b(m-1))$」。ところが $m(*) \leqq m-1$。故に $l \lneqq m-1$。ところが b は $f \mid N[k]$ を非減少化する全単射である。故に $f(b(l)) \preccurlyeq f(b(m-1))$ が従う。故に $f(b^*(l)) \preccurlyeq f(b^*(m))$ が従う。

「$l=m(*)$ 且つ $m(*) \lneqq m$」の場合を考える。$m \in N[m(*);k+1]$ が従う。故に「$f(b^*(l))=f(k+1)$ 且つ $f(b^*(m))=f(b(m-1))$」。ところが $m(*)$ の定義より $f(k+1) \not\preccurlyeq f(b(m(*)))$ が従う。また b は $f \mid N[k]$ を非減少化する全単射である事及び $m(*) \leqq m-1$ より $f(b(m(*))) \preccurlyeq f(b(m-1))$。故に $f(k+1) \not\preccurlyeq f(b(m-1))$ が従う。故に $f(b^*(l)) \not\preccurlyeq f(b^*(m))$ が従う。

「$m(*) \lneqq l$ 且つ $m(*) \lneqq m$」の場合を考える。「$l \in N[m(*);k+1]$ 且つ $m \in N[m(*);k+1]$」が従う。故に「$f(b^*(l))=f(b(l-1))$ 且つ $f(b^*(m))=f(b(m-1))$」。ところが b は $f \mid N[k]$ を非減少化する全単射であり，また $l \lneqq m$ より $l-1 \lneqq m-1$。故に $f(b(l-1)) \preccurlyeq f(b(m-1))$。故に $f(b^*(l)) \preccurlyeq f(b^*(m))$ が従う。

故に b^* は列 $f \mid N[k+1]$ を非減少化する全単射である。

各場合において，列 $f \mid N[k+1]$ を非減少化する或全単射が存在する。ところが $k+1 \in N[n]$。故に $k+1 \in K$ が従う。

以上により $K=N[n]$ が従う。ところが $n \in N[n]$。故に $n \in K$。K の定義より「列 $f \mid N[n]$ を非減少化する全単射が存在する」が従う。$f \mid N[n]=f$ より結論が従う。　［証明終］

［定義８］f を任意の集合とする。「f は非減少的分割である」と言う事は「f は非減少的列であり且つ f は分割である」と言う事であると定義する。f の長さが n である場合には「f は非減少的 n 重分割である」と言う表現も用いる。

［命題１］より次の命題が従う。

［命題２］f を任意の $\mathcal{O}$ 値分割とする。f の定義域からそれ自身への或全単射 a が存在して f の a 変換は非減少的分割である。

［定義３］，［定義４］，［定義５］，及び［定義

8］より次の命題が従う。

［命題3］n 及び m の各各を任意の自然数とし且つ f を任意の $\mathscr{A}$ 値列とする。f が非減少的 $n\cdot m$ 重分割であるのならば f の m 重変形は非減少的 m 重分割である。

［定義9］f を任意の集合とする。「f は殆ど一様な分割である」と言う事は「f は $\mathscr{A}$ 値分割であり且つ各各が f の定義域の任意の部分集合である I 及び J に対して，$\#(I)\lneqq\#(J)$ ならば $\langle f;I\rangle\precneqq\langle f;J\rangle$」と言う事であると定義する。$f$ の長さが n である場合には「f は殆ど一様な n 重分割である」と言う表現も用いる。また任意の事象 B に対して f の値域の合併即ち $\langle f;\mathrm{dom}(f)\rangle$ が B に等しい場合には「f は B に対する殆ど一様な分割である」と表現する。f が非減少的列である場合には「f は B に対する非減少的な殆ど一様な分割である」と表現する。

［定義2］及び［定義9］より次の命題が従う。

［命題4］f を任意の殆ど一様な分割とし且つ a を f の定義域からそれ自身への任意の全単射とする。f の a 変換も亦殆ど一様な分割である。

［定義3］及び［定義9］より次の命題が従う。

［命題5］n 及び m の各各を任意の自然数とし且つ f を任意の $\mathscr{A}$ 値列とする。f が殆ど一様な $n\cdot m$ 重分割であるのならば f の m 重変形は殆ど一様な m 重分割である。

［命題6］n 及び m の各各を任意の自然数とし且つ f を任意の $\mathscr{A}$ 値列とする。

［仮定］f は殆ど一様な $n\cdot m$ 重分割である。

［結論］$m^2\leqq n$ ならば f の m 重変形は殆ど一様な m 重分割である。

［証明］除法原理により「$n=a\cdot m+b$ 且つ $a\in N\cup\{0\}$ 且つ $b\in N[m-1]\cup\{0\}$」を満たす $\langle a,\ b\rangle$ が一意的に存在する。この $\langle a,\ b\rangle$ を用いる。f の m 重変形を g とする。［定義3］における有限列 $\langle K(a,\ b\ ;\ j)\ ;\ j\in N[m]\rangle$ を用いる。また「$H\subseteqq N[m]$ を満たす任意の H に対して $K(H)=\bigcup\{K(a,\ b\ ;\ j)\,|\,j\in H\}$」によって記号 $K(\cdot)$ を定義する。$H\subseteqq N[m]$ を満たす任意の H を考える。「$j\in N[m]$ を満たす任意の j に対して，$j\in N[b]$ ならば $\#(K(a,\ b\ ;\ j))=a+1$ 且つ $j\in N[b\ ;\ m]$ ならば $\#(K(a,\ b\ ;\ j))=a$」より $\#(K(H))=(a+1)\cdot\#(H\cap N[b])+a\cdot\#(H\cap N[b\ ;\ m])$ が従う。故に $\#(K(H))=a\cdot\#(H)+\#(H\cap N[b])$。故に次の式1及び式2が従う。

式1。$\#(K(H))\leqq a\cdot\#(H)+b$,

式2。$a\cdot\#(H)\leqq\#(K(H))$。

一方「$K(H)\subseteqq N[n\cdot m]$ 且つ $\langle g;H\rangle=\langle f;K(H)\rangle$」が従う。

$m^2\leqq n$ と仮定する。$m\leqq a$ が従う。$\#(I)\lneqq\#(J)$ を満たす各各が $N[m]$ の任意の部分集合である I 及び J を固定する。式1及び「$b\lneqq m$ 且つ $m\leqq a$」より $\#(K(I))\lneqq a\cdot(\#(I)+1)$ が従う。ところが $\#(I)+1\leqq\#(J)$。故に

式3。$\#(K(I))\lneqq a\cdot\#(J)$

が従う。一方式2より $a\cdot\#(J)\leqq\#(K(J))$。故に式3より $\#(K(I))\lneqq\#(K(J))$。f は殆ど一様な分割である。故に $\langle f;K(I)\rangle\precneqq\langle f;K(J)\rangle$。故に $\langle g;I\rangle\precneqq\langle g;J\rangle$ が従う。ここに I 及び

J の各各は $N[m]$ の任意の部分集合であり且つ $\sharp(I)\lneqq\sharp(J)$。故に［定義9］より g は殆ど一様な m 重分割である。ところが g は f の m 重変形。故に命題が従う。［証明終］

［命題7］n を任意の自然数とし且つ f 及び g の各各を任意の α 値列とする。

［仮定］f 及び g の各各は非減少的 n 重分割であり且つ $\langle f;\ N[n]\rangle\preccurlyeq\langle g;\ N[n]\rangle$。

［結論］$r\in N[n]\cup\{0\}$ を満たす任意の r に対して $\langle f;\ N[r]\rangle\preccurlyeq\langle g;\ N[n-r;\ n]\rangle$。

［証明］$M=\{r\,|\,r\in N[n]\cup\{0\}$ 且つ $\langle f;\ N[r]\rangle\preccurlyeq\langle g;\ N[n-r;\ n]\rangle\}$ と置く。$M\subseteqq N[n]\cup\{0\}$ 且つ $0\in M$ が従う。「$m\in M$ 且つ $m\lneqq n$」を満たす任意の m を固定する。$m+1\in M$ を示す。$m\in M$ より $m\in N[n]\cup\{0\}$ が従う。ところが $m\lneqq n$。故に $m+1\in N[n]\cup\{0\}$ が従う。$\langle f;\ N[m+1]\rangle\preccurlyeq\langle g;\ N[n-(m+1);\ n]\rangle$ を示す。

背理法による。$\langle g;\ N[n-(m+1);\ n]\rangle\not\preccurlyeq\langle f;\ N[m+1]\rangle$ と仮定して矛盾を導く。$\langle f; N[n]\rangle\preccurlyeq\langle g;\ N[n]\rangle$ より $m+1\lneqq n$ が従う。

$m\in M$ より $\langle f;\ N[m]\rangle\preccurlyeq\langle g;\ N[n-m;\ n]\rangle$ が従う。ところが「$\langle f;\ N[m+1]\rangle=\langle f;\ N[m]\rangle\cup f(m+1)$ 且つ $\langle g;\ N[n-(m+1);\ n]\rangle=g(n-m)\cup\langle g;\ N[n-m; n]\rangle$ 且つ $g(n-m)\cap\langle g;\ N[n-m;\ n]\rangle=\phi$」。故に $g(n-m)\not\preccurlyeq f(m+1)$。ところが f 及び g の各各は非減少的列であるので，故に「$j\in N[n-(m+1)]$ を満たす任意の j 及び $k\in N[m+1; n]$ を満たす任意の k に対して，$g(j)\not\preccurlyeq f(k)$」。一方 f は分割である。故に「$N[m+1;\ n]\neq\phi$ 且つ $\sharp(N[n-(m+1)])=\sharp(N[m+1;\ n])$」より $\langle g;\ N[n-(m+1)]\rangle\not\preccurlyeq\langle f;\ N[m+1; n]\rangle$ が従う。ところが $\langle g; N[n-(m+1);\ n]\rangle\not\preccurlyeq\langle f;\ N[m+1]\rangle$。故に $\langle g;\ N[n-(m+1)]\rangle\cup\langle g;\ N[n-(m+1);\ n]\rangle\not\preccurlyeq\langle f;\ N[m+1]\rangle\cup\langle f;\ N[m+1;\ n]\rangle$。故に $\langle g;\ N[n]\rangle\not\preccurlyeq\langle f;\ N[n]\rangle$。ところが $\langle f;\ N[n]\rangle\preccurlyeq\langle g;\ N[n]\rangle$。故に矛盾が生じる。

故に $\langle f; N[m+1]\rangle\preccurlyeq\langle g; N[n-(m+1); n]\rangle$ が従う。ところが $m+1\in N[n]\cup\{0\}$。故に $m+1\in M$ が従う。

以上により $M=N[n]\cup\{0\}$ が従う。$r\in N[n]\cup\{0\}$ を満たす任意の r を固定する。$r\in M$ が従う。故に $\langle f;\ N[r]\rangle\preccurlyeq\langle g;\ N[n-r;\ n]\rangle$ が従う。命題が従う。［証明終］

［命題8］n を任意の自然数とし且つ f 及び g の各各を任意の α 値列とする。

［仮定］f 及び g の各各は殆ど一様な n 重分割であり且つ $\langle f;\ N[n]\rangle\preccurlyeq\langle g;\ N[n]\rangle$。

［結論］各各が $N[n]$ の任意の部分集合である I 及び J に対して，$\sharp(I)+1\lneqq\sharp(J)$ ならば $\langle f;\ I\rangle\preccurlyeq\langle g;\ J\rangle$。

［証明］f を非減少化する全単射を a とし且つ f の a 変換を f^* とする。また g を非減少化する全単射を b とし且つ g の b 変換を g^* とする。I 及び J の各各を $N[n]$ の任意の部分集合とし且つ $\sharp(I)+1\lneqq\sharp(J)$ とする。$\sharp(I)+1\in N[n]$ が従う。

f^* は殆ど一様な分割である。故に「$\sharp(a^{-1}[I])=\sharp(I)$ 且つ $\sharp(N[\sharp(I)+1])=\sharp(I)+1$」より $\langle f^*;\ a^{-1}[I]\rangle\preccurlyeq\langle f^*;\ N[\sharp(I)+1]\rangle$ が従う。ところが $\langle f;\ I\rangle=\langle f^*;\ a^{-1}[I]\rangle$。故に

式1。$\langle f;\ I\rangle\preccurlyeq\langle f^*;\ N[\sharp(I)+1]\rangle$

が従う。ところが［命題7］より

式2。$\langle f^*;\ N[\sharp(I)+1]\rangle\preccurlyeq\langle g^*;\ N[n-(\sharp(I)$

$+1)\,;\,n]\rangle$

が従う。ところが g^* は殆ど一様な分割である。故に「$\#(N[n-(\#(I)+1)\,;\,n])=\#(I)+1$ 且つ $\#(I)+1\lneqq\#(J)$ 且つ $\#(b^{-1}[J])=\#(J)$」より $\langle g^*\,;N[n-(\#(I)+1)\,;n]\rangle\preccurlyeq\langle g^*\,;\,b^{-1}[J]\rangle$ が従う。ところが $\langle g^*\,;\,b^{-1}[J]\rangle=\langle g^*\,;\,J\rangle$。故に

式3。$\langle g^*\,;\,N[n-(\#(I)+1)\,;\,n]\rangle\preccurlyeq\langle g\,;\,J\rangle$

が従う。故に，式1，式2，及び式3より

$$\langle f\,;\,I\rangle\preccurlyeq\langle g\,;\,J\rangle$$

が従う。［証明終］

3. 四つの補助不等式

この節においては［定義10］，［定義11］，及び［定義12］を導入する。また［命題9］から［命題14］までを示す。［命題13］及び［命題14］において各各二つの不等式を示す。

［定義10］$\langle S,\ \mathcal{A}\rangle$ 上の任意の定性的確率を考える。「その定性的確率は殆ど精密である」と言う事は「任意の自然数 m に対して或自然数 n が存在して，$m\leqq n$ 且つ S に対する或殆ど一様な n 重分割が存在する」と言う事であると定義する。これは非常に略式に表現するのならば「無限に多くの或自然数達に対してそれらを長さ達とする S に対する殆ど一様な分割達が存在する」と言う事である。

［命題9］$\preccurlyeq$は殆ど精密であると仮定する。任意の自然数 m に対して S に対する或殆ど一様な m 重分割が存在する。

［証明］m を任意の自然数とする。［定義10］より，$m^2\leqq n$ を満たす或自然数 n 及びこの n を長さとする S に対する或殆ど一様な分割が存在する。故に［命題6］より結論が従う。

［証明終］

［定義11］$\preccurlyeq$は殆ど精密であると仮定する。「任意の自然数 n 及び任意の事象 A に対して，「$r\in N[n]\cup\{0\}$ 且つ S に対する或殆ど一様な n 重分割 f が存在して「f の定義域の或部分集合 J に対して，$r=\#(J)$ 且つ $\langle f\,;\,J\rangle\preccurlyeq A$」」を満たす r の最大値を $k(A,\ n)$ と表記する」によって $\mathcal{A}\times N$ を定義域とする写像 $k(\cdot,\ \cdot)$ を定義する。即ち任意の事象 A 及び任意の自然数 n に対して，

$k(A,\ n)=\max\{r\,|\,r\in N[n]\cup\{0\}$ 且つ S に対する或殆ど一様な n 重分割 f 及び f の定義域の或部分集合 J が存在して「$r=\#(J)$ 且つ $\langle f\,;\,J\rangle\preccurlyeq A$」$\}$

と置く。［命題9］より写像 $k(\cdot,\ \cdot)$ は定義可能である。「任意の事象 A 及び任意の自然数 n に対して $k(A,\ n)\in N[n]\cup\{0\}$」が従う。

［定義12］$\preccurlyeq$は殆ど精密であると仮定する。A を任意の事象とし且つ n を任意の自然数とする。また f を S に対する任意の殆ど一様な分割とする。「f は $k(A,\ n)$ を獲得する」と言う事は「f の長さは n であり且つ $k(A,\ n)=\max\{r\,|\,r\in N[n]\cup\{0\}$ 且つ $\langle f\,;\,N[r]\rangle\preccurlyeq A\}$」と言う事であると定義する。また「$f$ は $k(A,\ n)$ を非減少的に獲得する」と言う事は「f は $k(A,\ n)$ を獲得し且つ f は非減少的列である」と言う事であると定義する。

［定義11］及び［定義12］より次の命題が従う。

［命題10］$\preccurlyeq$は殆ど精密であると仮定する。任意の事象 A 及び任意の自然数 n に対して S に対する或殆ど一様な分割 f が存在して，f は

$k(A, n)$ を獲得する。

［命題11］ $\preccurlyeq$は殆ど精密であると仮定する。A を任意の事象とし且つ n を任意の自然数とする。$k(A, n)$ を非減少的に獲得する S に対する或殆ど一様な分割が存在する。

［証明］［定義11］より「S に対する或殆ど一様な n 重分割 f が存在して f の定義域の或部分集合 J に対して「$k(A, n)=\#(J)$ 且つ $\langle f; J\rangle\preccurlyeq A$」」が従う。ここにおける f 及び J を固定する。また $k^*=k(A, n)$ と置く。$k^*\in N[n]\cup\{0\}$ が従う。f を非減少化する全単射を a とし且つ f の a 変換を g とする。g は S に対する殆ど一様な n 重分割であり且つ非減少的列である。また $k^*=\#(a^{-1}[J])$ が従う。「b は $N[k^*]$ から $a^{-1}[J]$ への写像であり且つ各各が $N[k^*]$ の任意の元である i 及び j に対して「$i\leqq j$ と $b(i)\leqq b(j)$ とは同値である」」を満たす b が一意的に存在する。この b を用いる。$k^*=0$ の場合においては，$b=\phi$ となる。「b は $N[k^*]$ から $a^{-1}[J]$ への全単射であり且つ $N[k^*]$ の任意の元 i に対して $i\leqq b(i)$」が従う。

$r^*=\max\{r\,|\,r\in N[n]\cup\{0\}$ 且つ $\langle g; N[r]\rangle\preccurlyeq A\}$ と置く。故に $\langle g; N[r^*]\rangle\preccurlyeq A$。$\langle g; N[r^*]\rangle=\langle f; a[N[r^*]]\rangle$ より $\langle f; a[N[r^*]]\rangle\preccurlyeq A$ が従う。故に $k(A, n)$ の最大性より $\#(a[N[r^*]])\leqq k(A, n)$。$r^*=\#(a[N[r^*]])$ より $r^*\leqq k^*$ が従う。

g は非減少的列であるので「$N[k^*]$ の任意の元 i に対して $g(i)\preccurlyeq g(b(i))$」。ところが $g\circ b$ は $N[k^*]$ を定義域とする分割である。故に $\langle g; N[k^*]\rangle\preccurlyeq\langle g\circ b; N[k^*]\rangle$。$b[N[k^*]]=a^{-1}[J]$ より $\langle g; N[k^*]\rangle\preccurlyeq\langle g; a^{-1}[J]\rangle$ が従う。ところが $\langle g; a^{-1}[J]\rangle=\langle f; J\rangle$。故に $\langle g; N[k^*]\rangle\preccurlyeq\langle f; J\rangle$。$\langle f; J\rangle\preccurlyeq A$ より $\langle g; N[k^*]\rangle\preccurlyeq A$ が従う。故に r^* の最大性より $k^*\leqq r^*$ が従う。

故に $r^*=k^*$。故に $k(A, n)=\max\{r\,|\,r\in N[n]\cup\{0\}$ 且つ $\langle g; N[r]\rangle\preccurlyeq A\}$。$S$ に対する殆ど一様な n 重分割 g は $k(A, n)$ を非減少的に獲得する。これより命題が従う。［証明終］

［命題12］ $\preccurlyeq$は殆ど精密であると仮定する。f を S に対する任意の殆ど一様な分割とする。各各が f の定義域の任意の元である i 及び j に対して，「$f(i)\approx\phi$ 且つ $f(j)\approx\phi$」ならば $i=j$。

［証明］背理法による。「各各が f の定義域の或元である i 及び j に対して，$f(i)\approx\phi$ 且つ $f(j)\approx\phi$ 且つ $i\neq j$」と仮定して矛盾を導く。ここの i 及び j を固定する。f の値域の合併は S に等しく且つ $\phi\prec S$。故に f の定義域の或元 k が存在して $\phi\prec f(k)$。この k を固定する。$f(i)\cup f(j)\prec f(k)$ が従う。故に $\langle f; \{i, j\}\rangle\prec\langle f; \{k\}\rangle$。ところが $i\neq j$ より $\#(\{i, j\})=2$ が従う。また $\#(\{k\})=1$。故に［定義9］より $\langle f; \{k\}\rangle\preccurlyeq\langle f; \{i, j\}\rangle$。矛盾が生じる。

［証明終］

［命題13］ $\preccurlyeq$は殆ど精密であると仮定する。A 及び B の各各を任意の事象とし且つ n を任意の自然数とする。

［結論1］ $k(A\cup B, n)\leqq k(A, n)+k(B, n)+1$。

［結論2］ $A\cap B=\phi$ ならば $k(A, n)+k(B, n)-2\leqq k(A\cup B, n)$。

［証明］第一番目の結論を示す。$k(A\cup B, n)$ を獲得する S に対する殆ど一様な分割を f とする。$k^*=k(A\cup B, n)$ と置く。また $r^*=\max\{r\,|\,r\in N[n]\cup\{0\}$ 且つ $\langle f; N[r]\rangle\preccurlyeq A\}$ と置く。$r^*\leqq k^*$ が従う。また $k(A, n)$ の最大性より $r^*\leqq k(A, n)$ が従う。$l^*=k^*-r^*$ と

置く。$0 \leqq l^*$ が従う。

$l^* \leqq 1$ の場合を考える。$0 \leqq k(B, n)$ より $1 \leqq k(B, n)+1$ が従う。故に $l^* \leqq k(B, n)+1$ が従う。故に $k^*-r^* \leqq k(B, n)+1$。故に $k^* \leqq r^*+k(B, n)+1$。故に $k^* \leqq k(A, n)+k(B, n)+1$ が従う。[結論1] の不等式が従う。

$1 \lneqq l^*$ の場合を考える。$r^*+1 \lneqq k^*$ が従う。故に $r^*+1 \in N[n]$。r^* の最大性より $A \not\preccurlyeq \langle f; N[r^*+1] \rangle$ が従う。ところが $\langle f; N[k^*] \rangle \preccurlyeq A \cup B$。故に「$\langle f; N[k^*] \rangle = \langle f; N[r^*+1] \rangle \cup \langle f; N[r^*+1; k^*] \rangle$ 且つ $\langle f; N[r^*+1] \rangle \cap \langle f; N[r^*+1; k^*] \rangle = \phi$」より $\langle f; N[r^*+1; k^*] \rangle \not\preccurlyeq B$。$k(B, n)$ の最大性より $\#(N[r^*+1; k^*]) \leqq k(B, n)$。故に $k^*-(r^*+1) \leqq k(B, n)$。故に $k^* \leqq r^*+k(B, n)+1$。故に $k^* \leqq k(A, n)+k(B, n)+1$ が従う。[結論1] の不等式が従う。

故に [結論1] が従う。

第二番目の結論を示す。$A \cap B = \phi$ と仮定する。$k(A, n)$ を獲得する S に対する殆ど一様な分割を f とし且つ $k(B, n)$ を獲得する S に対する殆ど一様な分割を g とする。$k^* = k(A, n)$ と置く。また $r^* = \max\{r \mid r \in N[n] \cup \{0\}$ 且つ $\langle f; N[r] \rangle \preccurlyeq A \cup B\}$ と置く。$k^* \leqq r^*$ が従う。また $r^* \leqq k(A \cup B, n)$。$l^* = r^*-k^*$ と置く。$0 \leqq l^*$ が従う。

$k(B, n)-2 \leqq l^*$ を示す。背理法による。$l^* \lneqq k(B, n)-2$ と仮定して矛盾を導く。$l^*+2 \lneqq k(B, n)$ が従う。

$B \preccurlyeq \langle f; N[k^*; r^*] \rangle$ の場合を考える。ところが $\#(N[k^*; r^*]) = l^*$。また $l^*+2 \lneqq n$。故に [命題12] より，$N[n] \setminus N[k^*; r^*]$ の或元である i が存在して $\phi \not\preccurlyeq f(i)$。この i を固定する。$\langle f; N[k^*; r^*] \rangle \cap f(i) = \phi$ が従う。故に $B \not\preccurlyeq \langle f; N[k^*; r^*] \cup \{i\} \rangle$ が従う。ところが「$\#(N[k^*; r^*] \cup \{i\}) = l^*+1$ 且つ $(l^*+1)+2 \in N[n]$」。故に [命題8] より $\langle f; N[k^*; r^*] \cup \{i\} \rangle \preccurlyeq \langle g; N[(l^*+1)+2] \rangle$。故に $B \not\preccurlyeq \langle g; N[(l^*+1)+2] \rangle$ が従う。故に $k(B, n) \lneqq (l^*+1)+2$。故に $k(B, n) \leqq (l^*+1)+1$。故に $k(B, n) \leqq l^*+2$ が従う。ところが $l^*+2 \lneqq k(B, n)$。故に矛盾が生じる。

$\langle f; N[k^*; r^*] \rangle \not\preccurlyeq B$ の場合を考える。「$\langle f; N[k^*] \rangle \preccurlyeq A$ 且つ $A \cap B = \phi$」より $\langle f; N[k^*] \rangle \cup \langle f; N[k^*; r^*] \rangle \not\preccurlyeq A \cup B$ が従う。故に $\langle f; N[r^*] \rangle \not\preccurlyeq A \cup B$。ところが f は S に対する分割。故に $r^* \lneqq n$。故に $r^*+1 \in N[n]$ が従う。故に r^* の最大性より $A \cup B \not\preccurlyeq \langle f; N[r^*+1] \rangle$。ところが「$\langle f; N[k^*] \rangle \preccurlyeq A$ 且つ $A \cap B = \phi$ 且つ $\langle f; N[r^*+1] \rangle = \langle f; N[k^*] \rangle \cup \langle f; N[k^*; r^*+1] \rangle$」。故に $B \not\preccurlyeq \langle f; N[k^*; r^*+1] \rangle$ が従う。ところが「$\#(N[k^*; r^*+1]) = l^*+1$ 且つ $(l^*+1)+2 \in N[n]$」。故に [命題8] より $\langle f; N[k^*; r^*+1] \rangle \preccurlyeq \langle g; N[(l^*+1)+2] \rangle$。故に $B \not\preccurlyeq \langle g; N[(l^*+1)+2] \rangle$ が従う。故に $k(B, n) \lneqq (l^*+1)+2$。故に $k(B, n) \leqq (l^*+1)+1$。故に $k(B, n) \leqq l^*+2$ が従う。ところが $l^*+2 \lneqq k(B, n)$。故に矛盾が生じる。

$k(B, n)-2 \leqq l^*$ が従う。故に $k(B, n)-2 \leqq r^*-k^*$。故に $k^*+k(B, n)-2 \leqq r^*$。故に $k^*+k(B, n)-2 \leqq k(A \cup B, n)$ が従う。[結論2] の不等式が従う。

[結論2] が従う。 [証明終]

[命題14] $\preccurlyeq$ は殆ど精密であると仮定する。A を任意の事象とし且つ n 及び m の各各を任意の自然数とする。

[結論1] $k(A, n \cdot m) \lneqq (k(A, n)+1) \cdot m$。

[結論2] $(k(A, n)-2) \cdot m \leqq k(A, n \cdot m)$。

[証明] 第一番目の結論を示す。$k(A, n \cdot m)$ を獲得する S に対する殆ど一様な分割を f とし且つ f の n 重変形を g とする。f は S に対する $n \cdot m$ 重分割であり且つ g は S に対する殆ど一様な n 重分割である。除法原理により「$k(A, n \cdot m) = a \cdot m + b$ 且つ $a \in N \cup \{0\}$ 且つ $b \in N[m-1] \cup \{0\}$」を満たす $\langle a, b \rangle$ が一意的

に存在する。$a \in N[n] \cup \{0\}$ が従う。

$a \cdot m \leqq k(A,\ n \cdot m)$ より $\langle f;\ N[a \cdot m] \rangle \preccurlyeq A$ が従う。ところが $\langle f; N[a \cdot m] \rangle = \langle g; N[a] \rangle$。故に $\langle g;\ N[a] \rangle \preccurlyeq A$ が従う。故に $a \leqq k(A,\ n)$。故に $a \cdot m + b \leqq k(A,\ n) \cdot m + b$。ところが $b \lneqq m$。故に $a \cdot m + b \lneqq (k(A,\ n)+1) \cdot m$ が従う。故に $k(A,\ n \cdot m) \lneqq (k(A,\ n)+1) \cdot m$。[結論1] が従う。

第二番目の結論を示す。$k(A,\ n \cdot m)$ を獲得する S に対する殆ど一様な分割を f とし且つ f の n 重変形を g とする。f は S に対する $n \cdot m$ 重分割であり且つ g は S に対する殆ど一様な n 重分割である。また $k(A,\ n)$ を獲得する S に対する殆ど一様な分割を h とする。除法原理により「$k(A,\ n \cdot m) = a \cdot m + b$ 且つ $a \in N \cup \{0\}$ 且つ $b \in N[m-1] \cup \{0\}$」を満たす $\langle a,\ b \rangle$ が一意的に存在する。この $\langle a,\ b \rangle$ を用いる。$a \in N[n] \cup \{0\}$ が従う。

$k(A,\ n) - 2 \leqq a$ を示す。背理法による。$a \lneqq k(A,\ n) - 2$ と仮定して矛盾を導く。$a+2 \lneqq k(A,\ n)$ が従う。$a+1 \in N[n]$ が従う。故に $(a+1) \cdot m \in N[n \cdot m]$ が従う。$b \lneqq m$ より $a \cdot m + b \lneqq (a+1) \cdot m$。故に $k(A,\ n \cdot m)$ の最大性より $A \not\preccurlyeq \langle f;\ N[(a+1) \cdot m] \rangle$ が従う。ところが $\langle f; N[(a+1) \cdot m] \rangle = \langle g; N[a+1] \rangle$。故に $A \not\preccurlyeq \langle g;\ N[a+1] \rangle$ が従う。ところが $(a+1)+2 \in N[n]$。故に [命題8] より $\langle g;\ N[a+1] \rangle \preccurlyeq \langle h;\ N[(a+1)+2] \rangle$ が従う。故に $A \not\preccurlyeq \langle h;\ N[(a+1)+2] \rangle$ が従う。故に $k(A,\ n) \lneqq (a+1)+2$ が従う。故に $k(A,\ n) \leqq (a+1)+1$ が従う。故に $k(A,\ n) \leqq a+2$ が従う。ところが $a+2 \lneqq k(A,\ n)$。故に矛盾が生じる。

$k(A,\ n) - 2 \leqq a$ が従う。故に $(k(A,\ n) - 2) \cdot m \leqq a \cdot m + b$ が従う。故に $(k(A,\ n) - 2) \cdot m \leqq k(A,\ n \cdot m)$ が従う。[結論2] が従う。

[証明終]

4.　定量的確率

この節においては [定義13], [定義14], 及び [定義15] を導入する。また [命題15] から [命題19] までを示す。

[注意] 以下で定義する定量的確率についてはサヴェジ [1] 第3章第3節及び第3章第4節及び園 [2] 及び [4] の各各第2節及び第7節を参照する事を勧める。

[定義13]「P は可測空間 $\langle S,\ \mathscr{A} \rangle$ 上の定量的確率である」或いは略式に「P は定量的確率である」と言う事は「P は以下の性質1から性質4までを満たす」と言う事であると定義する。

性質1。P は完全加法族 $\mathscr{A}$ から実数体への写像である。
性質2。$\mathscr{A}$ の任意の元 A に対して $0 \leqq P(A)$。
性質3。各各が $\mathscr{A}$ の任意の元である A 及び B に対して, $A \cap B = \phi$ ならば $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$。
性質4。$P(S) = 1$。

[定義14] P を $\langle S,\ \mathscr{A} \rangle$ 上の任意の定量的確率とする。「P は定性的確率 $\preccurlyeq$ に対して概一致する」或いは略式に「P は $\preccurlyeq$ に概一致する」と言う事は「各各が $\mathscr{A}$ の任意の元である A 及び B に対して, $A \preccurlyeq B$ ならば $P(A) \leqq P(B)$」と言う事であると定義する。

[定義15] P を $\langle S,\ \mathscr{A} \rangle$ 上の任意の定量的確率とする。「P は定量的に精密である」と言う事は「$\mathscr{A}$ の任意の元 A 及び0以上であり且つ1以下である任意の実数 ρ に対して $\mathscr{A}$ の或元 B が存在して, $B \subseteqq A$ 且つ $P(B) = \rho \cdot P(A)$」と言う事であると定義する。

[命題15] n を任意の自然数とし且つ f を任意の n 重分割とする。また P は $\langle S,\ \mathscr{A} \rangle$ 上の任意の定量的確率であるとする。$N[n] \cup \{0\}$ の任意の元 r に対して,「$r=0$ ならば $P(\langle f; N$

$[r]\rangle)=0$」且つ「$r \neq 0$ ならば $P(\langle f;\ N[r]\rangle) = \sum_{j=1}^{r} P(f(j))$」。

［証明］ r を $N[n] \cup \{0\}$ の任意の元とする。

$r=0$ の場合を考える。$\langle f;\ N[r]\rangle = \phi$ が従う。ところが $P(\phi)=0$。故に $P(\langle f;\ N[r]\rangle)=0$ が従う。

$r \neq 0$ の場合を考える。$r \in N[n] \cup \{0\}$ より $r \in N[n]$ が従う。$K=\{k \mid k \in N[n]$ 且つ $P(\langle f;\ N[k]\rangle) = \sum_{j=1}^{k} P(f(j))\}$と置く。「$K \subseteq N[n]$ 且つ $1 \in K$」が従う。

「$k \in K$ 且つ $k \lneqq n$」を満たす任意の k を固定する。$k+1 \in K$ を示す。$k \in K$ より $k \in N[n]$ が従う。ところが $k \lneqq n$。故に $k+1 \in N[n]$ が従う。$\langle f;\ N[k+1]\rangle = \langle f;\ N[k]\rangle \cup f(k+1)$ 且つ $\langle f;\ N[k]\rangle \cap f(k+1) = \phi$。故に $P(\langle f;\ N[k+1]\rangle) = P(\langle f;\ N[k]\rangle) + P(f(k+1))$ が従う。ところが $k \in K$ より $P(\langle f;\ N[k]\rangle) = \sum_{j=1}^{k} P(f(j))$ が従う。故に $P(\langle f;\ N[k+1]\rangle) = \sum_{j=1}^{k+1} P(f(j))$ が従う。故に $k+1 \in K$ が従う。

$K=N[n]$ が従う。ところが $r \in N[n]$。故に $r \in K$。故に K の定義より $P(\langle f;\ N[r]\rangle) = \sum_{j=1}^{r} P(f(j))$ が従う。

命題が従う。［証明終］

［注意］この［命題15］において f が S に対するα値 n 重分割である場合には結論及び $P(S)=1$ より $1=\sum_{j=1}^{n} P(f(j))$ が従う。

［命題16］ f を S に対する任意の殆ど一様な分割とし且つ P を$\preccurlyeq$に概一致する任意の定量的確率とする。各各が f の定義域の任意の元である i 及び j に対して，「$P(f(i))=0$ 且つ $P(f(j))=0$」ならば $i=j$。

［証明］背理法による。「各各が f の定義域の或元である i^* 及び j^* に対して，$P(f(i^*))=0$ 且つ $P(f(j^*))=0$ 且つ $i^* \neq j^*$」と仮定して矛盾を導く。ここの i^* 及び j^* を固定する。f は S に対する分割である。故に［命題15］より $1=\sum_{k \in \mathrm{dom}(f)} P(f(k))$ が従う。故に「f の定義域の或元である k^* が存在して $0 \lneqq P(f(k^*))$」が従う。この k^* を固定する。ところが$P(f(i^*) \cup f(j^*))=0$。故に$P(f(i^*) \cup f(j^*)) \lneqq P(f(k^*))$。故に $P(\langle f;\ \{i^*, j^*\}\rangle) \lneqq P(\langle f;\ \{k^*\}\rangle)$ が従う。ところが P は$\preccurlyeq$に概一致する。故に［定義14］より $\langle f;\{i^*,\ j^*\}\rangle \not\succcurlyeq \langle f;\ \{k^*\}\rangle$ が従う。一方 f は殆ど一様な分割である。ところが $i^* \neq j^*$ より $\#(\{i^*,\ j^*\})=2$ が従う。また $\#(\{k^*\})=1$。故に $\langle f;\{k^*\}\rangle \preccurlyeq \langle f;\ \{i^*,\ j^*\}\rangle$ が従う。故に矛盾が生じる。

故に「各各が f の定義域の任意の元である i 及び j に対して，「$P(f(i))=0$ 且つ $P(f(j))=0$」ならば $i=j$」が従う。［証明終］

［命題17］ P は$\preccurlyeq$に概一致する任意の定量的確率であると仮定する。n を任意の自然数とし且つ f を S に対する任意の殆ど一様な n 重分割とする。$N[n]$ の任意の元 j に対して $P(f(j)) \leqq 2/n$。

［証明］ $n \leqq 2$ の場合を考える。$1 \leqq 2/n$ が従う。任意の事象 A に対して $P(A) \leqq 1$。故に $N[n]$ の任意の元 j に対して $P(f(j)) \leqq 2/n$。

$2 \lneqq n$ の場合を考える。背理法による。「$N[n]$ の或元である j^* が存在して $2/n \lneqq P(f(j^*))$」と仮定して矛盾を導く。この j^* を固定する。

$$K=\{j \mid j \in N[n] \text{ 且つ } j \neq j^* \text{ 且つ } 1/n \lneqq P(f(j))\}$$

且つ

$$L=\{j \mid j \in N[n] \text{ 且つ } P(f(j)) \leqq 1/n\}$$

と置く。「$2/n \lneqq P(f(j^*))$ 且つ $\#(K)/n \leqq \sum_{j\in K} P(f(j))$ 且つ $0 \leqq \sum_{j\in L} P(f(j))$」及び $\sum_{j=1}^{n} P(f(j)) = P(f(j^*)) + \sum_{j\in K} P(f(j)) + \sum_{j\in L} P(f(j))$

より $(\#(K)+2)/n \lneqq \sum_{j=1}^{n} P(f(j))$ が従う。ところが $\#(K)=n-(\#(L)+1)$。また［命題15］より $\sum_{j=1}^{n} P(f(j))=1$。故に $(n+1-\#(L))/n \lneqq 1$。故に $1 \lneqq \#(L)$。故に $2 \leqq \#(L)$ が従う。故に L の定義より「$j' \neq j''$ を満たす各各が $N[n]$ の或元である j' 及び j'' が存在して，$P(f(j')) \leqq 1/n$ 且つ $P(f(j'')) \leqq 1/n$」が従う。ここの j' 及び j'' を固定する。$P(f(j') \cup f(j'')) \leqq 2/n$ が従う。故に $P(f(j') \cup f(j'')) \lneqq P(f(j^*))$ が従う。故に

$P(\langle f; \{j', j''\}\rangle) \lneqq P(\langle f; \{j^*\}\rangle)$

が従う。ところが P は $\preccurlyeq$ に概一致する。故に［定義14］より $\langle f; \{j', j''\}\rangle \not\preccurlyeq \langle f; \{j^*\}\rangle$。一方 f は殆ど一様な分割である。ところが $j' \neq j''$ より $\#(\{j', j''\})=2$ が従う。また $\#(\{j^*\})=1$。故に $\langle f; \{j^*\}\rangle \preccurlyeq \langle f; \{j', j''\}\rangle$ が従う。故に矛盾が生じる。

故に「$N[n]$ の任意の元 j に対して $P(f(j)) \leqq 2/n$」が従う。命題が従う。［証明終］

［命題18］f を S に対する任意の非減少的な殆ど一様な分割とし且つ P を $\preccurlyeq$ に概一致する任意の定量的確率とする。また A 及び B の各各を任意の事象とする。

$j(*)=\max\{j \mid j\in \mathrm{dom}(f)\cup\{0\}$ 且つ $\langle f; N[j]\rangle \preccurlyeq A\}$

且つ

$k(*)=\max\{k \mid k\in \mathrm{dom}(f)\cup\{0\}$ 且つ $\langle f; N[k]\rangle \preccurlyeq B\}$

と置く。

［仮定］$A \preccurlyeq B$ 且つ $P(A)=P(B)$。

［結論］$k(*)=j(*)$ 或いは $k(*)=j(*)+1$。

［証明］$j(*)$ の定義より $\langle f; N[j(*)]\rangle \preccurlyeq A$ が従う。ところが $A \preccurlyeq B$。故に $\langle f; N[j(*)]\rangle \preccurlyeq B$ が従う。故に $k(*)$ の最大性より $j(*) \leqq k(*)$ が従う。$k(*)=j(*)$ の場合においては結論が従う。$k(*) \neq j(*)$ と仮定する。$j(*) \lneqq k(*)$ が従う。

$k(*)=j(*)+1$ を示す。背理法による。$k(*) \neq j(*)+1$ と仮定して矛盾を導く。$j(*) \lneqq k(*)$ より $j(*)+1 \leqq k(*)$。故に $j(*)+1 \lneqq k(*)$ が従う。f の長さを n とする。$j(*)+1 \in N[n]$ が従う。$j(*)$ の最大性より $A \not\preccurlyeq \langle f; N[j(*)+1]\rangle$ が従う。ところが P は $\preccurlyeq$ に概一致する定量的確率である。故に

式1。$P(A) \leqq P(\langle f; N[j(*)+1]\rangle)$

が従う。一方 $j(*)+2 \leqq k(*)$。故に $j(*)+2 \in N[n]$。ところが「$\langle f; N[j(*)+2]\rangle = \langle f; N[j(*)+1]\rangle \cup f(j(*)+2)$ 且つ $\langle f; N[j(*)+1]\rangle \cap f(j(*)+2) = \phi$」。故に $P(\langle f; N[j(*)+2]\rangle) = P(\langle f; N[j(*)+1]\rangle) + P(f(j(*)+2))$ が従う。ところが f は非減少的列である。故に $f(j(*)+1) \preccurlyeq f(j(*)+2)$ が従う。故に $P(f(j(*)+1)) \leqq P(f(j(*)+2))$ が従う。f は S に対する殆ど一様な分割であり且つ $j(*)+1 \neq j(*)+2$。故に［命題16］より $0 \lneqq P(f(j(*)+2))$ が従う。故に

式2。$P(\langle f; N[j(*)+1]\rangle) \lneqq P(\langle f; N[j(*)+2]\rangle)$

が従う。ところが $\langle f; N[j(*)+2]\rangle \subseteqq \langle f; N[k(*)]\rangle$。また $\langle f; N[k(*)]\rangle \preccurlyeq B$。故に $\langle f; N[j(*)+2]\rangle \preccurlyeq B$ が従う。故に

式3。$P(\langle f;\ N[j(*)+2]\rangle)\leqq P(B)$

が従う。故に式1，式2，及び式3より

$P(A)\lneqq P(B)$

が従う。故に $P(A)\neq P(B)$。ところが $P(A)=P(B)$。故に矛盾が生じる。

故に $k(*)=j(*)+1$ が従う。結論が従う。

［証明終］

［命題19］P を $\langle S,\ \mathscr{A}\rangle$ 上の任意の定量的確率とする。P は定量的に精密であると仮定する。任意の事象 A 及び任意の自然数 n に対して A に対する或 n 重分割 f が存在して $N[n]$ の任意の元 j に対して $P(f(j))=P(A)/n$。

［証明］n を任意の自然数とする。

$K=\{r\mid r\in N[n]$ 且つ任意の事象 A に対して A に対する或 r 重分割 f が存在して $N[r]$ の任意の元 j に対して $P(f(j))=P(A)/r\}$

と置く。「$K\subseteqq N[n]$ 且つ $1\in K$」が従う。

「$k\in K$ 且つ $k\lneqq n$」を満たす任意の k を固定する。$k+1\in K$ を示す。$k\in K$ より $k\in N[n]$ が従う。ところが $k\lneqq n$。故に $k+1\in N[n]$ が従う。A を任意の事象とする。P は定量的に精密であり且つ $1/(k+1)$ は0以上であり且つ1以下である有理数である。故に［定義15］より「或事象 B が存在して，$B\subseteqq A$ 且つ $P(B)=P(A)/(k+1)$」が従う。この B を固定する。また $C=A\setminus B$ と置く。$C\in\mathscr{A}$ が従う。$k\in K$ 及び K の定義より「C に対する或 k 重分割 g が存在して $N[k]$ の任意の元 j に対して $P(g(j))=P(C)/k$」が従う。この k 重分割 g を固定する。「$j\in N[k+1]$ を満たす任意の j に対して，「$j\in N[k]$ ならば $h(j)=g(j)$」且つ「$j=k+1$ ならば $h(j)=B$」」によって $N[k+1]$ を定義域とする写像 h を定義する。g の定義により「h は A に対する $k+1$ 重分割である」が従う。一方「$P(C)=P(A)-P(B)$ 且つ $P(B)=P(A)/(k+1)$」より「$N[k+1]$ の任意の元 j に対して $P(h(j))=P(A)/(k+1)$」が従う。故に $k+1\in K$ が従う。

故に $K=N[n]$ が従う。ところが $n\in N[n]$。故に $n\in K$ が従う。K の定義より「任意の事象 A に対して或 n 重分割 f が存在して $N[n]$ の任意の元 j に対して $P(f(j))=P(A)/n$」が従う。命題が従う。［証明終］

5. 定量的確率の一意的存在

この節においては［定義16］を導入する。また［命題20］から［命題23］までを示す。［命題23］が目標である。

［注意］次の定義における従属選択の原理及び初期条件付き従属選択の原理については園［3］及び［4］の各各付録の第九番目の注意及び第2節を参照する事を勧める。

［定義16］A を任意の集合とし且つ $R(\cdot,\ \cdot)$ を A 上の任意の二項関係とする。次の陳述を従属選択の原理と呼ぶ。

陳述1。「A は空集合ではなく且つ A の任意の元 a に対して A の或元 b が存在して $R(a,b)$」ならば「N から A への或写像 F が存在して N の任意の元 n に対して $R(F(n),\ F(n+1))$」。

この陳述は次の陳述2と同値である。この陳述2を初期条件付き従属選択の原理と呼ぶ。

陳述2。「A の任意の元 a に対して A の或元 b が存在して $R(a,\ b)$」ならば「A の任意の元 c に対して N から A への或写像 F が存在して，$F(1)=c$ 且つ N の任意の元 n に対

して $R(F(n), F(n+1))$」。

［命題20］ $\preccurlyeq$ は殆ど精密であると仮定する。$\preccurlyeq$ に概一致する任意の定量的確率は定量的に精密である。

［証明］ P は $\preccurlyeq$ に概一致する任意の定量的確率であると仮定する。A を任意の事象とし且つ ρ を0以上であり且つ1以下である任意の実数とする。また A', A'', 及び A''' の各各を S の任意の部分集合とする場合において，「$\langle A', A'', A'''\rangle$ は事象 A に対する分割的順序対である」と言う事は「A', A'', 及び A''' の各各は $\mathcal{Q}$ の元であり且つ $A=A'\cup A''\cup A'''$ 且つ $A'\cap A''=\phi$ 且つ $A'\cap A'''=\phi$ 且つ $A''\cap A'''=\phi$」と言う事であると定義する。

次の性質1から性質3までを満たす順序対 $\langle A', A'', A''', n\rangle$ の全体を $\mathcal{A}$ とする。

性質1。$\langle A', A'', A'''\rangle$ は事象 A に対する分割的順序対である。
性質2。$P(A')\leqq\rho\cdot P(A)$ 且つ $P(A''')\leqq(1-\rho)\cdot P(A)$。
性質3。$n\in N$ 且つ $P(A'')\leqq 1/n$。

即ち $\mathcal{A}=\{x\mid \mathcal{Q}\times\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}\times N$ の或元 $\langle A', A'', A''', n\rangle$ が存在して，$x=\langle A', A'', A''', n\rangle$ 且つ $A=A'\cup A''\cup A'''$ 且つ $A'\cap A''=\phi$ 且つ $A'\cap A'''=\phi$ 且つ $A''\cap A'''=\phi$ 且つ $P(A')\leqq\rho\cdot P(A)$ 且つ $P(A'')\leqq 1/n$ 且つ $P(A''')\leqq(1-\rho)\cdot P(A)\}$ と置く。また各各が $\mathcal{A}$ の任意の元である $\langle A', A'', A''', n\rangle$ 及び $\langle B', B'', B''', m\rangle$ に対して「$R(\langle A', A'', A''', n\rangle, \langle B', B'', B''', m\rangle)$ と「$A'\subseteqq B'$ 且つ $A'''\subseteqq B'''$ 且つ $m=n+1$」とは同値である」によって $\mathcal{A}$ 上の二項関係 $R(\cdot,\cdot)$ を定義する。

陳述1。「$\mathcal{A}$ の任意の元 $\langle A', A'', A''', n\rangle$ に対して $\mathcal{A}$ の或元 $\langle B', B'', B''', m\rangle$ が存在して $R(\langle A', A'', A''', n\rangle, \langle B', B'', B''', m\rangle)$」が従う。これを示す。$\langle A', A'', A''', n\rangle$ を $\mathcal{A}$ の任意の元とする。ところが $\preccurlyeq$ は殆ど精密である。故に［命題9］より S に対する或殆ど一様な $2\cdot(n+1)$ 重分割が存在する。この殆ど一様な分割を固定して f と表記する。「$N[2\cdot(n+1)]$ の任意の元 j に対して $g(j)=f(j)\cap A''$」によって $N[2\cdot(n+1)]$ を定義域とする写像 g を定義する。g は A'' に対する $2\cdot(n+1)$ 重分割である。

$$r(*)=\max\{r\mid r\in N[2\cdot(n+1)]\cup\{0\} \text{ 且つ } P(A'\cup\langle g; N[r]\rangle)\leqq\rho\cdot P(A)\}$$

と置く。$P(A')\leqq\rho\cdot P(A)$ よりこの $r(*)$ は定義可能である。$r(*)\leqq 2\cdot(n+1)$ が従う。

$r(*)=2\cdot(n+1)$ の場合を考える。「$B'=A'\cup\langle g; N[r(*)]\rangle$ 且つ $B''=\phi$ 且つ $B'''=A'''$ 且つ $m=n+1$」と置く。$m\in N$ が従う。また $B'=A'\cup A''$ が従う。故に $\langle B', B'', B'''\rangle$ は事象 A に対する分割的順序対である。また $r(*)$ の定義より $P(B')\leqq\rho\cdot P(A)$ が従う。一方 $P(A''')\leqq(1-\rho)\cdot P(A)$ より $P(B''')\leqq(1-\rho)\cdot P(A)$ が従う。また $P(\phi)=0$ より $P(B'')=0$ が従う。故に $P(B'')\leqq 1/m$ が従う。故に $\langle B', B'', B''', m\rangle\in\mathcal{A}$ が従う。一方「$A'\subseteqq B'$ 且つ $A'''\subseteqq B'''$ 且つ $m=n+1$」。故にこの場合において陳述1が従う。なおこの $r(*)=2\cdot(n+1)$ の場合には「$P(B''')\leqq(1-\rho)\cdot P(A)$ 且つ $P(A)=P(B')+P(B''')$」より $\rho\cdot P(A)\leqq P(B')$ が従う。故に $P(B')=\rho\cdot P(A)$ が従う。

$r(*)\lneqq 2\cdot(n+1)$ の場合を考える。$r(*)+1\in N[2\cdot(n+1)]$ が従う。「$B'=A'\cup\langle g; N[r(*)]\rangle$ 且つ $B''=g(r(*)+1)$ 且つ $B'''=\langle g; N[r(*)+1; 2\cdot(n+1)]\rangle\cup A'''$ 且つ $m=n+1$」と置く。$\langle B', B'', B'''\rangle$ は事象 A に対する分割的順序対である。また $r(*)$ の定義より $P(B')\leqq\rho\cdot P(A)$ が従う。また $r(*)$ の最大性より $\rho\cdot P(A)\lneqq P(A'\cup\langle g; N[r(*)+1]\rangle)$。故に

$P(A)-P(A'\cup\langle g;N[r(*)+1]\rangle)\lneqq(1-\rho)\cdot P(A)$ が従う。ところが $P(A)=P(A'\cup\langle g;N[r(*)+1]\rangle)+P(\langle g;N[r(*)+1;2\cdot(n+1)]\rangle\cup A''')$。故に $P(\langle g;N[r(*)+1;2\cdot(n+1)]\rangle\cup A''')\lneqq(1-\rho)\cdot P(A)$が従う。故に $P(B''')\lneqq(1-\rho)\cdot P(A)$ が従う。一方 g の定義より $g(r(*)+1)\subseteqq f(r(*)+1)$。故に $P(g(r(*)+1))\leqq P(f(r(*)+1))$ が従う。ところが「f は S に対する殆ど一様な $2\cdot(n+1)$ 重分割であり且つ P は $\prec$ に概一致する定量的確率である」。故に［命題17］より $P(f(r(*)+1))\leqq 2/(2\cdot(n+1))$ が従う。故に$P(g(r(*)+1))\leqq 1/(n+1)$ が従う。故に $P(B'')\leqq 1/m$ が従う。故に $\langle B', B'', B''', m\rangle\in\mathcal{A}$ が従う。一方「$A'\subseteqq B'$ 且つ $A'''\subseteqq B'''$ 且つ $m=n+1$」。故にこの場合においても亦陳述1が従う。

陳述2。「$\langle\phi, A, \phi, 1\rangle$ は$\mathcal{A}$の元である」

が従う。これを示す。$\langle\phi, A, \phi\rangle$ は事象 Aに対する分割的順序対である。$0\leqq\rho$ 且つ $0\leqq P(A)$。故に $0\leqq\rho\cdot P(A)$。ところが $P(\phi)=0$。故に $P(\phi)\leqq\rho\cdot P(A)$。一方 $\rho\leqq 1$ より $0\leqq 1-\rho$ が従う。故に $0\leqq(1-\rho)\cdot P(A)$。故に $P(\phi)\leqq(1-\rho)\cdot P(A)$。一方「$1\in N$ 且つ $P(A)\leqq 1$」。故に $\langle\phi, A, \phi, 1\rangle\in\mathcal{A}$ が従う。陳述2が従う。

陳述1，陳述2，及び［定義16］における初期条件付き従属選択の原理により

「N から$\mathcal{A}$への或写像 F が存在して，$F(1)=\langle\phi, A, \phi, 1\rangle$ 且つ N の任意の元 n に対して $R(F(n), F(n+1))$」

が従う。この F を固定する。「N の任意の元 n に対して $F(n)=\langle F'(n), F''(n), F'''(n), M(n)\rangle$」と置く。「各各が Nの任意の元である l 及び m に対して，$l\leqq m$ ならば「$F'(l)\subseteqq F'(m)$ 且つ $F'''(l)\subseteqq F'''(m)$」」及び「$N$ の任意の元 n に対して $M(n)=n$」が従う。

$B=\cup\{F'(n)|n\in N\}$ 且つ$C=\cup\{F'''(n)|n\in N\}$

と置く。「$B\subseteqq A$ 且つ $C\subseteqq A$」が従う。また$\mathcal{O}\!\mathcal{L}$が完全加法族である事より「$B\in\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ 且つ$C\in\mathcal{O}\!\mathcal{L}$」が従う。

式1。$B\cap C=\phi$

を示す。背理法による。$B\cap C\neq\phi$ と仮定して矛盾を導く。$s\in B\cap C$ を満たす或 s が存在する。この s を固定する。「$s\in B$ 且つ $s\in C$」が従う。$s\in B$ より「或自然数 l が存在して $s\in F'(l)$」が従う。この l を固定する。$s\in C$ より「或自然数 m が存在して $s\in F'''(m)$」が従う。この m を固定する。故に「$s\in F'(l)$ 且つ $s\in F'''(m)$」が従う。故に $s\in F'(l)\cap F'''(m)$ が従う。故に $F'(l)\cap F'''(m)\neq\phi$ が従う。$k=\max\{l, m\}$ と置く。$l\leqq k$ 且つ $m\leqq k$。故に「$F'(l)\subseteqq F'(k)$ 且つ $F'''(m)\subseteqq F'''(k)$」が従う。ところが $F'(k)\cap F'''(k)=\phi$。故に $F'(l)\cap F'''(m)=\phi$ が従う。故に矛盾が生じる。故に $B\cap C=\phi$ が従う。式1が従う。

n を任意の自然数とする。この n に対して

式2。$\rho\cdot P(A)\leqq P(B)+\dfrac{1}{n}$

が従う。これを示す。$P(F'''(n))\leqq(1-\rho)\cdot P(A)$ が従う。故に $\rho\cdot P(A)\leqq P(A)-P(F'''(n))$。ところが $P(A)=P(F'(n))+P(F''(n))+P(F'''(n))$。故に $\rho\cdot P(A)\leqq P(F'(n))+P(F''(n))$ が従う。一方「$P(F''(n))\leqq 1/M(n)$ 且つ $M(n)=n$」。故に $\rho\cdot P(A)\leqq P(F'(n))+(1/n)$ が従う。ところが$F'(n)\subseteqq B$ より $P(F'(n))\leqq P(B)$ が従う。故に $\rho\cdot P(A)\leqq P(B)+(1/n)$ が従う。式2が従う。

n を任意の自然数とする。この n に対して

式3。$(1-\rho)\cdot P(A) \leqq P(C)+\dfrac{1}{n}$

が従う。これを示す。$P(F'(n)) \leqq \rho\cdot P(A)$ が従う。故に $(1-\rho)\cdot P(A) \leqq P(A)-P(F'(n))$ が従う。ところが $P(A)=P(F'(n))+P(F''(n))+P(F'''(n))$。故に $(1-\rho)\cdot P(A) \leqq P(F''(n))+P(F'''(n))$ が従う。一方「$P(F''(n)) \leqq 1/M(n)$ 且つ $M(n)=n$」。故に $(1-\rho)\cdot P(A) \leqq P(F'''(n))+(1/n)$ が従う。ところが $F'''(n) \subseteq C$ より $P(F'''(n)) \leqq P(C)$ が従う。故に $(1-\rho)\cdot P(A) \leqq P(C)+(1/n)$ が従う。式3が従う。

式2及び式3の各各における n は任意の自然数である。故に「$\rho\cdot P(A) \leqq P(B)$ 且つ $(1-\rho)\cdot P(A) \leqq P(C)$」が従う。後者の不等式より $P(A)-P(C) \leqq \rho\cdot P(A)$ が従う。ところが $P(A)=P(A \setminus C)+P(C)$。故に $P(A \setminus C) \leqq \rho\cdot P(A)$ が従う。ところが式1より $B \subseteq A \setminus C$ が従う。故に $P(B) \leqq P(A \setminus C)$ が従う。故に $P(B) \leqq \rho\cdot P(A)$ が従う。一方前者の不等式より $\rho\cdot P(A) \leqq P(B)$。故に $P(B)=\rho\cdot P(A)$ が従う。故に「或事象 B が存在して，$B \subseteq A$ 且つ $P(B)=\rho\cdot P(A)$」が従う。故に［定義15］より命題が従う。　　［証明終］

［命題21］$\preccurlyeq$は殆ど精密であると仮定する。P 及び Q の各各が$\preccurlyeq$に概一致する任意の定量的確率であるのならば $P=Q$。

［注意］この命題における結論の内容は「$\preccurlyeq$に概一致する定量的確率は，若しそれが存在するのならば，一意的に定まる」と言う事である。

［証明］P 及び Q の各各を$\preccurlyeq$に概一致する任意の定量的確率であるとする。

陳述1。「各各が任意の事象である A 及び B に対して，$P(A)=P(B)$ ならば $Q(A)=Q(B)$」

が従う。これを示す。A及び B の各各を任意の事象とする。$P(A)=P(B)$ と仮定する。$Q(A)=Q(B)$ を示す。背理法による。$Q(A) \neq Q(B)$ と仮定して矛盾を導く。

$A \preccurlyeq B$ の場合を考える。［箇所1］$Q(A) \leqq Q(B)$ が従う。故に $Q(A) \lneqq Q(B)$ が従う。$d=(Q(B)-Q(A))/2$ と置く。「$0 \lneqq d$ 且つ $2\cdot d=Q(B)-Q(A)$」が従う。或自然数 n が存在して $2 \lneqq d\cdot n$。この n を固定する。$2/n \lneqq d$ が従う。$\preccurlyeq$は殆ど精密である。故に［命題9］及び［命題2］より S に対する或非減少的な殆ど一様な n 重分割 f が存在する。この f を固定する。

$j(*)=\max\{j \mid j \in N[n] \cup \{0\}$ 且つ $\langle f;\ N[j]\rangle \preccurlyeq A\}$

且つ

$k(*)=\max\{k \mid k \in N[n] \cup \{0\}$ 且つ $\langle f;\ N[k]\rangle \preccurlyeq B\}$

と置く。

$j(*)+1 \lneqq n$ を示す。背理法による。$n \leqq j(*)+1$ と仮定して矛盾を導く。$j(*)$ の定義より $j(*) \leqq n$。故に「$n=j(*)$ 或いは $n=j(*)+1$」が従う。

$n=j(*)$ の場合を考える。$\langle f;\ N[j(*)]\rangle=S$ が従う。ところが $\langle f;\ N[j(*)]\rangle \preccurlyeq A$。故に $S \preccurlyeq A$が従う。ところが $Q(A) \lneqq Q(B)$。故に $A \not\preccurlyeq B$。一方 $B \preccurlyeq S$。故に $A \not\preccurlyeq S$ が従う。故に矛盾が生じる。

$n=j(*)+1$ の場合を考える。「$j(*)+1 \in N[n]$ 且つ $\langle f;\ N[j(*)+1]\rangle=S$」が従う。$\langle f;\ N[j(*)+1]\rangle=\langle f;\ N[j(*)]\rangle \cup f(j(*)+1)$ 且

つ $\langle f; N[j(*)]\rangle \cap f(j(*)+1)=\phi$。故に $Q(\langle f; N[j(*)+1]\rangle)=Q(\langle f; N[j(*)]\rangle)+Q(f(j(*)+1))$。ところが $\langle f; N[j(*)+1]\rangle=S$。また $Q(S)=1$。一方 $\langle f; N[j(*)]\rangle \preccurlyeq A$ より $Q(\langle f; N[j(*)]\rangle)\leqq Q(A)$ が従う。故に $1\leqq Q(A)+Q(f(j(*)+1))$ が従う。ところが［命題17］より $Q(f(j(*)+1))\leqq 2/n$ が従う。ところが $2/n \lneqq d$。また $d\lneqq Q(B)-Q(A)$。故に $Q(f(j(*)+1))\lneqq Q(B)-Q(A)$ が従う。故に $Q(A)+Q(f(j(*)+1))\lneqq Q(B)$。故に $1\lneqq Q(B)$ が従う。ところが $Q(B)\leqq 1$。故に矛盾が生じる。

故に $j(*)+1\lneqq n$ が従う。

故に $j(*)+1$ 及び $j(*)+2$ の各各は $N[n]$ の元である。$Q(\langle f; N[j(*)+2]\rangle)=Q(\langle f; N[j(*)]\rangle)+Q(f(j(*)+1))+Q(f(j(*)+2))$。$\langle f; N[j(*)]\rangle \preccurlyeq A$ より $Q(\langle f; N[j(*)]\rangle)\leqq Q(A)$ が従う。［命題17］より $Q(f(j(*)+1))$ 及び $Q(f(j(*)+2))$ の各各は $2/n$ 以下である。また $2/n\lneqq d$。故に $Q(f(j(*)+1))+Q(f(j(*)+2))\lneqq 2\cdot d$。故に $Q(\langle f; N[j(*)+2]\rangle)\lneqq Q(A)+2\cdot d$。ところが $2\cdot d=Q(B)-Q(A)$。故に $Q(\langle f; N[j(*)+2]\rangle)\lneqq Q(B)$。故に $\langle f; N[j(*)+2]\rangle \preccurlyeq B$ が従う。$k(*)$ の最大性より $j(*)+2\leqq k(*)$ が従う。故に「$k(*)\neq j(*)$ 且つ $k(*)\neq j(*)+1$」。ところが［命題18］より「$k(*)=j(*)$ 或いは $k(*)=j(*)+1$」。故に矛盾が生じる。［箇所２］

$B\not\preccurlyeq A$ の場合を考える。$B\preccurlyeq A$ が従う。［箇所１］から［箇所２］までの各 A 及び各 B を各各 B 及び A へと置き換える事，即ち A 及び B の役割を交代させる事，によって得られる議論により矛盾が生じる。

故に $Q(A)=Q(B)$ が従う。陳述１が従う。

C を任意の事象とする。また m を任意の自然数とする。［命題19］より「S に対する或 m 重分割 g が存在して $N[m]$ の任意の元 j に対して $P(g(j))=1/m$」が従う。この g を固定する。陳述１及び［命題15］より

陳述２。「$N[m]$ の任意の元 j に対して $Q(g(j))=1/m$」

が従う。

$i(*)=\max\{i \mid i\in N[m]\cup\{0\}$ 且つ $\langle g; N[i]\rangle \preccurlyeq C\}$

と置く。$i(*)\leqq m$ が従う。

$i(*)=m$ の場合を考える。$\langle g; N[i(*)]\rangle=S$ が従う。$\langle g; N[i(*)]\rangle\preccurlyeq C$ より $S\preccurlyeq C$ が従う。故に「$P(S)\leqq P(C)$ 且つ $Q(S)\leqq Q(C)$」が従う。ところが「$P(C)\leqq 1$ 且つ $Q(C)\leqq 1$」。また「$P(S)=1$ 且つ $Q(S)=1$」。故に「$P(C)=1$ 且つ $Q(C)=1$」が従う。故に $P(C)=Q(C)$ が従う。

$i(*)\lneqq m$ の場合を考える。$i(*)+1\in N[m]$ が従う。$i(*)$ の定義より「$\langle g; N[i(*)]\rangle\preccurlyeq C$ 且つ $C\not\preccurlyeq\langle g; N[i(*)+1]\rangle$」が従う。故に

$P(\langle g; N[i(*)]\rangle)\leqq P(C)\leqq P(\langle g; N[i(*)+1]\rangle)$

及び

$Q(\langle g; N[i(*)]\rangle)\leqq Q(C)\leqq Q(\langle g; N[i(*)+1]\rangle)$

の各各が従う。また g の定義及び［命題15］より「$N[m]\cup\{0\}$ の任意の元 i に対して $P(\langle g; N[i]\rangle)=i/m$」が従う。一方陳述２及び［命題15］より「$N[m]\cup\{0\}$ の任意の元 i に対して $Q(\langle g; N[i]\rangle)=i/m$」が従う。故に

$$\frac{i(*)}{m}\leqq P(C)\leqq\frac{i(*)+1}{m}$$

及び

$$\frac{i(*)}{m} \leqq Q(C) \leqq \frac{i(*)+1}{m}$$

の各各が従う。故に

$$|P(C)-Q(C)| \leqq \frac{1}{m}$$

が従う。m は任意の自然数である。故に $P(C)=Q(C)$ が従う。C は任意の事象である。故に $P=Q$ が従う。命題が従う。　［証明終］

［命題22］ $\preccurlyeq$は殆ど精密であると仮定する。$\preccurlyeq$に概一致する或定量的確率が一意的に存在する。

［証明］［命題21］より $\preccurlyeq$に概一致する定量的確率は，若しそれが存在するのならば，一意的に定まる。故に$\preccurlyeq$に概一致する或定量的確率の存在を示せば命題が従う。これを示す。

［命題9］及び［定義11］より写像 $k(\cdot, \cdot)$ が定義可能となる。この $k(\cdot, \cdot)$ を用いる。

A を任意の事象とし且つ m 及び n の各各を任意の自然数とする。［命題14］における［結論1］及び［結論2］より各各

式1。$k(A, n \cdot m) \lneqq (k(A, n)+1) \cdot m$

及び

式2。$(k(A, m)-2) \cdot n \leqq k(A, m \cdot n)$

が従う。式1，式2，及び $k(A, m \cdot n)=k(A, m \cdot n)$ より

式3。$(k(A, m)-2) \cdot n \lneqq (k(A, n)+1) \cdot m$

が従う。式3の両辺を $m \cdot n$ で割る事により

式4。$\dfrac{k(A, m)}{m}-\dfrac{k(A, n)}{n} \lneqq \dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{n}$

が従う。ところが式4における m 及び n の各各は任意の自然数である。故に m と n とを交代させる事により

式5。$\dfrac{k(A, n)}{n}-\dfrac{k(A, m)}{m} \lneqq \dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{m}$

が従う。式4及び式5の各各における右辺は $2 \cdot ((1/m)+(1/n))$ よりも小である。故に式4及び式5より

式6。$\left|\dfrac{k(A, m)}{m}-\dfrac{k(A, n)}{n}\right| \lneqq 2 \cdot \left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)$

が従う。数列 $\langle 1/n ; n \in N \rangle$ は0に収束する。故に式6より各項が有理数である数列 $\left\langle \dfrac{k(A, n)}{n} ; n \in N \right\rangle$ は基本列である。故に実数体においてこの数列の極限が一意的に存在する。この極限を $P(A)$ と表記する。即ち

「任意の事象 A に対して $P(A)=\lim \left\langle \dfrac{k(A, n)}{n} ; n \in N \right\rangle$」

によって$\mathfrak{A}$を定義域とする写像 P を定義する。

陳述1。「P は定量的確率である」

が従う。これを示す。P の定義より「P は$\mathfrak{A}$から実数体への写像である」が従う。［定義13］における性質1が従う。

　A を任意の事象とする。［定義11］より「任意の自然数 n に対して $0 \leqq k(A, n)/n$」が従う。故に $0 \leqq P(A)$ が従う。［定義13］におけ

る性質2が従う。

A 及び B の各各を任意の事象とする。[命題13] における [結論1] 及び [結論2] より任意の自然数 n に対して，

$$\text{式7。}\ \frac{k(A,n)}{n}+\frac{k(B,n)}{n}-\frac{2}{n}\leqq\frac{k(A\cup B,n)}{n}\leqq\frac{k(A,n)}{n}+\frac{k(B,n)}{n}+\frac{1}{n}$$

が従う。ところが $\lim\langle(k(A,n)/n)+(k(B,n)/n);n\in N\rangle=P(A)+P(B)$。また $\lim\langle 1/n;n\in N\rangle=0$。故に式7より $\lim\langle k(A\cup B,n)/n;n\in N\rangle=P(A)+P(B)$。故に $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ が従う。[定義13] における性質3が従う。

[定義11] より「任意の自然数 n に対して $k(S,n)=n$」が従う。故に $\lim\langle k(S,n)/n;n\in N\rangle=1$ が従う。故に $P(S)=1$ が従う。[定義13] における性質4が従う。

故に [定義13] より陳述1が従う。

陳述2。「P は$\preccurlyeq$に概一致する」

が従う。これを示す。A 及び B の各各を任意の事象とする。$A\preccurlyeq B$ と仮定する。[定義11] より「任意の自然数 n に対して $k(A,n)\leqq k(B,n)$」が従う。故に「任意の自然数 n に対して $k(A,n)/n\leqq k(B,n)/n$」が従う。故に $P(A)\leqq P(B)$ が従う。[定義14] より陳述2が従う。

陳述1及び陳述2より「$\preccurlyeq$に概一致する或定量的確率が存在する」が従う。　　[証明終]

[命題22] 及び [命題20] より次の [命題23] が従う。

[命題23] $\langle S,\mathfrak{A}\rangle$ を任意の可測空間とし且つ$\preccurlyeq$を $\langle S,\mathfrak{A}\rangle$ 上の任意の定性的確率とする。即ち$\preccurlyeq$は次の性質1から性質5までを満たす任意の集合である。

性質1。$\preccurlyeq$は$\mathfrak{A}$上の二項関係である。
性質2。各各が$\mathfrak{A}$の任意の元である A 及び B に対して，$A\preccurlyeq B$ 或いは $B\preccurlyeq A$。
性質3。各各が$\mathfrak{A}$の任意の元である A, B, 及び C に対して，「$A\preccurlyeq B$ 且つ $B\preccurlyeq C$」ならば $A\preccurlyeq C$。
性質4。「$A\cap C=\phi$ 且つ $B\cap C=\phi$」を満たす各各が$\mathfrak{A}$の任意の元である A, B, 及び C に対して，$A\preccurlyeq B$ と$A\cup C\preccurlyeq B\cup C$ とは同値である。
性質5。$S\preccurlyeq\phi$ には非ず且つ$\mathfrak{A}$の任意の元 A に対して $\phi\preccurlyeq A$。

[仮定] $\preccurlyeq$は殆ど精密である。即ち任意の自然数 m に対して m 以上である或自然数 n 及び n 以下の自然数の全体 $N[n]$ から完全加法族$\mathfrak{A}$への或写像 f が存在して f は次の性質1及び性質2を満たす。

性質1。$S=\cup\{f(i)\mid i\in N[n]\}$ 且つ $j\neq k$ を満たす各各が $N[n]$ の任意の元である j 及び k に対して「$j\neq k$ ならば $f(j)\cap f(k)=\phi$」。

性質2。各各が $N[n]$ の任意の部分集合である I 及び J に対して，$\#(I)\lneqq\#(J)$ ならば $\cup\{f(i)\mid i\in I\}\preccurlyeq\cup\{f(j)\mid j\in J\}$。

[結論] $\preccurlyeq$に概一致する定量的確率が一意的に存在する。しかもこの一意的に定まる定量的確率は定量的に精密である。即ち次の性質1から性質5までを満たす或集合 P が存在してこの P は一意的に定まる。さらにこの一意的に定まる P は次の性質 (*) を満たす。

性質1。P は$\mathfrak{A}$から実数体への写像である。
性質2。$\mathfrak{A}$の任意の元 A に対して $0\leqq P(A)$。

性質3。各各が$\mathcal{A}$の任意の元である A 及び B に対して $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。
性質4。$P(S)=1$。
性質5。各各が$\mathcal{A}$の任意の元である A 及び B に対して，$A\preccurlyeq B$ ならば $P(A)\leqq P(B)$。

性質 (*) $\mathcal{A}$の任意の元 A 及び $0\leqq\rho\leqq1$ を満たす任意の実数 ρ に対して$\mathcal{A}$の或元 B が存在して，$B\subseteqq A$ 且つ $P(B)=\rho\cdot P(A)$。

付録。サヴェジ氏による議論

この付録においては［命題 A1］から［命題 A5］までを示す。また［定義 A1］を導入する。

［命題 A1］ $\preccurlyeq$ は殆ど精密であると仮定する。n 及び m の各各を任意の自然数とする。f を S に対する任意の殆ど一様な n 重分割とし且つ r を $N[n]\cup\{0\}$ の任意の元とする。

J を $r=\#(J)$ を満たす $N[n]$ の任意の部分集合とし且つ $B=\langle f;J\rangle$ と置く。次の［結論1］及び［結論2］が従う。

［結論1］ $k(B,\ n\cdot m)\leqq(r+2)\cdot m$。

［結論2］ $(r-2)\cdot m\leqq k(B,\ n\cdot m)$。

［証明］［結論1］を示す。［命題11］より $k(B,\ n\cdot m)$ を非減少的に獲得する S に対する或殆ど一様な $n\cdot m$ 重分割が存在する。この $n\cdot m$ 重分割を g と表記する。また g の n 重変形を h と表記する。h は非減少的列であり且つ S に対する殆ど一様な n 重分割である。除法原理により「$k(B,\ n\cdot m)=a\cdot m+b$ 且つ $a\in N\cup\{0\}$ 且つ $b\in N[m-1]\cup\{0\}$」を満たす $\langle a,\ b\rangle$ が一意的に存在する。この $\langle a,\ b\rangle$ を用いる。$a\in N[n]\cup\{0\}$ が従う。

$a\leqq r+2$ を示す。背理法による。$r+2\lneqq a$ と仮定して矛盾を導く。$(r+2)+1\leqq a$ が従う。$t=(r+2)+1$ と置く。$t\in N[n]$ 且つ $t\cdot m\leqq a\cdot m+b$。故に $\langle g;N[t\cdot m]\rangle\preccurlyeq\langle g;N[a\cdot m+b]\rangle$ が従う。ところが $\langle g;N[a\cdot m+b]\rangle\preccurlyeq B$。故に $\langle g;N[t\cdot m]\rangle\preccurlyeq B$ が従う。ところが $\langle g;N[t\cdot m]\rangle=\langle h;N[t]\rangle$。故に $\langle h;N[t]\rangle\preccurlyeq B$ が従う。ところが「f は S に対する殆ど一様な n 重分割であり且つ $B=\langle f;J\rangle$ 且つ $r=\#(J)$」。故に［命題8］より $B\preccurlyeq\langle h;N[r+2]\rangle$ が従う。ところが「h は非減少的列であり且つ S に対する殆ど一様な分割である」。故に［命題12］より $\phi\not\preccurlyeq h(t)$ が従う。故に $B\not\preccurlyeq\langle h;N[t]\rangle$ が従う。ところが $\langle h;N[t]\rangle\preccurlyeq B$。故に矛盾が生じる。故に $a\leqq r+2$ が従う。

$a=r+2$ の場合を考える。$r+2\in N[n]$ が従う。$b=0$ を示す。背理法による。$b\neq0$ と仮定して矛盾を導く。$a\cdot m+1\in N[n\cdot m]$ 且つ $a\cdot m+1\leqq a\cdot m+b$。$\langle g;\ N[a\cdot m+1]\rangle\preccurlyeq\langle g;\ N[a\cdot m+b]\rangle$ が従う。ところが $\langle g;\ N[a\cdot m+b]\rangle\preccurlyeq B$。故に $\langle g;N[a\cdot m+1]\rangle\preccurlyeq B$ が従う。
ところが「g は非減少的列であり且つ S に対する殆ど一様な分割である」。故に $a=r+2$ 及び［命題12］より $\phi\not\preccurlyeq g(a\cdot m+1)$ が従う。故に $\langle g;N[a\cdot m]\rangle\not\preccurlyeq\langle g;N[a\cdot m+1]\rangle$ が従う。故に $\langle g;N[a\cdot m]\rangle\not\preccurlyeq B$ が従う。ところが $\langle g;N[a\cdot m]\rangle=\langle h;N[a]\rangle$。故に $\langle h;N[a]\rangle\not\preccurlyeq B$ が従う。ところが $a=r+2$ 及び［命題8］より $B\preccurlyeq\langle h;N[a]\rangle$ が従う。故に矛盾が生じる。故に $b=0$ が従う。故に

式1。$k(B,\ n\cdot m)=(r+2)\cdot m$

が従う。

$a\lneqq r+2$ の場合を考える。$a+1\leqq r+2$ が従う。一方 $b\lneqq m$ より $a\cdot m+b\lneqq(a+1)\cdot m$ が従う。故に $a\cdot m+b\lneqq(r+2)\cdot m$ が従う。故に

式2。$k(B,\ n\cdot m)\lneqq(r+2)\cdot m$

が従う。

式1及び式2より［結論1］における不等式が従う。

［結論2］を示す。$k(B, n \cdot m)$ を獲得する S に対する或殆ど一様な $n \cdot m$ 重分割が存在する。この $n \cdot m$ 重分割を g とする。但しこの g を非減少的列であるとする必要はない。また g の n 重変形を h とする。h は S に対する殆ど一様な n 重分割である。除法原理により「$k(B, n \cdot m) = a \cdot m + b$ 且つ $a \in N \cup \{0\}$ 且つ $b \in N[m-1] \cup \{0\}$」を満たす $\langle a, b \rangle$ が一意的に存在する。この $\langle a, b \rangle$ を用いる。

$r-2 \leqq a$ を示す。背理法による。$a \lneqq r-2$ と仮定して矛盾を導く。$a+2 \lneqq r$ が従う。故に $a+1 \in N[n]$ が従う。$t=a+1$ と置く。$b \lneqq m$ より $a \cdot m + b \lneqq t \cdot m$ が従う。故に $k(B, n \cdot m)$ の最大性より $B \not\preccurlyeq \langle g; N[t \cdot m] \rangle$ が従う。故に $B \not\preccurlyeq \langle h; N[t] \rangle$ が従う。ところが $a+2 \lneqq r$ より $t+2 \leqq r$ が従う。ところが $r = \#(J)$。故に「J の或部分集合 K が存在して $t+2 = \#(K)$」が従う。この K を固定する。［命題8］より $\langle h; N[t] \rangle \preccurlyeq \langle f; K \rangle$ が従う。故に $B \not\preccurlyeq \langle f; K \rangle$ が従う。ところが「$\langle f; K \rangle \sqsubseteq \langle f; J \rangle$ 且つ $\langle f; J \rangle = B$」より $\langle f; K \rangle \preccurlyeq B$ が従う。故に矛盾が生じる。故に $r-2 \leqq a$ が従う。

故に $(r-2) \cdot m \leqq a \cdot m + b$ が従う。故に $(r-2) \cdot m \leqq k(B, n \cdot m)$ が従う。［結論2］における不等式が従う。　［証明終］

［命題 A2］$\preccurlyeq$ は殆ど精密であると仮定する。m 及び n の各各を任意の自然数とする。また f 及び g を各各 S に対する任意の殆ど一様な m 重及び n 量の分割とし且つ r 及び t を各各 $N[m] \cup \{0\}$ 及び $N[n] \cup \{0\}$ の任意の元とする。

［仮定］$\langle f; N[r] \rangle \preccurlyeq \langle g; N[t] \rangle$。

［結論］$\dfrac{r-2}{m} \leqq \dfrac{t+2}{n}$。

［証明］［命題9］より［定義11］における写像 $k(\cdot, \cdot)$ が定義可能である。この $k(\cdot, \cdot)$ を用いる。「$B = \langle f; N[r] \rangle$ 且つ $C = \langle g; N[t] \rangle$」と置く。［命題 A1］における［結論1］及び［結論2］より各各 $k(C, n \cdot m) \leqq (t+2) \cdot m$ 及び $(r-2) \cdot n \leqq k(B, m \cdot n)$ が従う。ところが仮定より $B \preccurlyeq C$ が従う。故に $k(B, n \cdot m) \leqq k(C, n \cdot m)$ が従う。また $k(B, m \cdot n) = k(B, n \cdot m)$。故に $(r-2) \cdot n \leqq (t+2) \cdot m$ が従う。故にこの不等式の両辺を $m \cdot n$ で割る事により $\dfrac{r-2}{m} \leqq \dfrac{t+2}{n}$ が従う。結論が従う。　［証明終］

［注意］$\preccurlyeq$ は殆ど精密であると仮定する。A を任意の事象とし且つ m 及び n の各各を任意の自然数とする。この場合上述の［命題 A2］より次の不等式 (*) が従う。

$$(*) \quad \left| \frac{k(A, m)}{m} - \frac{k(A, n)}{n} \right| \lneqq 3 \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)。$$

しかし一方，［命題22］の証明において示されている式6より

$$\left| \frac{k(A, m)}{m} - \frac{k(A, n)}{n} \right| \lneqq 2 \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$$

が従う。これにより不等式 (*) の右辺の $3 \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$ は $2 \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)$ へと置き換える事が適切である。しかしここでは敢えてサヴェジ［1］第3章第3節36頁の証明中第 6a 段から第 6b 段までの論述に従って［命題 A2］の［結論］における不等式，但しこの不等式は上で言及したサヴェジ［1］の第 6a 段における不等式に対応する，に基づいて上掲の不等式 (*)，但しこの不等式は上で言及したサヴェジの第 6b 段

における不等式に対応する，を導く事にする。なお若し仮にではあるがサヴェジ［1］の論述をそのまま利用するのならば，［命題 A2］の［結論］における不等式の右辺及び上掲の不等式（*）の右辺は各各

$$\frac{t+2}{n}+\frac{1}{m\cdot n} \text{ 及び } 3\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{m\cdot n}$$

となるであろうが，しかしながら［命題 A2］の［証明］及び以下の証明により，これらはサヴェジ［1］の趣旨に従う場合においても各各

$$\frac{t+2}{n} \text{ 及び } 3\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$$

とする事が適切である事が知れるのである。

［証明］$k(A, m)$ 及び $k(A, n)$ を獲得する S に対する殆ど一様な分割達を各各 f 及び g とする。f 及び g は各各 m 重及び n 重の分割である。「$r=k(A, m)$ 且つ $t=k(A, n)$」と置く。

$(r/m)-(t/n)\lneqq 0$ の場合を考える。$r/m\lneqq t/n$ が従う。ところが $t/n\leqq 1$。故に $r/m\lneqq 1$ が従う。故に $r\lneqq m$ が従う。故に $r+1\in \boldsymbol{N}[m]$ が従う。$k(A, m)$ の最大性より $A\npreccurlyeq\langle f; \boldsymbol{N}[r+1]\rangle$ が従う。ところが $k(A, n)$ の定義より $\langle g; \boldsymbol{N}[t]\rangle\preccurlyeq A$ が従う。故に $\langle g; \boldsymbol{N}[t]\rangle\npreccurlyeq\langle f; \boldsymbol{N}[r+1]\rangle$ が従う。故に［命題 A2］より $(t-2)/n\leqq(r+3)/m$ が従う。故に $(t/n)-(r/m)\leqq(3/m)+(2/n)$ が従う。$(3/m)+(2/n)\lneqq 3\cdot((1/m)+(1/n))$ より

式1。　$0\lneqq\dfrac{t}{n}-\dfrac{r}{m}\lneqq 3\cdot\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)$

が従う。

$0\lneqq(r/m)-(t/n)$ の場合を考える。$t/n\lneqq r/m$ が従う。ところが $r/m\leqq 1$。故に $t/n\lneqq 1$ が従う。故に $t\lneqq n$ が従う。故に $t+1\in \boldsymbol{N}[n]$ が従う。$k(A, n)$ の最大性より $A\npreccurlyeq\langle g; \boldsymbol{N}[t+1]\rangle$ が従う。ところが $k(A, m)$ の定義より $\langle f; \boldsymbol{N}[r]\rangle\preccurlyeq A$ が従う。故に $\langle f; \boldsymbol{N}[r]\rangle\npreccurlyeq\langle g; \boldsymbol{N}[t+1]\rangle$ が従う。故に［命題 A2］より $(r-2)/m\leqq(t+3)/n$ が従う。故に $(r/m)-(t/n)\leqq(2/m)+(3/n)$ が従う。$(2/m)+(3/n)\lneqq 3\cdot((1/m)+(1/n))$ より

式2。　$0\lneqq\dfrac{r}{m}-\dfrac{t}{n}\lneqq 3\cdot\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)$

が従う。

$0=(r/m)-(t/n)$ の場合には $0=|(r/m)-(t/n)|$ が従う。故に式1，式2，及び $0\lneqq 3\cdot\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)$ より

$$\left|\frac{r}{m}-\frac{t}{n}\right|\lneqq 3\cdot\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$$

が従う。上掲の不等式（*）が従う。［証明終］

［定義 A1］n を任意の自然数とし且つ p を $\boldsymbol{N}[n]$ から実数体への任意の写像とする。「p は長さ n の分割的数列である」と言う事は「$i\in \boldsymbol{N}[n]$ を満たす任意の i に対して $0\leqq p(i)$，且つ $\sum_{i=1}^{n} p(i)=1$」と言う事であると定義する。また長さ n の任意の分割的数列 p に対して，「p は非減少である」と言う事は「各各が $\boldsymbol{N}[n]$ の任意の元である i 及び j に対して，$i\leqq j$ ならば $p(i)\leqq p(j)$」と言う事であると定義する。

［命題 A3］n を任意の自然数とし且つ p を非減少的である長さ n の任意の分割的数列であるとする。この場合次の［結論1］が従う。

［結論1］n 以下の任意の自然数 r に対して

$\sum_{i=1}^{r} p(i) \leqq r/n$。

さらにこの p が

仮定 (*)「n よりも小である任意の自然数 r に対して $\sum_{i=n-r+1}^{n} p(i) \leqq \sum_{i=1}^{r+1} p(i)$」

を満たすのならば次の［結論2］及び［結論3］が従う。

［結論2］n 以下の任意の自然数 r に対して，$(r-1)/n \leqq \sum_{i=1}^{r} p(i)$ 且つ $\sum_{i=n-r+1}^{n} p(i) \leqq (r+1)/n$。

［結論3］n 以下の任意の自然数 r 及び $r=\#(I)$ を満たす $N[n]$ の任意の部分集合 I に対して，$(r-1)/n \leqq \sum_{i \in I} p(i) \leqq (r+1)/n$。

［証明］［結論1］を示す。$K=\{k \mid k \in N[n]$ 且つ $\sum_{i=1}^{k} p(i) \leqq k/n\}$ と置く。$K \subseteqq N[n]$ が従う。また $\sum_{i=1}^{n} p(i)=1$ より $n \in K$ が従う。

「$k \in K$ 且つ $1 \lneqq k$」を満たす任意の k を固定する。$k-1 \in K$ が従う。これを示す。背理法による。$k-1 \notin K$ と仮定して矛盾を導く。$k \in K$ より $k \in N[n]$ が従う。ところが $1 \lneqq k$。故に $k-1 \in N[n]$ が従う。ところが $k-1 \notin K$。故に $(k-1)/n \lneqq \sum_{i=1}^{k-1} p(i)$ が従う。一方 $k \in K$ より $\sum_{i=1}^{k} p(i) \leqq k/n$ が従う。故に $p(k) \lneqq 1/n$ が従う。ところが p は非減少である。故に「k 以下の任意の自然数 i に対して $p(i) \leqq p(k)$」。故に「k 以下の任意の自然数 i に対して $p(i) \lneqq 1/n$」が従う。また $k-1 \in N[n]$。故に $\sum_{i=1}^{k-1} p(i) \lneqq (k-1)/n$ が従う。ところが $(k-1)/n \lneqq \sum_{i=1}^{k-1} p(i)$。故に矛盾が生じる。故に $k-1 \in K$ が従う。

故に $K=N[n]$ が従う。r を n 以下の任意の自然数とする。$r \in N[n]$ より $r \in K$ が従う。K の定義より $\sum_{i=1}^{r} p(i) \leqq r/n$ が従う。［結論1］が従う。

［結論2］を示す。r を n 以下の任意の自然数とする。

前者の不等式を示す。$r=1$ の場合には $0 \leqq p(1)$ よりこの不等式が従う。$1 \lneqq r$ の場合を考える。$r-1 \in N[n]$ が従う。仮定 (*) より $\sum_{i=n-r+2}^{n} p(i) \leqq \sum_{i=1}^{r} p(i)$ が従う。また $\sum_{i=n-r+2}^{n} p(i) = 1-\sum_{i=1}^{n-r+1} p(i)$ が従う。一方［結論1］より $\sum_{i=1}^{n-r+1} p(i) \leqq (n-r+1)/n$。故に $(r-1)/n = 1-((n-r+1)/n) \leqq \sum_{i=n-r+2}^{n} p(i)$ が従う。故に $(r-1)/n \leqq \sum_{i=1}^{r} p(i)$ が従う。前者の不等式が従う。

後者の不等式を示す。$r=n$ の場合には「$\sum_{i=1}^{n} p(i)=1$ 且つ $1 \lneqq (n+1)/n$」よりこの不等式が従う。$r \lneqq n$ の場合を考える。$r+1 \in N[n]$ が従う。仮定 (*) より $\sum_{i=n-r+1}^{n} p(i) \leqq \sum_{i=1}^{r+1} p(i)$ が従う。ところが［結論1］より $\sum_{i=1}^{r+1} p(i) \leqq (r+1)/n$ が従う。故に $\sum_{i=n-r+1}^{n} p(i) \leqq (r+1)/n$ が従う。後者の不等式が従う。

［結論2］が従う。

［結論3］を示す。「$N[r]$ から I への或写像 a が一意的に存在して各各が $N[r]$ の任意の元である i 及び j に対して，$i \leqq j$ と $a(i) \leqq a(j)$ とは同値である」及び「$N[n-r;n]$ から I への或写像 b が一意的に存在して各各が $N[n-r;n]$ の任意の元である i 及び j に対して，$i \leqq j$ と $b(i) \leqq b(j)$ とは同値である」が従う。ここにおける a 及び b を用いる。a 及び b の各各は全単射である。

i を r 以下の任意の自然数とする。$i \leqq a(i)$ が従う。p は非減少的である。故に $p(i) \leqq p(a(i))$ が従う。故に $\sum_{i=1}^{r} p(i) \leqq \sum_{i=1}^{r} p(a(i))$

が従う。ところが a は $N[r]$ から I への全単射である。故に $\sum_{i=1}^{r} p(a(i))=\sum_{i\in I} p(i)$ が従う。故に $\sum_{i=1}^{r} p(i)\leqq\sum_{i\in I} p(i)$ が従う。ところが［結論 2］における前者の不等式より $(r-1)/n\leqq\sum_{i=1}^{r} p(i)$ が従う。故に

式1。$\dfrac{r-1}{n}\leqq\sum_{i\in I} p(i)$

が従う。

i を $n-r$ より大であり且つ n 以下である任意の自然数とする。$b(i)\leqq i$ が従う。p は非減少的である。故に $p(b(i))\leqq p(i)$ が従う。故に $\sum_{i=n-r+1}^{n} p(b(i))\leqq\sum_{i=n-r+1}^{n} p(i)$ が従う。ところが b は $N[n-r;n]$ から I への全単射である。故に $\sum_{i=n-r+1}^{n} p(b(i))=\sum_{i\in I} p(i)$ が従う。故に $\sum_{i\in I} p(i)\leqq\sum_{i=n-r+1}^{n} p(i)$ が従う。ところが［結論 2］における後者の不等式より $\sum_{i=n-r+1}^{n} p(i)\leqq(r+1)/n$ が従う。故に

式2。$\sum_{i\in I} p(i)\leqq\dfrac{r+1}{n}$

が従う。

式1及び式2より［結論 3］が従う。［証明終］

［命題 A4］$\preccurlyeq$ は殆ど精密であると仮定する。P を $\preccurlyeq$ に概一致する任意の定量的確率とする。また n を任意の自然数とする。

f を S に対する任意の殆ど一様な n 重分割とし且つ r を零であるか或いは n 以下の任意の自然数であるとする。$C=\langle f;N[r]\rangle$ と置く。この場合次の［結論 1］が従う。

［結論 1］$\dfrac{r-1}{n}\leqq P(C)\leqq\dfrac{r+1}{n}$。

また［命題 9］より［定義11］における写像 $k(\cdot,\cdot)$ が定義可能である。この写像を用いる。B を任意の事象とする。次の［結論 2］が従う。

［結論 2］$\dfrac{k(B,n)-1}{n}\leqq P(B)\leqq\dfrac{k(B,n)+2}{n}$。

［証明］［結論 1］を示す。$r=n$ の場合を考える。$C=S$ が従う。故に $P(C)=1$ が従う。これより結論が従う。

$r\lneqq n$ の場合を考える。［命題 2］より f を非減少化する或全単射が存在する。この全単射を固定して a と表記する。また f の a 変換を g とする。「a は $N[n]$ から $N[n]$ への全単射であり且つ $g=f\circ a$ 且つ各各が $N[n]$ の任意の元である $j\leqq k$ を満たす j 及び k に対して $g(j)\preccurlyeq g(k)$」が従う。g も亦 S に対する殆ど一様な n 重分割である。［定義 9］より「n より小である任意の自然数 l に対して $\langle g;N[n-l;n]\rangle\preccurlyeq\langle g;N[l+1]\rangle$」が従う。

［定義14］より「各各が $N[n]$ の任意の元である $j\leqq k$ を満たす j 及び k に対して $P(g(j))\leqq P(g(k))$，且つ n より小である任意の自然数 l に対して $\sum_{m=n-l+1}^{n} P(g(m))\leqq\sum_{m=1}^{l+1} P(g(m))$」が従う。一方 $P(S)=1$ 及び［命題15］より $\sum_{m=1}^{n} P(g(m))=1$ が従う。また［定義13］における性質 2 より「n 以下の任意の自然数 i に対して $0\leqq P(g(i))$」が従う。$I=a^{-1}[N[r]]$ と置く。$\#(I)=r$ が従う。故に［命題 A3］における［結論 3］より

$$\frac{r-1}{n}\leqq\sum_{i\in I} P(g(i))\leqq\frac{r+1}{n}$$

が従う。ところが a^{-1} は $N[n]$ から $N[n]$ への全単射である。故に $\sum_{i\in I} P(g(i))=\sum_{i\in N[r]} P(g(a^{-1}(i)))=\sum_{i\in N[r]} P(f(i))$ が従う。故に $(r-1)/n\leqq\sum_{i\in N[r]} P(f(i))\leqq(r+1)/n$ が従う。ところが［命題15］より $\sum_{i\in N[r]} P(f(i))=P$

$(\langle f; N[r]\rangle) = P(C)$。

故に

$$\frac{r-1}{n} \leqq P(C) \leqq \frac{r+1}{n}$$

が従う。[結論 1] が従う。

[結論 2] を示す。$k(B, n) = n$ の場合を考える。[定義11] より $S \preccurlyeq B$ が従う。P は $\preccurlyeq$ に概一致する定量的確率である。故に $P(B) = 1$ が従う。これより結論が従う。

$k(B, n) \lneqq n$ の場合を考える。$k(B, n) + 1 \in N[n]$ が従う。$k(B, n)$ を獲得する S に対する殆ど一様な n 重分割を h とする。$\langle h; N[k(B, n)]\rangle \preccurlyeq B$ が従う。故に $P(\langle h; N[k(B, n)]\rangle) \leqq P(B)$ が従う。[結論 1] の左側の不等式より $(k(B, n)-1)/n \leqq P(\langle h; N[k(B, n)]\rangle)$ が従う。故に $(k(B, n)-1)/n \leqq P(B)$ が従う。一方 $k(B, n)+1 \in N[n]$ 及び $k(B, n)$ の最大性より $B \not\preccurlyeq \langle h; N[k(B, n)+1]\rangle$ が従う。故に $P(B) \leqq P(\langle h; N[k(B, n)+1]\rangle)$ が従う。一方 [結論 1] の右側の不等式より $P(\langle h; N[k(B, n)+1]\rangle) \leqq (k(B, n)+2)/n$ が従う。故に $P(B) \leqq (k(B, n)+2)/n$ が従う。故に

$$\frac{k(B, n)-1}{n} \leqq P(B) \leqq \frac{k(B, n)+2}{n}$$

が従う。[結論 2] が従う。 [証明終]

[命題 A5] $\preccurlyeq$ は殆ど精密であると仮定する。P 及び Q の各各を $\preccurlyeq$ に概一致する任意の定量的確率とする。$P = Q$ 即ち「任意の事象 A に対して $P(A) = Q(A)$」が従う。

[注意] この [命題 A5] は [命題21] に他ならない。しかしここではサヴェジ [1] 第3章第3節35頁の証明中の第 4a 段及び第 4b 段の論述に従って証明を与える事にする。

[証明] A を任意の事象とし且つ n を任意の自然数とする。[命題 A4] における [結論 2] より

$$\frac{k(A, n)-1}{n} \leqq P(A) \leqq \frac{k(A, n)+2}{n}$$

且つ

$$\frac{k(A, n)-1}{n} \leqq Q(A) \leqq \frac{k(A, n)+2}{n}$$

が従う。故に

$$\frac{(-3)}{n} \leqq P(A) - Q(A) \leqq \frac{3}{n}$$

が従う。ところがここに n は任意の自然数であり，また $\lim\langle 1/m; m \in N\rangle = 0$。故に $P(A) = Q(A)$ が従う。ここに A は任意の事象である。故に $P = Q$ が従う。命題が従う。

[証明終]

[注意] [命題22] の証明における式6の次からその証明の末尾までの議論及び [命題 A1] の次に従う [注意] における不等式 (*) 及び [命題 A5] より [命題22] の結論を導き，且つ [命題20] の証明の議論により定性的確率に概一致する一意的に存在する定量的確率が定量的に精密である事を示す，と言うのがサヴェジ [1] 第3章第3節33頁最後の段落から同章同節36頁最後から第二番目の段落まで，即ち同書の35頁から36頁までに提示されているサヴェジ氏の略式証明の末尾まで，において展開されている論述の筋道である。

参考文献

[1] Savage, Leonard Jimmie, (1972), *The Foundations of Statistics, Second Revised Edition*, Dover Publications, New York, 但し，この本の第1版は，1954年に，John Wiley & Sons, New York, より出版されている。

[2] 園信太郎，(1987年3月)，「Savage の行為の或抽象化，Dedekind の数，個人的確率，及び，von Neumann-Morgenstern 効用，について」，経済学研究（北海道大学），第36巻第4号，1(457)-16(472).

[3] 園信太郎，(1988年3月)，「サヴェジ氏の哲学に対する簡潔なる序説」，経済学研究（北海道大学），第37巻第4号，48(488)-61(501).

[4] 園信太郎，(1988年6月)，「サヴェジ氏の定量的確率，に対する，従属選択の原理を伴う一個の簡潔なる接近」，経済学研究（北海道大学），第38巻第1号，36(36)-84(84).

[5] 園信太郎，(1988年9月)，「サヴェジ書における殆ど一様な分割(1)定義」，経済学研究（北海道大学），第38巻第2号，76(238)-131(293).

(1988年11月22日（火），於北大教養部，了)