経済学研究 38-4
北海道大学 1989. 3

<資　料>

A. Я. ヒンチン「R. ミーゼスの確率論と現代の確率観」

（解説・付記 Б. В. グネディエンコ）
『哲学の諸問題　1961年1号，2号』

是 永 純 弘 訳

訳者　はしがき

現代数理統計学の数学的基礎はコルモゴロフの公理系にもとずく測度論的確率論にあるとされている。そのコルモゴロフが自らの確率基礎論の経験的基礎としたのは R. v. ミーゼス の頻度説的確率論であった。頻度説的確率論についてはすでにその狭さや，ミーゼスの経験批判論的思想のゆえに批判され，また確率論の主観主義化としていわゆるベイジアンの見解が展開されている。しかし統計数値，特に社会・経済統計の数値を確率論的に処理するさいに考えるべき確率基礎論の問題がすべて解決されているわけではない。ここに紹介したいのは，『量子統計の数学的基礎』(郡敏昭訳，1962，東京図書）その他の自然科学における確率論の適用でも著名なヒンチンが，ミーゼスの確率論基礎づけについて論評した遺稿である。参考までに以下全文を訳出する。なお，邦訳にさいし，本学部園信太郎助教授から多くの貴重な批判と忠告をいただき，教育学部成田雅博氏のご協力をいただいた。深く感謝申し上げたい。

（1988年12月1日）

A. Я. ヒンチン「R. ミーゼスの確率論と現代の確率観」論文について

Б. В. グネディエンコ

確率論，統計物理学及び関数論の分野の諸労作で名高い偉大なる数学者アレクサンドル・ヤコブレーウィッチ・ヒンチンの本論文は，ヒンチンが1939～1944年に執筆したものであるが，《数理科学の成果》（《Успехи математических наук》）誌に公表されたものと思われるが，私には不明の原因で，今日まで印刷公表されなかったものである。故人の学問的遺稿の整理にあたっていた私は，かれのこの労作のことを思い出し，その探索をはじめた。残念ながら完成稿を発見することはできなかった。《数理科学の成果》誌の編者に本稿が引きわたされた日時の調査もうまくゆかなかった。そこで私は，弟子 Е. Л. ルバチェフと Д. Р. メイズラが1946年に復刻した原稿を用いることに決めたが，それには，若干の脱漏がある。このままでも，А. Я. ヒンチンの論文は興味深いものであると私は信じている。

知識のきわめて多様な分野で確率論的方法は年々，ますます大きな意義をもつようになったのは事実である。このため，偶然事象の性質を解明することと，偶然事象の確率という基本概念の規定はとくに重要である。外見的に興味ぶかく，また一見したところ信頼に値いするミーゼスの諸構想は，相かわらず，とりわけ数学以外の研究面の論者たちのあいだで，多数の支持者を見出しつづけている。だからこそ，この構想の論理的，哲学的な分析は，今日においてもなお当面重要な問題なのである。比較的さいき

ん発行されたミーゼスの有名な書物（すでに遺著となったが）の英語版（R. Mises《Probability, statistics and truth》London, 1957）にも，著者の初期の立場のすべてが変更されないでそのまま含まれていることからもこのようにいえるのである。

A. Я. ヒンチンの遺稿の公表は，ソ連の数学者と哲学者に，あらためて，確率の性質や，確率論と現実の現象界との相互関係についてのヒンチンの見解を完成させ，発展させることの必要を示唆している。そうした論議にとってこの遺稿はすぐれた出発点となりうるものである。本稿の印刷前にモスクワ国立大学の哲学と数学史のセミナーの合同学会で2回読み，検討がなされた。本稿の内容についての検討がなされた後にこれを公刊することの必要が全員一致でみとめられたのである。

筆者自身が，読者の理解を援けるために A. Я. ヒンチンのこの遺稿に付加した注記はごくわずかである。そのほか，追加として，現代の確率論の分野での A. Я. ヒンチンの労作の簡単な特徴づけを加えた。

×　　×　　×

当然のことだが，アレクサンドル・ヤコブレービッチ・ヒンチン（1894～1959年）は，現代確率論の創始者の1人と考えられている。かれの名とかかわりがあるのは，確率論の基礎づけに集合論的方法が定立された一時期と，定常確率過程の一般理論の原理の確立である。これらのことはすべて，数学と自然科学のさまざまな部分での統計的法則性の役割を解明しようとしたヒンチンの遠大な構想のうちに含まれている。この目標は，数の測度論，統計物理学，独立偶然量の総和，大数観察論の分野でのヒンチンの研究に刺激を与えた（大数観察論ではヒンチンは電話事業の実務に直接かかわっている）。その死後はまた情報伝達の問題の研究にも刺激を与えている。

いうまでもなく，上述のような構想は哲学的な問題の検討なしにはとうてい実現できず，科学の発展の論理は，この種の問題の研究に大学者をみちびかざるをえなかった。そして，事実，A. Я. ヒンチンは，確率論とその自然科学への応用の中心問題の哲学的考察にたえずたちかえっている。ヒンチンはこうした諸問題を，特別の哲学論文でも，具体的な数学上の問題を解くためのモノグラフにおいても，さらにまた，学生向けの彼の講義や方法論セミナーの報告でも検討しているのである。

A. Я. ヒンチンは，自らの専攻する学問の方法論的諸問題に一貫して関心をもち，現代自然科学のさしせまった哲学的諸問題の解決にあたって，弁証法的唯物論の立場を堅持してきたソ連の学者の一人である。彼は自分の見地を，書物や，方法論セミナーの報告で，たびたび説明してきた。こうした報告の1つに，1951年，A. Я. ヒンチンが，B. A. スチェクローフ名称数学研究所の方法論セミナーで発表したもので，現代確率論の観念論的理解をはげしく批判したものがあることを Л. E. マイストロフが教えてくれた。A. Я. ヒンチンの文書のなかには，断片的な思考のメモのあるノートがふくまれているが，その表紙には彼の手で《確率論における いくつかの観念論的傾向について》と書かれている。

ヒンチンはその生涯の40年以上を，学生，大学院生，教授としてモスクワ大学とともにすごした。1939年かれは，ソ連邦科学アカデミー通信会員にえらばれ，1944年ロシア共和国教育学アカデミーの結成以降は，その正会員，幹部会員であった。

R. ミーゼスの
確率論と現代の確率観

A. Я. ヒンチン

はしがき

約20年前，ドイツの学者リッヒャルト・ミーゼスは，一般にみとめられていた確率論の基礎づけに対する徹底的なはげしい批判を数学と哲学の雑誌にはじめて公表した。同時にミーゼスはこの学問の彼自身の新しい基礎づけを提唱しているのであるが，彼はこの基礎づけを現在にいたるまで，倦まずに，数学や哲学の論文，通俗的な文書，自らの有名な確率論の教程で普及させようとしてきた。このいわゆる確率頻度説は，数学者の間でも，またとくに自然科学者や応用科学者，とりわけ物理学者の間にも，多数の支持者を見出したのである。この学説の諸問題には多くの文献があてられ，それらをめぐって活発な論争がくりひろげられた。つまり，頻度説は，確率にかんする現代の学説の生命にかかわるあまりにも重要な契機になったために，この説については，われわれの科学の代表者の誰しもふれざるをえないと今では考えるようになったのであり，この説を無視したり，それにふれなかったり，避けてすますことはもはや不可能になったのである。ところが，われわれの科学の歴史におけるこの説の役割と，それ以外の確率論基礎づけの一連の試みのなかでのその地位を全面的かつ遺漏なく解明することを目標とするような，この説の批判的分析の試みを，われわれはまだ一つも知らないのである[1]。

1）私の知るかぎり，この種の分析は現在，存在しない。有名なチャーチの論理学論文（A. Church《On the concept of a random sequence》《Bull. of the Amer. Math. Soc.》, 46, 1940, pp. 130-135）や P. ピョートルの書物（《Рекурсивные Функции》, M. 1954, стр. . 218）の目標はせまい。——Б. グネディエンコ。

とくに注目すべきことに，現代確率観の最も権威ある代表者たち（ソ連のベルンシュテインとコルモゴロフ，フランスのボレル，レヴィ，フレシェ，イタリーのカンテリやフィネッティ，スウェーデンのクラメールその他）が，この問題についてはほとんど何ものべていないのである。これに言及しているもののほとんどは，二流どころの専門家あるいは哲学者と物理学者なのである。とはいえ，これらの言及はほとんど場合，ごくかぎられた部分的なものであって，あれこれの個別的な契機が検討されたり，個々の命題が批判されたり，あれこれの修正や改善が提案されているにすぎない。頻度説についての大多数の数学者の態度は，これを軽視する，皮肉なものが圧倒的に多い。私的な対話でよく耳にするのは，頻度説が解決しがたい論理的欠陥になやまされていること，したがって，数学的観点からすれば，この説をまともに相手にすることさえできないということである。物理学者はこうした態度に反対して，もしそうだとすれば，こうした形式的な欠陥をなくすのが数学者の責任であるのだが，科学的な実践の必要と要請にこれほど見事に対応しているこの頻度説が，今のところまだそのはらむ純形式的な不完全性から原理的に解放されているとは考えられない，とのべるのが普通である。しかしながら，頻度説がはたして真に，他のどんな説よりもよく応用科学の要請に答えているかどうか，もし答えているとしたら，なぜそうなるのかといった問題や，この説の形式的不完全性の問題などが，十分に広くまた完全に考察されたことはまだ全くないのであって，ほとんどの場合，頻度説の個々の要素にかかわる論点の議論に限られているのである。興味あることだが，等可能事例の考察に依拠していた，いわゆる古典的確率観——頻度説の支持者や，とりわけミーゼス自身がこれに対して原理的に反論し，いまなお反対しているのだが——は，論争のなかで，実は誰からも弁護されたことがないのである。このようなわけでもしこの古典的観

念が，現代科学の水準からいちじるしく立ちおくれてしまって，教科書類でも重視されなくなっているのだとしたら，1936年までもこの古典的観念に精力的に反対しつづけてきたミーゼスのやったことは，かなりの程度まで「分り切った事をしつこく述べたてていた」ことになると考えることもできよう。

頻度説の支持者とこれに反対するものとの間の論争では，頻度説側に，一つ明らかな利点があること，つまり，すくなくとも頻度説側は，ある積極的なものを提案しているのであるが，これにたいして，この提案に襲いかかり，個々の欠点を指摘しはするが，一方，これに対して何らかの反対提案をすることに成功しないのが常であることを知っておく必要がある。こういう事情になるのはなぜであろうか？　われわれの考えるところでは，こうなる原因はいまのところ，確率論がその発展において他の数理科学からひどく立おくれていたところにある。数学の諸分科が自らの基礎の分析に取りかかるのは，通常，科学としてかなり成熟してからのことである。確率論の場合，この時期がその発展において到来したのは，ごくさいきんのことにすぎない。確率論はごくさいきんになってやっと，他の数学の諸分科のなかでの自分の地位，その独自な性格と特別な科学としての進路を何とか確実に知ったのである。確率論は現在到達した最高の地点からのみ十分な広さと明確さをもって，自らのこれまでの発展の姿を描き，その現状を描くことができるのである。とりわけ，また，頻度説がこの中で占めている地位も，今やっと完全に明確に考えることができるようになったのである。10年とはいわず5年前までも，われわれの科学の正に最も重要な代表者たちが，頻度説をめぐって提起された諸問題について自らの見解を展開・説明することを差控えたのはなぜか，また，頻度説に反対するものたちが，その対極に，十分に理由のある積極的な提言を全然できなかったのはなぜか，があきらかになった。とりわけ筆者は，頻度説について論じた数年前の批判的な拙稿[2)]が，確率についての学説の今日の水準にてらしてみると，そこでのべた個々の命題には今なお正しいものもあるとはいえ，きわめて満足しがたいものであったと認めざるをえない。

2）論文《確率についてのミーゼスの学説と物理統計の原理》（《Успехах физических наук》No. 9, 1929, стр. 141～166)のことである —— Б. グネディエンコ。

同時に，われわれののべた考え方からすれば，頻度説がわれわれの科学においてはたした役割と地位についての全面的・批判的な解明をおこなうべき時がすでに到来したと考えざるをえない。今日の確率論は，すでに十分に形式が整えられており（сформировавший），こうした批判的な解明も，数年前に必要に応じておこなわれたときのようにあれこれの学者の主観的見地からなされるのではなく，客観的に意義のある，この数年間に確実にわれわれの科学がかちとった，原理的な立場からなされるものであるといえる程度に，自らの論理的基礎を確立しているのである。本稿が主目的とするのもまたこのことであるが，ちょうど今年，頻度説の創設者リヒャルト・ミーゼスはこれまでの主要な反論のくわしい考察と，筆者のくわしい回答の説明をふくめて，この説への追加を公刊したので，われわれの行った批判的分析の試みはいっそう時宜を得たものとなろう。

§1．　頻度説の功績

頻度説のいくつかの功績の確認からはじめようと思うが，これは古くからの諺「はじめに功績を，あとで欠点を」にしたがってそうするのではなく，この学説が生まれ，発展をとげた歴史的な事情を読者に知ってもらうにはその功績をみることのほうがはるかに良いという理解によってそうするにすぎない。

ミーゼスが約20年前に確率論の基礎づけの状況がいかにも不安定なものであることについて

警鐘をならしたという一事ですでに十分に，彼は，そのおかげで他の多くの失敗が免責されるほどの歴史的功績をあげたのである。確率論のために書かれた多くの入門書や論稿のすべてにおいて，当時，全く支配的だったのは，少しも修正することなくラプラスからとりいれた古い基礎体系であって，思慮深い研究者にとっては，この体系が不適当であって，数学がラプラスの時代から進歩して到達している水準にそぐわないということは全くあきらかなことであったに相違ないのであるが，そして時たま，この点について挿話的に言及したものもいくつかあるにはあるが，それにもかかわらず，どの学者もその論稿の冒頭では相かわらず，等可能な事例と好都合な事例に言及しながら，しかし，なるべくはやくこの不愉快な論題をあとにして，こうした難問の跡をすこしもとどめていない，先にすすんだ理論の平安な流れに移ろうとつとめていたのである。この時期の確率論は，その基礎を偏見なく，容赦なく批判的に再検討することを本能的に回避していたのであるが，こういう状態になったのは，よくあることだが確率論の不十分な〔論理的完全性〕[1] のせいである。しかし，他方，その土台（基礎論——訳者）の見直しと再構築を根気よくすすめてきた数学の全体にとって，こうした状態はますます耐えがたいものになったのである。

1）われわれのもっている遺稿ではこの部分が完結していない。
〔 〕内は私の追加による。Б. グネディエンコ。

しかし，以上のような不幸な状態の確認は，精力的にまたたゆみなく警鐘をならすという形でおこなわれたとはいえ，ただそれだけに限られるというのでは，もちろん，やはり不十分であろう。そしてミーゼスも，その最初の主張においてさえ，それだけに止まっていたのではない。確率論の確実な基礎，つまり確率論を現代数学の正当な一員たらしめるような基礎を構築するためには，まず第一に，現行基礎論体系の諸欠陥をすべて十分明確にあきらかにし，完全な，全く疑問の余地のない説得力をもって，現行の仕方では満足な土台を築くことができないことを証明しなければならない。ミーゼスは一連の研究においてこの課題を周到な完全さをもってはたしているのであるが，この点に彼の学説の第2の本質的な功績がある。等可能な（равновозможный）事例，つまり，実は，等確率の（равновероятный）事例を用いて確率を定義することが，ある程度，無内容な同義反復であるということは，ミーゼス以前にも，多くの学者が指摘していたことであるが，ミーゼスが全く正しく主張しているように，古典的観念のおかした失敗のうちで，この失敗はまだもっとも罪の軽いものであるばかりか，ある意味では正当化することさえ可能なのである。つまり，われわれは，等可能な事例を用いて確率を定義するということは，一般的な事例における確率の数量的尺度の発見という課題が，事例のより基底的な等確率性の概念に還元されることだと考えることができるのであり，こう考えれば循環論法はなくなり，定義そのものも何らかの科学的意味をもつことになる。

古典的確率観の他の，もっとも重要で，はるかにいやしがたい欠陥を，ミーゼスははじめて系統的に納得のゆくようにあきらかにしている。そのうち第一の，主要な欠陥は，この確率観の適用範囲がきわめて限られているということである。賭け事ともっとも簡単な保険業務から生まれ発展した古い確率論は，こうした簡単な課題を論ずるのにある程度までは適した基礎をつくり出しているが，物理統計や社会統計，後には生物学や技術の要請にかかわりはじめ，確率論の課題が拡大されるようになると，当初に与えられた基礎は，あまりにもせますぎることがあきらかになった。古典的確率観によれば等可能な事例がなければ確率を云々することさえできないのであるがこの等可能な事例というものは上記の諸課題には存在すらしないのであり，これらの課題の要点は賭け事の範囲をこえているのである。イカサマ・サイコロというミーゼ

スの有名な実例は，証明力と簡潔さでとくにすぐれた例である。〔訳註：ミーゼスの場合，イカサマ・サイコロで試行しても，多数回の試行の結果には，相対頻度が一定の極限値をもつ〕

ミーゼスはさらに，現象の現実の経過についてわれわれが予言する根拠を与えることが古典的な基礎づけにはできないということを系統的に納得のゆくように，はじめてあきらかにした。かれがつぎのように言うのは全く正しい。すなわち，新しい特殊な仮定をたてないかぎり，確率論の基礎概念の古典的定義にもとづいて出される結論は，これに対応する現実の諸過程がいかに進行するはずであるかについて，ごく控え目に考えてみても，何かをいう手がかりを，原則としては与えるものではない。正常な硬貨を20回投げる例から，その現実の経過について何かを言うためには，等可能性という概念を実験とむすびつけるような補足的な定義が必要になるが，古典的確率観にはこうした定義を与えることができないのである。したがって，古典的確率論を現実に適用するには，基礎概念の規定から論理必然的にでてこない新しい原理が必要になる。

このようにして，ごらんのとおり，確率についての古典的学説の根本的な欠点と根拠のない僭称のすべてを徹底的に暴露したのは頻度説論者の重大な歴史的な功績である。このような，いわば消極的な功績とともに，ここでも想起しておかなければならないのは，積極的な方向におけるもっとも重要な功績のことである。頻度説とその将来の可能性についてはふれないとしても，他ならぬこの基礎的テーゼには，現代の確率観において基礎づけの役割りをはたすような見地，つまり，確率論を大量現象についての理論と見る見地がはじめて反映されたことを認めざるをえない。もちろん，ミーゼス以前にも，確率論の適用領域が大量過程であることは周知のことであったが，確率学説のこの特性がすでにその第一の基礎においてもあらわれていなければならないという，またその形式主義の全体がこの精神でつらぬかれていなければならないという要請は，他ならぬ頻度説においてはじめて，前面にうちだされ，完遂されたのである。

抽象的な理論である数学的理論はすべて，研究すべき客体のいろいろな性質の捨象を必らずなしとげていなければならない。ところが確率論の古典的な観念は，その基本的諸命題を，その研究の本来の対象である統計的集団やくりかえし過程から抽象するのではなくこの過程にかかわる個別的な客体の特性から抽象しようとつとめてきたのである。これとは正反対に，現代の見解は確率概念そのものが意味をもつのは大量現象との関連においてのみであるとみなし，したがってまた，確率論の基礎づけそのものにおいても，この大量性という契機が基本的な役割をはたすことがのぞましいと考えるのである。すでに指摘したように，この要請は，他ならぬ頻度説においてはじめて明確に定式化され，実現されたのである。

物理学者，生物学者，技術者，社会統計家たちが確率について語るときかれらは，何らかの相対的頻度を考慮しなければならない。それどころか，数学者といえども，形式的な推論の鎖を中断するという，その研究の特別な段階においては，その直観を自らの概念の対象的な内容に向け，確率というものをまさに相対的頻度として表象する傾向が大きいのである。もちろん，このことは，数学的な理論の概念としての確率が，現実の頻度に固有の性質と特性のすべてを含んでいなければならないという意味ではない。頻度説でさえ，そうは考えていないのである。以上のことの真意は，確率論が十分に精密かつ形式的なものでなければならないということ，したがってまた，現実の頻度の世界に存在する構造可能性の抽象化された形態でなければならないということである。

このようなテーゼが必要なことは，おそらく，現代の確率論のすべての学派が軌を一にしてみとめていることであろうが，このテーゼこそは頻度説の基礎を形成しているのである。頻

度説がはじめてこのテーゼを定式化したのであり，ここにその重大な功績の一つがあることを知らなければならない。以下にみられるように，このテーゼにふくまれている諸要請を有効に実現することについて，つまり，この場合，抽象化と形式化がいかに，またどの範囲までおこなわれるべきかについての見地で，ミーゼスの学説は，現代確率論の発展の基本方向からかなりへだたっている。しかしながら，このことから，つぎのような主要な事実がうやむやにされてはならない。すなわち，この要請を定式化するとともに，これをはじめて実現しようとしたのは，あきらかに，すべて頻度説の功績だという事実がそれである。

§2.　自然科学の一分科か数学の一分科か

頻度説と現代確率論の主流との間にある原理的な不一致には，きわめて深い根がある。第一にそれは，科学の一分科としての確率論についての見解の，不可避的な差異に根ざしている。われわれは，この差異に注意ぶかく注目しなければならない。それを完全にあきらかにしなければ，現代の確率学説における頻度説の役割と地位を十分明確に規定することが一般に不可能だからである。

ミーゼス派にいわせれば，確率論は数学的方法を広く利用する自然科学の一分科である。ミーゼスのこの主張は，他の二つの，互に全くことなる原理的な立場と徹頭徹尾対立するものである。一つには，ミーゼスは，哲学上，マッハ主義の系譜の徹底した実証主義者であって，古典的理論の先験的，形而上学的な方針に反対して闘っているのであり，この闘いはそれ自体興味深くまた教訓に富むものではあるが，われわれの研究のレベルで解明することはできない。なぜなら，この問題は，過去に向う〔後向きの〕ものであるが，われわれが一番関心をもつのは，頻度説と現代の先進的見解との差別だからである。この場合，基本的対立はきわめて簡単に定式化される。確率論を自然科学の一分科とするミーゼスの基本主張に反対して，現代確率論はそれを数学の一分科であると自認している。この基本的な不一致は，後に問題にするその他の具体的な差別のすべてを，決定的に，いな，あますところなく規定しているのである。この点に注目してみよう。

自然科学の諸分科を数学のそれから区別する主要な基準は，所与の科学に固有の研究領域――この二つの科学分科にとって典型的な――の規定の性格にあるとわれわれは考える。自然科学の各分科は，それぞれの対象の物質的特質，現実世界のうちそれが研究する領域の現実の特質によって規定される。物理学も，生物学も，心理学も，まさにこのようにして自らの対象を規定している。同一の対象がきわめて多様な諸方法によって研究されうるのであって，数学的方法もその一つではあるが，一つの方法から他の方法へと移るとしても，われわれは，当の（自然科学の）分科の範囲内につねに止まっているのである。なぜなら，その分科にとって，基本的な特質を規定するのは，その現実の対象の方であって，研究方法ではないからである。（例えば，熱力学は現象論的なそれも統計的なしかも熱の力学的理論であり，光の粒子説も，電磁波説も，光量子説も，ともに光の学説である。）

これに反して，数学の諸分科のすべての決定的な標識は，つねに，可能性としては，きわめて多様な物質的具体化，したがって実際的適用を許すような，ある種の形式的な方法である。数学的方法を援用することによって，現実の世界のある対象または他の対象が，あるいはある現象または他の現象がはたして研究できるかどうか――この問題は対象あるいは現象の具体的・物質的な性質（природа）によってではなく，もっぱらそれら対象あるいは現象の形式的・構造的な特性（своиство）によって，また何よりも，それらが存在し経過するときの量的諸関係と空間的諸型態（エンゲルス）によって

決定される問題である。例えば，微分方程式法が物理学，化学，生物学において適用されるためには，二つの連続的に変化する量が存在していて，その変化が一定の相対的な速度をもっていさえすれば十分である。

この基準にてらしてみたとき，確率論は一体，科学のどのような分科に属することになるのか？　その方法の統一の基礎は何か，確率論が研究する対象の物質的な性質かそれとも形式的・構造的な特性（свойство）か？　唯一の答を十分明確に見出すには，問題をこのように提起すれば十分であろう。確率論は大量現象についての学問である。その方法が適用されるのは，現実の現象において，多少とも同等の権利をもつ多数の要素が関与する場合（где в реальном явлении принимает участие большое число более или менее равноправных ингредиентов）ただその場合だけであって，その基本概念となるのは，これらの諸要素のうち所与のある標識をもつ，相当に多数の諸要素である。研究される現象の物質的内容がいかなるものか，これら諸要素の現実の性質（природа）がいかなるものか，それらが分類される場合の標識がいかなるものか，こうした問題はすべて，与えられた過程が確率論の処理に適するかどうかを判定することにとっては全くどうでもよいことなのである。

したがって，確率論によって研究される現実の諸側面の形式的特質によって規定されるかぎり，確率論は，さきにのべた主要な基準にもとづくとき，数学的な理論となりうるにすぎず，自然科学的な理論とはなりえない。さいきん数年間の確率論のめざましい発展は，確率論が今日，形式化された数学の一分科としての役割を事実上はたすことを可能にしているのであるが，この発展だけからも，上記のような結論——簡潔で説得力のあるということを別にしても——が導きだされたのである。頻度説をとる論者は，確率論は自然科学の一分科であり，またそうでなければならないとするその根強い主張——この主張は当面の点についていえば，頻度説を古い形而上学的な観念に近づけるのであるが——を一体何によって論証するのであろうか？　頻度説をとる論者は，しばしばしば，あきらかに他の見地を予想すらしないで，全く論証なしに，そう主張しているのである。われわれがのべた見解に反対して自説をとなえなければならないときの，ミーゼスの論証は全く素朴きわまりないものである。確率のどの課題にも必らず，何らかの現実のくりかえし過程，あるいは何らかの現実の大量現象が関連をもつのであるから，それゆえに，確率論は現実についての学問，つまり自然科学の一分科であるとミーゼスはいうのであるが，こうした事を根拠にするのなら，例えば微分方程式論であろうがどのような数学の分科であろうが，これを自然諸科学のうちにいれることはできるのであるということをミーゼスはみとめようとしないことになる。しかし，微分方程式論が典型的な数学の一分科であることに異論をさしはさむなどということは誰にも思いもよらないことである。

ミーゼスの誤解はかれがマッハ主義，したがってまた観念論的な哲学上の立場に立っていたことに原因があり，今までのところでは，頻度説の基礎はこの立場から生まれ，それによって維持されているのである。ミーゼスとその学派のように実証主義の立場に立つとき，観念論者は，つねに，口先きだけでは数学者の功績をいかに賞讃しようとも，数学者をきらっているのである。観念論者にとっては，ある学説を数学者の処理に委ねるということは，その学説を現実世界への接触からきりはなすということを意味するのである。数学が自然科学と同様に現実の世界，ただそれだけを研究するものであるが，ただし，現実世界の他の側面を，それも他の方法によって研究するものだということを，彼はみとめようとしないし，また，みとめることができないのである。だかこらそかれは確率論のうちに数学を見出そうとする者をニヒリストよばわりし，また，だからこそかれは，確率論が

関数と集合の一般理論の一部であるというテーゼ――今日の進歩した学者が動揺することなくみとめているテーゼ――に対し，恐怖と嫌悪の念をもって反対するのである。《このようにして――とかれはいう――確率論はある一定の，観察される現象の理論なのであって，けっして集合についての学問の一部ではなく，……集合論の定理だけを利用するのである》。又，別のところでは，《相ことなるカテゴリーに属する二つの事物をこのように同一視すること，これは事柄そのものと，これを扱うときに用いられる道具との間に等号を与えることであって，論理的に思考するものにとっては耐えがたいことである》ともいう。

われわれの見解によれば大量現象についての学問としての確率論は，もっとも一般的な形の集団についての学である集合論にしか属しえない。

確率論を構成する具体的・数学的な事実のすべては，われわれが上記の二つの立場のどちらに立とうともそれとは無関係に，独自の意義をもつのであるが，今ここでとくにとりあげている問題，つまり確率論の基礎を構築するという問題においては，われわれの指摘した不一致は，つぎに見るように，決定的な意味をもっているのである。

§ 3.　理想化と形式化

自然科学あるいは数学の諸分科の基礎を構築するためには，研究される対象の一定の理想化が必要である。同一の自然科学の領域内において，理想化の程度は，利用される研究方法にしたがって，全くことなることがありうる。たとえば液体の乱流の理論において，われわれは，それを古典的な方法で研究しようとするのか，あるいは統計的な方法で研究しようとするのかにしたがって，研究すべき対象をさまざまに理想化することができる。

確率論を自然科学の分科とするミーゼスは，上記のような伝統的な仕方に全くしたがって，その研究に確率論が必要とされる対象についてミーゼスの考えた理想化を明示し，またそうすることによって，この理論の基礎づけという課題ははたされると考えている。ミーゼスの主張したこの理想化は良く知られており，また，きわめて簡単なものである。この理想化のルールにしたがって，われわれは大量現象またはくりかえし過程の要素の総体を，試行または観察のある種の無限系列――コレクティフという――として想定しなければならない。そのうえで，すべてのコレクティフにはつぎの二つの基本性質があるとされる。

1)　コレクティフの諸要素のうち，ある一定の標識群のいずれかをもつような要素の**相対的頻度の極限値が存在すること。**

2)　いわゆる不規則性をもつこと。すなわち，上の1)でみた極限値が，何らかの系列のある一定の法則にしたがって，所与のコレクティフから抽出された〔諸要素（もの）〕について不変であり，しかもこの抽出の法則（ルール）が考慮された標識との関係において，コレクティフの諸要素の差異にもとづくものではないということである。相対的頻度の極限値はまた，当該標識の確率ともよばれる。

このようにして，この場合の理想化というのは，第1に，必然的に有限な大きさの現実の統計的集団を，何らかの無限系列におきかえ，第2に，この系列に，二つの性質をもたせなければならないということであるが，この二つの性質が一定の意味をもつのは無限系列についてだけであるということだけですでに，現実の集団がこの性質をもつことはできないのである。頻度説の基礎づけはこれで完了し，具体的な問題の提起と解答，また一般的法則性への定立へとすすむことができる。

しかしながら，もし確率論を，われわれがそうしたように，数学の一分科とみなすならば，その基礎づけは，上述の段階で止めることはできない。現代数学の諸分科は自らを基礎づける

のに，現実の対象の簡単な理想化以上のものを必要とする。すなわち，自らの領域の完全な形式化，あるいは，同じことだが公理系化(аксиоматизация) を必要とする。ここで形式化というのは，ある一団の基本的始元命題，つまり，当該学科の基本概念相互間のすべての関係を精密に記述するいわゆる諸公理を確立することであり，そのさい，これらの概念も，この関係も，ともに，正(マサ)しくこの公理のリストによって規定されるものと考えられている。与えられた理論が必要とするその他の諸概念はすべて，逐次，形式的に，これらの基本概念を介して規定され，その他の命題（定理）は，公理を始点として形式的に証明されなければならない。この考え方は周知のものであるが，これによれば現代数学の基礎づけとして唯一可能なものは上記のような形の基礎づけであるとされている。すなわち，このような基礎づけによってのみ理論は，一切余すところなくその形式的骨格を現実に浮びあがらせることが保証されるのである。このような基礎づけによってのみ，相ことなる数学の諸分科間の形式・論理的な連関と相互関係を，徹底的に明析に考察することができるのである。

指摘するまでもないことではあるが，このような形式化は現実の対象をそれとは全く関係のない新しい何か(思考の上での対象)——観念論哲学はこのように考えたがるものであるが——におきかえることを意味しないし，事実，研究対象は依然として外界の量的諸関係と空間諸形態なのであり，この対象を研究する方法だけが変化したにすぎないのである[1)]。

1）このような形式的・公理主義的な土台のうえに構築された確率論は頻度説的に解釈することを許す点に注意されたい。——Б. グネディエンコ。

厳密にいうと，ミーゼス自身がその理論のこのような形式化は全くおこなっていないのであって，かれのいうコレクティフはつねに無限のままであり，したがって，現実の試行または観察を，その具体的な性質や特性のすべてをふくめて，現実の生きた客体として理想化して系列にしたものである[2)]。そしてこれは全く意識的におこなわれているのである。これらの具体的な性質を捨象することが不可能であり，望ましくないということを，頻度説をとる論者は，《ニヒリスト》に対する反論において公然と強調しているのである。そして，この場合かれは完全に一貫していると考えざるをえない。なぜなら，確率論を数学ではなく自然科学の一分科と考えるかぎり，大多数の自然科学の分科についてもとめられること以上の要求をこの分科にもとめるのは全く理由のないことであるから。

2）一見すると魅力的なミーゼスのこのような態度が実は，全くの実証主義であることを意味する。ミーゼスは研究者の課題を直接観察の諸結果の記述とわずかな理想化に限定し，現象の本質に立入るという，それ以上の段階の必然性を否定するのである。—— Б. グネディエンコ。

このような考え方とは正反対に，数学の分科であると自認する現代確率論は，自らの公理系をつくりだすのであるが，この公理系は研究される現実の領域の，可能な限り精密で形式的な図式であり，最も簡単にするために最も抽象的なものにしようとする志向と研究される対象の本質的，具体的な性質を最大限多数のこしておこうとする志向という，二つの相対立する志向の調和した統一をこの図式の中に見出さなければならないのである。

理論上は限りない観察又は試行の仮想的なくりかえしという図式から始めてみよう。個々の試行は，事情によって，あれ，これの結末がありうる。これらの可能な結末の総体は基本集合 E を形成するが，これはわれわれの公理系の第一の基本概念である。この集合の任意の部分集合，つまり可能な結末の任意の総体をわれわれは事象とよぶ。数学的研究によると，あきらかに，この場合，可能なすべての事象を考察せよという要求は不適当である。われわれは，事象のある“体”（тело）〔field〕の考察に限定する[3)]。この体を以下 Φ であらわす。この“体”はわれわれが当面の問題を考察するさいに（例

えばサイコロ投げ), 一定の確率を付値しようとする事象の総体の形式的構造を規定する。

3) 事象の集合において事象《A および B》のほかに《A または B》《A も B も》——不可能な事象と確実な事象——がふくまれるときこの事象の集合を"体"(тело)という。〔後出コルモゴロフ公理系では集合体〕—— Б. グネディエンコ

つぎの一歩を進めるために, 現実の現象をとりあげてみよう。確率論が関与するのは, あれこれの研究される事象の出現の頻度が安定的であるような, くりかえし試行である。このことによって, 研究される現象の, われわれにとってもっとも重要な形式的契機, すなわち, われわれが考察する事象の一つ一つに, その確率とよばれる何らかの正の数がそれぞれ与えられるという形式的な契機を考えるきっかけがあたえられる。この場合, 現実の現象において, この概念の定式化に附随することのすべてを, とりわけ, われわれの確率の頻度的起源を捨象することは, われわれの目的にかなっている。

こうして

1) 事象 E の確率は1にひとしい。

2) 2つの独立(排反)事象の和の確率はそれぞれの確率の和にひとしい。

もちろん, 頻度的記述をわれわれが放棄するということは, そのかわりに何か別の記述をとりかえるということ, とりわけ, 確率についての先験的, 形而上学的な観念をかわりにとるということ, などには決してならないのであって, 正しくおこなわれた抽象には, 一般に, このような対象のおきかえといった意味は全くないのであり, このことによって, いつでも形式的図式から現実の現象に復帰する可能性が保証されるのである。

このようにして, 確率論が研究する現実の現象にたいして, 上述の一連の捨象行為をおこなうとき, われわれはつぎの公理系に到達することになろう。

1) Φ はある集合体 (тело множеств) である。

〔訳註:コルモゴロフ p. 2 グネディエンコ p. 53 有限加法族ともいう〕

2) Φ は集合 E をふくむ。

3) 集合体 Φ の各要素集合 A には非負の実数 $P(A)$ が対応している。これを事象 A の確率という。

4) $P(E)$ は1にひとしい。

5) 集合体 Φ の要素集合 A と B が独立〔共通の要素をもたない〕(排反) ならば, この2つの和の確率はそれぞれの確率の和にひとしい。

確率論のその後の発展があきらかにしているように, これら5つの公理にもとづけば, 初等確率論は真に構築することができる。もちろん, この理論のどのような結論も, 抽象的な図式から具体的な現実へと逆にたどってゆくと, われわれが公理系を構築するときに出発点となった頻度的記述の用語でこれを解明することが, 何らの障害もなく可能である。そしてまたあきらかに, われわれが提起した形式化の課題はその解決方法が唯一なのではなく, 確立された諸要求を満足する公理系としてはこれ以外のものも可能である。

ミーゼスの理論がとった立場に立ちかえってみよう。この理論は確率論を数学とみなすことを望まないのであるから, それが提唱する基礎づけの方法は, 公理系によって構築されたあれこれの形式化とは競合しうるものではないとも考えられよう。というのは, ミーゼスが自らの目的としたことは全く別のことであって, かれはおよそ公理系などを構築しようとしたので全くなく, かれが形式化する, その確率論の基本的諸命題は, どうみても, 数学的な意味での公理系とよびうるものではないからである。

ミーゼスの理論の始点命題に試行, 観察, 自然現象といった概念が存在することは, 科学用語への無頓着や明確さの欠如の結果なのではなく, むしろミーゼスは, たしかに, それらを保

持しようとしたかったのであり，それらは，ミーゼスの学説の原動力〔パトス〕となっている現実の事実との不可分の結びつきを，彼に保証してくれる担保だったのである。しかし，もしそうだとしても，頻度説と公理論が一般に，相互に競合的な関係にないとか，両者の対立は誤解の結果であるにすぎないとか，頻度説の適用対象でありうる現実の諸現象と数学的確率論との間の関連を記述しているにすぎないのが頻度説だと考えて，確率論を公理系化することが必要だとか，こうしたことをいうのは正しくあるまい。

頻度説自身も，その役割を，われわれが今考えたようなひかえめなものに限定することを望んではいない。ミーゼスの口をつうじて，それは新しい確率論であると自称し，どのような基礎づけの公理系とも，同等の権利をもつものとして，たたかいたがっているのである。もちろん，頻度説にもこの権利はありうる。ただしそれは，頻度説がその命題から，観察や試行への言及を一切放逐し，純粋の公理系としての役割をになうように，自らを形式化しつくしたときのみいえることである。事実，頻度説はミーゼスの後継者たち（K. Dörge, E. Tornier その他）の手で，この方向にすすめられたが，しかしこの人たちの見解は，ミーゼス自身と必ずしも一致していない。問題は次の点にある。なわち，このように完全な形式化が可能になるようにするためには，頻度説は，おそらく，その基本命題の初歩的な簡単さをすてて，その代りにはるかに複雑なものを立てることが必要となろう。ミーゼスの後継者たちは，進んでこの道に向っているが，ミーゼス自身は未だにこのような譲歩を好まないのである。

以上のすべてについてミーゼス自身は一体どう言っているのか？　注意すべきことに，この思想家は，具体的な頻度ならばすべてにおいてきわめて明確であるが，一般的な方向が問題になると，時々わかりにくくなる。ミーゼスは，われわれがいまとりあげている問題についての彼の見解を一度も定式化したことがなく，その理論の完全な形式化をあたえたことも一度もない。それどころか，これはかれの意図に全くそぐわないことだったのである。しかし，それと同時に，ミーゼスは，かりにその理論が形式化されたとしたら，彼が必要と思えばこれを他の形式的な理論に対立させることはやさしいとして，自説を守るためにたたかっているのである。しかし，ミーゼスの理論の完全な形式化の試みがそれによってあるいはやられたかもしれない方途は，きわめて自明のものであるから，ここでこの方途を説明するだけではなくこれを批判的に検討することをも試みたとしても，われわれがミーゼスの考え方を理解しないということで責められるような危険をおかすことにはよもやならないであろう。

われわれは，ここで生じた次の二つの主要問題を解決すべくつとめなければならない。すなわち，頻度説の形式化は可能か，またもし可能だとしたら，このようにしてつくられた形式的な理論は，われわれが本稿でのべたようなものよりもすぐれた点を何かもつかどうかである。

§4.　頻度説の形式化は可能か？

当面の問題の主要な困難に注意を集中するために，もっとも単純な確率的状況，いわゆる単純な択一に限って考えてみたい。ここでとりあげるのは，結果が2つだけしか考えられないような試行の例である。2つの結果をそれぞれ0と1であらわす。

本稿前半〔§3まで〕でのべた公理系の意味でこの状況を形式化することはきわめて簡単なことである。集合体 Φ は，今の例では全体で4つの事象からなる[1]。すなわち，E（0であるか，1であるか），0，1，M（0でもあり1でもある）の4つであり，これらの事象の確率はそれぞれ $P(E)=1$；$P(0)$；$P(1)$；$P(M)=0$ にひとしい。すべての公理があきらかに充たされている。

1）事実，事象の集合体 Φ は事象《0》と《1》とともに，事象 $E=$《0であるか1，であるか》と $M=$《0 でもあり 1 でもある》を含んでいる。——Б. グネディエンコ。

この状況を頻度説的な意味で形式化することはかなり複雑なことになる。これは別におどろくにあたらないことである。というのは，頻度説は意識的に公理論のような高度の抽象化をすすめないようにしているからである。頻度説は現実の事実の特徴を保持しつづけようと望んでおり，そのため，当然その図式はより複雑にならざるをえないからである。

頻度説において，形式的図式は一連の長い試行系列の形態から抽象されるのではなく，理想化された形でこれが保持されているのである。この場合，理想化は何よりもまず，有限のこの事象系列が無限のものとされる点にある。これに対応して，頻度説の形式的図式は，さきの単純な例では，以下のようになろう。記号0と1を項とする無限の系列があり，これをコレクティフというが，この系列はつぎの2つの性質をもっていなければならない。

1）　**極限値の存在。**コレクティフの最初の n 項中のゼロ〔0〕の数を $\Phi(n)$ とすれば，分数 $\Phi(n)/n$ は n が〔無限大〕(∞) に近づくと一定の極限値 $P(0)$ に近づく，この $P(0)$ を事象0の確率という。もちろん，この公準からすでに必然的に，これと同様に規定される事象1の確率 $P(1)$ の存在が帰結される。

2）　**不規則性。**あるコレクティフから，任意の規則にしたがって，系列のある一部分が抽出されるとし，また $\Phi(n)$ が抽出された系列の最初の n 項中の0の数をあらわすとすると，$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\Phi(n)}{n}\right|=P(0)$ となる。この場合，系列の一部を抽出するときに準拠する規則は完全に任意なものでありうる。

ただ，抽出された系列の各項の属性が，この項が0であるか1であるかということに無関係に定められさえすればよいのである。

この種の抽出の例としてミーゼスは通常，純粋に算術的な規則に言及する，すなわち，抽出された系列の項の属性が全くその番号によって定められる，たとえば，すべての偶数番号，あるいはすべての素数番号などによって。いうまでもなく，ここではこれ以外の抽出方法については問題になりえない。というのは，コレクティフの諸項は，系列におけるそれぞれの番号とその値（0か1）以外の点では無差別であり，このうち値（0か1）を〔抽出規準として〕とることは許されないからである。問題を紛糾させないために，たとえば，《0につづく各項》といった抽出規準についてはここで論じないことにする。この基準も，ミーゼスは理論展開の後の段階で，認めてよいものとせざるをえなくなっているのであるが。

こうして，えられた形式的図式は，《試行》あるいは《観察》の具体的な要具のすべてにもはや何のかかわりもないものであるが，この図式を，公理論が唱える図式と比較する以前に，この図式の内在的根拠という問題を検討しなければならない。この問題はわれわれを直ちに，数学の基礎づけにかんする現代の論争のきわめて深刻で尖鋭な要素の領域につれこむことになろう。したがって，きわめて慎重な検討が必要となる。

まず第一に，極限値の存在というコレクティフの第一の性質そのものは，全く疑問の余地のありえないものであることがあきらかである。0の相対頻度（したがって1のそれ）が，ある一定の極限値に近づくような，0と1の系列は，ごくありきたりの数学的研究の対象であって，どのような量においても形成することができる。したがって，すべての困難は，もしあるとすれば，コレクティフの第2の性質か，あるいは第1の性質と第2の性質を一緒にして公準とする点かのどちらかにあるとせざるをえない。

そして事実，ここでわれわれはただちに，相当な困難にぶつかるのである。まず第一に，すべての数学者によく知られているのは，不規則

性の定式化において基本的な役割をはたしている《任意の》抽出規則という概念に関連のある困難である。あたえられたコレクティフがどのようなものであろうとも，そのなかにあるゼロが，このコレクティフのある部分列系（подпоследовательность）を構成するとき，これを ϕ であらわす。とくに不規則性とは，あきらかに，抽出される部分系列としての系列 ϕ にどのような抽出規則も適用してはならないという要請のことである。というのは任意の規則を想定可能とすれば，系列 ϕ は《無規則（беззаконной)》でなければならないからである。われわれのコレクティフにおいて，ゼロはその分布についてたとえきわめて複雑な算術的記述であっても何らの記述も仮定されないように分布していなければならない。この場合に限って，われわれの系列はコレクティフであるとみとめられるのである。

このことからまずコレクティフの個別例をつくることの原理的な（そしてミーゼスもみとめている）不可能性が生ずる。というのは，あきらかにわれわれはコレクティフの各項について，それがゼロであるか1であるかということが事実上できない以上（項の集合の無限性がこれを妨げる），われわれにできるのはただ，ゼロと1の相互分布を規定する規則だけを用いて個別的コレクティフをあたえることだからである。しかし，こうすることは系列 ϕ の規則による規定ということになる。そしてこれはすでにみたように，《不規則性》の公準によって排除されているのである。

すでにこのことだけを根拠にして，コレクティフ概念は成り立たないと考える数学者もいるが，そのような見方は一般にみとめられているわけではないから，この事実にふれておいて，さらに先へすすまなければならない。

そこで，コレクティフの個別例は1つも，またどうしても原理的にとりあげることができないとして，この場合，コレクティフ概念は一体いかなる意味をもちうるのか，またそれは数学的研究の対象となりうるのかを問題にしよう。

この問題を考えて，ミーゼスは，いわゆる直観主義の学派によってさいきん数学に導入された1つの概念すなわち《自由な項位選出の系列》という概念に言及している。そして，事実，この概念は確率論が研究する系列と考え方の上できわめて密接な関連がある。われわれの事例にあてはめてみると，《自由な項位選出》の系列ということで直観主義派が考えるのは，ゼロまたは1で任意に（по произволу）埋めることのできる空席の系列のことである。この空席を埋めるという行為は，連続体の生成（形成）とみなされている。自由な項位選出の系列が数学的研究の対象になりうるし，またそうしなければならないということは，《теория двоилных дробей》と確率論の存在によって十分に証明されている。

コレクティフを自由な項位選出の系列と考えるとどういうことになるか，を考えてみよう。まず第一に，自由な項位選出の系列がたしかに，不規則性の要求をみたしていることを明瞭に理解しなければならない。

だが，つぎに第一の要求である極限値の存在に立ちかえってみよう。自由な項位選出の系列を使わなければならないもののすべてにとって，今や，この要求はきわめて奇妙なものにみえてくる。まずあきらかに，自由な項位選出の系列はただ1つしか存在しない。このような条件のもとで，自由な項位選出の系列を，極限値のあるものとないものに区別するというのは一体何を意味するのであろうか？

さらに，極限値という概念そのものも，通常の解釈では，個別的な，規則的に限定された系列にしか適用できない。与えられた系列を規定する規則性（закномерность）が存在せず，また原理的に存在しえない場合には，極限値の存在又は非存在は問題にさえなりえないのである。

ミーゼスはこの点にかんしてどう言うのか？かれもみとめているように，かりに，与えられ

た系列が不規則的であっても，極限値の存在するか否かの問題は，１つの具体的な事例においては，実際に解決できない問題なのであるが，ミーゼスはいう，このことはまだ，極限値存在の要求が不規則性の公準に矛盾するということを意味するものではないと。この２つの要求の相互無矛盾性を論証すべく努力することは可能であり，またもし，この論証に成功するならば，コレクティフの定義は数学的に合法的なものであることがあきらかになろう。なぜなら，数学においては，その定義に形式的な矛盾がふくまれていないようなすべての対象の存在が承認されるからであると。

コレクティフの定義を形成するこれらの要求が相互に無矛盾であることの論証に誰かが成功するかどうかはわからない。しかしながら，問題はこのことにあるのではなく，コレクティフの定義の構成要素となっている２つの要求が，その内容からみて，同一の概念には適用しえないことが問題なのである。コレクティフを個別的に（したがってまた規則的に）規定された系列のことであると考えるならば，のちにみるように，それは不規則性の要求を満足しえないが，一方，コレクティフが不規則的な（したがって，また《無規則的な》）系列であれば，極限値の存在という概念は，コレクティフに適用できない。ここで注意しておくが，適用できないことと矛盾することとは全く別の概念である。あれこれの要求が，所与の概念と矛盾するというのは，この概念にたいして，直接この要求に矛盾するという証拠があるということを意味する。たとえば，ある角のサイン〔sin〕が１より大きいという主張は，サイン概念の定義に矛盾する。したがって，サインは１より小さいか，あるいは１にひとしいということになる。ところが，ある角のサインが１グラム以上の重さになると主張したとしても，この主張はサインの概念と矛盾するとはもはやいえない。この主張はサインの概念に適用できないということにすぎない。このように，自明のことであるが《角のサインが１グラムよりも重い》ということを前提にして，そこから矛盾にみちびくことはできない。

極限値の存在と非存在の選言が不規則系列の概念に適用できないということの意味は，重いと軽いの選言がサインの概念に適用できないのと同様であるとわれわれは確信している。所与の事例にこれを適用するのはあきらかに錯覚にもとづいているものと思われる。数学者はつねに，実際，規則的に規定された系列をとり扱い，それにこの選言を十分合法的に適用しているのであって，他の系列にぶつからないのにかれらが，この選言は任意の系列にあてはまるという規定になじむことはないのであり，また，この結果として，不規則な系列にぶつかれば，この系列には極限値が存在するか，あるいはしないかのいずれかと考えるのである。そして，サインを秤皿にのせようとする人がこの場合どうするかについては論じないのである。

このようにして，コレクティフに提起された２つの要求が相互に矛盾しないことの論証が問題なのではけっしてなく，問題は，極限値存在の要求がいかなる意味で不規則系列に適用されうるかの論証にあり，この問題についてわれわれの科学のこれまでの歴史は何ひとつあきらかにしていない。したがって，この要求の意味をあきらかにする義務は，当然これをはじめてもちだした者が負わなければならない。

われわれは，不規則系列を，もっぱら，完結しない，形成過程にあるものと解することができる。これ以外のどんな表象もこれにむすびつけることは成功していないのであるが，一方極限値存在の要求は完結した，形成されてしまった系列にしかこれをあてはめることができない。してみれば，頻度説は，すくなくともミーゼス自身が固執した形態においては，まずもって十分に形式化されえないものであると結論せざるをえない。

いずれにしても，こうした十分な形式化はまだ存在しないのである。

§5. 頻度説の形式化は適当か？

ミーゼス自身はその理論の二つの主公準を一つの形式的図式に完全に包括することへの期待をすて去らなかったのであるが，その後継者たちは，おそらく，現在，このような試みがのぞみのないことを意識しており，すくなくともかれらのうち頻度説の要求のある一部分を放棄するという犠牲をはらってこれを形式化しようとつとめるものたちはこのことを意識している。この方向にはすでに数多くの試みがみられる。すなわち，無限コレクティフを有限コレクティフにかえ，不規則性の要求を全く放棄するもの (E. Kamke)，不規則性要求の一部を放棄するもの，すなわち，極限値の不変性要求を，任意の系列抽出についてではなく，ある事前に限定された抽出の総体についてだけ求めるもの (K. Dörge, E. Tornier, A. H. Copeland その他) などである。指摘しておかなければならないのは，こうした試みの多くにたいして，ミーゼス自身が非妥協的ないし否定的な立場にたって，とりわけ，たとえ部分的にせよ不規則性公準を放棄すると，現実にはげしく対立するような性質が形式的図式にもちこまれる，したがってそれはゆるしがたいと考えていたことである。

形式的見地からみれば，すでにみた頻度説基礎づけの試みのほとんどすべてには異論の余地はない。それどころか，ミーゼスの主要公準をさまざまに修正することを条件とするとき，頻度説は，たしかに，難点なく形式化され，また，そのようなものとしては，公理論と競合することも許されるのであり，この競合の結果がどうなるかを考察しなければならない。

形式的な側面では，公理論と頻度説の関係を第1に特徴づけるのは，公理論の方がより高度に抽象的だという点である。事実，頻度説の基礎においては，(もっとも簡単な場合)，数の系列＝コレクティフが想定されており，一定の相対的頻度の極限値をもつこのコレクティフのある一定の系列が各事象に対応しており，この相対的頻度の極限値を確率という。事象 E は，選出された系列としてのそれに全コレクティフが対応するようなものと定義され，等式 $P(\mathrm{E})=1$ は定理として証明されている。〔訳註，公理論では，これは公理とされている〕排反事象についての関係 $P(\mathrm{A}+\mathrm{B})=P(\mathrm{A})+P(\mathrm{B})$ は定理である。公理論は，頻度説において諸事象とその確率を規定する手段となった数の系列が捨象されている。公理論にふくまれるのは，理論のその後の展開に必要なこれら諸概念の少数の特質だけであって，公理論での諸事象とは，ある集合体の単なる諸要素であり，これらの事象の確率とは，これらの事象に対応して付値され，公理において説明されている少数の簡単な要求を充たすような，ある数値にすぎない。頻度説にふくまれている他のすべてのことを公理論は捨象するのである。

この相違点と密接な関係にあるのは，公理論的基礎づけにもとづく場合の方が基礎に頻度説を想定する場合よりも，確率論の展開が比べものにならないほど簡単で容易だということである。頻度説の方では，すくなくとも初期の展開段階では，たえず嵩ばったコレクティフ概念を考えていなければならないし，とくに制限された無規則性公準が導入されると，このコレクティフは事実上，形式的に複雑きわまりない構成物となる。いうまでもなく理論は抽象的であるほど，つねに，それだけ形式的関係においてはより簡単になる。

2つの形式的な理論があって，このうち1つの方が他方よりも抽象度がはるかに高いとき，どちらをえらぶべきかという問題を考えるには，つぎの点を考慮しなければならない。すなわち，1）より抽象的な理論は，形式的関係においてより簡単であること，と2）逆に，より具体的な理論は（つまりより抽象的でない理論は）つねに，これを現実に近づける特質がより豊富であり，したがってまた，より多く，創造

的な直観を補強することができる。どのような場合も，問題はこの二つの利点のうちのどちらが大きな役割をはたすかにある。

確率論の確定的なあらゆる現代的な発展について，基礎論の公理系を特徴とする高度の抽象性は，事実，創造的な直観の豊かさと多様性を骨抜きにするようなものではけっしてないとわれわれは考える。そして又，いずれにしても，この基礎論体系が具体的要素によってはあまり多く装備されていないということは，それをかりに欠点だと考えたとしても，形式上のより大きな簡単さによってあたえられる利点に比べれば，歴史的にはとるにたらない要因であったと考えられる。

以上のことはつぎの事実だけからもはっきり証明されている。すなわち，現代確率論の多面的構造のすべてが，他ならぬ《公理論的に》考えた人びとによって生みだされ，頻度説的に考えたものによっていないという事実である。M. フレシェ とP. レヴィ，F. P. カンテリとB. フィネッティ，H. クラメール，エス・エヌ・ベルンシティ，ア・エヌ・コルモゴロフイェ・イェ・スルッキーの名を　あげるだけで十分であろう[1)]。だが，頻度説で育てられたミーゼスの後継者たちが具体的にやった事を，かれらははたして，かりにも確率論を豊かにするような注目すべき成果，注目すべき発見だったと誇れるであろうか？

1）もちろん，とりあげられた人名にА. Я. Хинчин自身の名を追加すべきである。――Б. グネディエンコ。

抽象化することの科学的価値にふれて，ミーゼスはその有名な書物《確率と統計》のある箇所で，わかりやすい適当な例をあげている。幾何学は，現実の空間の諸形態を抽象的な方法で研究するときに，われわれが現実界でよく直線とよぶものの幅や太さを捨象すると指摘して，ミーゼスは，あまり大きくはないがけっしてゼロではない幅をもった線が直線のかわりに出てくるような幾何学を構成しようという試みによって何がなされたかを説明している。この幾何学は抽象度の低いものであり，したがって，ここではあきらかに，より大きな現実への接近が生じた。しかしこうした試みは何にもならず，忘れ去られてしまったのである。こうした試みを実行するのに必要な形式的な複雑さは現実への接近によって埋め合わされるものではない。いや，厳密にいえば，この場合接近は不必要だったのである。すなわち，経験が示しているように，われわれの知性は幅のない直線という概念を扱うことを美事に習得しているのであり，この概念にもとづきながら，創造的な直観の働きに必要な明瞭な表象をつくり出すことをも習得しているのである。われわれが問題にしている例においても，全くこれに似た事情があり，また，《頻度説》型の形式化の試みは《幅のある》直線をあつかう幾何学の理論のようにまた全く同じ理由でおそかれはやかれ忘れ去られてしまうにちがいないとわれわれは考える。われわれの形式的図式が現実の実在に接近するという意識に，単純な，いわば無邪気な満足を感じることを別とすれば，こうした試みからもたらされるものは比較にならないほどの形式的な複雑さであり，それに対する代償としては何らの実際上の利点もあたえられないであろう。

より高度の抽出化を基礎にして，形式論理的な関係においてわれわれの理論の概念の内容を考えそのいくつかの性質を除いてみよう。形式論理学の法則にしたがえば，これはこの概念の外延の一定の拡大に相当することであり，われわれの新しいより抽象的な形式的図式に，これまでは入らなかった新しい対象を入れることである。われわれの例で実際上は，このことは，頻度説的形式化からより抽象的な公理論へ移るとき，《コレクティフ》の術語ではとうてい解明しようのないような新しい状況を考察することを意味する。事実上そうなることには疑問の余地がありえない。

公理論的理論のもっとも単純な図式の１つはつぎのようなものである。事象とは，区間〔0，1〕のルベーク集合の意味で可測なもののすべ

てである。各事象の確率はそれぞれの集合の測度である[2]。これは，ある単位の長さの区間に《ランダムに》投げられた質点についての問題のよく知られた解である。容易にわかるように，頻度説には，このような状況の出てくる余地がない。事実，ここでコレクティフにならなければならないのは，無限回投げたときにおちた点の横座標の系列であり，この横座標がどんなものであっても，その総体 M は可算集合である。したがってその測度は0にひとしく，またこの場合の条件によれば，点が集合 M 内に落ちる確率も0にひとしくならざるをえない。ところがわれわれのコレクティフのすべての要素は集合 M にふくまれるので，またこの集合内におちることの確率は，頻度説の規則によって計算すると，1にひとしくなる。こうして生じた矛盾は，われわれが公理論の図式の実例としたものが，頻度説的基礎づけでは実行できないことを意味する。そこで，頻度説の論者はこのことから，われわれが記述した分布は原理的に経験的な仕方では，あきらかにできないと論ずる。統計的経験はくりかえし試行のもとでの頻度の経験的規定においてしか行えないからであるという。マッハ主義的な哲学的基礎に相応に，かれらは，その主張を，こうした分布が現実に存在しえないということと同等なりと考えるのである。

2）Б. グネディエンコ「確率論教程」Ｉ，34～42ページ参照。

こうなると，確率論基礎づけの公理系は，われわれの科学が研究する現実界には何らの対応物もないような形式的図式の考察におちいらざるをえなくなる。とこういうのが頻度説の擁護者のテーゼである。かれらは上記の事実のうちに公理論の本質的欠陥を見ようと望む。数世紀前に，こうした《現実主義（レアリズム）》の騎士たちの祖先は，はじめは負数の，ついで虚数の導入にたいして，かれらの考えではこれらの数は現実界のいかなる現実にも対応しないという理由で反対してたたかったのである。そして，かれらが当時行ったたたかいは，今日のわれわれには無理もないことだと思われる（なぜなら，われわれは，あのような初期には，数学の性質と方法が不十分にしか理解されていなかったことを考えるからであるが）のだが，複素数には現実の量を対応させることができないという理由で，多項式代数学又は関数解析論を実数の領域では展開するが複素数の領域では展開しないことを，現在要求してやまない数学があったとしたら何をかいわんやである。ところが，《生きた基本概念を死んだ数学的形式主義に退化させることを避けよう》と望む E. Tornier という頻度説支持者の１人はこれと同様のことをやっているの頻度である。この数学者は，確率論において，説的解釈の枠におさまらないような図式を用いることを禁ずるのである。かれは自分の目的を達するために，比べようもないほど複雑な形式化の用具をつくり，より広い公理論から見ると基本的な諸問題の解決はおろか，それらを提起することさえしないのである。ルベークの測度規定は，もちろん，放棄され，その代りに不細工で硬直したジョルダンの測度規定が採用されている。

§6. 頻度説と科学的予測

§1でくわしくのべたように，ミーゼスが確率論における古典的観念の主要な欠陥の一つと考えるのは，新しい特殊な仮定を導入しないかぎり，それは事象の真の経過について何も予言できないということであった。ミーゼスのこの批判的な指摘をわれわれは全く正しいとみとめた。ミーゼスはこれに対立して，頻度説の結論には，いろいろな条件のもとで現実の現象がいかに推移するかについての直接の予言がふくまれると主張している。そこでかれのこの主張がどこまで正しいかを考えてみたい。

まず第1に，容易にわかることだが，頻度説でおこなわれている理想化は特殊なものであるため，その命題は，何らかの特別な新しい仮定

をもうけないかぎり経験的に検証することができない。事実として，例えば，あるサイコロの6の目が出る確率が1/6にひとしいという主張をとりあげてみよう。理想化して解釈すると，これは，このサイコロを投げる実験を限りなくくりかえしたとき，6の目が出ることの相対的頻度は1/6という極限値をもつだろうということを意味するが，理想化された状況から現実の状況に立ちもどったときわれわれはこれを以下のように考えなければならない。すなわち，δ をいくら小さい正の数としても，十分に多数回投げたときの6の目の相対的頻度は$1/6-\delta$ と $1/6+\delta$ との間にふくまれることになろう。そこでいま，この主張を経験によって検証しようとして，非常に多数回投げてみたところ，今度は《6》の相対的頻度が1/4にひとしくなったと仮定しよう。このように前提したとき，頻度説の原理を手がかりにして，はたしてわれわれはかりにも何らかの根拠をもって，さきに行ったわれわれの主張〔《6》の確率が $1/6-\delta$ と $1/6+\delta$ の間にある〕が正しくなかったとみとめることができるであろうか。（相対的頻度が 1/4 にひとしいという）われわれのたしかめた実験的事実は，あきらかに，多数回投げたとき《6》の相対的頻度は1/6に近づくということにも，またこの頻度は1/4に近づくということにも，すこしも矛盾しない。

このようなよくひきあいにだされる論議に反対して，ミーゼスは通常つぎのようにいう。このような事態はあらゆる物理学の理論に生ずることである。なぜなら，実験から与えられるのは，つねに研究すべき量の近似値にすぎないからであると。これがどこまで正しいかを考えてみよう。もし，われわれの理論上の計算から，ある物質の比重が1.5になるはずだということがあきらかにされるとして，0.01の精度で比重を示す器具を用いて試験したところこの物質の比重が1.57であることがわかったとすると，このことによって，理論上の結論は試験の結果と一致しなかったという理由で反証される。逆に，もし，試験の結果が比重1.497になったとしたら，理論上の結論は証明された――もちろん，真値とのその差は，事前に知られているある小さな値よりも大きくないという意味で――というに足るだけの十分な根拠をわれわれはもつことになろう。

このようなことは，頻度説の応用には全くみられない。サイコロをたとえ何回投げたところで（いいかえると，われわれの実験の《精度》をいかに高めたところで）このサイコロ投げの結果はつねに，6の目の出る確率についてどのような予言とも両立するのであり，頻度説の諸原則のどれ1つとして，これらの確率の可能な諸数値が他の数値よりもよいとしてえらばれるかをわれわれに指示することはできない。ミーゼスは好んで，統計的試験のくりかえしを物理実験に対比しようとするが，みられるとおり，統計的試験は，その精度がわからないだけでなく，原理的に規定することのできないような器具を用いる実験なのである。このような計器の示度が，一体いかにして，理論的な結論を検証するさいに意味をもちうるであろうか？　こうした諸条件のもとで，どの物理学の理論に比べても事態は悪くないなどとまともにいうことができるであろうか？

しかし，頻度説がそれ自身でまだその帰結を経験にてらして検証することを許さないとしても，この説は，おそらくミーゼスもいうように，現象の現実の経過について何かを予言することが出来るであろう。大量現象の過程について確率論において，実際に述べられる判断の基石となるのは，よく知られているように，大数法則である。ミーゼスは全く正当にこうのべている。古典的な確率観のもとでは，大数法則は補足的な仮定を立てないかぎり，あれこれの現象が現実にどうなってゆくかについて，何かを述べることが全くできないと。それに反して，かれの見解によると，頻度説の枠内で，大数法則は直接に現実の事象の経過を特徴づけるという。この主張が正しいかどうかを考えてみよ

う。

例えばあるカテゴリーの被保険者がある期間に死亡する確率が0.016になるとしよう。大数法則は，この場合もし10,000人の被保険者がいたとすると，そのうちの死亡者数が160人に近くなる確率pは十分に1に近いということをつげる。ミーゼスがたえず訴えつづけたことにしたがって，確率というものを通俗的な意味ではなく，科学的な（頻度説の意味での）意味においてとらえ，大数法則のこの帰結が10,000人の現実の寿命についてどう結論することを許すかを問題にしてみよう。大数法則の適用例としてわれわれがとりあげたものの結果は，頻度説の意味では文字どおりつぎのように主張する。《被保険者10,000人の寿命の経験を限りなく多数回くりかえしてみれば，死者の数が155人と165人の間にはいる事例の相対的頻度はその極限値として，ある数値pをもつ》と。しかしこのことはわれわれの当面の問題に一体何の関係があろうか？　われわれには10,000人の保険を多数回くりかえす用意はないのであるから。われわれに関心のあるのはただ，与えられた10,000人の寿命だけである。頻度説はこの10,000人の人について，われわれに何を暗示できるのか？　全く何もできないのである。頻度説がやったのは，上に定式化された結論であって，これ以上に何かを付け加えることはできないのである。ミーゼスはこの議論に反対して何というのであろうか？　かれはくりかえしいう，もちろんこれはすべて正しい，しかし，どんな物理学の理論においても，事情はまさにこのとおりなのであると。

さまざまの数学や物理学の理論がそれ自身のうちにその実際面への適用の原則のすべてをふくんでいることが必要だとはわれわれはけっして考えない。逆に，こうした原則は，ふつうは，すでにその理論の圏外にあるのであって，とりわけ，確率論の古典的観念も，その現代的公理論的な基礎づけも，何らかの補足的仮定をつけ加えないかぎり，それ自体では事象の現実の経過については何も言うことができないのである。したがって，頻度説もまたそれ自身では，この種の予言ができないという事を，われわれはけっして，この説の罪だとはいえないのであって，この点にかんしては，頻度説は確率論の他の基礎づけの方法に比して，少しも良いわけでも悪いわけでもないのである。しかし，問題は，ミーゼスがこれに反することを主張して，この形の予言を与えることができるのを正しく頻度説の基本的な利点の1つであると考えている点にある。われわれは，この自負がことごとく誤解に根ざすことをあきらかにしたのである。

事実，古典的であれ，頻度説であれ現代の公理論であれ，確率論の基礎づけの体系としてどれをとろうとも，この三つの例のすべてにおいて，われわれの命題は経験の前ではすべて同等であって，実践との関連においては補足的な仮定が必要なのである。例えば，事象の確率がきわめて小さいとすれば，この事象が生起しないということは，実際に確信できるのである。この原則はいかにも簡単で明白であるが，これを確率論そのものから放逐することはとうていできないのである。

§7.　結　　論

1.　ミーゼスのもっとも重大な歴史的功績としてみとめなければならないのは，確率論の《古典的》基礎づけに対する一貫した批判であり，つぎのようなその重大な欠陥をあきらかにしたことである。確率の定義づけにおける循環論法，この定義の適用可能性がきわめて限られていること，そして，古典的理論がその結論の現実への直接の適用可能性にたいする自負に根拠のないこと。

2.　ミーゼスの第2の功績は，大量現象についての学としての確率論の役割と，このことの帰結として，確率論がその基本的諸概念や諸命題を個別的な対象の性質からひきだすのではな

く，現実の統計的集団やくりかえし過程の捨象[1)]によって獲得することの必要を，一貫して，根気よく指摘したことにある。

1）現代の確率論は，対称性の原理にもとづく古典的な確率定義の方式をすべて放棄し去るものではない。この点については「付記」でのべる——Б. グネディエンコ。

3. ミーゼスは確率論を，数学的な方法は用いるが非数学的な，自然科学の分科とみなす。これは何よりもまず，ミーゼスがその理論の完全な形式化を，すなわち，それに純公理論的な形式をあたえることをめざしたことが一度も，またいかなるところでも全くなく，現実の諸過程のある程度までの理想化にとどまり，基礎命題の定式化においても，《試行》，《観察》，《過程》等々の概念を保持しつづけていたことに起因する。

4. これとは反対に，確率論を数学的分科とみなす学派は，その完全な形式化，すなわち幾何学，代数学その他の数学諸分科においておこなわれているように，公理系を構築することが必要であると考える。

5. 頻度説の提唱する確率論の基礎は，以上にのべたことにより，現代数学がこの語〔基礎〕にあたえる意味における論理的基礎ではない。にもかかわらず，頻度説は，純形式的な基礎づけの図式と競合しているものと自負している。この自負が適切かどうかをあきらかにするには，第1に，頻度説が完全に形式化されうるかどうかを問題にすることが必要である。

6. 頻度説の基本概念であるコレクティフは形式化された図式においては，つぎの2つの基本要求が提出されている数列である。つまり，標識の相対頻度の極限値の存在といわゆる無規則性である。この2つの要求をそのままのこしておいて頻度説が完全に形式化できるかというと，それは少くとも疑わしい。なぜなら，現代数学が無規則系列の概念にむすびつける表象に関しては，極限値の存在という要求は全く意味を失ってしまうからである。

7. この異論がミーゼスの後継者たちをして，2つの基本公準のうちのある1部分を放棄せしめた。無規則性要求の制限はしばしばみかけるところである。無規則性公準の意味がこのように制限されてくれば頻度説の完全な形式化も可能になり困難は生じない。

8. 形式化された頻度説は，これを，確率についての学説を測度論的集合論及び関数論の一部と考える公理論と比較することが完全に可能であり，比較してみると，頻度説の方は公理論に比して，抽象度がかなり低いことがわかる。このことに関連して，頻度説には，比較にならないほど大きな形式上の複雑さが特有のものとなるが，これは具体性の大きいことや，それにともなう現実の実在への接近度の高さによって補うことのできないものである。したがって，公理論の方はたしかに好ましいものとして採用されるが，一方，頻度説の形式化は適当とは思われない。

9. 頻度説のある支持者 (E. Tornier) によって宣伝されている，より抽象的な基礎づけの体系の放棄は，このような基礎づけが現実の世界においてはその実行が原理的に許されないような図式の考察にみちびくということを理由にしてとなえられているのであるが，この放棄は現代数学の全精神に敵対する，遠い昔の蒙昧な考え方の遺物だと考えざるをえない。

10. 頻度説の主張によると，現にある基礎づけの諸体系のなかで，頻度説は，確率論にたいして，事象の現実の経過を直接に描写するような主張を可能にするという。

分析によってあきらかなように，頻度説のこの自負は錯覚に根ざすものであり，したがってまた正当なものとはみとめがたい。事実，頻度説的基礎づけの図式も，他のすべての図式と同様に，あれこれの現象の事実上の経過を，たとえ近似的にせよ，直接に予言するという役割を，確率論の言明に付与することは，ほとんど出来ないのであって，この場合，すべての基礎づけの体系において一様に要請されるのは補足的仮

説を立てることであり，頻度説もこの点では何らの優越性をもたず，例外ではないのである。

付　　記

Б. В. グネディエンコ

等可能性観念の科学的意義と展望

等可能性という概念の論理的欠陥は，等可能性という観念が確率論の形式的基盤として登場することを妨げるものであるが，このことが口実にされて，この観念のきわめて大きな方法論的意義，すなわちわれわれの日常的実践においても，現代科学のきわめてせん細な諸問題においても，一様に重要な意義が不十分にしか評価されないことは許されない。（形式論理的意味ではないとしても）ある意味において，この観念は，さいきんの一連の研究がとくに証明しているように，集団現象についての学問に，基礎づけのどのような形式的図式より以上のものをあたえることができる。この論文でのべられた事情を補足するために，この問題についていささか考えてみることが必要である。

ここで問題になるのは，確率の観念を現代の科学のすべてがみとめている頻度説的解釈からその古い，形而上学的な概念にひきもどすことではない。われわれは従前どおり，確率というものを，いくつかの完全に規定された条件のもとでのこの事象の発現の相対的頻度についての表象をわれわれにある限界内であたえることのできるような数だと考えることにしよう。しかし，科学がもし，現実の現象のきわめて思考節約的ではあっても単なる記述にとどまらず，それ以上の何かであるとすれば，われわれは当然，あれこれの事象の頻度ないしは，原理的には同じことだが，確率を，事前に，つまり実験する以前に，理論的に予言できるようにするには一体どのような方法によればよいかを問題にしなければならない。

あるサイコロの6の目が出る確率を決定しようとすれば，ミーゼスのいうように，そのためには，このサイコロを十分に多数回投げて，相対的頻度を数えてみる以外に方法はない。理論的にはこれは正しいが，実際上はこんなことをするプレーヤーは1人もいないであろう。求める確率が1/6にひとしいことをかれは知っている。なぜかれはそう知っているのか？　おそらく，——とミーゼスはいう——かれはこれまでに，何回も，このサイコロに似た他のサイコロをなげたことがあり，これらのサイコロの大多数について確率が1/6になったことによるのであろうと。しかし，このことが問題なのではない。問題はかれの生活体験の全体がこの単純な推測をかれに暗示する点にある。というのは，サイコロの6つの面には，それぞれが出る頻度にとって重要な意味をもつような差異が相互にないからであり，サイコロの材質がほぼ一様だとみなしても当然であるから，とすればそれぞれの面がほぼ同じ頻度で出ると期待してよい根拠もすべてあるからである。

対称性の考慮にもとづくこの種の推則——仮説はいたるところでみかけられるものである。こうした事例においてはつねに，所与の現象にかんしての先験的な考察を手はじめにして，われわれは，いくつかの事象の等可能性を予言する。当然のことだが，こうした命題はせいぜい経験的な検証を要する作業仮説の役割しかはたすことができない。

科学における作業仮説の役割については周知のとおりである。作業仮説の意味においては，等可能性の観念は大量集団現象の理論にとってきわめて大きな意義をもちうるし，また実際にもっているのであるが，この意義は確率論の基礎づけの古典的体系がそれを利用しようとした方向においてあらわれるものでは決してない。等可能性の観念は，大量現象の科学の形式，論理的基盤としてではなく，個々の具体的な状況において事象の確率を理論的に予言する方法と

して存在する唯一のものとして登場するのである。

等可能性の観念にかんして§1でのべたすべてのことからみると，この観念の適用される領域はごくせまいように思われる。そして実際，一見したところでは，賭け事の範囲をはるかにこえた図式を想定することは困難のようにみえる。しかしながら，実はそうではない。すでにポアンカレーが手がけ，さいきんの数年間にとくに大きく発展した研究によると，この観念は少し一般化すると，きわめてひろい現象群，とくに力学と物理学のそれを含むことができる。これらの研究についてこの付記で少しのべておきたい。通例のルーレットのゲームの図式を思いうかべよう。理想化のため，摩擦がないと仮定しよう。つまり球が一定の速度で円運動するとしよう。この場合，ある時間の経過後に球がある位置は，初速 v を与えれば一義的に決定される。問題はこうである。どのような理論的理由によって次の当然の仮説が正しいとされるのか，つまり，v が十分大なるとき球の円周上のすべての位置の確率は等しいという仮説が正しいとされるのか？

あきらかに，球が円周のどこか一部にあることの確率は，初速のいろいろな値の確率の比に全く依存している。もちろん，この場合初速の値は等確率であると仮定するのは，かなり現実に反することになろう。運動をひきおこす力には，習慣的な《好みの》大きさがあるであろうから。しかしこうした仮定は不必要である。数学的分析によると速度の分布関数 $\Phi(x)$ がどのようなものであっても，ただ連続関数でありさえすれば，球のすべての位置の確率は，経過時間が限りなく大きくなるにつれて同一になることがあきらかである（エルゴード性）。壮大な科学的先例としての意義をもつこの注目すべき結果は，等可能性の観念の術語によって簡単，明快に解明される。事実，関数 $\Phi(x)$ に対する連続性の要求は何を意味するのであろうか？　初速が互に近いことの確率も互に近いというのがこの要求の明らかな意味である。ここでの問題は，ある種の微分的な，あるいは，もっと決定的にいうと局所的な等確率性である。とくに注目すべき点は，相互に多少とも大きな差のあるような初速の値の確率の相対的な大きさは，この場合全く無差別であるということである。重要なのはただ，個別的にまた好みによってごく近い値の頻度を大きく上回るような頻度でよくみかけるところの，速度の例外的な値が存在しないということである。この要求が現実に充たされるという根拠はあきらかに十分にある。こうして，われわれは，ルーレットに参加する各人がいかにして，また何故，同一のチャンスをもつかを解明できる理論をもつのである。この解明がわれわれにとってとくに満足すべきものであるのは，ほかでもない，この場合，われわれが問題にする分布に関して何か特別の前提をおく必要がないからである。局所的等可能性の要求はきわめて一般的なものである。それはきわめてさまざまの分布にみられるからである。

局所的等可能性観念の適用例としてわれわれがルーレットをえらんだのは，この問題では数理解析が困難なく行えるからである。しかし，原理的にこれと同じ方法が，きわめて多くの，とくに第1に力学上の問題に適用される。もっともこの場合，純数学的な困難はまだ多くの場合克服されていないのであるが。

とりわけ，古典派が提起し，ミーゼスがたえず，等可能性の観念のあてはまらない課題の見本としてもち出した，イカサマ・サイコロの例は，われわれの一般化した見地からすれば，この観念にもとづく説明を原理上は完全に許すものである。サイコロの内部の質量の分布が正確にわかっていて，理想化のためその出る面がサイコロの初期状態によって完全に定まるようにサイコロ投げのメカニズムが想定されるとすれば，それぞれの目の出る頻度は，サイコロの初期状態を想定する少数のパラメータのあれこれの値の頻度に依存することになる。このパラメ

ータの局所的等可能性を仮定したときには，それぞれの面が一定の確率をもち，その大きさはサイコロ内部の質点の上記の分布によって定まるということが十分にいえる[1]。

1) ヒンチンはここではこの観念をあまり多くとりあげていないが，つぎの著作で十分に展開している。《Метод произвольных функций и борьба против идеализма в теории вероятностей》………，〔任意関数の方法と確率論における観念論とのたたかい〕，《Философские вопросы современной физики》, 1952, стр. 522–538 —— Б. グネディェンコ。

このように，ごらんのとおり，等可能な場合という観念は局所的等可能性という高さにまでたかめれば，他の多くの例と同様にわれわれの科学にすばらしい成果をもたらすことができるのである。この例が示しているのは，古典的な観念には，数世紀の伝統の前に卑屈になるのでなく，現代科学の方法によって武装した創造的批判的な態度で接するならば，現代の科学を豊かにすることのできる宝物がいかに多いかということである。　〔付記おわり〕

〔訳者補註〕(P. 154の 註3）の補足)
『ソビエト大百科辞典』TÉЛО：代数的“体”は，積の交換則を除いて，加減乗除の演算が定義され，通常の演算がおこなわれるような要素の総体をいう。“体”の例は“体”の諸要素の積が交換則にしたがうとき，これを体〔数学的な概念〕(поле）という。

『岩波：数学辞典』第2版704～705頁。なお，705～707頁参照：体〔field, corps, Körper, поле〕

2つ以上の元を含む集合 K において2種の算法（加法および乗法）が定義され，次の公理 1)，2)，3)が満足されるとき，K を体とよぶ。

1) K の任意の元 a, b に対して和 $a+b$ が定義される。加法について結合法則 $(a+b)+c=a+(b+c)$，可換法則 $a+b=b+a$ が成り立ち，任意の a, $b\in K$ に対して $a+x=b$ を満足させる $x\in K$ が一意的に存在する。すなわち K は加法について Abel 群をつくる。その加群の単位元を0で表わし，K の零元 (zero element, neutral element) という。

2) K の任意の2元，a, b に対して積 ab が定義される。乗法についても結合法則 $(ab)c=a(bc)$，可換法則 $ab=ba$ が成り立ち，任意の a, $b\in K$（ただし $a\neq 0$）に対して $ax=b$ を満足する $x\in K$ が一意的に存在する。従って K から0を除いた集合は乗法について Abel 群 K^* をつくる。K^*を K の乗法群 (multiplicatetive group) という。K^* の元の単位元を1で表わし，K の単位元 (unit element) という。

3) 加法，乗法の間に分配則 $a(b+c)=ab+ac$ が成り立つ。換言すれば，体とは可換環であって，その0以外の元が乗法について群をなすものである。

非可換環であって，その0以外の元が乗法について群をなすものを，**非可換体** (non-commutative field) とよぶ。ただし体と非可換体とを合わせて体とよび，上に定義した体（すなわち K^* が Abel 群をなすもの）を特に可換体 (commutative field) ということもある。本項目では，非可換なものをも含めて考えるときは（非可換）体としるすことにする。