HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	個人的確率に関するリンドレー氏のパズルについて
Author(s)	園, 信太郎; 葛西, 俊治
Citation	經濟學研究, 39(2), 214-221
Issue Date	1989-09
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/31831
Type	bulletin (article)
File Information	39(2)_P214-221.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

経済学研究 39-2
北海道大学 1989. 9

個人的確率に関するリンドレー氏のパズルについて

園　信太郎
葛西俊治

1. 一個の目的

Lindley［1］の第3章第9節，41頁から45頁，は一個のパズルのみを議論しており，このパズルの全体を示すと以下のようである。但し斜字体は原文のままであり，またリンドレー氏は式の末尾にコンマやピリオドを打つ流儀を避けている。

3.9 THE PUZZLE OF THE THREE PRISONERS

A problem which intrigues many people and also demonstrates the notion of coherence in an interesting way is that of the three prisoners. Alan, Bernard, and Charles are in jail unable to communicate with one another or with anyone besides their respective jailers. Alan knows that two of them are to be executed and the other set free, and some thinking concludes that he has no reason to think that one of them is more likely to be the lucky one than either of the others. If A denotes the event that Alan will go free, and B and C similarly for Bernard and Charles, this last statement means that $p(A)=p(B)=p(C)=1/3$ in Alan's opinion. Alan now says to his jailer 'Since either Bernard or Charles is certain to be executed, you will give me no information about my own chances if you give me the name of one man, Bernard or Charles, who is going to be executed.' Accepting this argument the jailer truthfully says 'Bernard will be executed.' Thereupon Alan feels happier because now either he or Charles will go free and, as before, he has no reason to think it is more likely to be Charles, so his chance is now 1/2, not 1/3, as before. Which argument is correct, the one that convinced the jailer or the latter one?

To analyse the situation we have to compare $p(A)=1/3$ with $p(A|b)$, where b is the jailer's statement that Bernard will be executed. By the first argument $p(A|b)=1/3$ so that b has no effect : by the second, $p(A|b)=1/2$. Now we are told that the jailer is truthful so we know that $p(b|B)=0$ and $p(b|C)=1$; the first statement saying that the jailer will never make his statement if Bernard is going to be freed. It is not clear what value to attach to $p(b|A)$, for if Alan is to be freed and therefore both Bernard and Charles to be executed, will the jailer report Bernard's or Charles's execution? So for the moment let us write $p(b|A)=p$ and $p(A|b)=x$, the quantity of interest : the two

values of x considered are 1/3 and 1/2.

By extending the conversation from b to include A, B, and C which are exclusive and exhaustive

$$\begin{aligned} p(b) &= p(b\,|\,A)p(A) + p(b\,|\,B)p(B) \\ &\quad + p(b\,|\,C)p(C) \\ &= p/3 + 0 + 1/3 = (1+p)/3 \end{aligned}$$

By the multiplication law

$$p(A \text{ and } b) = p(A\,|\,b)p(b) = (1+p)x/3$$

but equally

$$p(A \text{ and } b) = p(b\,|\,A)p(A) = p/3$$

Combining these last two results we have

$$p/3 = (1+p)x/3$$

or simply

$$x = p/(1+p)$$

In the discussion with the jailer, Alan argued that $x=1/3$. The result just obtained shows that this would imply $p = p(b\,|\,A) = 1/2$, or that if Alan was to be freed, the jailer would be just as likely to say Bernard as Charles. In feeling happier, Alan was taking $x=1/2$, which implies $p = p(b\,|\,A) = 1$, or that in the same circumstances the jailer would always say Bernard.

Hence we see that both assessments, of 1/3 and 1/2, are coherent, but the first implies an even choice on the jailer's part between reporting on the two men to be executed, whilst the second implies that, in Alan's view, he will select Bernard. The essence of the problem, and the reason for its ambiguity, is its failure to state what the jailer will say if Alan is to be freed. If Alan feels elation as a result of the jailer's statement, then that is sensible and coherent provided he realizes it means that Alan is judging that the jailer will report Bernard as the one to be executed in the ambiguous circumstances. This is coherent but probably not what most of us would feel. Most people would opt for $p=1/2$ and consequently $x=1/3$ so that the jailer's information is truly irrelevant.

Notice how one can assign seemingly sensible probabilities, $p(A)=1/3$, $p(A\,|\,b) = 1/2$, but then use the laws, the rules for coherence, to calculate other probabilities, $p(b\,|\,A)=1$, which do not seem sensible. Coherence being inviolate, a revision of the original assignments is needed to make *all* the probabilities agree with one's ideas. Probabilities should not be judged in isolation they should be compared, one with another. We return to this again in section 9. 8.

本来の確率概念を問題にするのならば，確率を付与するその個人の周囲の状況及びその個人の心の状態を，断じて，無視してはならない，というのが個人的確率を重視する者の基本的態度である。この確率観からリンドレー氏のパズルを反省してみると，まず，冒頭の段落の三事象間の無差別性の仮定，即ち，

$$p(A) = p(B) = p(C)$$

にぶつかる。A, B, 及び C の三つの事象に対してこのような関係をアラン自身が設定するな

どということは，彼アランが個人的確率の付与の為の努力を極端に怠るか，或いは「アラン，バーナード，及びチャールズの内のどの一人を釈放するかが，くじ引きの類に基づいて，最終的に決定されるのである」と言う知識をアランが得ている場合以外にはまずあり得ないであろう。しかし，一方では，この三つの数値を確定することは極めて困難であり，少なくとも筆者は，現実的には不可能であると判断せざるを得ないのである。アラン自身は，少なくとも，彼らに対して最終的な判断を下す組織や，また自分達の犯罪歴に対して，出来得る限り緻密且つ理性的に考察しなければならない。このような考察を真剣に行えば行うほど，この確率の三組の確定の困難さは増大するであろうから，我我としては $p(A)$，$p(B)$，及び $p(C)$ の間の大まかな大小関係や，せいぜいのところ，この値の三組に対する極めて粗い見積を，彼アランが確定出来ると仮定することが良識ある態度であると，筆者は判断するのである。だが，個人的確率の観点に，もし仮にではあるが，真剣に立脚するのならば，二事象間の無差別性，例えば

$$p(A)=p(B)$$

を仮定することが既に非現実的なのである。アランとバーナードとは同一人ではない，全く異なる，極めて「歴史的」な，「存在」である。どうして釈放確率が等しい，或いは少し弱めて「ほぼ」等しい，などと，誰かから，判断されなければならないのであろうか。「$p(A)<p(B)$ 或いは $p(B)<p(A)$」と言う判断が，アラン自身が自己に対する誠実さを失わない限りにおいては，彼アランにとっては，自明なくらいに当然なのである。

ところが $p=p(b|A)$ のアラン自身による確定に至っては，これは全く絶望的な状況であると言って良い。少なくとも，アランは，自分達三人のほかに看守，以下これをJとする，の性格を考慮しなければならない。あくまでもたとえばだが，「チャールズ」という名称に対して，Jが，一種独特の敬虔な連想を行うかもしれないと，アランが，疑うのならば，このような一見つまらない疑念でさえも，彼アランによる p の値の確定に影響，しかも大きな影響，をもたらすことになるのである。また，或いは，「チャールズの年齢が大体Jの，もしいるとしてだが，息子くらいの年齢ではないのか」とふとアランが「思った」場合にも，とたんに，一旦確定したはずの p の値が，再び揺動し始めるのである。さらには，囚人アランが，意図的か否かは敢えて問わないとしても，「バーナードはこの俺から見ても実に残忍な奴で，チャールズは俺のかわいい息子に似ていて，あんたは神様のようないい看守さんで…」などと嘗てJに語ったことがあることをアランが何故か記憶しているのならば，彼は知らず知らずの内に，或いはかなり意図的に，Jの答えの方向を誘導してしまったのであり，潜在意識の類を彼が持ち出すか否かは別としても，彼は当然，Jに対する，自分の行ったその誘導の効果をも見積もらねばならないのである。ところが一方，p，即ち $p(b|A)$，の確定は，もしその確定を誰かが行うのならば，「自分が釈放されるというような世界の状況を想定したうえで，もし仮にではあるが，その釈放が事実であるのならば，Jがバーナードは処刑されると返答するその確率を，「自分が釈放される」ということをあたかも事実であるかのように，絶えず，念頭に置きつつ，確定せよ」，という，アランが正にそのアラン自身に対して課さねばならない，規範的な命令の下に，彼自身によって，行われなければならないという，不可侵の，想定が存在する。結局 p の値を，誰かが，確定し得ると仮定することは余りにも無謀なのである。

ところが $p(A)$，$p(B)$，及び $p(C)$ からなる確率の三組や条件付き確率 $p=p(b|A)$ と比較して，アランにとって，その見積がより現実的な確率である $p(b)$ が存在している。これは，彼の質問に対して，Jがバーナードの処刑

を返答するという事象に対する，彼自身が付与する，確率であるが，これは「自分の質問に対して，Jはバーナードの名前を告げるであろう」という予想に対して彼自身が賭ける場合の，しかもこの場合の賭けは勝負の結末を彼アランが直ちに知り得るので，比喩的ではなく，本来の意味での賭けの勝ち目 (betting odds) から，アランによって，評定され得るものなのである。さらにまたこの確率が，「条件付けを行う事象を，明白な表現において，含んでいない」という点において，「条件付けを行う事象を，明白な様式において，含んでいる」という意味での条件付き確率 $p=p(b|A)$ よりもはるかに単純であるという事実をここで確認するのならば，$p(b)$ のアランによる評定を想定することは，p に対する，アランに限らず，誰かによる，評定を想定することよりも，より実体感のある想定であると筆者は判断するのである。このより現実的な確率である $p(b)$ の視点から，リンドレー氏のパズルにおける囚人アランの心の動きを，簡潔に再考することがこの論述の目的である。

2. 二つの式

まず表記法を正式に確定しておく。「バーナードが釈放される」というアランによって考察される事象を B と表記し，また A, C も同様である。「バーナードが処刑される」というアランによって考察される事象を $\sim B$ と表記し，また $\sim A$, $\sim C$ も同様である。「Jがバーナードは処刑されると返答する」というアランによって考察される事象を b と表記して，且つ c も同様とする。最後に

$$p_A=p(A),\ p_B=p(B),\ \text{且つ}\ p_C=p(C)$$

と置く。

我我は，囚人アランは，看守Jの答えを得る前，つまり事前においては，「自分，バーナード，及びチャールズの内でその釈放が事実上不可能な者は存在していない」と判断していると仮定する。この仮定より

$$0<p_A,\ 0<p_B\ \text{且つ}\ 0<p_C$$

が従う。一方

式1。$p(A|b)\cdot p(b)=p_A\cdot p$ 且つ
式2。$p(b)=p_A\cdot p+p_C$。

式2より

$$p_A\cdot p=p(b)-p_C$$

が従う。これを式1に代入して

$$p(A|b)\cdot p(b)=p(b)-p_C$$

を得る。ところが $0\leqq p_A\cdot p$ 且つ $0<p_C$. 故に $p(b)\neq 0$。故に

$$p(A|b)=(p(b)-p_C)/p(b)$$

が従う。ここで

$$1=p_A+p_B+p_C$$

を利用すると

$$\begin{aligned}&(p(b)-p_C)/p(b)\\&=1-(p_C/p(b))\\&=p_A+p_B+p_C-(p_C/p(b))\\&=p_A\cdot\left(1+\frac{p_B+p_C}{p_A\cdot p(b)}\cdot\left(p(b)-\frac{p_C}{p_B+p_C}\right)\right)。\end{aligned}$$

ここで

$$\alpha = p_A / (p_B + p_C)$$

且つ

$$p(*) = p_C / (p_B + p_C)$$

と置くと

式3。$p(A \mid b) = p_A \cdot (1 + (\alpha \cdot p(b))^{-1} \cdot (p(b) - p(*)))$

が従う。

$$p_B + p_C = 1 - p_A = p(\sim A)$$

より

$$\alpha = p(A) / p(\sim A)$$

が従うので，α は「自分が釈放されることに対して，アラン自身が付与する賭け，但し，この賭けの結果は早晩アラン自身が体験することになるのだが，の勝ち目」にほかならない。一方 $p(*)$ に対しては二つの解釈を提示する。

第1の解釈。釈放される者は一人のみであるので

$$p_B + p_C = p(B \text{ or } C)$$

が従う。一方「バーナード或いはチャールズが釈放され，且つチャールズが釈放される」という事象は「チャールズが釈放される」という事象と同値であり，また，釈放者唯一名の前提より，後者は「バーナード或いはチャールズが釈放され，且つバーナードが処刑される」という事象と同値である。故に

$$p((B \text{ or } C) \text{ and } C) = p_C$$
$$= p((B \text{ or } C) \text{ and } \sim B)$$

が従う。故に

$$p(*) = p(C \mid B \text{ or } C)$$
$$= p(\sim B \mid B \text{ or } C)$$

が従う。これより $p(*)$ に対する第1の解釈，「バーナード或いはチャールズが釈放されるという事象を，仮にではあるが，事実としてアランが想定した場合の，「バーナードが処刑される」という事象，これはアランが想定している仮想的事実の下では「チャールズが釈放される」という事象と同値であるのだが，に対してアランが付与する確率である」，が従う。

第2の解釈。「バーナード或いはチャールズが釈放される」という事象は，釈放唯一名の前提より，「アランは処刑される」という事象と同値であり，且つ，同じ前提より，「アランもバーナードも共に処刑される」という事象は「チャールズは釈放される」という事象と同値である。即ち

$$p_B + p_C = p(\sim A) \text{ 且つ}$$
$$p_C = p((\sim A) \text{ and } (\sim B))$$

が従う。故に

$$p(*) = p((\sim A) \text{ and } (\sim B)) / p(\sim A)$$
$$= p(\sim B \mid \sim A)$$

が従う。これより $p(*)$ に対する第2番目の解釈，「自分が処刑されるという事象を，もし仮にではあるが，事実としてアラン自身が想定する場合において，「バーナードが処刑される」という事象に対してアラン自身が付与する確率」，が従う。

以上二つの解釈を簡潔に表現すれば

式4。$p(\sim B \mid \sim A) = p(*) = p(\sim B \mid B \text{ or } C)$

となる。

［注意］バーナード及びチャールズの役割を入れ換えた場合の式3及び式4に対応する式を示すと次のようになる。

$$p(A|c)=p_A\cdot(1+(\alpha\cdot p(c))^{-1}\cdot(p(c)-q(*)))$$

$$p(\sim C|\sim A)=q(*)=p_B/(p_B+p_C)=p(\sim C|B \text{ or } C)$$

［注意終］

次に，上で導いた二つの式，式3及び式4，に基づいて囚人アランの心の変化を，極めて単純ではあるが，考察することにする。

3.　心の三態

$p(b)<p(*)$ の場合を考える。この不等式は，式3より，

$$p(A|b)<p_A$$

と同値である。一方，式4の最左辺より，$p(*)=p(\sim B|\sim A)$。故に後者の不等式は

$$p(b)<p(\sim B|\sim A)$$

と同値である。このような場合がアランに訪れる状況を一つ想像すると次のようになる。

「自分とバーナードとは，チャールズとは異なった，同性格の犯罪を犯している。しかも処分を最終的に決定する我我の組織が，この種の性格を持つ犯罪に対して寛容であった前例はない」とアランが思索する場合においては，$p(\sim B|\sim A)$ は1に近付かざるを得ない傾向に，アランによって，措かれるであろう。この傾向が，$p(b)$ のアランによる見積よりも $p(\sim B|\sim A)$ の値は大であるとアランによって判断されるという意味において，強い場合には，$p(b)<p(\sim B|\sim A)$ が従う。つまり，「バーナードは処刑される」という看守Jの答えをアランが得る場合において，アランの釈放の，彼自身による，確率はJの返答を得る前よりも，その後のほうが，低くなるのである。これは「同性格の犯罪者バーナードの処刑がJの返答によって事実上確定することによって，アランとバーナードとの連座的性格に気付いているアランの不安感が増大し，且つ，また一方では，強力なライバルであるチャールズの釈放に対するアランの印象が強化され，結局アランの絶望感が拡大する」という状況である。

次に $p(b)>p(*)$ の場合を考える。式3及び式4の最左辺よりこの不等式と

$$p(b)>p(\sim B|\sim A)$$

と

$$p(A|b)>p_A$$

とは互いに同値である。これは例えば次のような状況である。

「自分とチャールズとの犯罪の性格は酷似しているが，しかしバーナードとは明白に異なっている。しかも，自分達の犯罪と同性格の犯罪に対しては，我我の組織は，慣例としては，かなり厳格に対処することになっている」とアランが思索する場合においては，

$$p(\sim C|\sim A)$$

は1に近付く傾向に，アランによって，措かれるであろう。従って，

$$p(\sim B|\sim A)$$

は

$$p(\sim B|\sim A)+p(\sim C|\sim A)=1$$

という制約の下でだが，0に近付く傾向を持つに至る。この場合，$p(b)$ よりも $p(\sim B|\sim A)$ は0に近いとアランによって判断されるという意味において，$p(\sim B|\sim A)$ の0への傾向が強いのならば，

$$p(b)>p(\sim B|\sim A)$$

が従う。アランの釈放の，彼自身による，確率は，「バーナードは処刑される」というJの返答によって高まることになる。これは「自分とチャールズとが連座式に処刑されること及び強力なライバル囚人であるバーナードが釈放されることに関するアランの恐怖と不安とが，それらに関する限りにおいてだが，「バーナードは処刑される」というJの返答によって事実上消滅し，アランとチャールズとの関係が，連座的状況から，釈放をめぐっての全面的対立へと転換することにより，結果としては，アランの釈放への期待感が高まることになる」という状況である。

最後に $p(b)=p(*)$ の場合を考える。式3及び式4の最右辺より

$$p(b)=p(\sim B|B \text{ or } C)$$

と

$$p(A|b)=p_A$$

とは同値である。これはどのような状況か？

「我我三人は仲間であり共犯者である。また自分は彼らのボスである。だが自分の処刑を事実上確定するに足る知識を，確かにこの自分は，持っていない。しかし，一方では，仲間の二人の内のいずれかが釈放されるか，それとも自分が釈放されるか，という一個の賭けを考えるのならば，よほどの金額の開きがない限り，自分は「自分」の方には賭けないことも，また確かにこの自分は，知っている。だが，チャールズは，自分やバーナードよりも若年であり，行末が心配である…」とアランは思索する。この場合アランが，$p(b)$ の値を見積もることに情熱を傾けるよりは，その値を

$$p(\sim B|B \text{ or } C)$$

に「ほぼ等しい」として一種の労力の節約を行ったとしても，アランが自己に対する誠実さを欠いているとは，筆者には，思われない。この場合アランは，Jの返答を得た後も，自分の運命への予感を変更する必要がないことを，既に悟っているのである。だがしかし，チャールズが釈放されることに対する，アランによって見積もられる事後の確率は，事前よりも増大していることを敢えて注意しておく。

以上の分析結果を標語式にまとめると

「囚人アランは，連座的状況においてはということだが，同類項の処刑の確定によって，益益危機意識を高める傾向にあるが，だが，異分子の処刑確定によっては，一瞬ほっとするのだが，とたんに解放への期待に満ちた一種独特の高揚感と共に，同類項との不倶戴天式暗闘を開始する運命となる。一方，八方ふさがりの場合には，或程度は観念して，若者へと期待を繋ぐ」

となる。

単純明快ではあるが，このような再考を通してリンドレー氏のパズルを視るのならば，それはパズルというよりは寧ろ，朝三暮四の類に一喜一憂する衆人に対する，一個の算術的教訓とも

なり得ると，筆者は，判断するのである。

4. 補　遺

この論述は，葛西俊治氏（北海道工業大学）による，リンドレー氏のパズルに対する或種の議論への，率直な疑念表明を受けた筆者（園）が，同氏の疑念表明を，自己の流儀によってではあるが，発展的に再構成したものである。そこで，同氏の承諾を得たうえで，同氏の氏名を共同研究者として掲げることにしたのである。なお同氏の疑念を筆者式に要約すれば

「自分の実験家としての経験からすれば，通常の人がなんとか見積もることが出来るのは $p(b)$ 及び $p(c)$ の二つの値とするのが正当であり，直接 p を評価することを，人に，期待することは事実上不可能と判断するのである。この p の値を $p(b)$ や $p(c)$ よりも先に，しかも極めて天下り式に，確定した上で，人による確率評価の問題を，統計的模型とベイズの公式とによる没個性的な単なる処理へと転化する流儀に対しては，科学的と言うよりは寧ろ，一種の教条的態度を直感する」

となる。「囚人アラン，囚人バーナード，囚人チャールズ，そして正にその看守を我我は問題にすべきなのであり，しかも，決して，囚人「A」，囚人「B」，囚人「C」，そして「看守」という記号の列によって象徴される多くの類似の事例の処理を効率的に，従って，その処理の過程に実際に直面する者たちが行い得るはずの，自己への省察と克治とを，一切排除する様式に基づいて，遂行するための手順の開発が，本来の我我の課題とは，なり得ない」とするのならば，同氏の疑念は，全く健全であると，筆者は，判断するのである。

個人的確率の概念を重視する算術家の立場の基底には，サヴェジ書［2］において，恐るべき執拗さと共に，首尾一貫して視ることが出来るように，少なくとも本来は，事象間の無差別性の余りにも安直な，しかも余りにも有用な，処世的利用と，事実を大集団へと没入させたがる，余りにも高遠な，しかも余りにも芸術的な，欲念とに対して，あくまでも中立を守りつつ対抗して行こうとする，反時代的な，中庸の精神が貫流していることを筆者はこの機会に指摘しておくことにする。これについては，園［3］を経由して，そこで言及されている文献を参照することを勧める。またついでに，連続な一様分布やその類似物を仮定することは，その論理的基礎が，決して自明とは言い難いことをここで確認しておきたい。これについては，サヴェジ書の第3章第3節，及び園［4］及び［5］を参照することを勧める。

なお葛西氏からは，リンドレー氏のパズルに関する，統計学の基礎とは別の傾向にある，幾つかの資料を頂いたが，それらの分野に対して筆者は殆ど門外漢であるので，無責任な論評を行うことの可能性を最小化する為に，葛西氏自身の論述をも含めて，一切言及しないことにした。だがこれは葛西氏自身の罪でないことは言うまでもない。

参考文献

［1］ Lindley, Dennis Victor, *Making Decisions, Second Revised Edition*, John Wiley & Sons, London, 1985, 但し第1版は同社より1971年に出版されている。

［2］ Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics, Second Revised Edition*, Dover Publications, New York, 1972, 但し第1版は John Wiley & Sons, New York, より1954年に出版されている。

［3］ 園信太郎，「サヴェジ氏の哲学に対する簡潔なる序説」，経済学研究（北海道大学），第37巻第4号，48(488)-61(501)，1988年3月。

［4］ 園信太郎「サヴェジ書における殆ど一様な分割 (2) 定量的確率」，経済学研究（北海道大学），第38巻第4号，118(556)-143(581)，1989年3月。

［5］ 園信太郎「サヴェジ書における殆ど一様な分割 (3) 精密比較の公準」，経済学研究（北海道大学），第39巻第1号，121(121)-143(143)，1989年6月。

（1989年初夏，於北大教養部，了）