経済学研究 *40-1*
北海道大学 1990.6

数値的確率の値域に対する或算術的接近

園　信太郎

1．目的

$\boldsymbol{N}$ は自然数系である。但し，$1=\min \boldsymbol{N}$ かつ $\neg 0 \in \boldsymbol{N}$ とする。

$\boldsymbol{R}$ は実数系である。但し，Dedekind 切断の原理によりその連続性を統制する。

$\boldsymbol{I}=\{x \in \boldsymbol{R} \mid 0 \leqq x \wedge x \leqq 1\}$ とおく。

$\forall n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}[\boldsymbol{N}[n]=\{m \in \boldsymbol{N} \mid m \leqq n\}]$ とおく。特に $\boldsymbol{N}[0]=\emptyset$。

$\mathrm{Map}(A, B)$ は集合 A から集合 B への写像の全体である。特に $\mathrm{Map}(\emptyset, B)=\{\emptyset\}$。

$\mathrm{dom}(f)$ は写像 f の定義域である。写像 f を $f(\cdot)$ と表記する場合もある。

$\mathrm{Id}\langle A\rangle$ は集合 A 上の恒等写像である。即ち，$\forall x \in A[\mathrm{Id}\langle A\rangle(x)=x]$。

$f \in \mathrm{Map}(A, B)$ かつ $C \subseteqq A$ とする場合において，$f[C]$ は集合 C の写像 f による像である。即ち，$f[C]=\{y \in B \mid \exists x \in C[y=f(x)]\}$。

$a \in \mathrm{Map}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{R})$ とする場合において，a は各項が実数である，自然数系を添字集合とする，数列であるが，これを $\langle a(n); n \in \boldsymbol{N}\rangle$ と表記する。また $\boldsymbol{N} \subseteqq \mathrm{dom}(f)$ をみたす写像 f に対して，f の $\boldsymbol{N}$ への制限 $f|\boldsymbol{N}$ を，$\langle f(n); n \in \boldsymbol{N}\rangle$ と表記する。

数列 $\langle a(n); n \in \boldsymbol{N}\rangle$ の極限が存在する場合において，この極限を $\lim\langle a(n); n \in \boldsymbol{N}\rangle$ と表記する。

数列 $\langle a(n); n \in \boldsymbol{N}\rangle$ に対して，$\boldsymbol{N} \cup \{0\}$ 上の写像 $\Sigma_{j=1}^{\bullet}$ を，$[k=0 \Rightarrow \Sigma_{j=1}^{k} a(j)=0] \wedge [k \in \boldsymbol{N} \Rightarrow \Sigma_{j=1}^{k+1} a(j)=(\Sigma_{j=1}^{k} a(j))+a(k+1)]$，により定義する。また，$\lim\langle \Sigma_{j=1}^{n} a(j); n \in \boldsymbol{N}\rangle$ が存在するのならば，これを $\Sigma_{j=1}^{\infty} a(j)$ と略記する場合もある。

$Seq^{\mathrm{B}}=\{f \mid \exists n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}[f \in \mathrm{Map}(\boldsymbol{N}[n], \boldsymbol{N}) \wedge \forall i, j \in \boldsymbol{N}[i<j \Rightarrow f(i)<f(j)]]\}$ とおく。特に $\emptyset \in Seq^{\mathrm{B}}$。

$f \in Seq^{\mathrm{B}}$ とする場合において，$n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\} \wedge f \in \mathrm{Map}(\boldsymbol{N}[n], \boldsymbol{N})$，をみたす n は一意的に定まる。この n を $\delta(f)$ と表記する。特に $\delta(\emptyset)=0$。

$Seq^{\mathrm{N}}=\{f \mid f \in \mathrm{Map}(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{N}) \wedge \forall i, j \in \boldsymbol{N}[i<j \Rightarrow f(i)<f(j)]\}$ とおく。特に $\mathrm{Id}\langle \boldsymbol{N}\rangle \in Seq^{\mathrm{N}}$。また $Seq^{\mathrm{B}} \cap Seq^{\mathrm{N}}=\emptyset$。

$Seq^{\mathrm{I}}=Seq^{\mathrm{B}} \cup Seq^{\mathrm{N}}$ とおく。

任意の自然数 n に対して，

$Seq(n)=\{f \in Seq^{\mathrm{I}} \mid \exists k \in \boldsymbol{N}\ \forall j \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$
$[f(k+j)=n+2\cdot j]\}$

とおく。特に $Seq(1)=\{\langle 1+2\cdot(k-1);k\in \boldsymbol{N}\rangle\}$。また $\forall n\in\boldsymbol{N}[Seq(n)\subsetneq Seq^{\mathrm{N}}]$ が従う。

$\forall n\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}[\beta(n)=2^{-n}]$ とおく。

目的を述べる。
p を $\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{R}$ への任意の写像とする。

$$\forall j\in\boldsymbol{N}[0<p(j)]\wedge$$
$$1=\lim\langle\Sigma_{j=1}^{n}p(j);n\in\boldsymbol{N}\rangle$$

と仮定する。

$$\forall f\in Seq^{\mathrm{I}}[[f\in Seq^{\mathrm{B}}\Rightarrow P(f)=\Sigma_{k=1}^{\#(f)}p(f(k))]\wedge[f\in Seq^{\mathrm{N}}\Rightarrow P(f)=\lim\langle\Sigma_{k=1}^{n}p(f(k));n\in\boldsymbol{N}\rangle]]$$

により Seq^{I} 上の写像 P を定義する。$M=P[Seq^{\mathrm{I}}]$ とおく。即ち，

$$M=\{x\in\boldsymbol{R}\mid\exists f\in Seq^{\mathrm{I}}[x=P(f)]\}。$$

また

$$M^{d}=\{x\in\boldsymbol{R}\mid\forall y\in\boldsymbol{R}\,\forall z\in\boldsymbol{R}[y<x<z\Rightarrow\exists v\in M[v\neq x\wedge y<v<z]]\}$$

とおく。この場合，選択公理を利用することなしに，即ち Tikhonov の定理を利用することなしに，しかも自然数及び実数に関する基本的な諸原理のみを利用することにより，

$$M=M^{d}$$

を証明することが，この論述の目的である。なお，この結論と実質において同一の結論が，

A. Sobczyk and P. C. Hammer, The ranges of additive set functions, Duke Math. J., 11 (1944), 847-851,

の第3節，848頁，定理3.2の証明中の，上から第2行目から第6行目までにおいて，Cantor の三進集合の利用により従うとして，簡略に処理されているが，以下においては，集合関数の概念も，無限集合の概念に対する一般的定義も，また Cantor の三進集合も，利用することがないのであり，さらには集合の定義関数も用いることがないのである。なお，上掲の論文は，

R. J. Nunke and L. J. Savage, On the set of values of a nonatomic, finitely additive, finite measure, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 3, No. 2, April, 1952, 217-218,

の最初の頁における第2番目の脚中内において，さらにはまた，

L. J. Savage, The Foundations of Statistics, Wiley, New York, 1954,

の第3章第3節，定理2に対する，35頁における脚中内において，言及されていることを注意する。

2．補元的列

$f\in Seq^{\mathrm{I}}$ をみたす任意の写像 f を固定する。

$S(1)=\boldsymbol{N}\setminus f[\mathrm{dom}(f)]$,
$S(1)=\emptyset\Rightarrow g(1)=0$,
$S(1)\neq\emptyset\Rightarrow g(1)=\min S(1)$，かつ任意の自然数 k に対して，
$S(k+1)=S(k)\setminus\{g(k)\}$,
$S(k+1)=\emptyset\Rightarrow g(k+1)=0$,
$S(k+1)\neq\emptyset\Rightarrow g(k+1)=\min S(k+1)$

と定義する。

$\forall k \in \boldsymbol{N}[S(k+1) \neq \emptyset \Rightarrow g(k) < g(k+1)]$

が従う。

$\exists n \in \boldsymbol{N}[S(n) = \emptyset]$ならば，$n_* = \min\{n \in \boldsymbol{N} | S(n) = \emptyset\}$とおき，かつ

$f^c = g | \boldsymbol{N}[n_* - 1]$

と定義する。また$\forall n \in \boldsymbol{N}[S(n) \neq \emptyset]$ならば，

$f^c = g$

と定義する。

$f^c \in Seg^{\mathrm{I}}$

が従う。このf^cをfの補元的列と呼ぶ。

$\boldsymbol{N} = f[\mathrm{dom}(f)] \cup f^c[\mathrm{dom}(f^c)]$，かつ
$\emptyset = f[\mathrm{dom}(f)] \cap f^c[\mathrm{dom}(f^c)]$

が従う。

$f \in Seq^{\mathrm{I}}$をみたす任意のfと任意の自然数nとに対して，$f(m) \in \boldsymbol{N}[n]$をみたす自然数$m$が存在するのならば，この$m$の最大数を$m(f, n)$と表記し，かつこの$m$が存在しないのならば$m(f, n) = 0$と定義する。即ち，

$m(f, n) = \max\{m \in \boldsymbol{N} | f(m) \in \boldsymbol{N}[n]\}$，但しここで$\max \emptyset = 0$とする，

により写像$m(\cdot, \cdot)$を定義する。$h = f^c$とおく。数学的帰納法により，任意の自然数nに対して

$\Sigma_{k=1}^{n} p(k) = \Sigma_{k=1}^{m(f,n)} p(f(k)) + \Sigma_{k=1}^{m(h,n)} p(h(k))$,

が従う。この式により，

$1 = P(f) + P(h)$

が従う。即ち，

$\forall f \in Seq^{\mathrm{I}}[1 = P(f) + P(f^c)]$

が従う。この結論から，

$\forall v \in \boldsymbol{R}[v \in M \Leftrightarrow 1 - v \in M]$

が従う。

3．写像 B

$\forall f \in Seq^{\mathrm{N}}[B(f) = \Sigma_{j=1}^{\infty} \beta(f(j))]$

によりSeq^{N}を定義域とする写像Bを定義する。

$\forall f, g \in Seq^{\mathrm{N}}[f = g \Leftrightarrow B(f) = B(g)]$

を示す。$\exists j \in \boldsymbol{N}[f(j) \neq g(j)]$とする。

$j_* = \min\{j \in \boldsymbol{N} | f(j) \neq g(j)\}$

とおく。$f(j_*) < g(j_*)$とする。

$0 \leqq \beta(f(j_*)) - \beta(g(j_*) - 1) < B(f) - B(g)$

より$B(g) < B(f)$が従う。$g(j_*) < f(j_*)$の場合も同様であり，$B(f) < B(g)$が従う。

さらに次の命題が従う。

[命題]$\langle f(k, \cdot); k \in \boldsymbol{N} \rangle$を各項が$Seq^{\mathrm{N}}$の元である任意の写像列とし，かつ$f$を$Seq^{\mathrm{N}}$の任意の元とする。

$\forall k \in \boldsymbol{N}[B(f(k, \cdot)) < B(f(k+1, \cdot))]$

と

$B(f)=\lim\langle B(f(k,\cdot));k\in \boldsymbol{N}\rangle$

とを仮定する。

$P(f)=\lim\langle P(f(k,\cdot));k\in \boldsymbol{N}\rangle$

が従う。

[証明] $\forall k\in \boldsymbol{N}[f(\cdot)\neq f(k,\cdot)]$にもとづき，任意の自然数 k に対して，

$j(k)=\min\{j\in \boldsymbol{N}|f(j)\neq f(k,j)\}$

とおく。

$$0<B(f)-B(f(k,\cdot))$$
$$<\beta(f(j(k))-1)-\beta(f(k,j(k)))。$$

故に，$f(j(k))\neq f(k,j(k))$ より，

$f(j(k))<f(k,j(k))$

が従う。故に，

$$\beta(f(j(k)+1))\leqq(\beta(f(j(k)))+\beta(f(j(k)+1)))$$
$$-\beta(f(k,j(k))-1)$$
$$<B(f)-B(f(k,\cdot))。$$

ところが，N を任意の自然数とすると，

$\exists K\in \boldsymbol{N}\forall k\in \boldsymbol{N}[K\leqq k\Rightarrow$
$B(f)-B(f(k,\cdot))<\beta(f(N))]$。

この K を固定する。

$\forall k\in \boldsymbol{N}[K\leqq k\Rightarrow\beta(f(j(k)+1))$
$<\beta(f(N))]$

が従う。故に，

$\forall k\in \boldsymbol{N}[K\leqq k\Rightarrow N\leqq j(k)]$

が従う。ところが，任意の自然数 k に対して，

$$|P(f)-P(f(k,\cdot))|<\Sigma_{j=f(j(k))}^{\infty}p(j)$$
$$\leqq\Sigma_{j=j(k)}^{\infty}p(j)。$$

故に，

$\forall k\in \boldsymbol{N}[K\leqq k\Rightarrow|P(f)-P(f(k,\cdot))|<\Sigma_{j=N}^{\infty}p(j)]$

が従う。故に，

$\forall N\in \boldsymbol{N}\exists K\in \boldsymbol{N}\forall k\in \boldsymbol{N}[K\leqq k\Rightarrow$

$|P(f)-P(f(k,\cdot))|<\Sigma_{j=N}^{\infty}p(j)]$

が従う。ところが，

$0=\lim\langle\Sigma_{j=N}^{\infty}p(j);N\in \boldsymbol{N}\rangle$。

故に，$P(f)=\lim\langle P(f(k,\cdot));k\in \boldsymbol{N}\rangle$

が従う。 [証明終]

4．写像 F

n を任意の自然数とする。

$A(n)=\{f\in Seq^{\mathrm{N}}|1=f(1)\wedge f\in Seq(n)\}$，
かつ
$B(n)=\{f\in Seq^{\mathrm{N}}|1\neq f(1)\wedge f\in Seq(n)\}$

とおく。$Seq(n)$から $A(n+1)$への写像 $G_{\mathrm{A}}^{\langle n\rangle}$を，任意の自然数 k に対して

$k=1$ ならば $G_{\mathrm{A}}^{\langle n\rangle}(f)(k)=1$，かつ $1<k$ ならば $G_{\mathrm{A}}^{\langle n\rangle}(f)(k)=f(k-1)+1$，

により定義する。$Seq(n)$ から $B(n+1)$ への写像 $G_{\mathrm{B}}^{\langle n\rangle}$ を，任意の自然数 k に対して

$G_{\mathrm{B}}^{\langle n\rangle}(f)(k)=f(k)+1,$

により定義する。$A(n+1)$ から $Seq(n)$ への写像 $H_{\mathrm{A}}^{\langle n\rangle}$ を，任意の自然数 k に対して

$H_{\mathrm{A}}^{\langle n\rangle}(f)(k)=f(k+1)-1,$

により定義する。$B(n+1)$ から $Seq(n)$ への写像 $H_{\mathrm{B}}^{\langle n\rangle}$ を，任意の自然数 k に対して

$H_{\mathrm{B}}^{\langle n\rangle}(f)(k)=f(k)-1,$

により定義する。

$H_{\mathrm{A}}^{\langle n\rangle}\circ G_{\mathrm{A}}^{\langle n\rangle}=\mathrm{Id}\langle Seq(n)\rangle\wedge$
$G_{\mathrm{A}}^{\langle n\rangle}\circ H_{\mathrm{A}}^{\langle n\rangle}=\mathrm{Id}\langle A(n+1)\rangle$

が従う。故に $G_{\mathrm{A}}^{\langle n\rangle}$ は $Seq(n)$ から $A(n+1)$ への全単射である。

$H_{\mathrm{B}}^{\langle n\rangle}\circ G_{\mathrm{B}}^{\langle n\rangle}=\mathrm{Id}\langle Seq(n)\rangle\wedge$
$G_{\mathrm{B}}^{\langle n\rangle}\circ H_{\mathrm{B}}^{\langle n\rangle}=\mathrm{Id}\langle B(n+1)\rangle$

が従う。故に $G_{\mathrm{B}}^{\langle n\rangle}$ は $Seq(n)$ から $B(n+1)$ への全単射である。また

$\forall n\in\boldsymbol{N}[Seq(n)=A(n)\cup B(n)\wedge\emptyset=A(n)\cap B(n)]$。

以上にもとづき，写像の列 $\langle F(n,\cdot);n\in\boldsymbol{N}\rangle$ を帰納的に定義する。即ち，

$F(1,1)=\langle 1+2\cdot(k-1);k\in\boldsymbol{N}\rangle\wedge$
$\forall n\in\boldsymbol{N}\ \forall j\in\boldsymbol{N}[[j\in\boldsymbol{N}[\beta(n-1)]\Rightarrow F(n+1,j)=G_{\mathrm{A}}^{\langle n\rangle}(F(n,j))]\wedge$
$[j\in\boldsymbol{N}[\beta(n)]\setminus\boldsymbol{N}[\beta(n-1)]\Rightarrow$
$F(n+1,j)=G_{\mathrm{B}}^{\langle n\rangle}(F(n,j-\beta(n-1)))]]$。

各自然数 n に対して，写像 $F(n,\cdot)$ は $\boldsymbol{N}[\beta(n-1)]$ から $Seq(n)$ への全単射である。

5．Dedekind 切断に関する注意

次の命題を Dedekind 切断の原理にもとづいて証明する。

［命題］$\langle b(n);n\in\boldsymbol{N}\rangle$ を各項が $\boldsymbol{I}$ の元である任意の数列とする。

$\forall m,\ n\in\boldsymbol{N}\ [m=n\Leftrightarrow b(m)=b(n)]$

と仮定する。

$\exists x\in\boldsymbol{I}\,\exists n(\cdot)\in Seq^{\mathrm{N}}\ [x=\lim\langle b(n(k));k\in\boldsymbol{N}\rangle\wedge[\forall k\in\boldsymbol{N}\ [b(n(k))<b(n(k+1))]\vee\forall k\in\boldsymbol{N}\ [b(n(k+1))<b(n(k))]]]$

が従う。

［証明］
$\boldsymbol{L}=\{x\in\boldsymbol{R}\mid\exists n\in\boldsymbol{N}\,\forall m\in\boldsymbol{N}\ [n\leqq m\Rightarrow x\leqq b(m)]\}$

かつ

$\boldsymbol{U}=\{x\in\boldsymbol{R}\mid\forall n\in\boldsymbol{N}\,\exists m\in\boldsymbol{N}\ [n\leqq m\wedge b(m)<x]\}$

とおく。仮定より，

$0\in\boldsymbol{L}$

かつ

$1\in\boldsymbol{U}$

が従う。また

$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{L}\cup\boldsymbol{U}$。

次に

$\forall x\in\boldsymbol{L}\,\forall y\in\boldsymbol{U}\ [x<y]$

を示す。x 及び y を，各各，$\boldsymbol{L}$ 及び $\boldsymbol{U}$ の任意の元とする。

$\exists n\in\boldsymbol{N}\,\forall m\in\boldsymbol{N}\ [n\leqq m\Rightarrow x\leqq b(m)]$

が従う。この m を固定する。

$\exists m\in\boldsymbol{N}\ [n\leqq m\wedge b(m)<y]$

が従う。この m を固定する。

$x\leqq b(m)\wedge b(m)<y$

が従う。故に，

$x<y$

が従う。

Dedekind 切断の原理により，「或実数が存在して，その実数は $\boldsymbol{U}$ における最小数であるか，あるいは $\boldsymbol{L}$ における最大数であるかの，いずれか一方，しかも一方のみである」が従う。

$\boldsymbol{U}$ に最小数が存在する場合を考える。

$w=\min\boldsymbol{U}$

とおく。任意の自然数 n に対して，

$w(n)=w\cdot\Sigma_{j=1}^{n}\beta(j)$

とおく。また，$x<w$ をみたす任意の実数 x と任意の自然数 m とに対して，

$\exists l\in\boldsymbol{N}\ [x<b(l)<w\wedge m<l]$

が従う。この l の最小数を $l(x, m)$ と表記する。即ち，

$l(x, m)=\min\{l\in\boldsymbol{N}\mid x<b(l)<w\wedge m<l\}$

とおく。

$n(1)=l(w(1),1)\wedge\forall k\in\boldsymbol{N}\ [n(k+1)$
$=l(\max\{w(k+1),b(n(k))\},n(k))]$

により写像 $n(\cdot)$ を定義する。任意の自然数 k に対して，

$n(k)<n(k+1)$,
$b(n(k))<b(n(k+1))$，かつ
$w(k)<b(n(k))<w$

が従う。

次に $\boldsymbol{L}$ に最大数が存在する場合を考える。

$v=\max\boldsymbol{L}$

とおく。任意の自然数 n に対して，

$v(n)=v+(1-v)\cdot\beta(n)$

とおく。また，$v<x$ をみたす任意の実数 x と任意の自然数 m とに対して，

$\exists l\in\boldsymbol{N}\ [v<b(l)<x\wedge m<l]$

が従う。この l の最小数を $l(x, m)$ と表記する。即ち，

$$l(x,\ m)=\min\{l\in \boldsymbol{N}\mid v<b(l)<x\wedge m<l\}$$

とおく。

$$n(1)=l(v(1),1)\wedge \forall k\in \boldsymbol{N}\,[n(k+1)=l(\min\{v(k+1),b(n(k))\},n(k))]$$

により写像 $n(\cdot)$ を定義する。任意の自然数 k に対して,

$n(k)<n(k+1)$,
$b(n(k+1))<b(n(k))$, かつ
$v<b(n(k))<v(k)$

が従う。

以上により結論が従う。 [証明終]

6．選択公理を利用せずに $M=M^d$ を示すこと

[命題] p を $\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{R}$ への任意の写像とする。

$$\forall j\in \boldsymbol{N}\,[0<p(j)]\wedge 1=\lim\langle \Sigma_{j=1}^{n}p(j);n\in \boldsymbol{N}\rangle$$

と仮定する。

$$M=\{x\in \boldsymbol{R}\mid \exists f\in Seq^{\mathrm{B}}\ [x=\Sigma_{j=1}^{\delta(f)}p(f(j))]\vee \exists f\in Seq^{\mathrm{N}}\ [x=\lim\langle\Sigma_{j=1}^{n}p(f(j));n\in \boldsymbol{N}\rangle]\},$$

かつ

$$M^d=\{x\in \boldsymbol{R}\mid \forall y\in \boldsymbol{R}\,\forall z\in \boldsymbol{R}\,[y<x<z\Rightarrow \exists v\in M[v\neq x\wedge y<v<z]]\}$$

とおく。選択公理を利用することなしに

$$M=M^d$$

が従う。

[証明] [第1段] $M\subseteqq M^d$ を示す。x を $x\in M$ をみたす任意の実数とする。

$$\exists f\in Seq^{\mathrm{B}}\ [x=P(f)]$$

とする。この f を固定する。

$$\forall n\in \boldsymbol{N}\,\forall j\in \boldsymbol{N}[[j\in \boldsymbol{N}[\delta(f)]\ \Rightarrow f_n(j)=f(j)]\ \wedge[j\in \boldsymbol{N}\setminus \boldsymbol{N}[\delta(f)]\ \Rightarrow f_n(j)=f(\delta(f))+n+(j-\delta(f)-1)]]$$

により写像の列 $\langle f_n;n\in \boldsymbol{N}\rangle$ を定義する。
$n\in \boldsymbol{N}$ をみたす任意の n に対して,

$$P(f_n)=P(f)+\Sigma_{k=n}^{\infty}p(f(\delta(f))+k)$$

が従う。故に,

$$\forall n\in \boldsymbol{N}\ [x<P(f_n)]$$

かつ

$$x=\lim\langle P(f_n);n\in \boldsymbol{N}\rangle$$

が従う。故に

$$\forall y\in \boldsymbol{R}\ [x<y\Rightarrow \exists n\in \boldsymbol{N}\ [x<P(f_n)<y]]。$$

故に

$$\forall y\in \boldsymbol{R}\ [x<y\Rightarrow \exists v\in M\ [x<v<y]]。$$

次に

$$\exists f\in Seq^{\mathrm{N}}[x=P(f)]$$

とする。この f を固定する。

$$\forall n\in \boldsymbol{N}\ [g_n=f\mid \boldsymbol{N}[n]]$$

により写像の列 $\langle g_n; n\in \boldsymbol{N}\rangle$ を定義する。

$n\in \boldsymbol{N}$ をみたす任意の n に対して,

$P(g_n)=\Sigma_{j=1}^{n} p(f(j))$

が従う。故に,

$\forall n\in \boldsymbol{N}\ [P(g_n)<x]$

かつ

$x=\lim\langle P(g_n); n\in \boldsymbol{N}\rangle$

が従う。故に

$\forall y\in \boldsymbol{R}\ [y<x \Rightarrow \exists n\in \boldsymbol{N}\ [y<P(g_n)<x]]$。

故に

$\forall y\in \boldsymbol{R}\ [y<x \Rightarrow \exists v\in M\ [y<v<x]]$。

以上により

$\forall y, z\in \boldsymbol{R}\ [y<x<z \Rightarrow$
$\exists v\in M\ [y<v<x \vee x<v<z]]$

が従う。故に

$x\in M^d$。

故に $M\subseteqq M^d$ が従う。　　　　　　　　[第1段終]

[第2段] $M^d\subseteqq M$ を示す。x を $x\in M^d$ をみたす任意の実数とする。

$\forall y\in \boldsymbol{R}\ [y<x \Rightarrow \exists v\in M\ [y<v<x]]$

とする。

式1。 $\forall y\in \boldsymbol{R}[y<x \Rightarrow \exists n\in \boldsymbol{N}\exists g\in Seq^{\mathrm{N}}[g\in Seq(n)\wedge y<P(g)<x]]$

を示す。y を $y<x$ をみたす任意の実数とする。

$\exists v\in M\ [y<v<x]$。

この v を固定する。

$\exists f\in Seq^{\mathrm{B}}\ [v=P(f)]$

とする。この f を固定する。

$\forall n\in \boldsymbol{N}\forall j\in \boldsymbol{N}[[j\in \boldsymbol{N}[\delta(f)]\Rightarrow f_n(j)=f(j)]\wedge[j\in \boldsymbol{N}\setminus \boldsymbol{N}[\delta(f)] \Rightarrow f_n(j)=f(\delta(f))+n+2\cdot(j-\delta(f)-1)]]$

と定義する。
$n\in \boldsymbol{N}$ をみたす任意の n に対して,

$P(f_n)=P(f)+\Sigma_{j=0}^{\infty} p(f(\delta(f))+n+2\cdot j)$

が従う。故に,

$\forall n\in \boldsymbol{N}\ [v<P(f_n)]$

かつ

$v=\lim\langle P(f_n); n\in \boldsymbol{N}\rangle$

が従う。故に

$\exists n\in \boldsymbol{N}\ [v<P(f_n)<x]$。

この n を固定する。

$f_n\in Seq(f(\delta(f))+n)\wedge v<P(f_n)<x$

が従う。故に,

$\exists n \in \boldsymbol{N} \exists g \in Seq^{N}\ [g \in Seq(n) \wedge y < P(g) < x]$

が従う。

次に

$\exists f \in Seq^{N}\ [v = P(f)]$

とする。

$\forall n \in \boldsymbol{N}\ [g_n = f \mid \boldsymbol{N}[n]]$

により写像の列 $\langle g_n ; n \in \boldsymbol{N} \rangle$ を定義する。

$n \in \boldsymbol{N}$ をみたす任意の n に対して，

$P(g_n) = \Sigma_{j=1}^{n} p(f(j))$

が従う。故に，

$\forall n \in \boldsymbol{N}\ [P(g_n) < v]$

かつ

$v = \lim \langle P(g_n) ; n \in \boldsymbol{N} \rangle$

が従う。故に

$\exists n \in \boldsymbol{N}\ [y < P(g_n) < v]$。

この n を固定する。

$g_n \in Seq^{B} \wedge y < P(g_n) < v$

が従う。故に，

$\exists f \in Seq^{B}\ [y < P(f) < x]$

が従う。前述の場合に帰着する。故に，いずれの場合においても，式1が従う。

$\forall y \in \boldsymbol{R} [y < x \Rightarrow N(y) = \min\{n \in \boldsymbol{N} \mid \exists g \in Seq^{N}[g \in Seq(n) \wedge y < P(g) < x]\}]$

により，x より小である実数の全体を定義域とする，写像 N を定義する。式1によりこの写像の定義が成立する。また第4節における写像の列 $\langle F(n,\cdot) ; n \in \boldsymbol{N} \rangle$ を利用する。

$\forall y \in \boldsymbol{R} [y < x \Rightarrow J(y) = \min\{j \in \boldsymbol{N} \mid j \in \boldsymbol{N}[\beta(N(y)-1)] \wedge y < P(F(N(y), j)) < x\}]$

により写像 J を定義する。J の定義域は N の定義域と同じ集合である。

$\forall y \in \boldsymbol{R}\ [y < x \Rightarrow G(y) = F(N(y), J(y))]$

とおく。また任意の自然数 k に対して，

$x(k) = x \cdot \Sigma_{j=1}^{k} \beta(j)$

とおく。

$f(1,\cdot) = G(0)(\cdot) \wedge \forall k \in \boldsymbol{N}\ [f(k+1,\cdot) = G(\max\{x(k), P(f(k,\cdot))\})(\cdot)]$

により写像の列 $\langle f(k,\cdot) ; k \in \boldsymbol{N} \rangle$ を定義する。故に，

$\forall k \in \boldsymbol{N}\ [P(f(k,\cdot)) < P(f(k+1,\cdot))]$

かつ

式2。$x = \lim \langle P(f(k,\cdot)) ; k \in \boldsymbol{N} \rangle$

が従う。第3節における写像 B を利用する。任意の自然数 k に対して，

$b(k) = B(f(k,\cdot))$

とおく。

$$\forall k', k'' \in \boldsymbol{N}\ [k'=k'' \Leftrightarrow b(k')=b(k'')]$$

が従う。第5節における命題の，証明により，

$$\exists w \in \boldsymbol{I} \exists n(\cdot) \in Seq^{\mathrm{N}}\ [w=\lim\langle b(n(k));k \in \boldsymbol{N}\rangle \wedge [\forall k \in \boldsymbol{N}\ [b(n(k))<b(n(k+1))] \vee \forall k \in \boldsymbol{N}\ [b(n(k+1))<b(n(k))]]]$$

が従う。この w と $n(\cdot)$ とを固定する。

$$\forall k \in \boldsymbol{N}\ [b(n(k))<b(n(k+1))]$$

とする。

$$g(1)=\min\{n \in \boldsymbol{N} \mid \beta(n)<w\} \wedge \forall j \in \boldsymbol{N}\ [g(j+1)=\min\{n \in \boldsymbol{N} \mid (\Sigma_{k=1}^{j} \beta(k))+\beta(n)<w\}]$$

により写像 g を定義する。

$$g \in Seq^{\mathrm{N}}$$

が従う。また

$w=B(g)$。

故に，

$$B(g)=\lim\langle B(f(n(k),\cdot));k \in \boldsymbol{N}\rangle$$

が従う。第3節における命題により，

$$P(g)=\lim\langle P(f(n(k),\cdot));k \in \boldsymbol{N}\rangle$$

が従う。故に，式2より，

$$x=P(g)$$

が従う。故に，

$$x \in M$$

が従う。

$$\forall k \in \boldsymbol{N}\ [b(n(k+1))<b(n(k))]$$

とする。第2節における補元的列を利用する。

$$\forall k \in \boldsymbol{N}\ [g(k,\cdot)=f^{c}(n(k),\cdot)]$$

により写像の列 $\langle g(k,\cdot);k \in \boldsymbol{N}\rangle$ を定義する。

$$\forall k \in \boldsymbol{N}\ [g(k,\cdot) \in Seq^{\mathrm{N}}]$$

が従う。また

$1-w=\lim\langle B(g(k,\cdot));k \in \boldsymbol{N}\rangle \wedge \forall k \in \boldsymbol{N}\ [B(g(k,\cdot))<B(g(k+1,\cdot))]$。

この場合

$\exists g \in Seq^{\mathrm{N}}\ [1-w=B(g)]$。

この g を固定する。

$B(g)=\lim\langle B(g(k,\cdot));k \in \boldsymbol{N}\rangle$。

故に

$P(g)=\lim\langle P(g(k,\cdot));k \in \boldsymbol{N}\rangle$。

ところが

$\forall k \in \boldsymbol{N}\ [P(g(k,\cdot))=1-P(f(n(k),\cdot))]$。

故に

$1-P(g)=\lim\langle P(f(n(k),\cdot));k\in \boldsymbol{N}\rangle$。

故に，$h=g^c$ とおくと，

$P(h)=\lim\langle P(f(n(k),\cdot));k\in \boldsymbol{N}\rangle$

が従う。故に，式 2 より，

$x=P(h)$

が従う。

故に，

$x\in M$

が従う。

次に

$\neg\forall y\in \boldsymbol{R}\ [y<x\Rightarrow \exists v\in M\ [y<v<x]]$

とする。$x\in M^d$より，

$\forall z\in \boldsymbol{R}[x<z\Rightarrow \exists v\in M[x<v<z]]$

が従う。y を $y<1-x$ をみたす任意の実数とする。

$x<1-y$。

故に

$\exists v\in M\ [x<v<1-y]$。

この v を固定する。

$y<1-v<1-x$。

ところが，第 2 節の末尾の式より，

$1-v\in M$

が従う。故に

$\forall y\in \boldsymbol{R}\ [y<1-x\Rightarrow \exists v\in M\ [y<v<1-x]]$。

故に，上述の議論により，

$1-x\in M$

が従う。故に，

$x\in M$

が従う。

故に，

$M^d\subseteq M$

が従う。　［第 2 段終］

以上により

$M=M^d$

が従う。　［証明終］

7．補遺

A を $\boldsymbol{R}$ の任意の部分集合とし，かつ x を $\boldsymbol{R}$ の任意の元とする。x は次の式(*)をみたす場合，かつその場合に限って，A の集積点である。

(*) $\forall y\in \boldsymbol{R}\,\forall z\in \boldsymbol{R}\,[y<x<z\Rightarrow \exists v\in A\,[v\neq x\wedge y<v<z]]$。

これが，$\boldsymbol{R}$ における点集合を論じる際の，今日における，「集積点，accumulation point，の定

義」であり，この定義の重点は，点列を表現する記号列も，無限集合を表現する記号列も，式(＊)において存在していないという，その地点に存在しているのである。周知のように，選択公理の特別的な場合である従属選択の原理を利用することにより，式(＊)が次の式(＊＊)と同値であることが，容易に従う。

(＊＊) $\exists f \in \mathrm{Map}(\boldsymbol{N}, A)\,\forall y \in \boldsymbol{R}\,\forall z \in \boldsymbol{R}\ [y < x < z \Rightarrow \exists n \in \boldsymbol{N}\,\forall m \in \boldsymbol{N}\ [n \leqq m \Rightarrow f(m) \neq x \wedge y < f(m) < z]]$。

しかしながら，この一見すると自明であるはずの，式(＊)と式(＊＊)との同値性を，安易には借用できないという状況において，集合 M と集合 M の集積点の全体 M^a，即ち M の導集合とが，集合として一致すること，即ち空でない M は $\boldsymbol{R}$ における空でない完全集合であることを，極端に初等的な諸原理のみにもとづいて，敢て証明することを，筆者は，実行したのである。

(1990年，2月27日，火，於北大教養部，了)