経済学研究 *40-3*
北海道大学 1990. 12

サヴェジ書第二版の80頁における脚註に現われる，有界効用について

園　信太郎

1．目的

$\mathbb{N}$ を自然数系列とする。但し，$\neg 0 \in \mathbb{N}$。

$n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ をみたす任意の n に対して，$\mathbb{N}[n] = \{j \in \mathbb{N} | j \leqq n\}$ と置く。特に，$\mathbb{N}[0] = \emptyset$。

集合 A から集合 B への写像の全体を $\mathrm{Map}(A, B)$ と表記する。

J を $\mathbb{N}$ の任意の部分集合とする。J を定義域とする写像 f を，J を添数集合とする列と呼び，$\langle f(j); j \in J \rangle$ と表記する場合もある。

各項が実数系 $\mathbb{R}$ の元である列 $\langle a(n); n \in \mathbb{N} \rangle$ の極限が，$\mathbb{R}$ において存在するのならば，これを $\lim \langle a(n); n \in \mathbb{N} \rangle$ と表記する。

サヴェジ書第二版とは，

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics, Second Revised Edition,* Dover, New York, 1972, 但し，第一版は，1954年に Wiley より出ている，

の事である。この論述では，この書物の，第5章第5節を除く，第5章までの，サヴェジ氏（Savage, Leonard Jimmie,1917年11月20日から1971年11月1日まで）による議論を既知とする。但し，次の第2節において，その議論の一角に対する略式の要約を，便宜の為に，提示する事にする。

第5章第4節 The extension of utility to more general acts の80頁における脚註とは次である。

+Peter Fishburn (1970, pp. 194, 206-207) and I have since discovered to my surprise that these postulates imply bounded utility, which puts the next several paragraphs in a new light.

ここで冒頭の上つき＋は，第二版において追加した脚註である事を示す，サヴェジ氏自身が導入した記号である。

彼が要請した公準 P1から公準 P7までの七個の公準が，bounded utility，即ち，有界効用を含意する事を，第一版執筆時においては，彼は，気づいていなかった事が知れるのである。ところが，同書第5節第4節，79頁，補題3の証明中の，第2番目の文，

Then it may be assumed, modifying **f** if need be by means of P6 and Lemma 1, that there exists for each i an f_i such that $\mathbf{f} \leq f_i$ given B_i.

に着眼し，この文の主張を，この論述の第3節

で行なう様に，愚直に正当化する事をまず実行するのならば，同書第5章第6節 Historical and critical comments on utility,93頁，第2番目の段落において，サヴェジ氏自身が説明している，St. Petersburg paradox における act を，利用する事により，きわめて当然の事として，この有界性が従うのであり，この事は，少なくとも筆者にとっては，意外な事なのである。

結局筆者は，上掲の主張を，サヴェジ氏は，ほとんど明白であるとして，本来の証明を行なわずに，先へと議論を進めたのであると，判断せざるを得ないのであり，かつ，この判断の根拠を提示する事が，この論述の目的なのである。

以下表記法上の注意を行なう。

上掲サヴェジ書における選好を，ここでは $\leqslant\!\cdot$ によって表記する。また事象 B による条件つき選好を，ここでは $\leqslant\!\cdot[B]$ と表記する。また，状態の全体としての全事象 S から，結果の全体 Cseq への写像で，結果 c のみを値としてとるものを，$\langle c\rangle$ と表記する。即ち，

$$\forall s\in S\ \forall c\in \mathrm{Cseq}[\langle c\rangle(s)=c]$$

により，任意の結果 c に対して，写像 $\langle c\rangle$ を定義する。以上の表記法を利用すると，上の引用文中の

$\mathbf{f}\leq f_i$ given B_i

は，ここでは，

$\mathbf{f}\ \leqslant\!\cdot\langle f_i\rangle[B_i]$

と表記される。

事象の全体は $\mathbb{A}$ と表記され，これは S 上の完全加法族である。即ち，$\langle S, \mathbb{A}\rangle$ は可測空間である。

$\mathbf{f}<\!\cdot\,\mathbf{g}$ を $\neg\,\mathbf{g}\leqslant\!\cdot\,\mathbf{f}$ により定義する。また，$\mathbf{f}=\!\cdot\,\mathbf{g}$ を $\mathbf{f}\leqslant\!\cdot\,\mathbf{g}\wedge\mathbf{g}\leqslant\!\cdot\,\mathbf{f}$ により定義する。但し，ここに $\mathbf{f}$ 及び $\mathbf{g}$ は任意の行為である。なお，$\mathbf{f}$ が行為であるとは，

$$\forall c\in\mathrm{Cseq}[\{s\in S|\langle\mathbf{f}(s)\rangle\leqslant\!\cdot\langle c\rangle\}\in\mathbb{A}]$$

をみたす事を言う。行為の全体を Act と表記する。

$\mathbf{f}<\!\cdot\,\mathbf{g}[B]$ を $\neg(\mathbf{g}\leqslant\!\cdot\,\mathbf{f}[B])$ により定義する。$\mathbf{f}=\!\cdot\,\mathbf{g}[B]$ を $\mathbf{f}\leqslant\!\cdot\,\mathbf{g}[B]\wedge\mathbf{g}\leqslant\!\cdot\,\mathbf{f}[B]$ により定義する。ここに，$\mathbf{f}$ 及び $\mathbf{g}$ は任意の行為であり，かつ B は任意の事象である。

行為 $\mathbf{f}$ の像 $\{c\in\mathrm{Cseq}|\exists s\in S[\mathbf{f}(s)=c]\}$ が Cseq における有限集合である場合においては，この $\mathbf{f}$ を有限個の結果によって定まる行為と呼ぶ事にする。

$\mathbf{f}$ を任意の行為とし，c を任意の結果とし，かつ D を任意の事象とする。この場合，

$$\forall s\in S[[s\in D\Rightarrow\langle c,\ \mathbf{f};D\rangle(s)=c]\wedge[s\in S\cap\sim D\Rightarrow\langle c,\ \mathbf{f};D\rangle(s)=\mathbf{f}(s)]]$$

により写像 $\langle c,\ \mathbf{f};D\rangle$ を定義する。この写像は行為である。

$B(\cdot)$ が事象 A に対する分割であるとは，

$$\exists n\in\mathbb{N}[B(\cdot)\in\mathrm{Map}(\mathbb{N}[n],\mathbb{A})\wedge A=\cup\{B(j)\,|\,j\in\mathbb{N}[n]\}\wedge\forall i,j\in\mathbb{N}[n][i\neq j\Rightarrow B(i)\cap B(j)=\emptyset]]$$

をみたす事を言う。この n は一意的に定まるが，これを分割 $B(\cdot)$ の長さと呼ぶ事にする。

［注意］この論述においては，特にことわる場

合を除いては，選好 $\leqslant\!\cdot$ は上掲サヴェジ書の公準P1から公準P7までの七個の公準の統制下にあるものとして，議論を進める事とする。なお，同書第一版においても，また第二版においても，前の見返し及び後の見返しに，各各，同一であるが，この七個の公準と，これらの公準に関するD1からD5までの，五個の定義とから成る表が，掲示されているが，第二版第2章第7節The sure-thing principle の22頁の脚註でサヴェジ氏自身が述べている様に，第一版の表の定義D1は，Peter Fishburn 氏による指摘を受けて，第二版の表の定義D1へと，修正されているのである。だが，さらに，第二版の表の公準P1の上にある，二個の頁指定，一方は，

(page 289)

であり，他方は，

(page 283)

であるが，これらは第一版のままなのだが，本来は，各各，

(page 305)

及び

(page 299)

へと，修正されるべきであったのである。これは，第二版においては，APPENDIX 4として，統計学の基礎に関する多くの文献が追加された為に，頁のずれが生じた事による修正なのである。

以下の議論では，公準P6及び公準P7の利用を，特に強調するが，この公準の表によれば，各各，次の様になる。

P6「**f** 及び **g** を任意の行為とする。また，c を任意の結果とする。この場合において，$\mathbf{f}\lessdot\mathbf{g}$ ならば，S に対する或分割 $B(\cdot)$ が存在して，分割 $B(\cdot)$ の任意の項 C に対して，$\langle c,\mathbf{f};C\rangle\lessdot\mathbf{g}$ かつ $\mathbf{f}\lessdot\langle c,\mathbf{g};C\rangle$」

P7「**f** 及び **g** を任意の行為とし，かつ B を任意の事象とする。この場合において，

$$[\forall s\in B[\mathbf{f}\leqslant\!\cdot\langle\mathbf{g}(s)\rangle[B]]\Rightarrow\mathbf{f}\leqslant\!\cdot\mathbf{g}[B]]\wedge[\forall s\in B[\langle\mathbf{f}(s)\rangle\leqslant\!\cdot\mathbf{g}[B]]\Rightarrow\mathbf{f}\leqslant\!\cdot\mathbf{g}[B]]$$
」

公準P6は，他の六個の公準を仮定すれば，次のP6* と同値となる。

P6*「**f** 及び **g** を任意の行為とし，かつ c を任意の結果とする。さらに，$\mathbf{f}\lessdot\mathbf{g}$，と仮定する。この場合において，「$S$ に対する或分割 $B(\cdot)$ が存在して，$B(\cdot)$ の任意の項 C に対して，$\langle c,\mathbf{f};C\rangle\lessdot\mathbf{g}$」かつ「$S$ に対する或分割 $B(\cdot)$ が存在して，$B(\cdot)$ の任意の項 C に対して，$\mathbf{f}\lessdot\langle c,\mathbf{g};C\rangle$」」

P6から P6* が従う事は明白である。以下で実際に利用するのは，この P6* である。[注意終]

2．P, U,及び Big

[命題A]，[命願B]，[定義C]，及び[命題D]を導入する。各各，上掲サヴェジ書の，第3章第3節，第2章第7節の24頁の，上から第3番目の段落，第5章第4節の80頁の，上から第3番目の段落，及び第5章第4節の79頁の，補題1，に基づく。また，[命題A]の後の[注意]において導入する **U** は，第5章第2節から第5章第3節までの議論により，その存在が基礎づけられている写像である。

[命題A]公準P1から公準P5までと，公準P6′とを仮定する。次のQ1からQ6までをみたす **P** が一意的に存在する。

Q1. $\mathbf{P} \in \mathrm{Map}(\mathbb{A}, \mathbb{R})$。

Q2. $\forall A \in \mathbb{A}[0 \leqq \mathbf{P}(A)]$。

Q3. $\forall A, B \in \mathbb{A}[A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)]$。

Q4. $\mathbf{P}(S) = 1$。

Q5. $\forall A \in \mathbb{A}\ \forall a \in \mathbb{R}[0 \leqq a \leqq 1 \Rightarrow \exists B \in \mathbb{A}[B \subseteqq A \wedge \mathbf{P}(B) = a \cdot \mathbf{P}(A)]]$。

Q6. c 及び d を任意の結果とし，かつ A 及び B を任意の事象とする。$\mathbf{f}$ 及び $\mathbf{g}$ を，各各，A 上で c に，また B 上で d に一致する行為，及び B 上で c に，また A 上で d に一致する行為，とする。この場合，

$$\langle d \rangle \lessdot \langle c \rangle \Rightarrow [\mathbf{g} \lessdot\!\!\!\cdot\, \mathbf{f} \Leftrightarrow \mathbf{P}(B) \leqq \mathbf{P}(A)]。$$

［注意］以下でこの［命題 A］に言及する場合には，定量的確率の性質により，として言及する事にする。また，公準 P1から公準 P5までと，公準 P6′ の一般化である公準 P6とを仮定すると，この定量的確率 $\mathbf{P}$ を利用する事により，次の U1, U2, 及び U3をみたす $\mathbf{U}$ の存在が従う。

U1. $\mathbf{U} \in \mathrm{Map}(\mathrm{Cseq}, \mathbb{R})$。

U2. $\mathbf{f}$ 及び $\mathbf{g}$ を有限個の結果で定まる任意の行為とする。この場合，$\mathbf{f} \lessdot\!\!\!\cdot\, \mathbf{g}$ と

$$\int_s \mathbf{P}(ds)(\mathbf{U} \circ \mathbf{f})(s) \leqq \int_s \mathbf{P}(ds)(\mathbf{U} \circ \mathbf{g})(s)$$

とは同値である。

U3. U1 及び U2 における各 $\mathbf{U}$ を，$\mathbf{U}'$ によって置き換える事により得られる，$\mathbf{U}'$に関する性質をみたす，任意の $\mathbf{U}'$ に対して，或正の実数 a と或実数 b とからなる対$\langle a, b \rangle$が一意的に存在して，任意の結果 c に対して，$\mathbf{U}'(c) = a \cdot \mathbf{U}(c) + b$。

以下の議論においては，この一意的に定まる $\mathbf{P}$ と，自明な多様性を無視すれば一意的に定まるこの $\mathbf{U}$ とを，特にことわる事なしに，利用する事とする。　［注意終］

［命題 B］公準 P1から公準 P5までと，公準 P6′ とを，仮定する。B を任意の事象とする。

$$\forall \mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathrm{Act}[\mathbf{f} \lessdot\!\!\!\cdot\, \mathbf{g}[B]] \Leftrightarrow \mathbf{P}(B) = 0$$

が従う。

［注意］以下でこの［命題 B］に言及する場合には，零事象の性質により，として言及する事にする。

［定義 C］公準 P1から公準 P3までを仮定する。

$$\forall \mathbf{f} \in \mathrm{Act}\ \forall B \in \mathbb{A}[\mathrm{Big}(\mathbf{f}, B) \Leftrightarrow \forall c \in \mathrm{Cseq}[\langle c \rangle \lessdot \mathbf{f}[B]]]$$

により，$\mathrm{Act} \times \mathbb{A}$ 上の性質 Big を定義する。

［命題 D］公準 P1から公準 P7までを仮定する。$\mathbf{f}$ 及び $\mathbf{g}$ を任意の行為とし，かつ B を任意の事象とする。

$$\mathrm{Big}(\mathbf{f}, B) \wedge \mathrm{Big}(\mathbf{g}, B) \Rightarrow \mathbf{f} \doteq \mathbf{g}[B]$$

が従う。

［証明］$\mathrm{Big}(\mathbf{f}, B) \wedge \mathrm{Big}(\mathbf{g}, B)$ を仮定する。$\mathrm{Big}(\mathbf{f}, B)$ より，

$$\forall s \in B[\langle \mathbf{g}(s) \rangle \lessdot \mathbf{f}[B]]$$

が従う。故に，公準 P7より，

$\mathbf{g} \lessdot\!\!\cdot\, \mathbf{f}[B]$

が従う。同様にして，

$\mathbf{f} \lessdot\!\!\cdot\, \mathbf{g}[B]$

が従う。故に，

$\mathbf{f} =\!\cdot\, \mathbf{g}[B]$

が従う。　［証明終］

［注意］以下でこの［命題D］に言及する場合には，Big の性質により，として言及する事にする。

3．主張を正当化すること

［命題E］により，この論述の第1節で引用した一個の文による主張を，正当化する。この［命題E］に対する［証明］において現われる議論の様式に注意して，［命題F］を提示する。［命題E］に対する［証明］中の，数学的帰納法の過程を自明なものとして，サヴェジ氏は省略したのであるとするのが，筆者の判断である。また，［命題F］と類似の命題を，サヴェジ氏は，上掲書の80頁の，上から第3番目の段落で，自明なものとして利用している気配がある。

［命題E］$\mathbf{f}$ 及び $\mathbf{g}$ を任意の行為とする。n を任意の自然数とし，かつ $B(\cdot)$ を S に対する長さ n の任意の分割とする。$\langle u(i); i \in \mathbb{N}[n] \rangle$ を任意の実数列とする。次の A1及び A2を仮定する。

A1. $\mathbf{g} <\!\cdot\, \mathbf{f}$。

A2. $\forall i \in \mathbb{N}[n]\, \forall s \in B(i)\, [\mathbf{U}(\mathbf{f}(s)) \leqq u(i)]$。

この場合，或行為 $\mathbf{h}$ が存在して，次の C1，C2，及び C3をみたす。

C1. $\mathbf{g} <\!\cdot\, \mathbf{h}$。

C2. $\forall i \in \mathbb{N}[n]\, \forall s \in B(i)\, [\mathbf{U}(\mathbf{h}(s)) \leqq u(i)]$。

C3. $\forall i \in \mathbb{N}[n]\, \neg \mathrm{Big}(\mathbf{h}, B(i))$。

［証明］$k \in \{0\} \cup \mathbb{N}[n]$ をみたす任意の k 及び $\mathbf{h} \in \mathrm{Act}$ をみたす任意の $\mathbf{h}$ とに対して，

$$Q(k, \mathbf{h}) \Leftrightarrow \mathbf{g} <\!\cdot\, \mathbf{h} \wedge \forall i \in \mathbb{N}[n]\, \forall s \in B(i)\, [\mathbf{U}(\mathbf{h}(s)) \leqq u(i)] \wedge \forall i \in \mathbb{N}[k]\, \neg \mathrm{Big}(\mathbf{h}, B(i)),$$

と置く。

(1)　$\forall k \in \{0\} \cup \mathbb{N}[n]\, \exists \mathbf{h} \in \mathrm{Act}\ Q(k, \mathbf{h})$

を示す。数学的帰納法による。

$k=0$ の場合を示す。A1，A2，及び $\mathbb{N}[0]=\emptyset$ より，

$Q(0, \mathbf{f})$

が従う。故に，

$\exists \mathbf{h} \in \mathrm{Act}\ Q(0, \mathbf{h})$

が従う。

$m \in \{0\} \cup \mathbb{N}[n] \wedge m < n$ をみたす任意の m を固定する。$k=m$ の場合の結論を仮定して，$k=m+1$ の場合の結論を示す。この数学的帰納法の為の仮定により，

$\exists \mathbf{h} \in \mathrm{Act}\ Q(m, \mathbf{h})$

が従う。この $\mathbf{h}$ を固定する。

$\neg \mathrm{Big}(\mathbf{h}, B(m+1))$

が成立するのならば，$Q(m, \mathbf{h})$ より，

$Q(m+1, \mathbf{h})$

が従う。故に，この場合には，

$\exists \mathbf{h} \in \mathrm{Act}\ Q(m+1, \mathbf{h})$

が従う。

$\mathrm{Big}(\mathbf{h}, B(m+1))$

と仮定する。$S \neq \emptyset$ 及び数学的帰納法により，

$\exists i \in \mathbb{N}[n][B(i) \neq \emptyset \wedge \forall j \in \mathbb{N}[n][B(j) \neq \emptyset \Rightarrow u(i) \leqq u(j)]]$

が従う。この i を固定して $i(*)$ と表記する。

$B(i(*)) \neq \emptyset$ より，

$\exists s[s \in B(i(*))]$。

この s を固定して $s(*)$ と表記する。

$c(*) = \mathbf{f}(s(*))$

と置く。

$\mathbf{U}(c(*)) \leqq u(i(*))$

が従う。故に，

(2)　$\forall i \in \mathbb{N}[n][B(i) \neq \emptyset \Rightarrow \mathbf{U}(c(*)) \leqq u(i)]$

が従う。公準 P6より，「S に対する或分割が存在して，この分割の任意の項 D に対して，$\mathbf{g} \lessdot \langle c(*), \mathbf{h}; D\rangle$」が従う。ところが，零事象の性質により，

$0 < \mathbf{P}(B(m+1))$

が従う。故に，

$0 < \mathbf{P}(B(m+1) \cap D) \wedge \mathbf{g} \lessdot \langle c(*), \mathbf{h}; D\rangle$

をみたす事象 D を固定する事ができる。この D に対して，

$\mathbf{h}' = \langle c(*), \mathbf{h}; D\rangle$

と置く。

(3)　$\mathbf{g} \lessdot \mathbf{h}'$

が従う。また，(2) より，

(4)　$\forall i \in \mathbb{N}[n]\ \forall s \in B(i)[\mathbf{U}(\mathbf{h}'(s)) \leqq u(i)]$

が従う。$j \in \mathbb{N}[m+1]$ をみたす任意の j を固定する。

$\mathbf{P}(B(j) \cap D) = 0$ の場合を考える。$j \in \mathbb{N}[m]$ が従う。故に，零事象の性質により，

$\neg \mathrm{Big}(\mathbf{h}', B(j))$

が従う。

$0 < \mathbf{P}(B(j) \cap D)$ の場合を考える。$\mathrm{Big}(\mathbf{h}, B(m+1))$ より，

$\langle c(*)\rangle \lessdot \mathbf{h}[B(m+1)]$

が従う。故に，公準 P7より，

$$\exists s \in B(m+1)[\langle c(*)\rangle \lessdot \langle \mathbf{h}(s)\rangle]$$

が従う。この s を固定して，$c(**)=\mathbf{h}(s)$, と置く。また，

$$\mathbf{h}''=\langle c(**),\ \mathbf{h}';B(j)\cap D\rangle$$

と置く。$\langle c(*)\rangle \lessdot \langle c(**)\rangle[B(j)\cap D]$及び $\mathbf{h}' =\!\cdot\, \mathbf{h}''[B(j)\cap \sim D]$より，

$$\mathbf{h}' \lessdot \mathbf{h}''[B(j)]$$

が従う。故に，Big の性質により，

$$\neg \mathrm{Big}(\mathbf{h}',\ B(j))$$

が従う。

以上により，

(5) $\forall j \in \mathbb{N}[m+1]\ \neg \mathrm{Big}(\mathbf{h}',\ B(j))$

が従う。(3)，(4)，及び(5)より，

$$Q(m+1, \mathbf{h}')$$

が従う。故に，

$$\exists \mathbf{h} \in \mathrm{Act}\ Q(m+1, \mathbf{h})$$

が従う。

以上により，数学的帰納法の過程が終了し，(1)が従う。

(1)における k に対して，特に $k=n$ と置くと，

$$\exists \mathbf{h} \in \mathrm{Act}\ Q(n,\ \mathbf{h})$$

が従う。この $\mathbf{h}$ を固定すると，C1，C2，及び C3 が従う。 [証明終]

[命題 F] $\mathbf{f}$ を任意の行為とし，かつ B を任意の事象とする。

$$0<\mathbf{P}(B)$$

を仮定する。Big$(\mathbf{f},\ B)$が成立する為の必要充分条件は，

$$\forall c \in \mathrm{Cseq}[\mathbf{P}(\{s \in B \mid \langle \mathbf{f}(s)\rangle \leqslant\!\cdot \langle c\rangle\})=0]$$

である。

[証明] 必要性を示す。対偶法による。

$$\exists c \in \mathrm{Cseq}[0<\mathbf{P}(\{s \in B \mid \langle \mathbf{f}(s)\rangle \leqslant\!\cdot \langle c\rangle\})]$$

と仮定する。この c を固定して $c(*)$と表記する。また，

$$C=\{s \in B \mid \langle \mathbf{f}(s)\rangle \leqslant\!\cdot \langle c(*)\rangle\}$$

と置く。

$$\mathbf{f} \leqslant\!\cdot \langle c(*)\rangle[B]$$

ならば，$\neg \mathrm{Big}(\mathbf{f},\ B)$，が従う。

$$\langle c(*)\rangle \lessdot \mathbf{f}[B]$$

の場合を考える。公準 P7より，

$$\exists s \in B[\langle c(*)\rangle \lessdot \langle \mathbf{f}(s)\rangle]$$

が従う。この s を固定して，

$$c(**)=\mathbf{f}(s)$$

と置く。また，$\mathbf{f}'=\langle c(**), \mathbf{f}; C\rangle$

と置く。

$\langle c(*)\rangle \lessdot \mathbf{f}'[C]$

が従う。一方，公準 P7より，

$\mathbf{f} \leqslant\!\cdot \langle c(*)\rangle[C]$

が従う。故に，

$\mathbf{f} \lessdot \mathbf{f}'[C]$

が従う。一方，

$\mathbf{f} =\!\cdot \mathbf{f}'[B \cap \sim C]$。

故に，

$\mathbf{f} \lessdot \mathbf{f}'[B]$

が従う。故に，Big の性質により，

$\neg \mathrm{Big}(\mathbf{f}, B)$

が従う。

充分性を示す。c を任意の結果とする。

$D = \{s \in B | \langle \mathbf{f}(s)\rangle \leqslant\!\cdot \langle c\rangle\}$

と置く。$\mathbf{P}(D)=0$, が従う。ところが, $0<\mathbf{P}(B)$。

故に，

$\exists s \in B[\neg s \in D]$。

この s を固定して，$c'=\mathbf{f}(s)$, と置く。

$\langle c\rangle \lessdot \langle c'\rangle$

が従う。

$D' = \{s \in B | \langle \mathbf{f}(s)\rangle \leqslant\!\cdot \langle c'\rangle\}$

と置く。$\mathbf{P}(D')=0$及び零事象の性質により，

$\langle c'\rangle =\!\cdot \mathbf{f}[D']$

が従う。一方，

$\forall s \in B[\neg s \in D' \Rightarrow \langle c'\rangle \lessdot \langle \mathbf{f}(s)\rangle]$。

故に，公準 P7より，

$\langle c'\rangle \leqslant\!\cdot \mathbf{f}[B \cap \sim D']$

が従う。故に，

$\langle c'\rangle \leqslant\!\cdot \mathbf{f}[B]$

が従う。故に，

$\langle c\rangle \lessdot \mathbf{f}[B]$

が従う。以上により，

$\forall c \in \mathrm{Cseq}[\langle c\rangle \lessdot \mathbf{f}[B]]$

が従う。故に，$\mathrm{Big}(\mathbf{f}, B)$，が従う。

［証明終］

4．有界効用

［命題 G］において，この論述の第 1 節で言及した St. Petersburg paradox における act の存在を，示す。この［命題 G］に対する［証明］中で，従属選択の原理を，直接に二回，利用する事を，敢て，注意する。但し，ここで採用する，従属選択の原理に対する様式は，次である。

$\forall x \in A\ \forall y \in A\ R(x, y) \Rightarrow$
$\forall z \in A\ \exists f \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}, A)[f(1)=z \wedge \forall n \in \mathbb{N}\ R(f(n), f(n+1))]$

［命題H］において，効用関数Uの有界性を示す。但し，その［証明］では，上に有界である事のみを示す。下に有界である事も同様に示される。但し，ここで利用した「同様に」と言う表現との連関で，上掲書第5章第4節の78頁の，冒頭の段落中の，symmetric dualへのサヴェジ氏の言及を，参照する事を，筆者は，読者に望む。

［命題G］公準P7を仮定しない。効用関数Uは上に有界には非ず，即ち，「任意の実数uに対して或結果cが存在して，$u<\mathbf{U}(c)$」，と仮定する。この場合，或結果の列$\langle c(n); n\in\mathbb{N}\rangle$と或行為$\mathbf{f}$とが存在して，次のC1及びC2が従う。

C1.　$\forall n\in\mathbb{N}[2^n \leqq \mathbf{U}(c(n)) \wedge \mathbf{U}(c(n))<\mathbf{U}(c(n+1))]$。

C2. $S=\cup\{\{s\in S|\mathbf{f}(s)=c(n)\}|n\in\mathbb{N}\}\wedge\forall n\in\mathbb{N}[\mathbf{P}(\{s\in S|\mathbf{f}(s)=c(n)\})=2^{-n}]$。

［証明］$\boldsymbol{D}=\{\langle n, c\rangle|\langle n, c\rangle\in\mathbb{N}\times\mathrm{Cseq}\wedge 2^n\leqq\mathbf{U}(c)\}$と置く。$\boldsymbol{D}$上の二項関係$R$を，

$R(\langle n,c\rangle,\langle m,d\rangle)\Leftrightarrow n+1=m\wedge\mathbf{U}(c)<\mathbf{U}(d)$,

により定義する。

(1) $\forall x\in\boldsymbol{D}\ \exists y\in\boldsymbol{D}\ R(x, y)$

を示す。$\langle n, c\rangle\in\boldsymbol{D}$をみたす任意の$\langle n, c\rangle$を固定する。$m=n+1$と置く。仮定より，

$\exists d\in\mathrm{Cseq}[\max\{2^m,\mathbf{U}(c)\}<\mathbf{U}(d)]$

が従う。このdを固定する。$2^m<\mathbf{U}(d)$が従う。故に，$\langle m, d\rangle\in\boldsymbol{D}$，が従う。一方，$\mathbf{U}(c)<\mathbf{U}(d)$。故に，$R(\langle n, c\rangle,\langle m, d\rangle)$。故に，

$\exists z\in\boldsymbol{D}\ R(\langle n, c\rangle,z)$。

故に，(1)が従う。

仮定より，$\exists c\in\mathrm{Cseq}[2^1<\mathbf{U}(c)]$，が従う。この$c$を固定して$c(*)$と表記する。

(2)　$\langle 1,c(*)\rangle\in\boldsymbol{D}$

が従う。(1)，(2)，及び従属選択の原理により，

$\exists F\in\mathrm{Map}(\mathbb{N}, \boldsymbol{D})[F(1)=\langle 1,c(*)\rangle\wedge\forall n\in\mathbb{N}\ R(F(n), F(n+1))]$

が従う。この写像Fを固定する。

$\forall n\in\mathbb{N}[\langle G(n), H(n)\rangle=F(n)]$

により写像G及びHを定義する。数学的帰納法により，

$\forall n\in\mathbb{N}[G(n)=n]$

が従う。nを任意の自然数とする。$\langle n, H(n)\rangle\in\boldsymbol{D}$より，

(3) $2^n\leqq\mathbf{U}(H(n))$

が従う。また，$R(\langle n, H(n)\rangle, \langle n+1, H(n+1)\rangle)$より，

(4)　$\mathbf{U}(H(n))<\mathbf{U}(H(n+1))$

が従う。この写像Hに基づき，$\forall n\in\mathbb{N}[c(n)=H(n)]$により，結果の列$\langle c(n); n\in\mathbb{N}\rangle$を定義す

る。(3)及び(4)より結論 C1が従う。

事象の全体 $\mathbb{A}$ 上の二項関係 Q を，

$$Q(A,B) \Leftrightarrow B \subseteqq A \wedge \mathbf{P}(B) = 2^{-1} \cdot \mathbf{P}(A)$$

により定義する。定量的確率の性質により，

(5)　$\forall x \in \mathbb{A}\ \exists y \in \mathbb{A}\ Q(x, y)$

が従う。一方，

(6)　$S \in \mathbb{A}$。

故に，(5)，(6)，及び従属選択の原理により，

$$\exists I \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{A})[I(1) = S \wedge \forall n \in \mathbb{N}\ Q(I(n), I(n+1))]$$

が従う。この写像 I を固定する。数学的帰納法により，

$$\forall n \in \mathbb{N}[\mathbf{P}(I(n)) = 2^{-n}]$$

が従う。また，

$$M = \cap\{I(n) | n \in \mathbb{N}\}$$

と置く。$\forall n \in \mathbb{N}[\mathbf{P}(M) \leqq 2^{-n}]$が従う。一方，$\lim\langle 2^{-n};\ n \in \mathbb{N}\rangle = 0$。故に，$\mathbf{P}(M) = 0$，が従う。

$$A(1) = (I(1) \setminus I(2)) \cup M \wedge \forall n \in \mathbb{N}[A(n) = I(n) \setminus I(n+1)]$$

により，列$\langle A(n); n \in \mathbb{N}\rangle$を定義する。

(7)　$S = \cup\{A(n) | n \in \mathbb{N}\}$，

(8)　$\forall m, n \in \mathbb{N}[m \neq n \Rightarrow A(m) \cap A(n) = \emptyset]$，

(9)　$\forall n \in \mathbb{N}[\mathbf{P}(A(n)) = 2^{-n}]$，

が従う。

$$\forall s \in S\ \forall n \in \mathbb{N}[s \in A(n) \Rightarrow \mathbf{f}(s) = c(n)]$$

により，S を定義域とする，Cseq の値をとる，写像 $\mathbf{f}$ を定義する。(7)及び(8)より，

$$\forall s \in S\ \exists!\ n \in \mathbb{N}[s \in A(n)]$$

が従うので，この写像 $\mathbf{f}$ の定義は確定する。事象の全体 $\mathbb{A}$ が完全加法族である事より，$\mathbf{f}$ は行為である。また，
$\forall m, n \in \mathbb{N}[m \neq n \Rightarrow c(m) \neq c(n)]$より，

$$\forall n \in \mathbb{N}[A(n) = \{s \in S | \mathbf{f}(s) = c(n)\}]$$

が従う。故に，(7)及び(9)より，この $\mathbf{f}$ が結論 C2 における $\mathbf{f}$ の性質をみたす事が従う。

［証明終］

［命題 H］公準 P1から公準 P7までを仮定する。効用関数 $\mathbf{U}$ は有界である。即ち，「或実数 u 及び或実数 v が存在して，任意の結果 c に対して，$u \leqq \mathbf{U}(c) \leqq v$」が成立する。

［証明］上に有界である事のみを示す。背理法による。「$\mathbf{U}$ は上に有界には非ず」と仮定して矛盾を導く。［命題 G］における結果の列$\langle c(n); n \in \mathbb{N}\rangle$と行為 $\mathbf{f}$ とを固定する。

$$\forall n \in \mathbb{N}[A(n) = \{s \in S | \mathbf{f}(s) = c(n)\}]$$

と置く。c を任意の結果とする。Archimedes の原則より，

$$\exists n \in \mathbb{N}[\mathbf{U}(c) < n]$$

が従う。この n を固定して $n(*)$ と表記する。

$$\forall s \in S\ \forall n \in \mathbb{N}[[s \in A(n) \wedge n \leqq n(*) \Rightarrow \mathbf{f}'(s)=\mathbf{f}(s)] \wedge [s \in A(n) \wedge n(*) < n \Rightarrow \mathbf{f}'(s)=c(n(*))]]$$

により有限個の結果で定まる行為 $\mathbf{f}'$を定義する。

$$n(*) < \int_S \mathbf{P}(ds)(\mathbf{U}\circ\mathbf{f}')(s)$$

が従う。ところが，$\mathbf{U}(c) < n(*)$。故に，

$$\langle c \rangle \lessdot \mathbf{f}'$$

が従う。一方，公準 P7より，

$$\mathbf{f}' \leqslant\!\cdot\, \mathbf{f}$$

が従う。故に，

$$\langle c \rangle \lessdot \mathbf{f}$$

が従う。故に，

$$\forall c \in \mathrm{Cseq}[\langle c \rangle \lessdot \mathbf{f}]$$

が従う。故に，

$$\mathrm{Big}(\mathbf{f}, S)$$

が従う。故に，［命題 F］より，

$$\mathbf{P}(\{s \in S | \mathbf{f}(s)=c(1)\})=0。$$

故に，

$$\mathbf{P}(A(1))=0。$$

これは $\mathbf{P}(A(1))=2^{-1}$ に反する。　［証明終］

5．補遺

冒頭の節で引用した脚註において，サヴェジ氏は，

Fishburn, Peter C., Utility Theory for Decision Making, Wiley, New York, 1970,

に言及している。上掲サヴェジ書の文献表中の288頁に，この書物に対する，サヴェジ氏による，次の短評がある。

Lucidly treats a great variety of axiomatic approaches to preference, with and without uncertainty, including the axiomatic aspects of this book and later developments.

筆者は Fishburn 氏のこの著作を通読していないので，冒頭の副詞 Lucidly が，いかなる事柄を指し示すのか，了解できない。しかし，同書の206頁から207頁にかけての，有界効用に関する議論を粗く視る限りでは，サヴェジ氏の議論に基づくと言うよりは，これは Fishburn 氏自身の議論であると，筆者は，憶測するのである。

(1990年９月10日，初秋の北大教養部にて)