経済学研究 40-4
北海道大学 1991.3

〈研究ノート〉

確率概念に対する或初等的講義のための，一つの素案

園 信太郎

1．目的

北大教養部と呼ばれている一個の場において，1990年4月4日から同年7月18日まで，計十五回にわたり，人文系の一部の学徒に対して，社会科学特別講義Ⅰ「経済数学」と言う表題で，筆者は講義を行なったのであるが，この経験に基づいて，より健全な同講義のために，一つの素案を，同講義の担当教官である筆者は，思索したのである。この素案を，素朴な様式において，提示することが，ここでの唯一の目的なのである。

2．述語∈

Zermelo-Fraenkel の集合論における公理系に基づき，述語

$$\in$$

を統制することを明言すること。この述語の利用の様式は，

$$a \in A$$

であり，訓は「a は A の元である」である。但し，数学基礎論に関する議論に踏み込むことは，担当教官の素養と資質との射程外であり，結局，不可能である。しかしながら，この述語以外の述語は必要でないことは注意すること。従って，次の様式の外延性の公理で，述語

$$=$$

を定義する。

$$A=B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \Leftrightarrow x \in B]。$$

また，

$$\langle x, y\rangle=\{\{x, x\}, \{x, y\}\}$$

により順序対を定義する。この定義は善良である。三重対を，

$$\langle x, y, z\rangle=\langle\langle x, y\rangle, z\rangle$$

により定義する。四重対は，

$$\langle x, y, z, v\rangle=\langle\langle x, y, z\rangle, v\rangle$$

により定義する。

$$\{x\}=\{x, x\}$$

と略記する。類を表示する記法，

$$\{x \mid Q(x)\}$$

を，平然とした雰囲気で，導入せよ。

$$f(x)=\{s \mid \exists y[s\in y\wedge\langle x, y\rangle\in f]\}$$

に基づき関数記号

$$f(\cdot)$$

を導入する。

$$f\in \mathrm{Map}(A, B)\Leftrightarrow$$

$$f\subseteqq A\times B\wedge\forall x\in A\,\exists!\,y\in B[\langle x, y\rangle\in f]$$

に基づき，A から B への写像の全体

$$\mathrm{Map}(A, B)$$

を定義する。

$$f\in \mathrm{Map}(A, B)\Rightarrow\forall x\forall y[\langle x, y\rangle\in f\Leftrightarrow y=f(x)]$$

が従うことを注意する。

$$\forall x\in A\,\exists y\in B[\langle x, y\rangle\in R]\Rightarrow$$
$$\exists f\in \mathrm{Map}(A, B)\forall x\in A[\langle x, f(x)\rangle\in R]$$

に基づき選択公理を導入する。

Axiom of regularity

及び

Axiom of replacement

は，以下の議論においては必要でないことを注意する。但し，部分集合の公理は当然利用する。また，

Axiom of infinity

として，

$$\exists A[\emptyset\in A\wedge\forall x[x\in A\Rightarrow\{x\}\in A]]$$

を採用する。但し，

$$\emptyset$$

は，空集合を表示する記号である。

Dedekind による無限集合の定義を導入する。この無限集合の概念に基づいて，Dedekind が提示した周知の道筋に従い，自然数系列の存在，自然数系列に対する数学的帰納法，自然数系列を定義域とする写像の帰納的定義，自然数系列の同形性，自然数系列における加法，乗法，及び累乗の定義を，基礎づける。但し，零としての

$$0$$

を含む様式で自然数系列を導入し，この自然数系列を

$$\omega$$

と表記する。ω の上には，既に通常の整列順序

$$\leqq$$

が導入されている。また，

$$<$$

を

$$x<y\Leftrightarrow\neg\, y\leqq x$$

により定義する。通常 Peano の公理系と呼ばれている公理系が従うことを注意する。

従属選択の原理を，

$$\forall x\in A\,\exists y\in A\, R(x,y)\Rightarrow$$
$$\forall z\in A\,\exists f\in \mathrm{Map}(\omega,A)[z=f(0)\wedge$$
$$\forall n\in\omega\, R(f(n),f(n+1))]$$

に基づき導入する。この従属選択の原理が，選択公理により従うことを注意する。

Dedekind 無限集合でない集合，即ち，Dedekind 有限集合に対する，基数の概念を基礎づける。特に，任意の有限集合 A に対して，この A の基数である，ω の元が一意的に存在することを示すが，ここで従属選択の原理を利用する。

有限集合 A の基数を

$$\#(A)$$

と表記する。A 及び B を任意の有限集合とする場合において，次の加法法則を示す。

$$A\cap B=\varnothing\Rightarrow\#(A\cup B)=\#(A)+\#(B)。$$

既に確立している数学的帰納法に基づき，この加法法則を一般化する。

通常は，通常の自然数系列が既に確定しているとの前提に基づき，有限集合の定義を行ない，有限集合でない集合として無限集合を定義することを，注意する。従属選択の原理を利用することにより，通常の有限集合の定義と，Dedekind による有限集合の定義とが，同値であることを示す。

3．定性的確率

$\mathbb{A}$ が S 上の完全加法族であることを次の様式に基づいて定義する。

0．$\mathbb{A}\subseteqq\mathfrak{P}(S)$。
1．$S\in\mathbb{A}$。
2．$A\in\mathbb{A}\Rightarrow S\setminus A\in\mathbb{A}$。
3．$f\in\mathrm{Map}(\omega,\mathbb{A})\Rightarrow\bigcup\{f(i)\mid i\in\omega\}\in\mathbb{A}$。

ここに $\mathfrak{P}(S)$ は S のベキ集合である。即ち，

$$\mathfrak{P}(S)=\{X\mid X\subseteqq S\}。$$

$\{\varnothing,S\}$ も $\mathfrak{P}(S)$ も共に S 上の完全加法族である。$\mathfrak{M}$ を，空でない，各元が S 上の完全加法族である，任意の集合とする場合において，

$$\bigcap\mathfrak{M}$$

は S 上の完全加法族である。M を $\mathrm{M}\subseteqq\mathfrak{P}(S)$ をみたす任意の集合とし，かつ「M を部分集合とする S 上の完全加法族」の全体を $\mathfrak{M}$ として，

$$\sigma[\mathrm{M}]=\bigcap\mathfrak{M}$$

に基づき，M を含む最小の，但し，S 上の，完全加法族を定義する。この場合，

$$\mathfrak{P}(S)\in\mathfrak{M}$$

より，この定義は善良である。$\mathbb{A}$ を S 上の任意の完全加法族とする。順序対

$$\langle S,\mathbb{A}\rangle$$

を可測空間 measurable space と呼ぶ。

次に「硬貨投げに関する事象系」への一個の定式を与えること。

$$\exists H\,\exists T[H\neq T]$$

を注意する。この H 及び T を固定する。例えば，$H=\varnothing$ かつ $T=\{\varnothing\}$。

$$W=\mathrm{Map}(\mathbb{N},\{H,T\})$$

と置く。但し，$\mathbb{N}$は0を含まない自然数系列である。

$$\forall x\in\{H,T\}\forall i\in\mathbb{N}[W(x,i)=\{w\in W\mid w(i)=x\}]$$

と置く。

$$\mathbb{M}=\{X\mid\exists x\in\{H,T\}\exists i\in\mathbb{N}[X=W(x,i)]\}$$

と置く。

$$\mathbb{B}(W)=\sigma[\mathbb{M}]$$

と置く。即ち$\mathbb{B}(W)$は$\mathbb{M}$を含む最小の，S上の，完全加法族である。この$\mathbb{B}(W)$を「硬貨投げに関する事象系」と呼ぶ。$\mathbb{B}(W)$間の同形性について，敢て，言及せよ。

Savage, L. J. による著名な教科書に従い，定性的確率に関する議論を展開する。但し，可測空間$\langle S,\mathbb{A}\rangle$上の定性的確率$\lessdot$は，以下の様式に基づいて定義する。

0．$\lessdot\subseteq\mathbb{A}\times\mathbb{A}$,即ち，$\lessdot$は$\mathbb{A}$上の二項関係である。
1．$A\lessdot B\vee B\lessdot A$。
2．$A\lessdot B\wedge B\lessdot C\Rightarrow A\lessdot C$。
3．$A\cap C=\emptyset\wedge B\cap C=\emptyset\Rightarrow[A\lessdot B\Leftrightarrow A\cup C\lessdot B\cup C]$。
4．$\forall A\in\mathbb{A}[\emptyset\lessdot A]\wedge\neg S\lessdot\emptyset$。

$A\lessdot B$は「AはBよりも確からしいには非ず」と訓む。

$$x<\!\cdot\, y\Leftrightarrow\neg y\lessdot x$$

に基づき$\mathbb{A}$上の二項関係$<\!\cdot$を導入する。訓は「xよりもyは確からしい」である。

$$x=\!\cdot\, y\Leftrightarrow x\lessdot y\wedge y\lessdot x$$

に基づき$\mathbb{A}$上の二項関係$=\!\cdot$を導入する。訓は「xとyとは無差別である」である。$=\!\cdot$は$\mathbb{A}$上の同値関係である。

可測空間$\langle S,\mathbb{A}\rangle$上の任意の定性的確率$\lessdot$に対して，

$$\forall A,B,C,D\in\mathbb{A}[A\lessdot B\wedge C\lessdot D\wedge B\cap D=\emptyset\Rightarrow A\cup C\lessdot B\cup D]$$

及び

$$\forall A,B,C,D\in\mathbb{A}[A\lessdot B\wedge C<\!\cdot\, D\wedge B\cap D=\emptyset\Rightarrow A\cup C<\!\cdot\, B\cup D]$$

が従う。既に確立している数学的帰納法を利用して，これらの結果を一般化すること。

完全加法族$\mathbb{A}$の元を事象と呼ぶ場合もある。またこの$\mathbb{A}$を事象系と呼ぶこととする。fが事象系$\mathbb{A}$に関する分割であることを，次の様式に基づいて定義する。

0．$\exists n\in\omega[f\in\mathrm{Map}(\mathbb{N}[n],\mathbb{A})]$。
1．$\forall i,j\in\mathrm{dom}(f)[i\neq j\Rightarrow f(i)\cap f(j)=\emptyset]$。

但し，ここに，

$$\mathbb{N}[n]=\{i\mid i\in\mathbb{N}\wedge i\leqq n\}$$

であり，特に，$\mathbb{N}[0]=\emptyset$。また，

$$\mathrm{dom}(f)=\{x\mid\exists y[\langle x,y\rangle\in f]\}$$

であり，fの定義域である。分割fに対して

$$\exists ! n \in \omega [f \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}[n], \mathbb{A})]$$

が従うことに基づいて，この一意的に存在するnを「分割fの長さ」と呼び，

$$\delta(f)$$

と表記する。特に，$\delta(\emptyset)=0$。また，事象系$\mathbb{A}$に関する分割fが，$\langle S, \mathbb{A} \rangle$上の定性的確率$\lessdot$に関して，一様であるとは，

$$\forall i, j \in \mathrm{dom}(f)[f(i) =\cdot f(j)]$$

をみたすことである。この場合，fを，一様な分割であると呼ぶ。

事象系$\mathbb{A}$に関する分割fが，事象Aに対する分割であるとは，

$$A = \bigcup \{f(i) \mid i \in \mathrm{dom}(f)\}$$

をみたすことである。この場合さらに，定性的確率$\lessdot$に関してfが一様であるのならば，fはAに対する一様な分割であると呼ぶ。事象Aに対する分割の全体を，

$$\mathrm{Par}(A)$$

と表記する。定性的確率$\lessdot$が既に与えられている場合において，$\lessdot$に関して一様な，Aに対する分割の全体を，

$$\mathrm{UPar}(A)$$

と表記する。これはまた，

$$\mathrm{UPar}(A, \lessdot)$$

とも表記される。また，任意の事象Aに対して，

$$\forall i \in \mathbb{N}[1][\langle\!\langle A \rangle\!\rangle(i) = A]$$

に基づいて，$\mathbb{N}[1]$から$\mathbb{A}$への写像$\langle\!\langle A \rangle\!\rangle$を定義する。

$$\mathbb{N}[1] = \{1\}$$

より，

$$\langle\!\langle A \rangle\!\rangle \in \mathrm{Par}(A)$$

かつ

$$\langle\!\langle A \rangle\!\rangle \in \mathrm{UPar}(A, \lessdot)$$

が従う。但し，$\lessdot$は$\langle S, \mathbb{A} \rangle$上の任意の定性的確率である。分割$\langle\!\langle A \rangle\!\rangle$の長さは1である。

A及びBを任意の事象とし，かつ$B \subseteq A$とする。またfをAに対する任意の分割とする。

$$\forall i \in \mathrm{dom}(f)[g(i) = f(i) \cap B]$$

により，$\mathrm{dom}(f)$から$\mathbb{A}$への写像gを定義する。このgはBに対する長さ$\delta(f)$の分割となる。gを，fにより誘導される，Bに対する分割と呼ぶ。

4．P6′

Savage, L. J. による著名な教科書に従い，定性的確率に対する要請である，P6′を導入する。

$\lessdot$を可測空間$\langle S, \mathbb{A} \rangle$上の任意の定性的確率とする。$\lessdot$が要請P6′をみたすとは次のことである。

$$\forall A, B \in \mathbb{A}[A \lessdot B \Rightarrow \exists f \in \mathrm{Par}(S) \forall i \in \mathrm{dom}(f)[A \cup f(i) \lessdot B]]。$$

以下，可測空間$\langle S, \mathbb{A}\rangle$上の定性的確率$\lessdot$を固定して議論する。

$\lessdot$がP6′をみたすとする。

$$\forall A\in\mathbb{A}\,\exists B\in\mathbb{A}[B\subseteq A\wedge B\lessdot A\setminus B]$$

が従う。

$\lessdot$ が P6′ をみたすとする。

$$\forall A\in\mathbb{A}[\emptyset \lessdot A\Rightarrow$$
$$\exists f\in \mathrm{Par}(A)\forall i\in \mathrm{dom}(f)[\emptyset \lessdot f(i)\wedge f(i)\lessdot A\setminus f(i)]]$$

が従う。

$\lessdot$ が P6′をみたすとする。また，$A(\cdot)$ を$\mathbb{N}$から$\mathbb{A}$への任意の写像とする。

$$\forall n\in \mathbb{N}[A(n+1)\subseteq A(n)\wedge A(n+1)\lessdot A(n)\setminus A(n+1)]$$

を仮定する。

$$\forall B\in\mathbb{A}[\emptyset \lessdot B\Rightarrow$$
$$\exists m\in\mathbb{N}\forall n\in\mathbb{N}[m\leqq n\Rightarrow A(n)\lessdot B]]$$

が従う。

［補題］この補題は Savage, L. J. による補題である。ここでは「単純分割に関する補題」と呼ぶこととする。$\lessdot$は P6′ をみたすと仮定する。

$$\forall A\in\mathbb{A}\,\exists B\in\mathbb{A}\,\exists C\in\mathbb{A}[A=B\cup C\ \wedge\ B\cap C=\emptyset$$
$$\wedge\ B=\cdot C]$$

が従う。

［証明］の概略。

$$\emptyset \lessdot A$$

をみたす任意の事象 A を固定する。

$$\langle A', A'', A'''\rangle\in\mathbb{A}\times\mathbb{A}\times\mathbb{A}$$

かつ

$$A'\cap A''=A'\cap A'''=A''\cap A'''=\emptyset$$

かつ

$$A=A'\cup A''\cup A'''$$

かつ

$$A'\lessdot A''\cup A'''\wedge A'''\lessdot A'\cup A''$$

をみたす三重対$\langle A', A'', A'''\rangle$の全体を

$$\mathbb{T}$$

と表記する。$\mathbb{T}$上の二項関係を，

$$R(\langle A', A'', A'''\rangle, \langle B', B'', B'''\rangle)\Leftrightarrow$$
$$A'\subseteq B'\wedge A'''\subseteq B'''\wedge B''\lessdot A''\setminus B''$$

に基づいて定義する。

$$\forall x\in\mathbb{T}\,\exists y\in\mathbb{T}\ R(x, y)$$

を示す。次に，

$$\langle\emptyset, A, \emptyset\rangle\in\mathbb{T}$$

及び従属選択の原理に基づいて，

$$\exists F\in \mathrm{Map}(\omega, \mathrm{T})[F(0)=\langle\emptyset, A, \emptyset\rangle\wedge \forall n\in\omega\, R(F(n), F(n+1))]$$

が従う。

$$\forall n\in\omega[\langle A'(n), A''(n), A'''(n)\rangle=F(n)]$$

に基づき，ωを定義域とする写像 $A'(\cdot)$, $A''(\cdot)$, 及び$A'''(\cdot)$ を定義する。

$$\forall n\in\omega[A'(n)\subseteqq A'(n+1)\wedge A'''(n)\subseteqq A'''(n+1)\wedge A''(n+1)\lessdot A''(n)\setminus A''(n+1)]$$

が従う。

$$A'=\bigcup\{A'(n)\mid n\in\omega\},$$
$$A''=\bigcap\{A''(n)\mid n\in\omega\}, \text{かつ}$$
$$A'''=\bigcup\{A'''(n)\mid n\in\omega\}$$

と置く。

$$A''=\cdot\,\emptyset$$

が従う。さらに，

$$A'=\cdot\,A'''$$

が従う。以上で命題が従う。ここで［証明］の概略が終了する。

次に「二進的な分割系」を定義する。A を任意の事象とし，かつ $\lessdot$ を可測空間 $\langle S,\mathbb{A}\rangle$上の定性的確率とする。$\Phi$ が A に対する二進的な分割系であることを，次の様式に基づいて定義する。

0．$\Phi\in\mathrm{Map}(\omega,\ \mathrm{UPar}(A))$。
1．$\Phi(0)=\langle\!\langle A\rangle\!\rangle$。
2．$\forall n\in\omega[2\cdot\delta(\Phi(n))=\delta(\Phi(n+1))\wedge \forall k\in\mathrm{dom}(\Phi(n))[\Phi(n)(k)=\Phi(n+1)(2\cdot k-1)\cup\Phi(n+1)(2\cdot k)]]$。

単純分割に関する補題，数学的帰納法に基づく選択，即ち，有限選択，及び従属選択の原理を利用することに基づき，「$\lessdot$が P6′ をみたすならば，任意の事象 A に対して A に対する二進的な分割系が存在する」と言う主張を正当化すること。

P6′ と「硬貨投げに関する事象系」に対する一個の定式である

$$\mathbb{B}(W)$$

とのかかわりについて言及せよ。但し，直積完全加法族，従属選択の原理，及び Savage, L. J. の議論に言及せよ。

5．定量的確率

$$\mathbb{R}$$

により実数系を表示する。P が可測空間 $\langle S,\mathbb{A}\rangle$ 上の定量的確率であることを，次の様式に基づいて，定義する。

0．$P\in\mathrm{Map}(\mathbb{A},\mathbb{R})$。
1．$\forall A\in\mathbb{A}[0\leqq P(A)]$。
2．$\forall A, B\in\mathbb{A}[A\cap B=\emptyset\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)]$。
3．$P(S)=1$。

$\langle S,\mathbb{A}\rangle$ 上の定量的確率 P が，同じ可測空間上の定性的確率 $\lessdot$ に対して「ほとんど一致する」とは，

$$\forall A, B\in\mathbb{A}[A\lessdot B\Rightarrow P(A)\leqq P(B)]$$

をみたすことである。また，「一致する」とは，

$$\forall A, B \in \mathbb{A}[A \lessdot B \Leftrightarrow P(A) \leqq P(B)]$$

をみたすことである。

$$\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqq x \wedge x \leqq 1\}$$

と置く。可測空間 $\langle S, \mathbb{A} \rangle$ 上の定量的確率 P が精密であるとは，

$$\forall A \in \mathbb{A}\ \forall a \in \mathbb{I}\ \exists B \in \mathbb{A}[B \subseteqq A \wedge P(B) = a \cdot P(A)]$$

をみたすことである。

［補題1］$\lessdot$ 及び P を各各，可測空間 $\langle S, \mathbb{A} \rangle$ 上の，定性的及び定量的確率とする。$\lessdot$ は P6′ をみたすと仮定する。

$$\forall A \in \mathbb{A}[\emptyset \lessdot A \Rightarrow 0 < P(A)]$$

が従う。さらに，「P が $\lessdot$ に対してほとんど一致するのならば，P は $\lessdot$ に対して一致する」が従う。

［補題2］$\lessdot$ 及び P を各各，可測空間 $\langle S, \mathbb{A} \rangle$ 上の，定性的及び定量的確率とする。$\lessdot$ は P6′ をみたすと仮定する。従属選択の原理を利用することにより，「P が $\lessdot$ に対してほとんど一致するのならば，P は精密である」が従う。

［補題3］$\lessdot$ を可測空間 $\langle S, \mathbb{A} \rangle$ 上の，P6′ をみたす，定性的確率とする。また，P 及び Q を $\langle S, \mathbb{A} \rangle$ 上の定量的確率とする。P 及び Q の各各が $\lessdot$ に対してほとんど一致するのならば，$P = Q$，即ち，

$$\forall A \in \mathbb{A}[P(A) = Q(A)]$$

が従う。但し，従属選択の原理により形成した二進的な分割系を利用して，この補題を証明すること。

［補題4］$\lessdot$ を可測空間 $\langle S, \mathbb{A} \rangle$ 上の，P6′ をみたす，定性的確率とする。「$\langle S, \mathbb{A} \rangle$ 上の或定量的確率 P が存在して，P は $\lessdot$ に対してほとんど一致する」が従う。但し，従属選択の原理により形成した二進的な分割系を利用して，この補題を証明すること。

［補題1］から［補題4］までが，個別に，従って相互に依存せずに，証明されることを確認せよ。

［命題］$\lessdot$ を可測空間 $\langle S, \mathbb{A} \rangle$ 上の定性的確率とする。$\lessdot$ は P6′ をみたすと仮定する。「$\langle S, \mathbb{A} \rangle$ 上の或定量的確率 P が一意的に存在して，P は $\lessdot$ に対して一致する」が従う。しかも，この P は精密である。また，$\lessdot$ に対してほとんど一致する任意の定量的確率 Q に対して，$P = Q$。

［証明］［補題1］，［補題2］，［補題3］，及び［補題4］より，明らかに従う。　［証明終］

上述の［命題］を利用して，条件つき確率の概念に対する基礎づけの一角への，言及をなすのである。さらには，実数概念と確率概念との連関に対して，愚直に，省察せよ。

（1991年，1月7日，新春の北大教養部にて）