経済学研究 41-2
北海道大学 1991.10

＜研究ノート＞

# Boiteux 均衡の非効率性について

小 山 光 一

## 1．序　論

Calsamiglia[2]とその発展の中で，広範囲な environments をもつ収穫逓増経済において常にパレート最適な資源配分を実現する情報分権メカニズムは存在しないことが証明されてきた。例えば，限界費用原理はパレート最適となるための一階の必要条件のみを要求し，二階の十分条件は必ずしも満足されているとは限らない。かくて自然な流れは，パレート最適を常に実現する情報分権メカニズムが存在しない以上，パレート最適という強い条件をあきらめ，次善（second best）の最適を実現するようなメカニズムを考えるということであった。Boiteux[1]が提示したメカニズムはまさに次善の問題に対する一つの解法であった。ところが Dierker[3]が強調しているように，Boiteux 均衡は必ずしも次善の意味での最適になるとは限らない。Boiteux は，次善の意味での最適となるための一階の必要条件のみを分析し，二階の十分条件を検討していないのである。特に収穫逓増経済において二階の十分条件が満足されていないことは十分推測されることである。

収穫逓増経済において，強い条件であるパレート最適をあきらめ，弱い条件としての次善の最適を求めていくという考えは意味をなさない，ということが強調されなければならない。なぜなら収穫逓増経済において，次善の意味での最適を求めることは，パレート最適を求めることと本質的に同一の困難さをもつからである。数学的に述べれば，両方の問題とも非凸集合の制約下での最適化問題となっている。本稿の目的は以下の二つである。第一に，限界費用原理の均衡（MCPE）がパレート最適を実現する問題と，Boiteux 均衡が次善の最適を実現する問題は，全く同様の分析手法の下に行うことができることを確認する。第二に，Dierker の示した次善の最適のための十分条件に含まれない経済を考察の対象とし，その経済において Boiteux 均衡が local 又は global な次善の最適となるための十分条件を検討する。かくて我々は Direrker の考察していない経済の下での十分条件を模索することになる。

## 2．Boiteux 均衡と次善の最適

### 2.1．Environments

経済は n 人の消費者と 1 企業によって構成される。財は m 個の生産物と一つの生産要素（労働）からなる。消費者 i $(i=1,2,...n)$ の選好は以下の効用関数 $U^i: R_+^{m+1} \rightarrow R$ によって表されるものとする。

$$U^i(x_{i1},...x_{im},y_i)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j \log x_{ij}+\beta \log y_i$$

ここで，$\alpha_j>0$，$\beta>0$，かつ $\Sigma\alpha_j+\beta=1$，また $x_{ij}(y_i)$ は消費者 i による生産物 j（レジャー，resp.）の消費を示す。消費者 i の初期資源保有を $\omega_i=(0,e_i)\epsilon R^m \times R_{++}$ とする。企業の生産関数を

(1)　$h(X_1,...X_m)=\phi(L)$

とする。但し，$h: R^m{}_+ \to R$ は smooth な関数であると仮定し，$\phi: R_+ \to R$ の微分可能性は仮定しない。ここで，$X_j$ は生産物 j の生産量，L は労働の雇用量をそれぞれ示している。以上の仮定を満足する$((\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta)$，$(\omega_i)_i$，$(h(\cdot),\phi(\cdot)))$の集合として経済 E を特定化する。この経済 E は次の二点で Dierker の仮定と異なる。第一に，Dierker は関数 $h(\cdot)$ に制限を加えていること，第二に，Cobb−Douglas 型効用関数は Dierker の仮定 Co を満足していないことである。

**定義**：Boiteux 均衡は以下の(i)−(iv)を満足する$((x_i{}^d, y_i{}^d)_i, (X_1,\ldots,X_m,L), (p_1,\ldots,p_m,1)) \in R_+{}^{n(m+1)} \times R_+{}^{m+1} \times R_{++}{}^{m+1}$として定義される。

(i)（消費者 i, i=1, 2, ..., n）

$(x_i{}^d, y_i{}^d) = \arg\max\{U^i(x_i, y_i)$：

$$(x_i, y_i) \in R_+{}^{m+1}, \sum_{j=1}^{m} p_j x_{ij} + y_i = e_i\}$$

ここで，$p_j$ は生産物 j の価格を示し，労働の価格を 1 とおく。

(ii)（企業）

$(X_1{}^s,\ldots,X_m{}^s,L^d)$ は上の(1)とともに，利潤 $\pi$ について次の式を満足する。

$$\pi = \sum_{j=1}^{m} p_j X_j^s - L^d = 0$$

ここで，$X_j{}^s$ は企業による生産物 j の供給量を示し，$L^d$ は企業による労働の需要量を示す。

(iii)（市場均衡）

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i{}^d, y_i{}^d) = (X_1{}^s,\ldots,X_m{}^s,-L^d) + (0, e),$$

但し $e = \Sigma e_i$.

(iv)（次善の最適のための一階の必要条件）

$p_j/p_k = h_j/h_k$, j, k=1, 2, ..., m。

但し，$h_j$, $h_k$ はそれぞれ関数 $h(\cdot)$ の第 j 変数と第 k 変数に関する偏微分である。

**Remark**：上の定数の(iv)について考えてみる。次善の最適は以下の問題の解である。

$$\text{maximize} \sum_{i=1}^{n} U^i(x_i{}^d(p), y_i{}^d(p))$$

$$\text{subject to (i)} - \text{(iii)}$$

定義(ii)における企業の利潤制約，$\pi=0$，は消費者の需要関数と市場の均衡式から直接導かれる。よって上の極大化問題は経済 E において以下の問題に帰着する。

$$\text{(2)}\quad \begin{aligned} &\text{maximize} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \log x_j{}^d(p_j) \\ &\text{subject to } h(x_1{}^d(p_1),\ldots, \\ &\qquad x_m{}^d(p_m)) = \phi((1-\beta)e) \end{aligned}$$

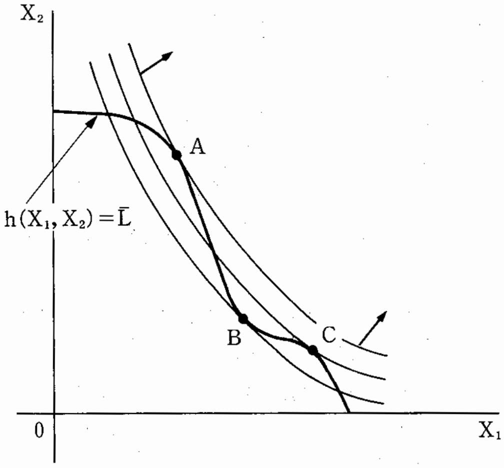
ここで，$x_j{}^d(p_j) = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}{}^d(p_j)$ (j=1, 2, ..., m)。

次善の最適であるための一階の必要条件は(2)から導出される。問題は Boiteux は一階の必要条件のみを検討して次善の条件を提示している点にある。二階の条件が満足されていない可能性が存在し，Boiteux 均衡は必ずしも最適解であるとは限らないのである。

**例 1**：いま，m=2, n=1 とし，$h(X_1, X_2) = X_1 \times X_2{}^{1/2}$，$\phi(L) = L$ とする。そのとき，集合 $Z_L = \{(X_1, X_2, -L) \in R_+^2 \times R : X_1 + X_2{}^{1/2} \leqq L, L = \bar{L}\}$ は凸ではない。故に次善の最適のための十分条件の一つとして Dierker が提示した仮定，仮定 P(iii)，を満足していない。しかしながら，この経済において Boiteux 均衡は global な次善の最適を実現する。かくて我々は Dierker と異なる新しい次善の最適のための十分条件を模索していくことができる。

**例 2**：次の図のような経済を考えてみよう。この場合，三つの点(A, B, 及び C)で Boiteux 均衡が存在する。点 A で Boiteux 均衡は global な次善の最適を実現するのに対し，点 C での Boiteux 均衡は local に最適である。点 B での Boiteux 均衡は，次善の最適のための一階の条件を満足しているが，二階の必要条件を満足しておらず，次善の意味で非効率的な資源配分になっている。図は限界費用原理の分析において親しまれているものと本質的に同じ分析上の見方を与えている。限界費用原理の均衡(MCPE)のパレートの意味での効率性の議論は，Boiteux 均衡の次善の意味での効率性の議論と分析上同一線上にある。広範囲な収穫逓増経済において何等かの均衡点

において資源配分の「効率性」（パレートの意味であれ次善の意味であれ）を実現することは不可能である。




## 2．2．次善の最適；十分条件

まず，Boiteux 均衡が local に次善の最適となるための十分条件を検討しよう。前述の(2)の極大化問題より二階の十分条件を考える。いま，$B_k=(b_{jh})$ を $k\times k$ 行列とし，$C_k=(c_1,\ldots,c_k)$，

$D_k=\begin{pmatrix} B_k & C_k' \\ C_k & 0 \end{pmatrix}$ とおく。ここで，

$b_{jh}=-\alpha_j(x_j^{d\prime}/x_j^{d})(h_{jh}/h_j)$，$c_j=-h_j x_j^{d\prime}$，また $x_j^{d\prime}$ は $x_j^{d}$ の一階の微分を示す。local な次善の最適を得るための十分条件は以下のようになる。

$(-1)^k\det D_k>0$，$k=2,3,\ldots,m$。

次に，global な次善の最適を実現するための十分条件を考察する。Heal[4]は，非凹問題を適当な変数変換を行うことによって凹問題に帰着させることができることを示した。この分析手法は，収穫逓増経済において従来用いられてきたものである。上記の(2)の極大化問題を考えてみる。いま適当な変換 $z_j=\psi(p_j)$ $(j=1,2,\ldots,m)$ を行うことによって(2)の問題を以下の凹問題に帰着できたとしよう。

$$\text{maximize } W(z_1,z_2,\ldots,z_m)$$
$$\text{subject to } h^*(z_1,z_2,\ldots,z_m)=\phi((1-\beta)e)$$

もしこの変換された問題が global な最適解をもつならば，本来の(2)の問題も global な最適解をもつ。例えば，

$h(X_1,X_2,\ldots,X_m)=\Sigma X_j^{\delta_j}$，$\delta_j>0$，とする。そのとき，(2)の問題は以下のように変換できる。

$$\text{maximize } \Sigma(\alpha_j/\delta_j)\log z_j$$
$$\text{subject to } \Sigma z_j=\phi((1-\beta)e)$$

ここで，$z_j=(\alpha_j e/p_j)^{\delta_j}$，$j=1,2,\ldots,m$. コーナー解は経済 E において生じない。この場合，変換された極大化問題は global な最適解をもつ。このとき，Boiteux 均衡は global な次善の最適を実現する。Boiteux 均衡点での資源配分が次善の意味での global な最適配分になるか否かは，上述の変換を通じて凹問題に帰着できるか否かに依存する。例 2 で示されたケースでは凹問題への変換は不可能である。故にこのとき，ある Boiteux 均衡は次善の最適を実現できない。

## 3．三つの研究課題

最後に三つの研究課題を記しておく。第一に，Dierker は global な次善の最適を実現するための十分条件を示しているが，彼の十分条件はきつすぎるように思われる。実際，本稿で論じた経済 E の部分集合において Dierker の十分条件は満足されていないが，Boiteux 均衡は global な次善の最適を実現する。Dierker よりもゆるい条件で，換言すればもっと広範囲な environments にわたって，global な次善の最適を求めていくことが可能であるように思われる。この第一の課題は，次善の可能性を最大限追求したものである。これに対し，第二の課題は，次善の最適の実現可能性を追求していく上である限界が存在することを認識することにある。Calsamiglia は広範囲な収穫逓増経済においてパレート最適を実現する情報分権メカニズムが存在しないことを示した。問題は，Calsamiglia と同様の不可能性定理が次善の最適についても成立するか否かである。広範囲な収穫逓増経済において次善の最適を常に実現するメカニズムは存在しないと推測することが妥当である。

第三に，いま $E_G^P(E_L^P)$ を限界費用原理の均衡

(MCPE) が global (local, resp.) なパレート最適を実現する environments の集合とし，$E_G^S$ ($E_L^S$) を Boiteux 均衡が global (local, resp.) な次善の最適を実現する environments の集合とする。このとき明らかに，$E_G^P \subset E_L^P$, $E_G^S \subset E_L^S$ が成立する。問題は，$E_G^P$ と $E_G^S$ の包含関係，$E_L^P$ と $E_L^S$ の包含関係である。もし，$E_G^P \subset E_G^S$ ならば，収穫逓増経済において次善の最適はパレート最適よりも弱い条件であるといえる。上の包含関係を明らかにすることは経済学的に興味深い研究課題であるように思われる。

## 参考文献


[1] Boiteux, M. (1971). "On the Management of Public Monopolies Subject to Budgetary Constraints." *Journal of Economic Theory*, 3, 219-240.

[2] Calsamiglia, X. (1977). "Decentralized Resource Allocation and Increasing Returns," *Journal of Economic Theory*, 14, 263-283.

[3] Dierker, E. (1991). "The Optimality of Boiteux-Ramsey Pricing." *Econometrica*, 59, 99-121.

[4] Heal, G. (1984). "Equivalence of Saddle-Points and Optima for Nonconcave Programmes." *Advances in Applied Mathematics*, 5, 398-415.