経済学研究 42-3
北海道大学 1992.12

<研究ノート>

待ち行列におけるある近似の試み

木 村 俊 一

1 まえがき

一般到着，一般サービス，しかも複数窓口をもつ待ち行列，ケンドールの記号でいえば$G/G/s$待ち行列を解析することは，十数年前まではただの夢物語に過ぎなかった。現在でもこの状況は本質的にそれほど大きく変わってはいないが，$G/G/s$の真の姿を限りなく正確に映す鏡は既に用意され，多くの研究者によって日々磨かれている。すなわち，相型分布(phase-type distribution:PH)のような一般分布の中で稠密な分布で元の分布を近似することにより，$G/G/s$を近似解析しようとするアプローチである。任意の分布を相型分布で置き換えることは，待ち行列の状態の細分化と状態推移のマルコフ化を意味する。Aggregation-Disaggregationアルゴリズム等の大規模マルコフ連鎖に対する数値解法の研究が，その主たる応用として$PH/PH/s$の解析をめざしていたことは疑いのないことである。近年のCPUの高速化，メモリの高集積化およびそれらの低廉化は，大容量メモリを管理可能なOSの登場と相まって，この$PH/PH/s$による$G/G/s$の近似解析をより身近なものにしつつある。

本講演*で示される待ち行列の近似の試みは，これまで述べてきた研究の流れとはかなり趣を異にしている。よく知られているように，$G/G/s$のサブクラスの中には陽な解をもつものや大規模な計算を行わなくともその解を求められるものがある。$M/M/s$は前者の，超越方程式の根の計算を含む$M/D/s$や$G/M/s$は後者の典型的な例といえる。我々のアプローチは，これらの解析可能な待ち行列を組み合わせて$G/G/s$を近似解析するものである。そこで用いられる方法論は，体系的というよりはむしろ発見的である。しかし，高い近似精度への要求を満たすためには，発見的な閃きを超えた$G/G/s$に対する深い洞察が必要となる。本講演では，第20回日本OR学会文献賞受賞論文［5］における$G/G/s$の待ち時間に対する近似をより包括的な形で示すと同時に，近似に対する筆者の姿勢の一端を明らかにしたい。

2 仮定と記号

考察の対象とするのは，$s(\geq 2)$個の並列な窓口で先着順にサービスを行う，待合い室に容量制限のない標準的な$G/G/s$待ち行列である。客の到着過程は再生過程とし，客のサービス時間はすべての窓口で同じ分布に従う独立な確率変数で，これをVで表す。また，到着時間間隔の分布をA，到着率をλ，変動係数をc_a^2で表し，サービス時間の分布をB，サービス率をμ，変動係数をc_s^2で表すことにする。$B(0)=0$および$E[V^3]<\infty$を仮定する。さらに，トラフィック密度を$\rho=\lambda/s\mu$で表し，$\rho<1$を仮定する。以下では，

*本稿は，日本オペレーションズ・リサーチ(OR)学会1992年度秋季研究発表会(平成4年9月9日・10日，工学院大学，東京)における筆者の同学会文献賞受賞招待講演の内容に加筆したものである。

システムは定常状態にあると仮定する。

3　平均待ち時間に対する近似

3.1　基本的考え方

客の行列中での待ち時間をW，その平均を$EW \equiv EW(G/G/s)$で表すことにする。$G/G/s$のサブクラスに対してもその平均待ち時間を，例えば$M/M/s$に対しては，$EW(M/M/s)$のように書き表すことにする。このとき，同一の平均サービス時間とトラフィック密度をもつ複数窓口待ち行列$G/G/s$と単一窓口待ち行列$G/G/1$の平均待ち時間の比$R \equiv R(G/G/s)$を考える。i.e.,

$$R(G/G/s) = \frac{EW(G/G/s)}{EW(G/G/1)}$$

平均待ち時間に対する我々の近似の基本的な考え方は，EWを直接近似する代わりに，この比Rを解析可能な$G/G/s$のサブクラスに属する待ち行列（以下では，これを**基**(base)とよぶ）に対する比Rを用いて近似することにある。この近似の具体的な実現方法には様々な変形が考えられるが［4］，ここでは，特につぎの2つの近似関係式に着目する。

$$R(G/G/s) \simeq \sum_{\beta \in \boldsymbol{B}} \omega(\beta) R(\beta) \tag{3.1}$$

および

$$\frac{1}{R(G/G/s)} \simeq \sum_{\beta \in \boldsymbol{B}} \frac{\nu(\beta)}{R(\beta)} \tag{3.2}$$

ここで，$\boldsymbol{B}$は適当な基βの集合を表し，$\{\omega(\beta);\beta \in \boldsymbol{B}\}$および$\{\nu(\beta);\beta \in \boldsymbol{B}\}$は，基の重み係数を表す。

3.2　漸近的正当性

以下では，重み係数$\{\omega(\beta)\}$，$\{\nu(\beta)\}$はρに依存しないと仮定する。このとき，つぎの3つの定理が成り立つ。

定理 1　(Kimura［5］) もし

$$\sum_{\beta \in \boldsymbol{B}} \omega(\beta) = 1 \tag{3.3}$$

および

$$\sum_{\beta \in \boldsymbol{B}} \nu(\beta) = 1 \tag{3.4}$$

であれば，近似関係式(3.1)および(3.2)は$\rho \to 1$のとき漸近的に正確である。

この定理は，重い負荷の下で我々の近似が正当であるための1つの十分条件を与えている。このため，以下では(3.3)および(3.4)が成り立つことを仮定する。

定理 2　(Kimura［7］) $M/G/s$に対して，基として$\boldsymbol{B}=\{M/M/s, M/D/s\}$を選んだとき，もし

$$\omega(M/M/s) = \frac{2s}{s-1}\left\{1 - \frac{(s+1)\mu I(s)}{1+c_s^2}\right\} \tag{3.5}$$

および

$$\nu(M/M/s) = J(s) \equiv \frac{s+1}{s-1}\left\{\frac{1+c_s^2}{(s+1)\mu I(s)} - 1\right\} \tag{3.6}$$

であれば，近似関係式(3.1)および(3.2)は$\rho \to 0$のとき漸近的に正確である。ただし

$$I(s) = \int_0^\infty \{1 - B_e(t)\}^s dt, \quad s \geq 2$$

であり，$B_e(\cdot)$はBの定常残余寿命分布である。i.e.,

$$B_e(t) = \mu \int_0^t \{1 - B(u)\} du, \quad t \geq 0$$

この定理は定理1とは逆に，負荷が軽いときの我々の近似の正当性を保証する十分条件を与え

ている。

定理 3　(Kimura [5]) $M/G/s$に対して，基として$\boldsymbol{B}=\{M/M/s, M/D/s\}$を選んだとき，もし

$$\omega(M/M/s)=\frac{2c_s^2}{1+c_s^2} \tag{3.7}$$

および

$$\nu(M/M/s)=c_s^2 \tag{3.8}$$

であれば，近似関係式(3.1)および(3.2)は$s\to\infty$のとき漸近的に正確である。

定理3は，窓口数が非常に大きいときの我々の近似が正当であるための十分条件を与えている。

3.3　近似式の導出手順

(3.1)および(3.2)より，$EW(G/G/s)$に対して

$$EW(G/G/s)\simeq EW(G/G/1)\sum_{\beta\in\boldsymbol{B}}\omega(\beta)R(\beta) \tag{3.9}$$

および

$$EW(G/G/s)\simeq EW(G/G/1)\left(\sum_{\beta\in\boldsymbol{B}}\frac{\nu(\beta)}{R(\beta)}\right)^{-1} \tag{3.10}$$

が得られる。したがって，これらの式をEWに対する近似式として確定するためには

- いかに基を選ぶか?
- いかに重み係数を決定するか?
- いかに$EW(G/G/1)$を近似するか?

の3点が重要なポイントとなる。

基の選び方に関しては，いくつかの候補を挙げることができる。$M/G/s$に対しては,基として$\boldsymbol{B}=\{M/M/s, M/D/s\}$を用いるのが標準的だが，$G/G/s$に対しては,例えば

- $\boldsymbol{B}=\{M/M/s\}$
- $\boldsymbol{B}=\{M/M/s, M/D/s, D/M/s\}$
- $\boldsymbol{B}=\{G/M/s, M/D/s\}$
- $\boldsymbol{B}=\{G/M/s, G/D/s\}$

などが考えられる。

重み係数に関しては，定理1～3の十分条件を満たすように定めるべきであるが,それでもまだかなりの自由度が残される。そこで我々の近似では，定理1～3の条件に加えて

- 変動係数c_a^2とc_s^2に関して対称である

という発見的な条件を付加することにする。

また，$EW(G/G/1)$の近似に関してはいくつかの候補が挙げられるが，簡約な近似に限定すると

- 重負荷近似：

$$EW(G/G/1)\simeq\frac{c_a^2+c_s^2}{2}EW(M/M/1) \tag{3.11}$$

- Krämer & Langenbach-Belz (1976)の近似：

$$EW(G/G/1)\simeq\frac{c_a^2+c_s^2}{2}\,k\,EW(M/M/1) \tag{3.12}$$

ただし

$$k\equiv k(\rho, c_a^2, c_s^2)=\begin{cases}\exp\left\{-\dfrac{2(1-\rho)}{3\rho}\dfrac{(1-c_a^2)^2}{c_a^2+c_s^2}\right\}, & c_a^2<1\\[2ex] \exp\left\{-(1-\rho)\dfrac{c_a^2-1}{c_a^2+c_s^2}\right\}, & c_a^2\geq 1\end{cases}$$

- Marchal (1976)の近似：

$$EW(G/G/1)\simeq\frac{c_a^2+\rho^2c_s^2}{2}\frac{1+c_s^2}{1+\rho^2c_s^2}EW(M/M/1) \tag{3.13}$$

などが適当と考えられる。

3.4 近似式の実現

基，重み係数，$EW(G/G/1)$の近似を適当に組み合わせることで，複数の近似式を統一的に導出することが可能になる。それらの中で最も簡単な場合は，基として$\boldsymbol{B}=\{M/M/s\}$を，$EW(G/G/1)$の近似として(3.11)を用いる場合で，このとき，近似式

$$EW(G/G/s)\simeq\frac{c_a^2+c_s^2}{2}EW(M/M/s) \quad (3.14)$$

が得られる。(3.14)は，$M/G/s$に対するLee & Longton(1957)の近似式または$G/G/1$に対する(3.11)を$G/G/s$に拡張したものに相当する。また，Page (1972)，Boxma，Cohen & Huffels (1979)，Kimura[2，5，7，8]による近似式も，基と重み係数を適当に選ぶことで，以下に示すように(3,9)，(3,10)から導出できる。

Page (1976)の近似式

(3.9)において，基として$\boldsymbol{B}=\{M/M/s, M/D/s, D/M/s\}$を，$EW(G/G/1)$の近似として(3.11)を用いる。また，重み係数としては，(3 7)と変動係数の対称性より

$$\omega(M/M/s)=\frac{2c_a^2c_s^2}{c_a^2+c_s^2}$$

$$\omega(M/D/s)=\frac{c_a^2(1-c_s^2)}{c_a^2+c_s^2}$$

$$\omega(D/M/s)=\frac{(1-c_a^2)c_s^2}{c_a^2+c_s^2}$$

を用いると，Pageの近似式

$$\begin{aligned}EW\simeq\, & c_a^2c_s^2EW(M/M/s)\\ & +c_a^2(1-c_s^2)EW(M/D/s)\\ & +(1-c_a^2)c_s^2EW(D/M/s) \quad (3.15)\end{aligned}$$

が導かれる。

Boxma，Cohen & Huffels (1979)の近似式

$EW(M/G/s)$に対する近似式であり，(3.10)において，基として$\boldsymbol{B}=\{M/M/s, M/D/s\}$を，$EW(G/G/1)$の近似として(3.11)を用いる。重み係数として定理2で与えられる(3.6)を用いると，Boxma et al.の近似式

$$EW(M/G/s)\simeq \frac{1+c_s^2}{\dfrac{2J(s)}{EW(M/M/s)}+\dfrac{1-J(s)}{EW(M/D/s)}} \quad (3.16)$$

が導かれる。

Kimura［2］の近似式

(3.10)において，基として$\boldsymbol{B}=\{M/M/s, M/D/s, D/M/s\}$を，$EW(G/G/1)$の近似として(3.11)を用いる．また，重み係数としては，(3. 8)と変動係数の対称性より

$$\nu(M/M/s)=c_a^2+c_s^2-1$$

$$\nu(M/D/s)=1-c_s^2$$

$$\nu(D/M/s)=1-c_a^2$$

を用いると，Kimura［2］の近似式

$$EW\simeq \frac{c_a^2+c_s^2}{\dfrac{2(c_a^2+c_s^2-1)}{EW(M/M/s)}+\dfrac{1-c_s^2}{EW(M/D/s)}+\dfrac{1-c_a^2}{EW(D/M/s)}} \quad (3.17)$$

が導かれる。

Kimura［5］の近似式

Kimura［2］の近似式(3.17)は，その後の数値実験によって，$c_a^2>1$に対して不安定になることが判明した。これを改良するため，基として$\boldsymbol{B}=\{M/M/s, M/D/s, D/M/s\}$を，$EW(G/G/1)$の近似として(3.11)と(3.12)を組み合わせ

て用いることで，Kimura [5] は，$c_a^2 \leq 1$ に対しては

$$EW \simeq \frac{k(c_a^2+c_s^2)}{\dfrac{2(c_a^2+c_s^2-1)}{EW(M/M/s)}+\dfrac{1-c_s^2}{EW(M/D/s)}+\dfrac{k_{01}(1-c_a^2)}{EW(D/M/s)}} \tag{3.18}$$

一方，$c_a^2>1$ に対しては

$$EW \simeq (c_a^2+c_s^2-1)EW(M/M/s) + (1-c_s^2)EW(M/D/s)+\frac{1-c_a^2}{k_{01}}EW(D/M/s) \tag{3.19}$$

という近似式を提案している。ただし

$$k_{01} \equiv k(\rho, 0, 1) = \exp\left\{-\frac{2(1-\rho)}{3\rho}\right\}$$

である。(3.18)，(3.19)のいずれにおいても，重み係数は定理3に基づく。

Kimura [7] の近似式

基として$\boldsymbol{B}=\{G/M/s, M/D/s\}$を，$EW(G/G/1)$の近似としてはKimura [5] と同一の近似を用いることで，Kimura [7] は近似式

$$EW \simeq \begin{cases} (c_a^2+c_s^2)\left\{\dfrac{\omega}{c_a^2+1}EW(G/M/s)+(1-\omega)EW(M/D/s)\right\}, & c_a^2>1 \text{ かつ } c_s^2>1 \\ \dfrac{k(c_a^2+c_s^2)}{\dfrac{k_1(c_a^2+1)\nu}{EW(G/M/s)}+\dfrac{1-\nu}{EW(M/D/s)}}, & \text{その他} \end{cases} \tag{3.20}$$

を提案している。ただし

$$k_1 \equiv k(\rho, c_a^2, 1) = \exp\left\{-\frac{2(1-\rho)}{3\rho}\frac{(1-c_a^2)^2}{c_a^2+1}\right\}, \qquad c_a^2<1$$

であり，重み係数ωおよびνは定理2と変動係数の対称性に基づいて

$$\omega = 1-\frac{2(s+1)}{s-1}\left\{\frac{s\mu I(s)}{c_a^2+c_s^2}-\frac{1}{c_a^2+1}\right\} \tag{3.21}$$

$$\nu = 1+\frac{s}{s-1}\left\{\frac{c_a^2+c_s^2}{s\mu I(s)}-(c_a^2+1)\right\} \tag{3.22}$$

で与えられる。明らかに$M/G/s$に対しては，(3.20)は(3.16)と一致する。

Kimura [8] の近似式

基として$\boldsymbol{B}=\{G/M/s, G/D/s\}$を，$EW(G/G/1)$の近似としては(3.11)を用いることで，Kimura [8] は簡約な近似式

$$EW \simeq \begin{cases} \dfrac{c_a^2+c_s^2}{\dfrac{(c_a^2+1)c_s^2}{EW(G/M/s)}+\dfrac{c_a^2(1-c_s^2)}{EW(G/D/s)}}, & 1 \leq c_a^2 \leq 2 \\ c_s^2 EW(G/M/s)+(1-c_s^2)EW(G/D/s), & \text{その他} \end{cases} \tag{3.23}$$

を提案している。ここで，重み係数は定理3に基づく。

Kimuraの近似式 [5, 7, 8] は，基に含まれる情報が異なるために，計算の容易さ・近似精度・近似解の安定性に関して多少の差異は認められるものの，ほとんどの実用的な範囲のパラメータをもつシステムに対して，相対誤差にして，中程度の負荷の下では5％以内，重い負荷の下では1％以内の近似精度をもつことが，数多くの数値実験によって確かめられている。

3.5 $M/M/s$を基とする近似

$M/M/s$以外の基を$M/M/s$を用いて近似できれば，$EW(G/G/s)$に対する近似式を$EW(M/M/s)$のみを含む形で表現できる。これを$M/M/s$を基とする近似($M/M/s$-based approximation)とよぶことにしよう。この試みは$G/D/s$のサブクラス($c_a^2 \leq 1$)に対しては成功しているが[6,8]，それ以外の基に対しては未解決である。

Kimura[3]は，$EW(M/D/s)$の$M/M/s$を基とする近似のサーベイと精度評価を行い，$\rho \to 0$または$s \to \infty$のときに正確な漸近的性質を有する近似式がないことを指摘している。この結果を受けてKimura[6]は，ρおよびsに関する正確な漸近的性質をもつ$M/M/s$を基とする近似式として

$$EW(M/D/s) \simeq \gamma_D(s,\rho) EW(M/M/s) \tag{3.24}$$

ただし

$$\gamma_D(s,\rho) = \frac{1}{2}\{1+f(s)g(\rho)h(s,\rho)\} \tag{3.25}$$

を提案している。ここで

$$f(s) = \frac{(s-1)(\sqrt{4+5s}-2)}{16s}$$

$$g(\rho) = \frac{1-\rho}{\rho}$$

であり，2変数関数$h(s,\rho)$は

$$\xi(s,x) = \sqrt{1-\exp\left(-\frac{2x}{s-1}\right)}, \quad x \geq 0$$

$$\eta(y,\rho) = 1-\exp\left(-\frac{\rho y}{1-\rho}\right), \quad y \geq 0$$

$$a(\rho) = \frac{25.6}{\{g(\rho)\eta(\bar{b},\rho)\}^2}$$

$$b(s) = \frac{s-1}{(s+1)f(s)\xi(s,\bar{a})}$$

とおいたとき

$$h(s,\rho) = \xi(s,a(\rho))\eta(b(s),\rho)$$

で定義される。ただし，$\bar{a}$，$\bar{b}$は関係式

$$\bar{a}\bar{b}^2 = 25.6$$

を満たす正の定数であり，数値実験による検証の結果として

$$\bar{a} = 2.2, \quad \bar{b} = \sqrt{\frac{25.6}{2.2}}$$

を用いたとき，最良の結果が得られることが確かめられている。

また，Kimura[8]は，関係式

$$EW(E_m/D/s) = EW(M/D/sm), \quad m \geq 1$$

を用いて，$c_a^2 \leq 1$に対する$EW(G/D/s)$の$M/M/s$を基とする近似

$$EW(G/D/s) \simeq q_m \gamma_D(sm,\rho) EW(M/M/sm) + (1-q_m)\gamma_D(s(m+1),\rho) EW(M/M/s(m+1)) \tag{3.26}$$

を提案している。ただし

$$q_m = m\{(m+1)c_a^2 - 1\}$$

であり，mは与えられたc_a^2に対して不等式

$$\frac{1}{m+1} < c_a^2 \leq \frac{1}{m}$$

を満たす自然数である。明らかに，$c_a^2 = 1$のとき(3.26)は(3.24)と一致する。

4 定常状態確率に対する近似

定常状態における任意時点のシステム内の客数をLで表し，定常状態確率を$P_j = P\{L=j\}$ ($j \geq 0$)で表すことにする。前節で求めたEWや，$G/G/s$で成り立つ種々の保存則，さらにはρやsに関する漸近的性質と整合する$\{P_j\}$の近似式を導くことはそれほど容易ではない。$G/G/s$に関する理論的研究は未成熟であり，当面，ポアソ

ン到着過程を仮定すること，i,e.，$M/G/s$から始める必要がある。

$\{P_j\}$に対する近似を導くこれまでのアプローチは，そのほとんどが(i) $L\le s$のときには$G/G/\infty$，(ii) $L>s$のときには$G/G/1$を適用して，その後両者を接続するという基本考え方の下で構成されていた。この考え方自体は単純であると同時に非常に強力だが，$\{P_j\}$の近似式を実際に導出するにあたっては，かなり細かい注意を必要とする。これまでに得られた結果としては，大きさ$r(\ge 0)$の待合い室をもつ$M/G/s/r$の定常状態確率 $\{P_j ; j=0,\ldots,s+r\}$ に対する近似式［9］と，$M/G/s$の待ち確率

$$\Pi(M/G/s)\equiv P\{W>0\}=\sum_{j\ge s}P_j$$

に対する［9］よりも改良された近似式［10］を導出している。これらの結果だけを示しておこう。

Kimura［9］は，$\rho\le 1$のときの$M/G/s/r$の定常状態確率の近似式として

$$P_j\simeq\begin{cases}\dfrac{(s\rho)^j}{j\,!}P_0, & j=0,\ldots,s-1\\[2mm] \dfrac{(s\rho)^s}{s\,!}\dfrac{1-\xi}{1-\rho}\xi^{j-s}P_0, & j=s,\ldots,s+r-1,\ \rho<1\\[2mm] \dfrac{s^s}{s\,!}\dfrac{2}{1+c_s^2}P_0, & j=s,\ldots,s+r-1,\ \rho=1\\[2mm] \dfrac{(s\rho)^s}{s\,!}\xi^rP_0, & j=s+r\end{cases}\tag{4.1}$$

を提案している。ただし

$$P_0\simeq\begin{cases}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{s-1}\frac{(s\rho)^j}{j\,!}+\frac{(s\rho)^s}{s\,!}\frac{1-\rho\xi^r}{1-\rho}\right)^{-1}, & \rho<1\\[2mm] \left(\displaystyle\sum_{j=0}^{s-1}\frac{s^j}{j\,!}+\frac{s^s}{s\,!}\frac{2r}{1+c_s^2}\right)^{-1}, & \rho=1\end{cases}\tag{4.2}$$

$$\xi=\frac{\rho\gamma_G}{1-\rho+\rho\gamma_G}\tag{4.3}$$

であり，$\gamma_G\equiv\gamma_G(s,\rho)$は

$$\gamma_G(s,\rho)=\frac{\gamma_D(s,\rho)\,(1+c_s^2)}{\{2\gamma_D(s,\rho)-1\}\ J(s)+1}\tag{4.4}$$

で定義され，$\gamma_D(s,\rho)$および$J(s)$は，それぞれ，(3.25)および(3.6)により与えられる。

Kimura［9］の結果の特別な場合($r=\infty$)として，$\rho<1$のとき(4.1)より，$M/G/s$の待ち確率を

$$\Pi(M/G/s)\simeq\Pi(M/M/s)\tag{4.5}$$

と近似できる。これにさらに改良を加えて，Kimura［10］では，$M/M/s$を基とする２つの近似式

$$\Pi(M/G/s)\simeq\frac{2\gamma_G(s,\rho)}{2(1-\rho)s\mu I(s)+(1+c_s^2)\rho}\Pi(M/M/s)\tag{4.6}$$

および

$$\Pi(M/G/s)\simeq\left(\frac{1-\rho}{s\mu I(s)}+\frac{2\rho}{1+c_s^2}\right)\gamma_G(s,\rho)\Pi(M/M/s)\tag{4.7}$$

を提案している。

5　近似の３原則

待ち行列に限らず，近似が意味をもつ，いいかえれば，近似としてのidentityをもつのはいかなる場合であろうか。厳密解が容易に求まる問題に対して近似を論ずるのは無意味であるし，かといって厳密解が求まらない問題であれば，どのような近似でも意味をもつという訳でもない。近似を行うにあたっては，やはり何らかの原則あるいは規準をおく必要があるだろう。以下の３つの原則は筆者の個人的なよりどころであり，その重要度の順に並べてある。

原則1　近似はその必要性(necessity)があること

原則2　近似は**正確**(accurate)であること

原則3　近似は**美的**(art)であること

原則1および2については,近似の原則として挙げることには大きな異論はないと思われる。原則1は自明であるし，原則2は近似を行う者にとっては時として過酷ではあるが避けて通れない規準である。計算量に大きな差がない限り，近似精度の高い近似が良い近似であり，近似精度が相対的にでも低い近似は，それ自身の存在を否定されても文句はいえない原則の世界である。この意味では非常に殺伐とした世界ともいえるが，これに対する救いが原則3である。美的であるかどうかの判断基準は人によってもかなり異なるため，**簡約**(simple)であること，といった別の規準と比べても原則3には曖昧さが残っていることは否定できない。それでもなおこの原則にこだわるのは，結局筆者の好みの問題かもしれない。

本講演のアプローチを適用して得られた近似の中で，以上3原則を最も完全に具現化しているのは，Kimura［2］における$M/G/s$の平均待ち時間に対する近似

$$EW(M/G/s) \simeq \frac{1+c_s^2}{\dfrac{2c_s^2}{EW(M/M/s)}+\dfrac{1-c_s^2}{EW(M/D/s)}} \tag{5.1}$$

である。Kimura [5,8] の$EW(G/G/s)$の近似においてポアソン到着を仮定すると，いずれも(5.1)に帰着される。$EW(M/G/s)$に対して(5.1)よりも正確で美的な近似式を得るのは，たぶん困難であろうというのが筆者の見解である。

6　近似の作り方：他山の石

$G/G/s$の近似に対するアプローチには，本講演のアプローチ以外にもいくつかの方法が知られている。いずれも興味深いものであるが，残念ながら論文としての完成度は必ずしも高いとはいえない。ここでは，異なるアプローチによる2編の論文を取り上げ，筆者自身への自戒を込めてそれらの問題点を探ってみたい。

"A Diffusion Approximation to the Multi-Server Queue" by B. HALACHMI AND W. R. FRANTA (*Management Science*, 1978)

拡散近似を複数窓口待ち行列に適用した最初の論文であり，既に何冊かの待ち行列のテキストにもその内容が紹介されているが，現時点で見直してみると,荒削りという印象を拭えない。本来離散的な$G/G/s$の系内客数過程を，適当な拡散パラメータをもつ拡散過程で連続近似するというアイディアは，数理生物学などにも見られる古典的なものであるが，$G/G/s$の特性を考慮した境界条件と拡散パラメータに対する工夫が足りないように思われる。この点に関しては，Kimura［1］をはじめとしていくつかの改善案が提案されているが，近似精度を大きく改善するには至っておらず,拡散近似モデル全般の近似精度に対する不信感につながっているように思われる。拡散過程の連続分布から元の系内客数過程の離散分布を抽出する方法についても，より一般的な枠組みの中での考察が必要である。$G/G/s$という広いクラスの待ち行列全体にわたる近似精度の検証は，際限のない厄介な問題である。この論文の数値例は量的に不十分で，しかも数値計算には明らかな誤りがある。論文としての枚数制限の中で,できうる限り広範な近似精度検証用の$G/G/s$の実用最小サブクラスに関する議論が必要である。

"Maximum Entropy Analysis of Multiple-Server Queueing Systems" by J.-S. WU AND W. C. CHAN (*Journal of the Operational Research Society*, 1989)

最大エントロピー法を複数窓口待ち行列に適用した論文であり，待ち行列の背景にある確率過程の構造に立ち入ることなしに，定常状態確率分布のエントロピーを待ち行列に特有の制約の下で最大化するというアイディアは，単純だが待ち行列の本質を別の視点から的確にとらえている点で非常に興味深いものがある。最大エントロピー法による近似解析は，数学的には上に述べた制約付き極値問題をラグランジュ乗数法などで解くことに相当するが，$G/G/s$の定常状態確率の近似として位置づけるためには，制約式として何を何本選ぶかといった議論がもっとなされてしかるべきである。この点についてこの論文は不十分である。また，制約式に関連したラグランジュ乗数は，ある非線形連立方程式の解として与えられるが，この論文では定常状態確率分布の裾の漸近的性質を用いて，解の導出を巧妙に避けている。この段階で近似の性質は，最大エントロピー法からより発見的なものへ変質しているが，その違いがどの程度のものかを定量的に示す必要がある。近似精度の検証は前論文と同様にこの論文でも不十分であり，しかも待ち客数の代わりに系内客数で比較するなど，意図的に見かけ上の近似精度を上げている節がある。

他山の石以て玉を攻むべし。

7　あとがき

ORのテキストの中で待ち行列を扱うとき，出生死滅過程以外の数学的道具を持ち込むことは相当の困難を伴う。とりわけ学部レベルの講義では，その度合いが顕著である。ORにおける待ち行列の意思決定手法としての最も初等的な適用例は，ある評価基準の下で窓口数sをいかに決定するかという問題であるが，この程度の問題に対してさえ，$M/M/s$だけでは現実的な意味で説得力のある例題を作ることは非常に難しい。少なくとも$M/G/s$の枠組みでの議論が必要となる。$M/M/s$を基とする近似の有用性は，こういった面にも見いだすことができる。

最後に，1989～1990年にかけて文部省在外研究員派遣により米国Rochester大学に滞在中，受賞論文［5］をまとめる際にお世話になった住田潮教授（国際大学/Rochester大学），ならびに東京工業大学在職時からいつも適切な助言を頂く日本OR学会待ち行列研究部会のメンバーの方々に感謝します。

参考文献

[1] Kimura, T., "Diffusion approximation for an *M/G/m* queue," *Operations Research*, **31** (1983), 304−321.

[2] Kimura, T., "A two-moment approximation for the mean waiting time in the *GI/G/s* queue," *Management Science*, **32** (1986), 751−763.

[3] Kimura, T., "Approximations for the mean delay in the *M/D/s* queue," *Proceedings of the Seminar on Queueing Theory and Its Applications*, pp.173−184, Kyoto, May 11−13, 1987.

[4] Kimura, T., "Heuristic approximations for the mean delay in the *GI/G/s* queue," *Economic Journal of Hokkaido University*, **16** (1987), 87−98.

[5] Kimura, T., "Approximations for the waiting time in the *GI/G/s* queue," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **34** (1991), 173−186.

[6] Kimura, T., "Refining Cosmetatos' approximation for the mean waiting time in the *M/D/s* queue," *Journal of the Operational Research Society*, **42** (1991), 595−603.

[7] Kimura, T., "Approximating the mean waiting time in the *GI/G/s* queue," *Journal of the Operational Research Society*, **42** (1991), 959−970.

[8] KIMURA, T., "Interpolation approximations for the mean waiting time in a multi-server queue," *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **35** (1992), 77−92.

[9] KIMURA, T., "Approximating the steady-state probabilities in the finite capacity $M/G/s$ queue," in preparation.

[10] KIMURA, T., "Delay probability in the $M/G/s$ queue: two approximations," to be presented at *Australia-Japan Workshop on Stochastic Models in Engineering, Technology & Management*, Gold Coast, July 14−16, 1993.