経済学研究　42-3
北海道大学　1992. 12

＜研究ノート＞

一般化された凸関数とレベル集合

田　中　嘉　浩

1　序　論

最適性の十分条件や双対性の理論との関連において Mangasarian [8] によって提案された準凸（quasiconvex）・擬凸（pseudoconvex）関数は，分数計画や経済理論に広く応用されてきた。

今から15年程前，Zang, Choo and Avrielは局所最小点が大域最小点になるための必要十分条件の導出に続いて，停留点が大域最小点になる関数のクラスの特徴付け [16] を行った。一方，Hanson [5] は微分可能な関数について，Kuhn-Tucker 条件が最適性の十分条件になる関数のクラス（invex関数；"invex"は"invariant convex"の略）を定義した。この頃微分不可能な関数の最適化問題を扱う手段が一般勾配を手がかりにしてClarke [1] らによって整えられてきた。この流れをうけて，Tanaka [12] は invex になるための必要十分条件は関数のレベル集合が狭義下半連続になることであることを局所リプシッツ連続かつ正則な関数の枠組で証明した。さらに，Yen, Sach and Phuong [14] は [12] に刺激されてより一般の（正則の仮定を設けない）局所リプシッツ連続の関数の枠組で，レベル集合の狭義下半連続性を深く考察している。CravenやReiland [10] によるベクトル値関数への一般化も注目すべき方向である。

現在のところ一般勾配等Clarkeの理論を扱っている教科書（日本語）は少なく，一般化された凸関数の話が扱われることはより少ない。本稿ではこれらの一般化された凸関数について，レベル集合に重点をおいてまとめ，今後のこの分野の方向性を探る。

2　準　備

この分野を論ずるために常識となっている概念に限って簡単に説明しておく。

レベル集合：　R^nの開部分集合Cを含む$X=R^n$で定義された実数値関数$f(x)$に対し，点-集合写像

$$L_f(\alpha)=\{x\in C \mid f(x)\leq\alpha\},\ \alpha\in R, \quad (1)$$

をfのレベル集合という。また，$L_f(\alpha)\neq\phi$なるαの集合を実効領域G_fという。

Mangasarian [8] は凸関数の一般化として次の2種類を考えた。

準凸：　R^nの集合X上で定義された実数値関数$f: R^n\to R$が$x\in X$で，

$$f(x)\leq f(x_0)\Rightarrow f((1-\lambda)x_0+\lambda x)\leq f(x_0), \quad (2)$$

$\lambda\in[0,1], (1-\lambda)x_0+\lambda x\in X$が成立するとき，$f$を$X$上で準凸という。

準凸関数は連続である必要すらなく，レベル集合が凸である性質がある。準凹関数$(-f)$を含めると経済学への応用は広い。尚，

$$f(x)<f(x_0) \Rightarrow f((1-\lambda)x_0+\lambda x)<f(x_0),$$

$\lambda \in (0,1)$が成立するとき，狭義の（或いは半）準凸関数といい，局所最小点が大域最小点になる性質をもつ。しかしながら局所最小点が大域最小点になる関数は狭義準凸とは限らない。

擬凸： R^nの集合X上で定義された微分可能な実数値関数$f: R^n \to R$が$x \in X$で，

$$\nabla f(x_0)(x-x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0), \qquad (3)$$

が成立するとき，fをX上で擬凸という。

つまり，方向微係数が非負の方向には関数値の増加が非負である関数である。擬凸ならば準凸であるが，逆は成立しない。
代表的には線形分数関数はその定義域で擬凸かつ擬凹である。

微分不可能な（滑らかでない）関数に対しては，次の仮定が設けられることも多い。

正則： 一般化された方向微係数 $f^0(x;d) = \limsup_{y \to x;\, t \downarrow 0} [f(y+td)-f(y)]/t$が方向微係数 $f'(x;d) = \lim_{t \downarrow 0} [f(y+td)-f(y)]/t$が共に存在し，$\forall d \in R^n$について等しい，即ち$f^0(x;d) = f'(x;d)$の時，$f$は点$x$に於いて，正則という。局所リプシッツ連続関数では$f^0(x;d)$は矛盾なく定義されており，$d$に関して正斉次性かつ劣加法性をもつ。この時，一般勾配(generalized gradient) $\partial f(x) = \{\xi \in R^n \mid f^0(x;d) \geq \xi^T d\}$はコンパクト凸集合になり，

$$f^0(x;d) = \max\{\xi^T d \mid \xi \in \partial f(x)\}, \qquad (4)$$

と書けることと合わせて，Clarkeの理論の基礎となっている。正則であれば，$f^0(x;d)$は$f'(x;d)$で置き換えられる。

3 一般化された凸関数とレベル集合

今後特に断らない限り，局所リプシッツ連続関数の枠組で考える。この節ではCがX自身であるとする。

invex（拡張）： fが各$x \in X$に対して，$\eta \in X$が存在して，

$$f(x)-f(x_0) \geq f^0(x_0;\eta), \qquad (5)$$

を満たす時，点 $x_0 \in X$でinvex（[5]の拡張）という。

Yen, Sach and Phung [14] による結果を証明と共に示す。証明は，[13]での証明の一般化になっている。

定理 1[14]. 関数fがXでinvexであるための必要十分条件は，fのどの停留点も大域最小点であることである。

［証明］ 必要性は$0 \in \partial f(x_0)$ならば，$f(x)-f(x_0) \geq f^0(x_0;\eta) \geq 0$が成立する$\eta$が存在することからいえる。
十分性はηの存在をいえばよい。$0 \in \partial f(x_0)$ならば$\eta=0$としていい。そこで$0 \notin \partial f(x_0)$の場合を考える。この場合，$\partial f(x_0)$は0を含まないXのコンパクト凸集合となるので，分離定理により，

$$\gamma := \sup\{w_0^T x^* \mid x^* \in \partial f(x_0)\} < 0$$

なる$w_0 \in X$の存在がいえる。そこで$f^0(x_0;w) = \gamma < 0$とおく。$f(x)-f(x_0) \geq \gamma t$となる様に$t>0$を選べるので，$\eta = tw_0$とできる。 ■

例 1. $f: R^2 \to R,\ f(x) = -x_2^2 + e^{x1}$.

この関数には停留点が存在しないが，上の証明からinvexといえる。

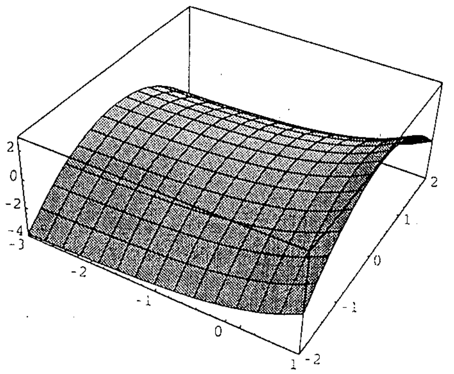

図1.例1の関数

レベル集合の下半連続性が局所最小点が大域最小点になる為の必要十分条件になることは知られてきた。停留点を扱うにはもう少しきつい半連続性が必要である [16]。

狭義下半連続 (strictly lower semi-continuous)：どの点 $\bar{x}\in L_f(\bar{\alpha})$ とどの点列 $\{\alpha^i\}\subset G_f$, $\alpha\to\bar{\alpha}$ に対しても実数 $\beta(\bar{x})>0$, 自然数 K, 点列 $\{x^i\}$, $x^i\to\bar{x}$ が存在して,

$$x^i\in L_f[\alpha^i-\beta(\bar{x})\ \|x^i-\bar{x}\|]\text{for all } i\geq K, \tag{6}$$

が成立する時, 点-集合写像 $L_f(\cdot)$ は点 $\bar{\alpha}\in G_f$ で狭義下半連続という。G_f のどの点でも狭義下半連続の時, G_f 上で狭義下半連続という。

定理 2. 局所リプシッツ連続かつ正則な関数 f がinvexになる為の必要十分条件は, 点-集合写像 $L_f(\cdot)$ が狭義下半連続であることである。

[証明] [16] で定義された yー方向微分

$$\delta(x,y)=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x^k)-f(x)}{\|x^k-x\|},$$

$$(y=\lim_{k\to\infty}\frac{x^k-x}{\|x^k-x\|}\ ;\ x^k\to x)$$

の存在をいえばいい。今 $x^k=x+\alpha^k y^k(\alpha^k>0, \alpha^k\to 0, \|y^k\|=1)$ とおくと,

$$y^k\to y \text{ as } k\to\infty, \tag{7}$$

となる。f の正則性から $f'(x;y)$ が存在して,

$$\delta(x,y)-f'(x;y)=\lim_{k\to\infty}\frac{f(x^k)-f(x)}{\|x^k-x\|}-\lim_{\alpha^k\downarrow 0}\frac{f(x+\alpha^k y)-f(x)}{\alpha^k}$$

$$=\lim_{\alpha^k\downarrow 0}\frac{f(x^k+\alpha^k y^k)-f(x+\alpha^k y)}{\alpha^k} \tag{8}$$

f は局所リプシッツ連続であるから,

$$\frac{|f(x+\alpha^k y^k)-f(x+\alpha^k y)|}{\|\alpha^k y^k-\alpha^k y\|}\leq M, \tag{9}$$

なる $M>0$ が存在する。(7), (9) から,

$$\frac{|f(x+\alpha^k y^k)-f(x+\alpha^k y)|}{\alpha^k}\leq M\ \|y^k-y\|\to 0 \text{ as } k\to\infty,$$

即ち, (8) より $\delta(x,y)=f'(x;y)$ となる。
よって定理1と[16]の系2.1により結果が従う。■

正則でなければ十分性は言えない。そこでYen, Sach and Phuong [14] は, 狭義下半連続性の成立条件をより詳しく考察している。正則性を仮定しなければ必ずしも通常の方向微係数が存在しないことをまず考慮しなければならない。実際のところ yー方向微分も必ずしも存在しない。

Diniの下方微係数： f の x_0 での v 方向へのDini の下方微係数は,

$$d^-f(x_0;v)=\lim_{t\downarrow 0}\inf\ [f(x_0+tv)-f(x_0)]\ /t, \tag{10}$$

となる。[11]等に見られる様にこの微係数は局所リプシッツ計画問題での正確なペナルティ関数のパラメータの下界値の導出にも利用できる。

定理 3[14]. 局所リプシッツ連続な関数fに対して，写像$L_f(\cdot)$がG_f上で狭義下半連続であるための必要十分条件は，大域最小点でないどの停留点$\bar{x}$でも，

$$d^- f(\bar{x};v) < 0, \tag{11}$$

なる方向vが存在することである。 ■

例 2. $f: R \to R, f(x) = -|x|$.

この関数は定理3を満たすのでレベル集合は狭義下半連続であるが，invexではない。

ところで任意の点の近傍で上に有界な凸関数は局所リプシッツ連続かつ正則なので，正則の枠組の下での一般化は有意義である。

擬凸(semiconvex)：R^nの集合X上で定義された局所リプシッツ連続かつ正則な実数値関数$f: R^n \to R$が$x \in X$で，

$$f'(x_0; x-x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(x_0), \tag{12}$$

が成立するとき，fをX上で擬凸(semiconvex)［9］という。

fが微分可能ならば2節の擬凸の定義に勿論等しい。

この枠組の下で次の定理が成立する。

定理 4. 局所リプシッツ連続かつ正則な関数fが擬凸（semiconvex）であるための必要十分条件は，fが準凸かつinvexであることである。

［証明］ 準凸かつinvexであることの必要性は背理法等により簡単に示すことができるので省略し，十分性のみを示す。

$0 \in \partial f(x_0)$であれば (12) は定理1より明らかなので，$0 \notin \partial f(x_0)$とする。$f'(x_0;x_1-x_0) > 0$ならば，fの準凸性及びある$x' \in l_x := \{x \mid x = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1, 0 \leq \lambda \leq 1\}$に対して$f(x') > f(x_0)$となることから，$f(x_1) \geq f(x') > f(x_0)$となり，(12) は成立する。そこで$f'(x_0;x_1-x_0) = 0$の場合を考える。全平面は超平面

$$H := \{x \mid \xi^T(x-x_0) = 0\},$$

$$(0 \neq)\, \xi \in \partial f(x_0),\ \xi^T(x_1-x_0) = 0,$$

によって，$H^+ := \{x \mid \xi^T(x-x_0) > 0\}$と$H^- := \{x \mid \xi^T(x-x_0) < 0\}$に分離される。

その時，$x \in H^+$に対しては$f'(x_0;x-x_0) \geq \xi^T(x-x_0) > 0$から$f(x) > f(x_0)$となるので，$H^+$と$L_f(f(x_0))$は共通部分をもたない。$x_1$が$H$上にあることと$f$の連続性により，$f(x_1) \geq f(x_0)$となり，(12)が成立する。よって$f$は擬凸(semiconvex)になる。 ■

4　さらなる一般化の方向

4.1 領域制約の考慮

Xの任意の閉部分集合Cでの結果への一般化が考えられる。これから，$x^i \xrightarrow{C} \bar{x}$で$x^i \to \bar{x}$かつ$x^i \in C$を表すものとする。次の3つの接錐を定義する。

$T'_C(x_0) = \{v \in X \mid t_i \downarrow 0, v_i \to v$が存在して，任意の$i$に対して$x_0 + t_i v_i \in C$を満たす$\}$,

$\hat{T}_C(x_0) = \{v \in X \mid$ある$v_i \to v$が存在して，任意の$t_i \downarrow 0$, 任意の$i$に対して$x_0 + t_i v_i \in C$を満たす$\}$,

$T_C(x_0) = \{v \in X \mid$任意の$\varepsilon > 0$, ある$\delta > 0, \lambda > 0$に対して，任意の$x' \in [x_0 + \delta\bar{B}] \cap C, t \in (0,\lambda)$に対して$[x' + t(v + \varepsilon\bar{B})] \cap C \neq \phi$を満たす(但し$\bar{B}$は$X$における単位球)$\}$.

ここで，$T_C(x_0)$はClarkeの接錐，$T'_C(x_0)$はBouligandの接錐といわれており，$T_C(x) \subseteq \hat{T}_C(x)$

$\subseteq T_C^{\prime}(x)$の関係がある。$T_C(x)=T_C^{\prime}(x)$であればxで正則である。

$T_C(x_0)$の双対錘は次式で定義される。

$$N_C(x_0)=\{x^*\in X \mid x^{*T}v\leq 0 \text{ for all } v\in T_C(x_0)\}$$

停留点：点 $x_0 \in C$が，

$$0\in\partial f(x_0)+N_C(x_0), \tag{13}$$

を満たす時，fのC上の停留点という。

定理 5 [14]．局所リプシッツ連続な関数fに対して，写像$L_f(\cdot)$がG_f上で狭義下半連続ならば，大域最小点でないどの停留点$\bar{x}$でも，

$$d^-f(\bar{x}\,;\,v)<0, \tag{14}$$

なる方向$v\in T_C^{\prime}(\bar{x})$が存在する。また，任意の$x\in C$に対し，$\hat{T}_C(x)=T_C^{\prime}(x)$，即ち$C$が弱正則である時，逆が成り立つ。 ∎

領域制約のある場合はCの形状自体が狭義下半連続性を左右することがあるのは興味深い。

4.2 ベクトル値関数への一般化

局所リプシッツ関数の枠組でのこの一般化は最近Reiland [10] らによって考えられている。基本的にはKを凸錘として，invex（拡張）を

$$f(x)-f(x_0)-f^0(x_0;\eta)\in K, \tag{15}$$

なるηが存在することと定義することにより，ベクトル値関数$f:X\to Y, Y=R^m$に拡張する考え方である。2節の定義は$Y=R$, $K=R_+$という特殊な場合だと考えればよい。簡単のため，$K^+:=-K^-$（後述）$\subseteq R^m_+$と仮定すると，上の定義は

$$\partial f(x_0)=\partial f_1(x_0)\times\cdots\times\partial f_m(x_0),$$

を用いて

$$f(x)-f(x_0)-\Xi^T\eta\in K, \forall\Xi\in\partial f(x_0), \tag{16}$$

と定義するのと同値である。次の定理が出発点になる。

定理 6[10]．Cを凸錐とし，関数f_0がx_0で(13)を満足するとする。この時，$f=(f_0,x)$が$K=R_+\times(-C)$に対して(15)の意味でinvexならば，x_0はC上でf_0を最小化する。 ∎

[10]では数種のinvexityが定義され，その最も一般的な形は

$$w^T(f(x)-f(x_0))\leq w^T f^0(x_0;\eta), \forall w\in K^-,$$

但し$K^-=\{w\in Y \mid w^Ty\leq 0, \text{for all } y\in K\}$，なる$\eta$が存在することとして定義されているが，ここまで拡張するとKuhn-Tucker条件の逆は成立しない（(15) に対しては成立する）[15]。またベクトル値関数へのレベル集合の一般化はなされていないが，正則の仮定を設ければ意味のある結果につながるかもしれない。ベクトル値化はさらなる研究が望まれる方向である。

5 コメント

凸関数の一般化には大別して2通りの方法がある。一つは準凸関数にみられる様に関数のレベル集合の凸性（よって連結性も）を保つやり方である。もう一つはinvex関数にみられる様にレベル集合への点-集合写像のある種の下半連続性を保つやり方である（invexよりは広い関数も含む）。定理 4に示された様に局所リプシッツ連続かつ正則の枠組の下ではこの共通部分として性質のいい擬凸（semiconvex）関数が得られる。この結果の一般化もおそらく可能であろうと思われ，現在検討中である。

今回は割愛したが，Hackman and Passy [4] は凸集合の自然な拡張としてP-凸集合（“P-convex”は“Projectively-convex”の略）を定義し，レベル集合がP-凸になる関数をP-凸関数として

定義している。分離可能な準凹関数の和や積(正の場合)がP-凹関数(凹の場合は逆向きのレベル集合で定義できる)になるので消費者理論に応用できるが，この関数と前節迄の関数との関係を調べるのも一つの課題である。

話は変わるが，Jeroslow［6］は離散計画への凸性の影響，Lovász［7］は集合関数の劣モジュラ性と凸性の関係を調べているが，一般化された凸性にこれらがどう対応するかは興味深いところである。

参考文献

[1] F.H.Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley-Interscience, New York, 1983.

[2] W.E.Diewert, M.Avriel and I.Zang, "Nine kinds of quasiconcavity and concavity", *Journal of Economic Theory* **25** (1981) 397—420.

[3] 福島雅夫，非線形最適化の理論，産業図書 (1980).

[4] S.T.Hackman and U.Passy, "Projectively-convex sets and functions", *Journal of Mathematical Economics* **17** (1988) 55—68.

[5] M.A.Hanson, "On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **80** (1981) 545—550.

[6] R.Jeroslow, "Some influences of generalized and ordinary convexity in disjunctive and integer programming", in *Generalized Concavity in Optimization and Economics*, (S.Schaible and W.T.Ziemba, eds.), Academic Press, New York, 1981, 689—699.

[7] L.Lovász, "Submodular functions and convexity", in *Mathematical Programming: The State of the Art*, (A.Bachem et al., eds.), Springer, Berlin, 1983, 235—257.

[8] O.L.Mangasarian, *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York, 1969, (関根訳，非線形計画法，培風館，1972).

[9] R.Mifflin, "Semismooth and semiconvex functions in constrained optimization", *SIAM Journal on Control and Optimization* **15** (1977) 959—972.

[10] T.W.Reiland, "Generalized invexity for nonsmooth vector-valued mappings", *Numerical Functional Analysis and Optimization* **10** (1989) 1191—1202.

[11] E.Rosenberg, "Exact penalty functions and stability in locally Lipschitz programming", *Mathematical Programming* **30** (1984) 340—356.

[12] Y.Tanaka, "Note on generalized convex functions", *Journal of Optimization Theory and Applications* **66** (1990) 345—349.

[13] Y.Tanaka, M.Fukushima and T.Ibaraki, "On generalized pseudoconvex functions", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **144** (1989) 342—355.

[14] N.D.Yen, P.H.Sach and T.D.Phuong, "Strict lower semicontinuity of the level sets and invexity of a locally Lipschitz function", manuscript 1992.

[15] N.D.Yen and P.H.Sach, "On locally Lipchitz vector-valued invex functions", manuscript 1992.

[16] I.Zang, E.V.Choo and M.Avriel, "On functions whose stationary points are global minima", *Journal of Optimization Theory and Applications* **22** (1977) 195—208.