経済学研究　*43-1*
北海道大学　1993.6

垂直的差別化，ヘクシャー・オリーン定理，そしてレオンチェフ・パラドックス

千　葉　隆　生

1．序文

従来の二国二財二要素の国際貿易モデルでは，相対的に資本が豊富な国は，資本集約財を輸出し，労働が豊富な国は労働集約財を輸出する。これはヘクシャー・オリーン定理と呼ばれ，メルビン(Melvin, J. R., 1968)やサムエルソン等(Dornbusch, R., Fischer, S. and P. A. Samuelson, 1980)が主張するように，基本的には多数財モデルにおいても成立する。すなわち，ネットでは，相対的に資本が豊富な国は，資本集約財の輸出国であり，労働が豊富な国は労働集約財の輸出国である。これらの貿易モデルは，産業間貿易を説明する。

しかし，現実には，類似した財を互いに輸出入する産業内貿易が，多くの国家間で行なわれている。近年，このような貿易を差別化された財で説明するモデルが提示されてきた。クルグマン（Krugman, P., 1979）は水平的に差別化された財で産業内貿易を説明する国際貿易モデルを提示した。すなわち，財は，色，デザイン，ブランドなどにより差別化されており，消費者は財の種類が多いほど高い満足を得る効用関数をもつ。それ故，国際貿易により財の種類が増えるため，貿易の利益が生じ，産業内貿易が成立する。さらに，クルグマン（1981）はこのようなモデルを発展させ，二産業のケースで，産業内貿易モデルにおいても，ヘクシャー・オリーン定理が基本的には成立することを示した。すなわち，資本豊富国は，ネットでは，資本集約的な産業に属する財の輸出国であり，労働豊富国は，労働集約的な産業に属する財の輸出国となる。

しかし，クルグマンのモデルでは，低級品と高級品のような質による差異，すなわち，垂直的差別化を説明することはできない。そこで，フラム・ヘルプマン(Flam, H. and E. Helpman, 1987)とファルベイ・キーツコフスキイ(Falvey, R. E. and H. Kierzkowski, 1987)は，垂直的に差別化された財で産業内貿易を説明する国際貿易モデルを提示した。前者は一要素モデルであり，後者は二要素モデルという相違はあるが，ともに要素の投入係数を固定した一産業モデルである。これに対して，千葉（1992）は，投入係数が内生的に決定される二要素二産業モデルを提示し，垂直的に差別化された財の貿易においても，基本的には，ヘクシャー・オリーン定理が成立することを示した。しかし，そこでは効用関数と生産関数がともにコブ・ダグラス型に特定された特殊なケースを検討した。この論文では，コブ・ダグラス型の枠組みを取り除いたより一般的な形で，垂直的に差別化された財のn産業モデルを考察することによって，垂直的に差別化された財において，ヘクシャー・オリーン定理が成立するか否かを明らかにする。

各産業は，質が異なるさまざまな財で構成され，質の高い財ほど，生産における資本集約度は高いと仮定する。生産要素は労働と資本の二種類である。要素の投入係数は，相対賃金と質

の関数として，内生的に決定される。さらに，このモデルでは，各個人が労働者であると同時に資本家でもある。すなわち，各人は一単位の労働と数単位の資本を所有する。資本所有量は各人で異なり，したがって，所得格差が生じる。各人の資本所有量は連続的に異なっているので，所得階層も連続的に存在する。

以上のようなモデルから，以下の三つの主要な結論が得られる。

(1)あらゆる所得階層が，比較的平等に分布している社会では，ヘクシャー・オリーン定理の通りに，ネットでは，貿易パターンが決定される。すなわち，資本（労働）豊富国は，ネットでは，質の高い（低い）財の輸出国となる。

(2)低所得者層が，相対的に多く存在する社会では，レオンチェフ・パラドックスが生じる。すなわち，資本（労働）豊富国は，ネットでは，質の低い（高い）財の輸出国となる。

(3)所得階層の分布が特殊な形をしているときには，ヘクシャー・オリーン定理が成立するにもかかわらず，資本豊富国におけるあらゆる産業の資本集約度が，労働豊富国のそれより低くなる。

論文は次のように構成される。第二節では閉鎖経済モデルが示され，さらに開放経済に拡張される。第三節では，比較静学分析が行なわれる。第四節は結論である。

2．モデル

生産セクターにはn個の産業が存在し，各産業は垂直的に差別化されたさまざまな財で構成されると仮定する。すなわち，各産業における財は，質という点で異なっている。i産業における財の質を一般にz_iで表わそう。z_iは$[0,\ 1]$の間に連続的に存在し，0から1に近づくにつれ，財の質は高くなると仮定する。ファルベイ・キーツコフスキイのモデルにしたがって，財の質が上昇するほど，生産における資本集約度と財の価格は，高くなると仮定する。したがって，i産業における財の価格及び資本集約度は，ともにz_iの関数として，各々$p_i(z_i)$，$k_i(z_i)$と示され，$\partial p_i(z_i)/\partial z_i>0$，$\partial k_i(z_i)/\partial z_i>0$という性質をもつ。各財は収穫一定の下で，多数の企業によって生産されると仮定する。同じ財を生産する企業は多数存在するので，完全競争が成立する。

例えば，自動車産業においては，価格が比較的低い軽自動車からロールスロイスのような高級車まである。これらの財は質が高くなるほど，資本集約的な技術（例えば，4WD，オートマチック，ABSなど）がより多く使われており，価格も高くなる。このような質による財の区別は，多くの産業でみられる。

消費セクターでは，各人は一単位の労働と数単位の資本を所有していると仮定する。資本所有量は各人で異なる。資本をh単位所有する個人の所得をI(h)とすると，

$$I(h)=w+rh$$

と示される。ただし，wは労働賃金，rは資本レンタルである。このように資本所有量の格差が所得格差の源である。各人の資本所有量が異なるので，各人の所得も異なる。消費者は各産業のある質の財を一単位づつ消費すると仮定する。すなわち，消費者は，彼らの所得に応じて，産業ごとに消費する質を選択する。したがって，効用関数を$U(z_1, z_2 \ldots z_n)$とおくと，効用極大化問題は次のように示される。

$$\max_{z}\ U(Z)$$
$$\text{s.t.}\quad I(h)=\sum_{i=1}^{n} p_i(z_i).$$

ただし，$Z\equiv(z_1, z_2 \ldots z_n)$である。このように，すべての個人は労働者であり，かつ資本家でもある。さらに，資本所有量は各人で異なるので，所得も異なり，したがって，異なる質を好む。

ここで，消費者は効用極大化問題を解く結果，各産業に対して，所得のある一定シェアを支出すると仮定しよう。付録1で示しているように，このような仮定がなくても，全く同様の均衡方程式は得られるが，説明を簡単にするため，こ

こではそのように仮定する。i 産業に対する支出シェアをδ_iとすると，資本 h 単位を所有する個人が，消費する i 産業における財の質 z_i は以下の式を満たす。

$$\delta_i\ (w+rh)=p_i(z_i).$$

$\partial p_i(z_i)/\partial z_i>0$ より，上式を満たす h と z_i は一対一対応をする。したがって，h を z_i の関数として示すことができる。すなわち，質 z_i を選択する個人が所有する資本所有量は，$\omega\equiv w/r$ とすると，

$$h(\omega;z_i)=\frac{c_{Li}(\omega;z_i)\cdot\omega+c_{Ki}(\omega;z_i)}{\delta_i}-\omega$$

と示される。ただし，$c_{Li}(\omega;z_i)$ は質 z_i の単位労働投入関数，$c_{Ki}(\omega;z_i)$ は質 z_i の単位資本投入関数である。これらはすべて，ω の関数であり，$\partial c_{Li}(\omega;z_i)/\partial\omega<0$，$\partial c_{Ki}(\omega;z_i)/\partial\omega>0$ を満たすと仮定する。

ここで，いくつかの変数を定義しよう。

$L(\omega;z_i)$：質 z_i の生産に使用される労働量

$K(\omega;z_i)$：質 z_i の生産に使用される資本量

$L_i(\omega)$：i 産業に雇用される労働量

$$(\equiv\int_0^1 L(\omega;z_i)\,dz_i)$$

$K_i(\omega)$：i 産業に雇用される資本量

$$(\equiv\int_0^1 K(\omega;z_i)\,dz_i)$$

$l(\omega;z_i)$：i 産業に雇用される労働量に対する，質 z_i の生産に使用される労働量のシェア $(\equiv L(\omega;z_i)/L_i(\omega))$

$l_i(\omega)$：全労働量（L）に対する，i 産業に雇用される労働量のシェア $(\equiv L_i(\omega)/L)$

$k_i(\omega)$：i 産業に雇用される資本・労働比率，すなわち，i 産業としての資本集約度 $(\equiv K_i(\omega)/L_i(\omega))$

$k(\omega;z_i)$：質 z_i の生産における資本集約度 $(\equiv c_{Ki}(\omega;z_i)/c_{Li}(\omega;z_i))$

$n(h)$：資本を h 単位もつ個人の人口密度

以上の定義式を使うと，質 z_i の需給均衡式は次のように示される。

$$wL(\omega;z_i)+rK(\omega;z_i)=\delta_i\ [w+rh(\omega;z_i)]\ n(h(\omega;z_i))L \qquad (1)$$

左辺は質 z_i の生産額，右辺は消費額を示している。上の定義式と(1)式より，次式を得る（詳しい導出の方法については付録2を参照してほしい）。

$$k_i(\omega)=\int_0^1 n(h(\omega;z_i))k(\omega;z_i)dz_i. \qquad (2)$$

このように，ある産業の資本集約度は，人口密度をウェイトにした各質の資本集約度の加重平均になる。(2)式は i 産業における完全雇用条件を表わしている。もし，産業間の要素移動がなければ，(2)式を満たすようにωが決定される。すると，各質の資本集約度が決定され，同時に質 z_i の需要量が決定される。こうして，i 産業内における各質の生産量が決定される。

社会全体でωを決定するためには，全産業にわたる完全雇用条件式の導出が必要である。i 産業全体における財の需給均衡式は，

$$wL_i(\omega)+rK_i(\omega)=\delta_i\ (wL+rK) \qquad (3)$$

と示される。ただし，L と K は，それぞれ労働賦存量，資本賦存量である。(3)式の左辺は i 産業における全生産額，右辺は i 産業に対する全消費額である。(2)式，(3)式と完全雇用仮定より，次式を得る（付録2参照）。

$$k=\sum_{i=1}^{n} l_i(\omega)\int_0^1 n(h(\omega;z_i))k(\omega;z_i)dz_i. \qquad (4)$$

ただし，k は資本・労働賦存比率である。(4)式は要素市場における社会全体の均衡条件式である。(4)式から，社会全体の均衡相対賃金が決定される。まず，(2)式より，あらゆるωにおいて，各産業の要素の需要と供給が一致するように，各産業の資本集約度 $k_i(\omega)$ が決定される。次に，(4)式より，社会全体で要素の需要と供給が一致するように，ただ一つのωが決定されるのである。

開放経済への拡張

このモデルを開放経済に拡張することは比較的容易である。要素賦存比率のみ異なる外国と

貿易を行なうと，技術条件，嗜好条件が同じであるため，結果として，(4)式における k を $\theta k+(1-\theta)k^*$ に置き換えるのみでよい（付録2参照）。ただし，＊は外国の変数であることを示し，$\theta \equiv L/(L+L^*)$ である。したがって，要素価格が均等化するときの開放経済における均衡相対賃金は，次式で決定される。

$$\theta k+(1-\theta)k^*=\sum_{i=1}^{n} l_i(\omega)\int_0^1 n(h(\omega;z_i))\,k(\omega;z_i)\,dz_i. \tag{4'}$$

(4')式より，開放経済における均衡相対賃金は，閉鎖経済のときの二国の均衡相対賃金の間に決定されることがわかる。

3．比較静学

ここでは，資本・労働賦存比率がわずかに変化したときの，相対賃金や産業としての資本集約度に対する影響について分析する。(2)式を微分し，$\partial k(\omega;z_i)/\partial\omega>0$ を利用すると，次式を得る（付録2参照）。

$$\varepsilon \underset{(>)}{\leqq} 1 \rightleftarrows dk_i(\omega)/d\omega \underset{(<)}{\geqq} 0. \tag{5}$$

ただし，

$$\varepsilon \equiv -(\partial n(h)/\partial h)\cdot(h/n(h))$$
$$\equiv -d\log n(h)/d\log h \tag{6}$$

であり，ε は資本所有量に対する人口分布の弾力性である。(6)式を解くと，ε は一定という仮定から，$n(h)=h^{-\varepsilon}$ と示される。したがって，ε が大きいほど，低所得者層が相対的に多く存在する社会であるといえる。また，ε は所得の変化に対する需要側の反応の強さをはかる尺度でもある。なぜならば，資本所有量の格差が所得格差の源であり，質 z_i の需要量は $n(h(\omega;z_i))L$ と示されるので，資本所有量の変化は所得の変化であり，人口密度の変化は需要量の変化と考えられるからである。したがって，$\varepsilon \leqq 1$ の場合，所得の変化に対して，需要側の反応が小さいので，供給側の反応が大きく経済全体に影響する。すなわち，相対賃金の上昇により，各質の資本集約度は上昇し，産業全体としての資本集約度も上昇する。逆に $\varepsilon>1$ の場合，需要側の反応が供給側の反応を上回る。すなわち，相対賃金の上昇に対して，供給側としては，すべての質で，資本集約度が高い生産方法を採用するが，需要側としては，労働賃金と資本レンタルの和として示される所得の減少により，質の高い財から質の低い財へと需要を移す。その結果，あらゆる質で資本集約度が高くなるにもかかわらず，労働集約的な財が多く需要されるようになるため，産業としての資本集約度は低くなる。

また，$\varepsilon=0$ の場合は，一様分布のときであり，このとき需要側の反応は無視できる。したがって，供給側の反応のみから産業としての資本集約度は決定され，相対賃金の上昇に対して，産業としての資本集約度は高くなる。さらに，$\varepsilon=1$ のときは，需要側の反応と供給側の反応が互いに相殺しあうため，産業としての資本集約度は変わらない。

(4)式を均衡値，$\bar{\omega}$，において微分し，(5)式を利用すると，次式を得る。

$$\varepsilon \underset{(>)}{\leqq} 1+\rho \rightleftarrows d\omega/dk \underset{(<)}{\geqq} 0. \tag{7}$$

ただし，

$$\rho \equiv \frac{\bar{\omega}}{\eta(\bar{\omega}+k)^2}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\delta_i\,[k_i(\bar{\omega})-k]^2/[\bar{\omega}+k_i(\bar{\omega})]^2}{\sum_{i=1}^{n}\delta_i\,k_i(\bar{\omega})/[\bar{\omega}+k_i(\bar{\omega})]^2}$$

であり，$\eta \equiv (\partial k(\bar{\omega};z_i)/\partial\omega)\cdot(\bar{\omega}/k(\bar{\omega};z_i))$ は各々の質の資本集約度の，相対賃金に対する弾力性である。このように，ρ は δ_i をウェイトとして，各産業の資本集約度と資本・労働賦存比率との乖離を合計し，それを各産業の資本集約度の合計で割ったものを含んでいる。この ρ の経済的意義については，後述の $1<\varepsilon \leqq 1+\rho$ のケースで，明らかにされる。

(6)式の経済的含意は次のようなものである。まず，$\varepsilon \leqq 1+\rho$ の場合とは，需要側の反応が小さい場合であり，よって，供給側の反応が経済全体の反応として表れる。すなわち，資本・労働賦存比率の上昇は，資本の限界生産力を低下

させ，労働の限界生産力を高める。その結果，相対賃金は上昇する。これはヘクシャー・オリーンモデルの貿易パターンが成立することを意味する。すなわち，資本豊富国は相対賃金が高いので，相対的に，資本集約財である質の高い財に比較優位をもつ。したがって，自由貿易の結果，資本豊富国は，ネットでは，質の高い財の輸出国となる。

$\varepsilon > 1 + \rho$の場合は，需要側の反応が大きいケースであるので，相対賃金は，供給側より需要側の反応から決定される。すなわち，資本・労働賦存比率の上昇は，供給側としては，資本の限界生産力の低下により，相対賃金を上昇させる力が働く。一方，需要側としては，資本が増える分だけ，資本からの報酬も増えるので，所得は高まる。そのため，質の高い財への需要のシフトが生じる。これは，質が高いほど資本集約度も高いという仮定から，相対的に，資本に対する需要の増加を意味し，相対賃金を下落させる力となる。結果として，この需要側の反応が供給側の反応を上回り，資本・労働賦存比率が，上昇するにもかかわらず，相対賃金は下落する。これはヘクシャー・オリーン定理とは逆の貿易パターンを意味する。すなわち，資本豊富国は，相対賃金が低いので，相対的に，労働集約財である質の低い財に比較優位をもち，ネットでも，質の低い財の輸出国となるのである。

このように，一つの産業の中にいくつかの垂直的に差別化された財が存在する場合，レオンチェフ・パラドックスを説明することができる。これは，直接的には，所得効果によるものである。すなわち，資本供給量の増加は所得の増加をもたらし，その結果，資本の供給量の増加以上に資本需要の増加を招く。したがって，資本が豊富になったにもかかわらず，相対賃金はむしろ下落し，ヘクシャー・オリーン定理とは逆の貿易パターンになるのである。このようなケースは，εが大きいほど，また，ρが小さいほど生じる可能性が大きくなる。

各産業の資本集約度に注目してみると，(5)式と(6)式から明らかなように，たとえレオンチェフ・パラドックスが生じる$\varepsilon > 1 + \rho$のケースであっても，資本豊富国ほど，産業としての資本集約度は高くなる。これは需要条件がどうであれ，完全雇用を満たさなければならないため，資本豊富国は，労働豊富国より多くの資本を使用しなければならないからである。したがって，$\varepsilon > 1 + \rho$のケースのみならず，$\varepsilon \leqq 1$のケースでも，同様のことがいえる。

この意味で，$1 < \varepsilon \leqq 1 + \rho$の場合は，きわめて興味深いケースである。というのも，このとき各産業の資本集約度は，どの産業においても，資本豊富国の方が労働豊富国より低いからである。これは以下のような理由による。まず，(6)式から明らかなように，$\varepsilon \leqq 1 + \rho$のとき，資本・労働賦存比率の相対賃金に対する影響は，供給側の反応により決定されるので，資本・労働賦存比率の上昇は相対賃金を上昇させる。次に，(5)式から明らかなように，$\varepsilon > 1$のとき，相対賃金の上昇は，労働賃金と資本レンタルの和である所得の減少を意味するので，質の高い財から質の低い財へ需要のシフトが生じる。これは，要素に関しては，労働に対する需要の増加を意味するので，相対賃金の上昇は，各産業の資本集約度を下落させる。したがって，$1 < \varepsilon \leqq 1 + \rho$の場合，資本豊富国では，各質の資本集約度は労働豊富国より高いが，需要条件により，各産業の資本集約度はむしろ低くなる。しかし，$\varepsilon \leqq 1 + \rho$の条件の下では，ヘクシャー・オリーン定理をくつがえすほどには，需要条件が強く働かず，ネットでは，依然として資本豊富国は資本集約財の輸出国である。このように，どの産業においても，資本豊富国が労働豊富国より，産業の資本集約度は低いにもかかわらず，ネットでは，資本集約財の輸出国になりうるのは，資本集約度が異なるいくつもの産業が存在するからである。すなわち，どの産業においても，産業の資本集約度が低いとしても，相対的に，資本集約度が高い産業の財を多く輸出し，資本集約度が低い産業の財を多く輸入すると，ネットでは，

資本豊富国は資本集約財の輸出国になる。すべてのｉに関して，$k_i(\omega)=k$とすると，$\rho=0$となるので，$1<\varepsilon\leqq 1+\rho$というケースは存在しない。すなわち，産業が一つしか存在しなかったり，すべての産業の資本集約度が同じである場合には，このような結果は生じないことがわかる。したがって，この結論はｎ産業モデルだからこそ導かれるものである。

4．結論

この論文では，垂直的に差別化された財の貿易において，ヘクシャー・オリーン定理が成立するか否かを明らかにした。その結果，一般には，この定理は成立せず，特殊な状況でのみ成立することがわかった。そのような状況は資本所有量の分布に依存している。すなわち，資本所有量の分布の弾力性が小さいときには，この定理が示す通りに貿易パターンは決定されるが，弾力性が大きいときには，この定理とは逆の貿易パターンになる。これはレオンチェフ・パラドックスを説明する有力な理論的根拠となる。なぜならば，現実に実証分析をする場合，産業をかなり幅広く定義するため，その中にはいくつもの差別化された財が含まれることが多いからである。このように，産業の中にいくつかの垂直的に差別化された財が含まれるときには，資本（労働）豊富国は，ネットでは，質の低い（高い）財である労働（資本）集約財の輸出国になりうるのである。

産業としての資本集約度に注目すると，資本所有量の分布の弾力性がある特定の範囲に存在するとき，資本豊富国におけるあらゆる産業の資本集約度が，労働豊富国のそれより，低くなるという結論を得た。これらの直観とは相反する結果は，すべて資本所有量の分布の形状に依存している。したがって，今後は資本所有量の分布を考慮したヘクシャー・オリーン定理の実証分析が必要であると思われる。

参考文献

[1] Bhagwati, J. N., "The Heckscher-Ohlin theorem in the multi-commodity case," *Journal of Political Economy*, Vol. 80 (1972)

[2] Chamberlin, E., "Product heterogeneity and public policy," *American Economic Review*, Vol. 40 (1950)

[3] Deardorff, A. V., "Weak links in the chain of comparative advantage," *Journal of International Economics*, Vol. 9 (1979)

[4] Dornbusch, R., Fischer, S. and P. A. Samuelson, "Heckscher-Ohlin trade theory with a continuum of goods," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 95 (1980)

[5] Falvey, R. E. and H. Kierzkowski, "Product quality, intra-industry trade and (im)perfect competition," in H. Kierzkowski, ed. *Protection and competition in international trade*, Oxford: Basil Blackwell, 1987

[6] Fram, H. and E. Helpman, "Vertical product differentiation and north-south trade," *American Economic Review*, Vol. 77 (1987)

[7] Helpman, E., "International trade in the presence of product differentiation, economies of scale and monopolistic competition," *Journal of International Economics*, Vol. 11 (1981)

[8] Helpman, E. and P. Krugman, *Market structure and foreign trade, increasing returns, imperfect competition, and the international economy*, Cambridge :MIT Press, 1985

[9] Kierzkowski, H. ed., *Monopolistic competition and international trade*, Oxford:Clarendon Press, 1984

[10] Krugman, P., "Increasing returns, monopolistic competition and inter-national trade," *Journal of International Economics*, Vol. 9 (1978)

[11] Krugman, P., "Intra-industry specialization and the gains from the trade," *Journal of Political Economy*, Vol. 89 (1981)

[12] Linder, S., *Trade and trade policy for development*, New York:Praeger, 1967

[13] Melvin, J. R., "Production and trade with two factors and three goods," *American Economic Review*, Vol. 58 (1968)

[14] Stwert, D. B., "Production indeterminacy with three goods and two factors:A commemt on the pattern of trade," *American Economic Review*, Vol. 61 (1971)

[15] Travis, W. P., "Production, trade and protection when there are many commodities and two factors," *American Economic Review*, Vol. 62 (1972)

[16] 千葉隆生「垂直的に差別化された財の貿易：ヘクシ

ャー・オリーン・アプローチ」『経済学研究（北海道大学)』第42巻第1号（1992年）

付録 1

この付録1では，所得の一定シェアを支出しない場合として，効用関数が，

$$U=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \log z_i,$$

質 z_i をもつ財の価格が，

$$p_i(z_i)=A_i+B_i z_i$$

で与えられるとき，全く同様の決定方程式が導かれることを示す。このとき，効用極大化問題は，

$$\text{Max. } U=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \log z_i \qquad \text{(A-1)}$$
$$\text{s.t. } I(h)=\sum_{i=1}^{n}A_i+B_i z_i=\sum_{i=1}^{n}p_i(z_i)$$

と示される。これを解くと，一般的には，各産業に対する支出シェアが一定とはならないケースであることがわかるであろう。ここで，

$$\tilde{p}_i(z_i)=B_i z_i$$
$$\tilde{I}(h)=I(h)-\sum_{i=1}^{n}A_i$$

と定義すると，(A-1)は

$$\text{Max. } U=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \log z_i \qquad \text{(A-2)}$$
$$\text{s.t. } \tilde{I}(h)=\sum_{i=1}^{n}B_i z_i=\sum_{i=1}^{n}\tilde{p}_i(z_i)$$

と示される。このように，極大化問題は所得を $\tilde{I}(h)$，価格を $\tilde{p}_i(z_i)$ とする問題に置き換えられる。(A-2)を解くと，効用極大化の結果，所得の一定シェアが各産業に支出されることがわかる。したがって，質 z_i の財市場均衡条件式は $I(h)$ の代わりに $I(h)-\sum_{i=1}^{n}A_i$ を代入したものとなり，

$$wL(\omega;z_i)+rK(\omega;z_i)=\delta_i\left[w+rh(\omega;z_i)-\sum_{i=1}^{n}A_i\right]n(h(\omega;z_i))L$$

と示される。これを $l(\omega;z_i)$ について解き，

$\int_0^1 l(\omega;z_i)dz_i=1$，及び $\int_0^1 l(\omega;z_i)k(\omega;z_i)dz_i=k_i(\omega)$ に代入し，整理すると，次式を得る。

$$k_i(\omega)=\int_0^1 n(h(\omega;z_i))k(\omega;z_i)dz_i$$

ただし，

$$h(\omega;z_i)=\frac{c_{Li}(\omega;z_i)\cdot\omega+c_{Ki}(\omega;z_i)}{\delta_i}-\omega+\frac{\sum_{i=1}^{n}A_i}{r}$$

を利用している。次に各個人の資本所有量の最小値を h_{min}，最大値を h_{max} としよう。資本を h 単位もつ個人は，$\delta_i\tilde{I}(h)$ を i 産業に支出するので，i 産業全体の需給均衡式は，

$$wL_i(\omega)+rK_i(\omega)=\delta_i\int_{h_{min}}^{h_{max}}I(h)n(h)Ldh$$

と示される。これを

$$wL+rK=\int_{h_{min}}^{h_{max}}I(h)n(h)Ldh$$

を利用して，変形すると，

$$wL_i(\omega)+rK_i(\omega)=\delta_i\left[wL+rK-L\textstyle\sum_{i=1}^{n}A_i\right]$$

を得る。さらに，$\sum_{i=1}^{n}L_i(\omega)=L$，$\sum_{i=1}^{n}K_i(\omega)=K$ を使って，これを変形すると，

$$k=\sum_{i=1}^{n}l_i(\omega)\int_0^1 n(h(\omega;z_i))k(\omega;z_i)dz_i$$

を得る。このように，所得の一定シェアを支出しない場合であっても，全く同様の均衡式を得ることができる。

付録 2

(2)式の導出：

(1)式を変形すると，

$$l(\omega;z_i)=\frac{\delta_i[\omega+h(\omega;z_i)]n(h(\omega;z_i))}{[\omega+k(\omega;z_i)]l_i(\omega)}.$$

$\int_0^1 l(\omega;z_i)dz_i=1$ に，上式を代入すると，

$$\int_0^1\frac{\delta_i[\omega+h(\omega;z_i)]n(h(\omega;z_i))}{[\omega+k(\omega;z_i)]l_i(\omega)}dz_i=1. \qquad \text{(B-1)}$$

同様に，$\int_0^1 k(\omega;z_i)l(\omega;z_i)dz_i=k_i(\omega)$ に，上式を代入すると，

$$\int_0^1\frac{\delta_i[\omega+h(\omega;z_i)]n(h(\omega;z_i))k(\omega;z_i)}{[\omega+k(\omega;z_i)]l_i(\omega)}dz_i=k_i(\omega). \qquad \text{(B-2)}$$

(B-1)×$k_i(\omega)$-(B-2)より，

$$\int_0^1 \frac{\delta_i\ [\omega+h(\omega;z_i)]\ n(h(\omega;z_i))[k_i(\omega)-k(\omega;z_i)]}{[\omega+k(\omega;z_i)]\ l_i(\omega)} dz_i=0. \tag{B-3}$$

一方，$\delta_i(w+rh)=p_i(z_i)$ より，

$$\delta_i=\frac{c_{Li}(\omega;z_i)\cdot\omega+c_{Ki}(\omega;z_i)}{w+h}.$$

$\partial\delta_i/\partial\omega=0$ 及び費用極小化条件より，

$$h=c_{Ki}/c_{Li}=k(\omega;z_i). \tag{B-4}$$

(B-4) を (B-3) に代入し，整理すると，

$$k_i(\omega)=\int_0^1 n(h(\omega;z_i))k(\omega;z_i)dz_i$$

を得る。

(4)式の導出：

(3)式を変形して，

$$l_i(\omega)=\frac{\delta_i(\omega+k)}{\omega+k_i(\omega)}.$$

$\Sigma_{i=1}^n l_i(\omega)=1$ に，上式を代入すると，

$$\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i(\omega+k)}{\omega+k_i(\omega)}=1. \tag{B-5}$$

同様に，$\Sigma_{i=1}^n k_i(\omega)l_i(\omega)=k$ に，上式を代入すると，

$$\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i k_i(\omega)\ (\omega+k)}{\omega+k_i(\omega)}=k. \tag{B-6}$$

(B-5) × k − (B-6) より，

$$\phi(\omega;k)\equiv\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i\ [k-k_i(\omega)]\ (\omega+k)}{\omega+k_i(\omega)}=0. \tag{B-7}$$

よってまた，

$$\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i\ [k-k_i(\omega)]}{\omega+k_i(\omega)}=0 \tag{B-8}$$

である。

一方，

$$\delta_i=\frac{wL_i+rK_i}{wL+rK}=\frac{l_i(\omega)\ [\omega+k_i(\omega)]}{\omega+k}. \tag{B-9}$$

(B-9) 及び(2)式を (B-8) に代入すると，

$$k=\sum_{i=1}^n l_i(\omega)\int_0^1 n(h(\omega;z_i))k(\omega;z_i)dz_i$$

を得る。

(4')式の導出：

質z_iの自国のシェアを$\alpha(z_i)$とすると，質z_iの自国における財市場均衡条件式は，

$$wL(\omega;z_i)+rK(\omega;z_i)=\delta_i\ [w+rh(\omega;z_i)]\ [n(h(\omega;z_i))L+n^*(h(\omega;z_i))L^*]\ \alpha(z_i)$$

と示される。$n=n^*$より，この式を変形すると，

$$l(\omega;z_i)=\frac{\delta_i[\omega+h(\omega;z_i)]n(h(\omega;z_i))\alpha(z_i)}{[\omega+k(\omega;z_i)]\ l_i(\omega)\theta}.$$

$\int_0^1 l(\omega;z_i)dz_i=1$ に，上式を代入すると，

$$\int_0^1 \frac{\delta_i[\omega+h(\omega;z_i)]n(h(\omega;z_i))\alpha(z_i)}{[\omega+k(\omega;z_i)]\ l_i(\omega)\theta}dz_i=1. \tag{B-10}$$

同様に，$\int_0^1 k(\omega;z_i)\ l(\omega;z_i)dz_i=k_i(\omega)$ に，上式を代入すると，

$$\int_0^1 \frac{\delta_i[\omega+h(\omega;z_i)]n(h(\omega;z_i))k(\omega;z_i)\alpha(z_i)}{[\omega+k(\omega;z_i)]\ l_i(\omega)\theta} dz_i=k_i(\omega). \tag{B-11}$$

(B-10) × $k_i(\omega)$ - (B-11) より，

$$\int_0^1 \frac{\delta_i[\omega+h(\omega;z_i)]n(h(\omega;z_i))\alpha(z_i)[k_i(\omega)-k(\omega;z_i)]}{[\omega+k(\omega;z_i)]\ l_i(\omega)\theta} dz_i=0. \tag{B-12}$$

(B-12) に (B-4) を代入すると，

$$k_i(\omega)=\frac{\int_0^1 n(h(\omega;z_i))\alpha(z_i)k(\omega;z_i)dz_i}{\int_0^1 n(h(\omega;z_i))\alpha(z_i)dz_i}. \tag{B-13}$$

外国についても同様に，

$$k_i^*(\omega)=\frac{\int_0^1 n(h(\omega;z_i))[1-\alpha(z_i)]k(\omega;z_i)dz_i}{\int_0^1 n(h(\omega;z_i))\ [1-\alpha(z_i)]\ dz_i}. \tag{B-14}$$

一方，i 産業の均衡条件式は，β_iを i 産業の自国のシェアとすると，

$wL_i(\omega)+rK_i(\omega)=\beta_i\delta_i[w(L+L^*)+r(K+K^*)]$

と示される。上式を変形すると，

$$l_i(\omega)=\frac{\beta_i\delta_i\ [\omega+\theta k+(1-\theta)k^*]}{[\omega+k_i(\omega)]\theta}. \quad \text{(B-15)}$$

$\Sigma_{i=1}^{n} l_i(\omega)=1$ に，(B-15)を代入すると，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i\delta_i[\omega+\theta k+(1-\theta)k^*]}{[\omega+k_i(\omega)]\ \theta}=1. \quad \text{(B-16)}$$

同様に，$\Sigma_{i=1}^{n}k_i(\omega)l_i(\omega)=k$に，(B-15)を代入すると，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i\delta_i k_i(\omega)[\omega+\theta k+\ (1-\theta)\ k^*]}{[\omega+k_i(\omega)]\ \theta}=k. \quad \text{(B-17)}$$

外国についても同様に，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-\beta_i)\delta_i[\omega+\theta k+(1-\theta)k^*]}{[\omega+k_i^*(\omega)](1-\theta)}=1, \quad \text{(B-18)}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-\beta_i)\delta_i k_i^*(\omega)[\omega+\theta k+(1-\theta)k^*]}{[\omega+k_i^*(\omega)](1-\theta)}=k^*. \quad \text{(B-19)}$$

ここで，自国製品と外国製品は差別化されており，質も異なると仮定しよう。すなわち，$\alpha(z_i)=0$ または1である。すると，(B-16)×θ+(B-18)×$(1-\theta)$ より，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i[\omega+\theta k+(1-\theta)k^*]}{\omega+k_i(\omega)}=1. \quad \text{(B-20)}$$

同様に，(B-17)×θ+(B-19)×$(1-\theta)$ より，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i k_i(\omega)[\omega+\theta k+(1-\theta)k^*]}{\omega+k_i(\omega)}=k. \quad \text{(B-21)}$$

(B-20)× $[\theta k+(1-\theta)k^*]$ −(B-21)より，

$$\theta k+(1-\theta)k^*=\sum_{i=1}^{n} l_i(\omega)\int_0^1 n(h(\omega;z_i))k(\omega;z_i)dz_i$$

を得る。

(5)式の導出：

(2)式より，

$$\frac{dk_i(\omega)}{d\omega}=\int_0^1\frac{\partial n(h)}{\partial h}\frac{\partial h(\omega;z_i)}{\partial\omega}k(\omega;z_i)+n(h(\omega;z_i))\frac{\partial k(\omega;z_i)}{\partial\omega}dz_i. \quad \text{(B-22)}$$

(B-4)を使って，(B-22)を変形すると，

$$\frac{dk_i(\omega)}{d\omega}=(1-\varepsilon).$$

$$\int_0^1 n(h(\omega;z_i))\frac{\partial k(\omega;z_i)}{\partial\omega}dz_i. \quad \text{(B-23)}$$

$\partial k(\omega;z_i)/\partial\omega>0$ より，

$$\varepsilon \underset{(>)}{\leqq} 1 \rightleftarrows dk_i(\omega)/d\omega \underset{(<)}{\geqq} 0$$

を得る。

(7)式の導出：

(B-7)を均衡値$\bar{\omega}$において，全微分すると，

$$d\phi(\bar{\omega};k)=\frac{\partial\phi}{\partial\omega}d\,\omega+\frac{\partial\phi}{\partial k}dk=0.$$

よって，

$$\frac{d\omega}{dk}=-\frac{\partial\phi/\partial k}{\partial\phi/\partial\omega}. \quad \text{(B-24)}$$

(B-7)より，

$$\frac{\partial\phi}{\partial k}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i\ (\omega+k)}{\omega+k_i(\omega)}>0. \quad \text{(B-25)}$$

(B-24)と(B-25)より，

$$d\omega/dk \underset{(<)}{\geqq} 0 \rightleftarrows \partial\phi/\partial\omega \underset{(>)}{\leqq} 0. \quad \text{(B-26)}$$

(B-7)より，

$$\frac{\partial\phi}{\partial\omega}=\sum_{i=1}^{n}\frac{-\delta_i\ [k-k_i(\omega)]^2-\delta_i\ (\omega+k)^2dk_i(\omega)/d\omega}{[\omega+k_i(\omega)]^2}.$$

よって，

$$\frac{\partial\phi}{\partial\omega}\underset{(>)}{\leqq}0\rightleftarrows \sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i\ [k-k_i(\omega)]^2+\delta_i\ (\omega+k)^2dk_i(\omega)/d\omega}{[\omega+k_i(\omega)]^2}\underset{(<)}{\geqq}0. \quad \text{(B-27)}$$

(B-27)に(B-23)を代入し，整理すると，

$$\frac{\partial \phi}{\partial \omega} \underset{(>)}{\leqq} 0 \rightleftarrows \varepsilon \underset{(>)}{\leqq} 1+\rho. \tag{B-28}$$

(B-28)と(B-26)を組み合わせると，

$$\frac{d\omega}{dk} \underset{(<)}{\geqq} 0 \rightleftarrows \varepsilon \underset{(>)}{\leqq} 1+\rho$$

を得る。