経済学研究 45-3
北海道大学 1995.11

世代重複モデルにおけるキャピタル・ゲイン及び投資レントの効果について

宮 下 徹

第1節 はじめに

無限の計画期間を持つ主体を仮定した成長モデルの研究においては，「投資の受動性」という理論的問題はAbel-Blanchard［1］によって解決され，それ以後，動学的最適化を行う企業及び家計から成る分権的市場経済の動学モデルは標準的なマクロ経済学の分析道具となってきた[1)]。「投資の受動性」という問題を解決する，すなわち企業の側のフロー投資需要をミクロ的基礎づけを持って導出する方法は，Lucas［11］等によって定式化された調整費用を考慮した動学的企業価値最大化であり，さらにこれは「Tobinのq」の考え方に基づく投資関数に理論的正当化を与えるものであった[2)]。

この「無限計画期間モデル」に対して，マクロ動学や経済成長論の分野におけるもう一方の主要な道具である「世代重複モデル（overlapping generations model)」の枠組みの中では，フロー投資決定の問題が正面から論じられることは稀である。資本蓄積及び経済成長が問題とされる場合であっても，資本ストック調整に伴う費用は捨象されるのが普通であり，フロー投資需要の決定は明示的に扱われてはいない。本稿は，調整費用並びにフロー投資需要を考慮した際に世代重複モデルがどのように構成され，その均衡経路がどのように定式化されるかという問題を考察する試みである。

本稿の論点と，また以下で繰り返し用いられる記号の意味とを明らかにするために標準的な世代重複モデルの構造をここで振り返っておこう。なお以下の「基本モデル」及び次節以降の本文において簡単化のために資本減耗は捨象する。2期間（前半を「勤労期」，後半を「引退期」と呼ぶことにする）のライフ・スパンを持つ個人と，新古典派生産関数に従う企業とを仮定した最も基本的な1財世代重複モデルを考える。

最初に，第t世代に属する個人の生涯効用最大化問題は以下のように表現される。この個人は勤労期に1単位の労働を非弾力的に供給して（労働からの不効用は無視する）賃金所得を得て，消費と貯蓄とへの配分を決定する。

(1-1) $\quad Max.\ U(c_t^t,\ c_{t+1}^t)$

(1-2) $\quad s.t.\quad c_t^t + s_t \leqq w_t$

$$c_{t+1}^t \leqq (1 + r_{t+1})\,s_t$$

ここでc_t^tとc_{t+1}^tとはそれぞれ勤労期と引退期の消費量，s_tは第t期の貯蓄量，w_tは第t期の実質賃金率，r_{t+1}は第$(t+1)$期の資本収益率である。この最適化問題より個人の貯蓄関数

(1-3) $\quad s_t = s(w_t,\ r_{t+1})$

が求められ，また選好が現在財と将来財との間の正常性と粗代替性とを満たすものであれば

(1-4) $\quad \dfrac{\partial s}{\partial w_t} > 0,\quad \dfrac{\partial s}{\partial r_{t+1}} > 0$

1）Solowモデルに始まり，Cass-Koopmansの最適成長モデルを経て動学的一般均衡モデルに到る成長理論の展開過程と，世代重複モデルの基本事項については岩井［10］に要約されている。

2）調整費用投資理論とq投資関数との関係についての代表的文献はHayashi［8］である。

が成立する。

他方，企業の最適化問題は完全に「静学的」であり，企業は各期において一人当たり実質利潤を最大化すると仮定される。その条件は

(1-5)　$w_t = f(k_t) - k_t f'(k_t)$

(1-6)　$r_t = f'(k_t)$

となる。ここで k_t は資本－労働比率である。

人口成長は$L_{t+1} = (1+n) L_t$に従うとすると，完全雇用を前提した上で第$(t+1)$期における財市場の均衡条件は

(1-7)

$$L_t c^t_{t+1} + L_{t+1}(c^{t+1}_{t+1} + s_{t+1}) = L_{t+1}\{f(k_{t+1}) + k_{t+1}\}$$

となる。(1-2)，(1-3)，(1-5)，及び(1-6)を考慮すると，これより完全予見均衡資本蓄積経路を与える「世代重複モデルの基本方程式」

(1-8)　$$k_{t+1} = \frac{s[w(k_t),\ r(k_{t+1})]}{1+n}$$

が得られる。

以上のモデルは消費財と資本財との間の物理的差異を捨象した１財モデルであり，家計貯蓄は勤労期に実質賃金によって買った財の一部を企業に貸し付ける形で行われていることになる。予算制約(1-2)が示しているように消費財としての財と貯蓄手段としての財との間で価格の乖離がないのは，企業の最適化が完全に静学的である，すなわち各期ごとに資本投入量が利潤最大化と整合的になるように調整されるからである。従って１期間に行われる資本蓄積($k_{t+1} - k_t$) の決定に際しては企業の側のフロー投資需要の側面が全く考慮の外に置かれていることになる。

冒頭で述べたように理論的に企業のフロー投資需要を導く際の鍵概念は調整費用である。80年代に盛んに研究された「Tobinのq理論のミクロ的基礎づけ」の考え方を用いて，次節から上で素描した基本モデルの拡張を試みる。第２節では，基本モデルに企業の投資決定と，家計の株式保有による貯蓄とを導入する。その定式化においては，資本蓄積には調整費用が伴い，また個人の貯蓄は財を買って企業に貸し付けるのではなく，企業に対する金融的請求権（本稿では「株式」と称される）の売買を通じて行われる。株式市場では，前世代が売り放つ株式と企業が投資資金調達のために新規発行する株式とが合わせて供給され，他方において勤労期にある現世代が貯蓄手段として株式を需要する[3)]。この想定によって基本モデルから大きく乖離する点は，物理的な財の価格と貯蓄手段である株式の価格とはもはや同一ではないということ，投資によって「投資レント」が発生しそれは個人の可処分所得に含められるということ[4)]，また経済の完全予見均衡資本蓄積経路を規定するものは利子率（資本収益率）の時系列ではなく株価の時系列となるということである。第２節で一般的な定式化を行った後に，第３節において最も簡単な関数形を用いてモデルの例示を試みる。最終節で問題点と今後の課題とを指摘して結びとする。

第２節　調整費用と株式との導入

１部門世代重複モデルに投資関数を導入することによって前節で略述した基本モデルがどのように修正されるかを考察しよう。

最初に企業の生産－投資技術を

(2-1)　$Y_t = F(L_t, K_t) - C(K_t, I_t)$

(2-2)　$C_K < 0,\quad C_I > 0,\quad C_{II} > 0$

と置く。ここでY_tは第t期の産出量，L_tは労働投入量，K_tは資本投入量，I_tは投資量を表し，また

3）配当権利落ち価格と権利付き価格との間の乖離などの問題は捨象する。この問題と投資理論との間の関係についての文献としてHayashi［９］がある。

4）投資に伴って発生するレントが可処分所得に含められることを，q投資関数を導入した静学的マクロモデル(IS-LMモデル）の枠組みで指摘したのはBailey-Scarth［３］である。

$F(\cdot)$は新古典派生産関数，$C(\cdot)$はKについては減少的であり，他方Iに関しては厳密な凸関数とする。この$C(\cdot)$は企業の内部で投資活動に伴って発生する費用を表しており，その費用は今期の生産量の損失として定式化されている。また資本が高水準になれば一定量の投資による生産量の損失は減少すると想定している。

企業の投資資金の調達は全て新規株式発行によって行なわれるとしよう。このとき第t期における企業の実質配当はq_tを実質株価とすると

(2-3)

$$D_t=\{F(K_t,L_t)-C(K_t,I_t)\}-w_tL_t+(q_t-1)I_t$$
$$=\{F(K_t,L_t)-w_tL_t\}+[q_tI_t-\{I_t+C(K_t,I_t)\}]$$

と書かれる。これは第t期に企業がI_t単位の株式を発行することによって$q_t\cdot I_t$だけの資金を調達しており，これが総投資費用$\{I_t+C(I_t)\}$を上回るとき，その超過分は投資に伴って発生するレントとして配当に含まれるということを意味している。

企業は，第t期首までに蓄積されてきた資本K_t，実質賃金率w_t，及び実質株価q_tを所与として第t期の配当を最大化する。すなわち企業の問題は

(2-4)　$\underset{\{L_t,I_t\}}{Max.}\ D_t,$

$K_t,\ w_t,\ q_t\ ;\ given.$

と定式化される。これより内点解は

(2-5)　$F_L(K_t,\ L_t)=w_t$

(2-6)　$1+C_I(K_t,\ I_t)=q_t$

を満たす$(L_t,\ I_t)$として定義される。なお(2-6)は投資の限界費用が株価$q_t>1$に等しくなるように投資が決定されることを示しており，Tobinのq投資関数を与えている。投資決定と投資レントは図1に示されている。

完全雇用を仮定すると均衡実質賃金率は(2-5)よりK_t及びL_tの関数

(2-7)　$w_t=w(K_t,L_t)$

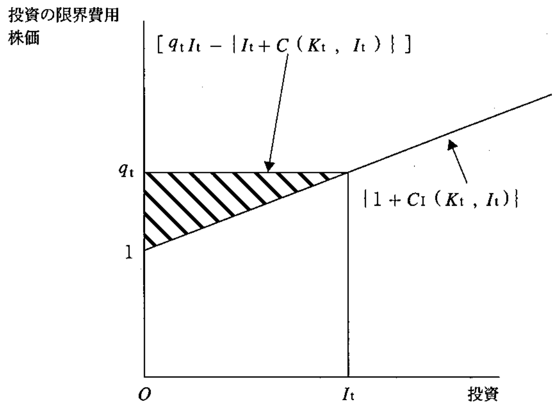

図1．投資決定と投資レント

として与えられる。またq投資関数を(2-6)から得られる陽表的表現を用いて

(2-8)　$I_t=I(K_t,q_t)$

と書いておこう。これは企業の投資財需要関数であると同時に株式供給関数でもある。これら(2−7)と(2−8)とを(2−3)に代入することによって第t期の配当の大きさはK_t，L_t，及びq_tの関数として与えられる。このことを

(2-9)　$D_t=D(K_t,L_t,q_t)$

と示しておく。

他方，第t世代に属する代表的個人の生涯効用最大化問題は

(2-10)　$Max.\ U(c^t_t,c^t_{t+1})$

(2-11)　$s.t.\quad c^t_t+q_ts_t\leqq w_t$

$c^t_{t+1}\leqq q_{t+1}s_t+d_{t+1}$

$w_t,\ q_t,\ q_{t+1},\ d_{t+1}\ ;\ given.$

と書かれる。ここで想定されていることは，個人は勤労期において賃金所得から消費を行うと同時に貯蓄手段として株式を買い，引退期の消費支出をその株式保有に対する配当と株式の売却益とによって賄うということである。ここでs_tは貯蓄される株式の単位，またd_{t+1}は第t世代の個人が引退期に受け取る一人当たり実質配当を表す。

この定式化における家計の予算制約と第1節で説明した基本モデルにおける予算制約との間における相違点は以下のものである。基本モデルでは第t世代の引退期の所得は勤労期に行った貯蓄からの「元利合計」であり，経済全体では$[K_{t+1}+\{F(K_{t+1},L_{t+1})-w_{t+1}L_{t+1}\}]$となる。他方，本節のモデルでは引退期の所得は勤労期に購入した株式の売却益$q_{t+1}s_t$と配当d_{t+1}との合計となる。後者の配当の大きさは経済全体では先述したように(2-3)だけの額となる。すなわち本節のモデルの引退期の所得には株式売却の際のキャピタル・ゲインと投資レントとが含まれるという点で基本モデルよりも複雑化されている。

家計の効用最大化より貯蓄関数（あるいは株式需要関数）は

$$\text{(2-12)}\qquad s_t=s(\underset{(-)}{q_t},\ \underset{(+)}{q_{t+1}},\ \underset{(+)}{w_t},\ \underset{(-)}{d_{t+1}})$$

と表現される(図2参照)。右辺の各変数の下の符号は，その変数に関する偏微分係数の符号を表しており，その正負は一般的に妥当と思われる値を記している。次節において貯蓄関数の具体例が与えられる。

完全雇用を仮定した上で，第t期における財市場及び株式市場の均衡条件はそれぞれ

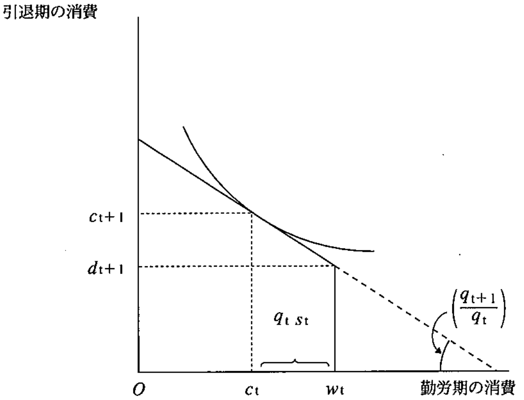

図2．代表的個人の消費—貯蓄決定

$$\text{(2-13)}\qquad L_{t-1}c_t^{t-1}+L_tc_t^t+I_t=F(K_t,L_t)-C(K_t,I_t)$$

$$\text{(2-14)}\qquad L_{t-1}s_{t-1}+I_t=L_ts_t$$

と表現される。なお予算制約(2-11)と株式市場の均衡条件(2-14)とが成立しているとき，財市場の均衡条件(2-13)は資本蓄積方程式$K_{t+1}=K_t+I_t$と同値である。

この経済の完全予見均衡経路は，初期条件L_1及びK_1（第1世代いわゆる「the initial old generation」の規模と彼らが保有していた株式)と，人口の推移方程式$\{L_{t+1}=(1+n)\ L_t\}$とに対して，各期において($t\geqq 1$)次の条件を満たす数列$\{q_t,K_t\}_{t=1}^{\infty}$によって定義される。

$$\text{(2-15)}\qquad K_{t+1}=K_t+I(K_t,q_t)=g(q_t,K_t)$$

$$\text{(2-16)}\qquad K_{t+1}=L_t\ s[q_t,q_{t+1},w(K_t,L_t),d(K_{t+1},L_{t+1},q_{t+1})]$$

ここで(2-15)では(2-8)を考慮しており，また(2-16)では株式需要関数(2-12)に(2-7)及び(2-9)を代入している($d(\cdot)=D_{t+1}/L_{t+1}$)。

(2-15)よりK_{t+1}はK_t及びq_tの関数であり，このことを考慮すると(2-16)はq_{t+1}をq_tとK_tとの陰関数（それが存在するとして）

$$\text{(2-16')}\qquad q_{t+1}=h(q_t,\ K_t)$$

として示していることがわかる(L_t及びL_{t+1}は所与の値をとっている)。

(2-15)及び(2-16)によって要約される本節のモデルの一般的な数学的性質は稿を改めて検討することとして，次節では具体的な関数形のもとで定常解を計算して投資レントとキャピタル・ゲインとの効果を考察する。

第3節　計算例

本節では具体的な関数形を用いて動学経路の考察を行う。生産関数，調整費用関数，及び効用関数の形をそれぞれ次のように特定化する。

(3-1)　$F(K_t, L_t) = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}$,　$0 < \alpha < 1$

(3-2)　$C(K_t, I_t) = a\, I_t^2 / K_t$,　$a > 0$

(3-3)　$U(c_1, c_2) = lnc_1 + \beta lnc_2$,　$0 < \beta$

ここで$\beta > \alpha / (1 - \alpha)$ を仮定する。

さらに簡単化のために人口成長を捨象して，人口規模を１に規準化する($L_t = 1\ \forall t \geqq 1$)。これらの設定のもとで労働市場均衡を達成する実質賃金率，投資関数，及び貯蓄関数（株式需要関数）は次のように計算される。

(3-4)　$w_t = (1-\alpha) K_t^{\alpha}$

(3-5)　$I_t = (2a)^{-1}(q_t - 1) K_t$

(3-6)　$s_t = (1+\beta)^{-1}(\beta w_t / q_t - d_{t+1} / q_{t+1})$

また第t期の配当は (2-3) に (3-4) と (3-5) とを代入して

(3-7)

$$d_t = \{f(K_t) - w_t\} + [q_t I_t - \{I_t + C(K_t, I_t)\}]$$
$$= \alpha K_t^{\alpha} + (4a)^{-1} K_t (q_t - 1)^2$$

となる。

これらを用いて均衡経路を与える推移方程式 (2-15) 及び (2-16) とはそれぞれ

(3-8)　$K_{t+1} = \{1 + (2a)^{-1}(q_t - 1)\} K_t$

(3-9)　$K_{t+1} = (1+\beta)^{-1}[\beta(1-\alpha) K_t^{\alpha} / q_t - \{\alpha K_{t+1}^{\alpha} + (4a)^{-1} \times K_{t+1}(q_{t+1} - 1)^2\} / q_{t+1}]$

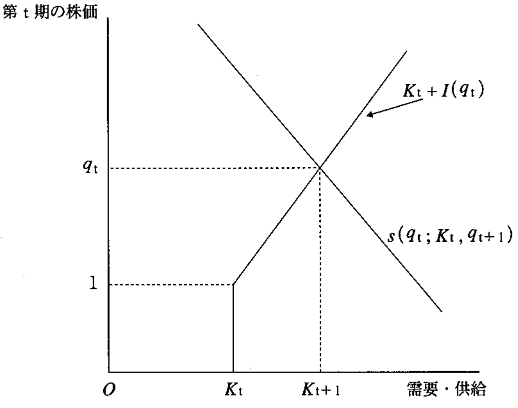

図３．第ｔ期の均衡株式価格決定の例示

として与えられる。第t期の一時的均衡株価の決定は図３によって示される。

また，所与のq_t及びK_tに対して１以上のq_{t+1}が決定されるための十分条件は

(3-10)　$$K_{t+1} \leqq \frac{1}{1+\beta}\left\{\frac{\beta(1-\alpha)K_t^{\alpha}}{q_t} - \alpha K_{t+1}^{\alpha}\right\}$$

(3-11)　$$\frac{\partial}{\partial q_{t+1}}\left(\frac{d_{t+1}}{q_{t+1}}\right) \geqq 0$$

である[5]。

ここで次の命題が証明される。

［命題］(3-8) 及び (3-9) の定常解は鞍点である。

［証明］(3-8) 及び (3-9) から定常解 (q^*, K^*) は

(3-12)　$$\begin{cases} q^* = 1 \\ K^* = [(1+\beta)^{-1}\{(1-\alpha)\beta - \alpha\}]^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{cases}$$

として求められる。体系 (3-8) 及び (3-9) を

5）所与のq_t及びK_tに対して (3-9) はq_{t+1}についての二次方程式

$$J(q_{t+1}) = (4a)^{-1} K_{t+1} q_{t+1}^2 + \{(1+\beta)K_{t+1} - \beta(1-\alpha)K_t^{\alpha} q_t - (2a)^{-1} K_{t+1}\} q_{t+1} + (4a)^{-1} K_{t+1} + \alpha K_{t+1}^{\alpha} = 0$$

を与える。これが１以上の実数解を持つ必要十分条件は $J(1) \leqq 0$ である。これは

$$K_{t+1} \leqq (1+\beta)^{-1}\{\beta(1-\alpha)K_t^{\alpha} / q_t - \alpha K_{t+1}^{\alpha}\}$$

を意味しており，この右辺は$\lim_{q_{t+1} \to 1} s(q_t, K_t, q_{t+1})$に他ならない。さらに $s(\cdot)$ がq_{t+1}に関して減少的であれば体系 (3-8) 及び (3-9) は１以上のq_{t+1}を決定する。(3-11) が成立しているとき$s(\cdot)$はq_{t+1}に関して減少的である。

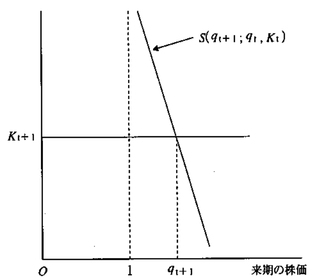

図４．K_t及びq_tとq_{t+1}との間の関数関係

この定常解の近傍で線形近似すると

(3-13)

$$\begin{pmatrix} K_{t+1}-K^* \\ q_{t+1}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{K^*}{2a} \\ \left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)(1+\beta)K^{*-\alpha} & \left(\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left\{\dfrac{\beta(1+2a)-a}{2a}\right\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_t-K^* \\ q_t-1 \end{pmatrix}$$

を得る。(3-13) 式のヤコビアン (Aと示す) の固有多項式$B(\lambda)$において

$$B(0)=det\ A>0,$$
$$B(1)=-\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left\{\frac{\beta(1-\alpha)-\alpha}{2a}\right\}<0,$$

が成立している。したがって，二次方程式$B(\lambda)=0$は二つの相異なる正の実数解をもつ。一方の絶対値は1より小であり，他方の絶対値は1より大である。[証明終]

これまでの数学的性質の検討から，企業の投資決定を含んだ本節のモデルと第1節で導入された基本モデルとの間には長期的均衡資本ストックと定常解の安定性とについて相違が生まれることが明らかになる。生産関数と効用関数とがそれぞれ (3-1) 及び (3-3) で与えられ，また人口成長を捨象した ($L_t=1\ \ \forall t\geqq 1$) 場合，基本モデルにおける定常解は

$$(3\text{-}14)\quad K=\left[(1+\beta)^{-1}(1-\alpha)\beta\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

となり，しかもこの解は大域的に安定である。

また，(3-12) と (3-14) とから$K^*<K$であることがわかる。これは以下のように説明される。(3-7) 式の第2行第2項$\{(4a)^{-1}K_t(q_t-1)^2\}$によって示されている投資レントは，株式保有に対して個人が引退期に受け取る配当に含まれる。したがって投資が導入されたモデルにおいては株価q_tと投資レントの分だけ基本モデルにおけるよりも引退期所得が大きい。すなわち基本モデルの均衡における第t世代個人の引退期所得は

$$\{1+f'(K_{t+1})\}\ K_{t+1}$$

であり，他方本節のモデルのそれは

$$\{q_{t+1}+f'(K_{t+1})\}\ K_{t+1}+(4a)^{-1}K_{t+1}(q_{t+1}-1)^2$$

となる。効用関数 (3-3) のもとでは将来所得の増加は現在の貯蓄を減少させる。結局，本節で定式化された投資及び株式を含んだモデルにおける資本蓄積はこの所得効果と調整費用の存在によって基本モデルの場合よりも低下することになる。

第4節　結語

以上の記述において調整費用に基づく投資関数の導入が世代重複モデルの定常解に対してもたらす効果を検討してきた。主要な結論は，基本的世代重複モデルへの投資の導入によって定常均衡資本ストックの水準は低下し，また定常均衡は鞍点的安定性をもつようになるということである。より一般的なモデルにおける解の一意性，複数均衡解の可能性，及び安定性などの厳密な分析については稿を改めて述べることとしたい。これらの残された問題の他に今後の研究課題として重要なものを述べて本稿の結びとする。世代重複モデルと投資理論との結合から主に二つの研究方向が示唆される。一つはモデルの多部門化であり，もう一つは景気循環モデルへの拡張である。

Uzawa [15] 等の貢献以後，無限の計画期間を持つ主体を仮定した2部門成長モデルは広範に研究されてきているが，世代重複モデルの「2部門化」は比較的最近のことであり，Galor[5]が一般的な定式化を与えている。ただしそこにおいても投資決定の問題は主眼ではなく，資本財は一期間の生産期間の中で全て減耗し各期ごとに生産への資本財投入が決定されることになっている。このGalorモデルに企業設備投資行

動や本稿で行った金融的制度設定を導入すると動学経路がどのように変化するかを検討することは興味深い問題である。

他方，世代重複モデルを応用したGrandmont［7］の「内生的景気循環理論」は，外生的ショックがない場合でも消費者の「異時点間の代替効果（intertemporal substitution effect）」によって循環が起こり得ることを示した。この新古典派的なアプローチに対して，景気循環研究へのKeynes的アプローチは消費者の異時点間の最適化行動というよりも企業の側の予想（資本の限界効率や長期期待の状態）に重きを置く。Keynes的観点から本稿のモデルを資産価格や投資の浮動生を強調した景気循環モデルに発展させることも今後の研究課題である。

参考文献

［1］Abel, A. and O. Blanchard,"An Intertempora Model of Saving and Investment," *Econometrica* 51(1983):675-692.

［2］Azariadis, C., *Intertemporal Macroeconomics*, Cambridge, Blackwell, 1993.

［3］Bailey, R. and W. Scarth,"Adjustment Costs and Aggregate Demand Theory," *Economica* 47(1980):423-431.

［4］Blanchard, O., and S. Fischer, *Lectures on Macroeconomics*, Cambridge, MIT Press, 1989.

［5］Galor, O. "A Two-Sector Overlapping-Generations Model:A Global Characterization of the Dynamic System," *Econometrica* 60(1992):1351-1386.

［6］——, and H. Ryder,"Existence, Uniqueness, and Stability of Equilibrium in an Overlapping-Generations Model with Productive Capital," *Journal of Economic Theory* 49(1989):360-375.

［7］Grandmont,J-M.,"On Endogenous Competitive Business Cycles," *Econometrica* 53,(1985):995-1045.

［8］Hayashi,F.,"Tobin's Marginal q and Average q:A Neoclassical Interpretation," *Econometrica* 50(1982):213-224.

［9］——, "Corporate Finance Side of the Q Theory of Investment," *Journal of Public Economics* 27(1985):261-280.

［10］岩井克人，「経済成長論」，岩井克人・伊藤元重編『現代の経済理論』第VII章に所収，（東京，東京大学出版会），1994年.

［11］Lucas, R. E. Jr.,"Adjustment Costs and the Aggregate Theory of Supply," *Journal of Political Economy* 75(1967):321-334.

［12］Mussa, M.,"External and Internal Adjustment Costs and the Theory of Aggregate and Firm Investment," *Economica* 44(1977):163-178.

［13］Sargent, T., *Dynamic Macroeconomic Theory*, Cambridge, Harvard University Press, 1987.

［14］Tirole, J.,"Asset Bubbles and Overlapping Generations," *Econometrica* 53 (1985):1499-1528.

［15］Uzawa, H.,"On a Two-Sector Model of Economic Growth," *Review of Economic Studies* 29(1961):40-47.