HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	サヴェジ基礎論における術語worldについて(6)
Author(s)	園, 信太郎
Citation	經濟學研究, 46(4), 30-54
Issue Date	1997-03
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/32042
Type	bulletin (article)
File Information	46(4)_P30-54.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

経済学研究 *46−4*
北海道大学 1997.3

サヴェジ基礎論における術語 world について（6）

園　　信太郎

1．はじめに

この「基礎論」とは

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1954(*Second Revised Edition*, Dover, New York, 1972)

でのサヴェジ氏の思索のことだが，筆者はこの紀要の1993年3月第42巻4号，頁は21(307)-47(333)，1993年9月第43巻2号，14(144)-37(167)，1994年9月第44巻2号，31(125)-59(153)，1995年3月第44巻第4号，118(436)-146(464)，及び 1996年3月第45巻第4号，49(415)-68(434)，において「基礎論」への注釈を試みたのであり，一方，副次的注釈，「サヴェジ，レオナルド ジミィ，による1961年の講義における個人的確率について」，1994年3月第43巻4号，176(603)-187(613)，及び，個人的効用の有界性に関する注釈，「サヴェジ書第二版の80頁における脚註に現われる，有界効用について」，1990年12月第40巻第3号，30(288)-40(298)，を示した。

今回は，サヴェジ氏にとっての個人的効用及び個人的期待効用の概念と彼が提示している第7公準P7とに関する，「基礎論」における議論を読み取ることとする。なお今まで通り§x. y, z, はDover版の第x章第y節z頁を示す。

2．個人的効用の「定義」が個人的確率を利用することによって導入されると言うこと

第6公準P6の特別な場合であるP6′を，P1からP5までと同様に，自身の「行為」を自身で検束するための規範として「個人」が自身に対して課すことによって，その「個人」の（「世界」に対する）個人的な定量的確率が一意的に定まるのであった。ただし，ここでの「確率」とは，数学的には「世界」上の有限加法的確率測度なのだが，「世界」に「宿る」ものではなく，「世界」に対するその「個人」の「態度」にかかわる指標のようなものなのである。つまり，個人的な「結果」としての「あたり」賞と（その「個人」にとってはより「損な」）「はずれ」賞とが与えられているとして，各事象に対して，その事象が通用すれば「あたり」賞が，また通用しなければ「はずれ」賞が，もたらされると言う「くじ」を想定するのならば，これらの「くじ」に対するその「個人」の「選好，preference」が，P1からP5及びP6′を前提とした上でだが，定量的に表現され，この表現をその「個人」による諸事象の（個人的「確からしさ」による）序列化と見なせば，またこのように見なすことは正当なのだが，この序列化は諸事象に関する（その「個人」の行動様式を部分的に統制すると見なせる）定量的確率をもたらすこととなるのである。そこで問題となるのは，このような「くじ」に関する場合のみではなく，より一般的な「行為」に関する個人的選好を，定量的に表現することがどこまで可能なのかと言うことである。

今，各「結果」に対して実数値を付加する写像Uが与えられているものとする。この場合，任意の「行為」（つまり「世界」から「結果」の全体への任意の写像）aに対して，「世界」

の各状態sに実数値U(a(s))を付加する写像U∘aを考えることができる。ところで，「ある実数A及びBが存在して，A≦U(a(s))≦Bをみたさないsの全体がその「個人」にとって実際上不可能な事象である」のならば，つまり「写像U∘aが，その「個人」の個人的確率に関して，「本質的に」有界である」のならば，その個人的確率に関する写像U∘aの期待値E(U∘a) が，即ち，Pをその個人的確率として，またSをその「個人」にとっての（集合としての）「世界」として，積分値

$$\int_S U(a(s))\ P(ds)$$

が，その「個人」にとっては一意的に存在することとなる。そこで，「a及びbをU∘a及びU∘bがその「個人」にとって「本質的に」有界となるその「個人」の任意の「行為」とすると，これらの「行為」に対する（その「個人」の個人的選好による）序列化と，それらの「行為」に対する（その「個人」の個人的確率に基づく）個人的期待値による序列化とは，一致する」と言う性質を，つまり，「「本質的に有界」ならば，その「個人」にとって「aはbよりも選好が上位である，と言うわけではない」と，その「個人」にとって「U∘aの期待値はU∘bの期待値よりも大である，と言うわけではない」とは，同値である」と言う性質を，写像Uがみたしていると想定してみよう。この場合，このUを（その「個人」にとっての）個人的効用と呼ぶとしても不当ではないであろう。実際，サヴェジ氏は，第7公準P7を導入した後に，このような写像が存在していることを指摘しているのだが，しかし，個人的効用の「定義」，「存在」，及び「実質的一意性」は，P7が導入される前に，提示されまた証明されているのである。

まずサヴェジ氏は，写像の値としての「結果」の全体が有限である「行為」へと考察を限定することによって，このような「行為」間のその「個人」の選好が，「行為」の値である諸「結果」に対してその「行為」によって誘導される，「分布」によって「定まる」ことを（P1からP6までを前提として）示すのである。つまり，この種の「行為」の値である各「結果」に対して，その「結果」をその「行為」を通してその「個人」へともたらすこととなる（「世界」の）「状態」のその全体としての事象が，対応するのだが，このような各事象に対しては（それが通用することに関する）その「個人」の個人的確率が既に配分されており，その「結果」に対してこの「確率」値を対応させることによって，その「行為」の値である諸「結果」に対する（その「個人」の個人的確率に基づく）「分布」が定まることとなり，この「分布」が一致するのならば，つまり，値としての諸「結果」もまた各「結果」に対応する「確率」値も一致するのならば，それらの「行為」は（P1からP6までの「公準」に従う）その「個人」にとっては同等（つまり無差別）となるのであり，従って，値として取る諸「結果」とその「行為」とにより誘導される（「世界」の）分割が異なっていても，「分布」が一致すれば同等である。

このような状況を考慮に入れた上でサヴェジ氏は「かけ，gamble」という言葉を導入する。まず，nを1以上の自然数として，「結果」の系列c_i，$i=1,\cdots,n$，を想定する。ただし，この系列で同じ「結果」が重複して現れる場合もあり得る。一方，非負の実数からなる系列p_i，$i=1,\cdots,n$，でこれらの実数の総和が1となるものをも想定する。そこで，「結果」c_iがもたらされる「確率」値がp_iである「分布」，(c_i，p_i)，$i=1,\cdots,n$，を考える。しかし，この「分布」がその「個人」にとっての本来の「分布」であるためには，「世界」の（n個の事象への）分割であってその第i番目の事象に対する個人的確率がp_iに一致するものが存在しなければならないはずである。ところが，P1からP5及びP6′の下では，ここでの任意の系列p_i, $i=1,\cdots,n$，に対して，このような分割の存在が（数学的帰納法と定量的確率とを利用して）容易に従

うのである。そこでこの分割の第i番目の事象上で値c_iを取る写像を考えれば，この（写像としての）「行為」によって誘導される（ただし値c_iの重複を考慮に入れた上での）「分布」は(c_i, p_i)，$i=1, \cdots, n$，に一致することとなる。つまり，ここでの任意の「分布」に対しては，P1からP5及びP6′の下で，それをもたらす「行為」が少なくとも一つは存在することとなるのである。そこで「分布」(c_i, p_i)，$i=1, \cdots, n$，をもたらすこのような「行為」の全体を考えて，これを(c_i, p_i)，$i=1, \cdots, n$，に関する「かけ」と呼ぶこととするのだが，上で言及した命題により，一つの「かけ」に属する「行為」は皆同等であることが従い，そこで「かけ」の間には自然に選好を導入できるのであり，つまり，一方の「かけ」に属するある「行為」と他方の「かけ」に属するある「行為」との間に成立する選好関係によって，これらの「かけ」の間の選好関係を定義すれば良いのである。

この「かけ」間選好を用いてサヴェジ氏は「効用，utility」を自身の立場から次のように「定義」するのである。つまり，Uを各「結果」に対して実数値を対応させる写像とする。そこで，「任意の「分布」(c_i, p_i)，$i=1, \cdots, I$，及び(d_j, q_j)，$j=1, \cdots, J$，に対して，ただしこれらに関する「かけ」をおのおのF及びGとして，「FはGよりも選好が上位である，と言うわけではない」と「$\Sigma_{i=1}^{I} U(c_i)p_i$は$\Sigma_{j=1}^{J} U(d_j)q_j$よりも大である，と言うわけではない」とは同値である」がみたされる場合，かつその場合に限って，「Uは効用である」，と「定義」するのである。

なお「行為」間の選好を定量的に把握することに言及している§5.1,69，の冒頭の段落を引けば次である。

The postulates P4-6, introduced in Chapter 3, have already led to simplification of the relation $\leq$ in so far as it applies to acts of a special but important form. Indeed, through the introduction of numerical probability, those special comparisons have been reduced to ordinary arithmetic comparison of numbers in such a way that many relations among acts are deducible by simple and systematic arithmetic calculation. In this chapter it will be shown that the arithmetization of comparison among acts can, with the introduction of one mild new postulate, be extended to virtually all pairs of acts.

ここで，始めの文で，「特別なしかし重要な様式を持つ諸行為，acts of a special but important form」と言うのは，上で言及した（「あたり」賞及び「はずれ」賞をその「結果」とする）「くじ」のことである。また次の文で「数値的確率，numerical probability」というのは，その「個人」にとっての（「世界」に対する）定量的確率のことである。そして末尾の文で「ある一つの緩やかな新しい要請，one mild new postulate」と述べているのは，サヴェジ氏が導入しようとしている，第7公準P7のことである。なお，「実際上全ての，virtually all」という表現を用いているが，P7を導入した後では，これはただ単に「全ての」としてかまわないのである。また「算術化，arithmetization」と述べているが，これは本来「定量化」とでも呼ぶべき事柄である。

さらにこの次の段落を引用する。

This far-reaching arithmetization of comparison among acts is achieved by attaching a number $U(f)$ to each consequence f in such a way that $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$ if and only if the expected value of $U(\mathbf{f})$ is numerically less than or equal to that of $U(\mathbf{g})$, provided only that the real-valued functions $U(\mathbf{f})$ and $U(\mathbf{g})$ are essentially bounded. The provision can fail to be met only if there exist acts that are, so to speak, distinctly preferable to any fixed

reward or distinctly worse than any fixed punishment.

ここで$U(\mathbf{f})$及び$U(\mathbf{g})$はおのおの合成写像$U\circ\mathbf{f}$及び$U\circ\mathbf{g}$のことである。また，サヴェジ氏が実際に後で展開している議論に従えば，上でその「定義」に言及した「効用」の「存在」と「実質的一意性」とがP1からP6までを前提として従うのであり，さらにP7を仮定すると，この「効用」は有界となるのであり，それ故に，P7が導入された後には，この引用文中の「本質的に有界」は自動的にみたされることとなるのであり，結局，論理上は，The provision以下の読者への注意は必要でないこととなるのである。

次に「かけ」の定義に関する§5. 2, 71, の下から二番目の段落を引用する。

In this chapter the notation $\Sigma\rho_i f_i$ will denote the class of all acts **f** for which there exist partitions B_i of S such that $P(B_i)=\rho_i$ and $f(s)=f_i$ for $s\ \varepsilon B_i$. Here the f_i's are a finite sequence of consequences(not necessarily distinct), and the ρ_i's a corresponding sequence of nonnegative real numbers such that $\Sigma\rho_i=1$. In view of Conclusion 7 of Theorem3. 3. 3, such a class of acts, which will in this chapter be referred to as a *gamble* and denoted by ***f***, ***g***, ***h***, or the like, always has at least one element. Theorem 1 says, in effect, that the person regards all elements of any gamble as equivalent. To put it differently, if the events B_i of a partition have the probabilities ρ_i, and if the act **f** is such that the consequence f_i will befall the person in case B_i occurs, then the value of **f** is independent of how the partition B_i is chosen.

ここで「行為」からなる集合$\Sigma\rho_i f_i$とは，iが1からnまで変化するものとして，上で言及した，「分布」(f_i, ρ_i)，$i=1,\cdots,n$，に関する「かけ」にほかならない。また，末尾の文で述べていることは，「個人」にとっての「分布」が一致すれば，「世界」に対するいかなる分割を問題としているのかに依存せずに，それらの「行為」はその「個人」にとって同等となる，と言うことである。

さらに，「効用」の定義に関する§5. 3, 73, の冒頭の段落を引けば次である。

The idea of utility can most conveniently be introduced in connection with gambles or, equivalently, acts that with probability one are confined to a finite number of consequences, thus: A **utility** is a function **U** associating real numbers with consequences in such a way that, if $\boldsymbol{f}=\Sigma\rho_i f_i$ and $\boldsymbol{g}=\Sigma\sigma_j g_j$; then $\boldsymbol{f}\leq\boldsymbol{g}$, if and only if $\Sigma\rho_i U(f_i)\leq\Sigma\sigma_j U(g_j)$. Writing $U[\boldsymbol{f}]$ for $\Sigma\rho_i U(f_i)$, the condition takes the form $U[\boldsymbol{f}]\leq U[\boldsymbol{g}]$. Similarly, it is convenient to understand that, for an act **f**,

$$(1)\qquad U[\mathbf{f}]=E(U(\mathbf{f})).$$

In this notation the following obvious theorem gives a slightly different characterization of utility.

THEOREM 1　A real-valued function of consequences, **U**, is a utility;if and only if $\mathbf{f}\leq\mathbf{g}$ is equivalent to $U[\mathbf{f}]\leq U[\mathbf{g}]$, provided **f** and **g** are both with probability one confined to a finite set of consequences.

ここで，始めの文で，「確率1で有限個の結果へと制限される，諸行為」と言う表現があるが，これは，「その「個人」にとって「実際上不可能である」ある事象上の振る舞いを無視すれば，有限個の「結果」のみを値とする写像と

見なせる「行為」」への言及である。「「確率」1で有限個の「結果」へと制限される「行為」」は，「実際上不可能である」の定義により，ある「有限個の「結果」のみを値とする「行為」」と同等となり，また，これらの「行為」のその「個人」にとっての「期待値」は一致することとなる。このような状況において，「定理1」として表現されるa slightly different characterization of utilityが従うこととなる。

3．「効用」の「存在」と「実質的一意性」

§5.3の73頁から74頁にかけての段落を引くと次である。

Do the postulates thus far assumed guarantee that any utilities exist at all? Can Theorem 1 be extended to an even wider class of acts? Does a great diversity of utilities exist, or does the relation $\leq$ practically determine the function **U**? These questions, here mentioned in the order in which they most naturally arise, are manifestly of great importance in understanding utility. For technical reasons, they will be answered in a different order − the third followed by the first in this section, and the second in the next section.

ここでthe postulatesと言うのはP1からP6までの「公準」を指しているのであり，またTheorem 1 とは前節の末尾で言及した「定理1」のことである。しかし，「効用」による序列化を「「確率」1で有限個の「結果」のみを値として取る諸「行為」」からさらにより広い諸「行為」へと拡張する際に，サヴェジ氏は，第7公準P7を導入することとなるのである。また，「行為」間の選好が「効用」**U**を「事実上決定する，practically determine」とは，サヴェジ氏が実際に展開している議論との連関においては，「任意の「効用」U及びVに対して，ある正の実数a及びある実数bが存在して，任意の「結果」cに対して，V(c)＝aU(c)＋b」という状況を指しているのであり，このような状況を，サヴェジ氏は，§5.3, 74, の三番目の段落の末尾で，「任意の二つの効用は必然的に一方が他方の増加する線形的関数である，any two utilities are necessarily increasing linear functions of one another」，と表現している。なおここで「線形的，linear」という言葉は，定数倍のみでなく，定数を加える場合をも含めて使われている。つまり，「尺度の変換」を無視すればその「個人」の「効用」は一意的に定まるのであり，「効用」の「実質的一意性」が，P1からP6までを前提として，帰結することとなるのである。

ところでUを前節で「定義」した「効用」とし，a及びbは実数であり，aは正であるとすると，各「結果」cに対して実数aU(c)＋bを対応させる写像aU＋bもまた，「定義」によって，その「個人」の「効用」となる。つまり，Uを「効用」としVを各「結果」に対して実数を対応させる写像とすると，「「ある正の実数a及びある実数bが存在してV＝aU＋b」ならば「Vは「効用」である」」が従う。この「逆」は，「「Vは「効用」である」ならば「ある正の実数a及びある実数bが存在してV＝aU＋b」」となり，これは「効用」の「実質的一意性」を主張していることとなる。§5.3, 74, の「定理3」は「実質的一意性」を主張するものだが，その直前の文で「逆に，conversely」と言い表しているのは，このような状況による。

次にこの「定理3」の証明だが，そこでは行列式の基本的な性質と「定理2.4」，つまり§5.2, 73, の「定理4」，とが利用されている。そこでこの「定理2.4」だが，その内容は，「F及びGを「かけ」としてFよりもGの方がその「個人」にとっては選好が上位であるとし，また「行為」fはその選好に関して，両端のいずれかと無差別となる場合をも含めて，F及びGの間

にあるものとすると，0以上1以下のある実数aが一意的に存在して，F及びGに対しておのおの「確率」a及び 1－aを配分してこれらを「混合する」ことにより従う「かけ」とfとは無差別となる」，と言うものである。ここで「かけ」と「行為」との間の選好関係が用いられているが，これはその「行為」とその「かけ」に属する任意の「行為」との間の選好によって「定義」されるものであり，前節で言及したように「かけ」に属する「行為」は皆同等であるから，この「定義」は成立することとなる。なおこのような「定義」のやりかたについて，サヴェジ氏は，§5.2, 72, の二番目の段落で，

In view of Theorem1, it is natural to say that $\boldsymbol{f} \leq \mathbf{g}$ means that, for every act f in the class of acts corresponding to $\boldsymbol{f}$, $\mathrm{f} \leq \mathbf{g}$. Corresponding definitions are to be understood for $f \leq \mathbf{g}$, $\boldsymbol{f} \leq \boldsymbol{g}$, $f \leq \boldsymbol{g}$, etc.

と，述べている。ただし二番目の文で$f \leq \mathbf{g}$とあるのは$\mathrm{f} \leq \boldsymbol{g}$とすべきではなかろうか。またこの流儀に従えば，「「かけ」Fは「かけ」Gよりも選好が上位である，と言うわけではない」とは，「「かけ」Fに属する任意の「行為」と「かけ」Gに属する任意の「行為」とに対して，「前者は後者よりも選好が上位である，と言うわけではない」」と言うことであると，「定義」されることとなる。この「かけ」間選好の「定義」は前節での定義の様式とは異なるが，「かけ」には少なくとも一つの「行為」が属し，またそれに属する「行為」は皆同等であるので，二つの「定義」は同値となる。なお「定理1」とは§5.2, 70, の「定理1」のことだが，これは前節で言及した，「有限個の「結果」のみを値として取る「行為」に関しては，それらの「分布」が一致すれば，それらは同等である」という命題のことである。

次ぎに「かけ」の「混合，mixture」についてだが，値が重複する場合をも含めた「結果」の系列c_i，$i=1, \cdots, I$，及びd_j，$j=1, \cdots, J$，に関する「分布」(c_i，p_i)，$i=1, \cdots, I$，及び(d_j，q_j)，$j=1, \cdots, J$，と，非負で和が1となる実数a及びbとが，与えられているとして，これらから，各c_iに対して「確率」$p_i a$を，また各d_jに対して「確率」$q_j b$を，配分する一つの「分布」を構成できるが，この構成された「分布」に関する「かけ」を，先の二つの「分布」の前者に関する「かけ」に「確率」aを，また後者に関する「かけ」に「確率」bを，配分することによって得られる「混合」と呼ぶこととするのである。また，二つのみでなく任意有限個の「かけ」に関しても，同様に「混合」を「定義」することができる。

なお，「混合」の「定義」に関する，§5.2, 71, の末尾の段落の冒頭の二文を引けば次である。

Gambles can be mixed, in a sense, to make new gambles, thus: Let $\boldsymbol{f}_j$ be a finite sequence of gambles,

$$(2) \qquad \boldsymbol{f}_j = \sum_i \rho_{ij} f_{ij},$$

and σ_j a corresponding sequence of non-negative real numbers such that $\Sigma \sigma_j = 1$. The *mixture* of the $\boldsymbol{f}_j$'s with weights σ_j, denoted $\Sigma \sigma_j \boldsymbol{f}_j$, is defined by

$$(3) \qquad \Sigma \sigma_j \boldsymbol{f}_j = \sum_j \sigma_j \{\sum_i \rho_{ij} f_{ij}\} = \sum_{i,j} (\sigma_j \rho_{ij}) f_{ij},$$

which is meaningful, the f_{ij}'s being consequences and the $(\sigma_j \rho_{ij})$'s being numbers such that $\Sigma(\sigma_j \rho_{ij}) = 1$.

ここで添え数iの上限は添え数jに依存するはずなので，式(3)の操作$\Sigma_{i,j}$の内訳には少し注意する必要があるであろう。

ところで§5.3, 74, の「定理3」のサヴェジ

氏による証明には，上で言及したように行列式の基本的な性質が利用されており，これによって証明が簡潔になっているのだが，この証明で本質的なのは「定理2.4」の利用であり，行列式を持ち出さなくとも「自然な」証明が当然可能である。実際，U及びU′を「効用」とし，f，g，及びhを「結果」として，fよりもgが，またgよりもhが，選好が上位であるとする。この場合，「定理2.4」により，ただしf及びhを「かけ」であるように見なして，「0より大で1より小のある実数rが一意的に存在して，f及びhに対しておのおの「確率」r及び1−rを配分することによって従う「混合」とgとが無差別である」が，従う。そこでこのrに対して，「効用」の「定義」により，$U(g)=rU(f)+(1-r)U(h)$ 及び$U'(g)=rU'(f)+(1-r)U'(h)$ が従うが，始めの式をrに関して解きその結果を後の式のrに代入すると，

$$U'(g)=U(g)\frac{U'(h)-U'(f)}{U(h)-U(f)}+\frac{U(h)U'(f)-U(f)U'(h)}{U(h)-U(f)}$$

となり，「効用」の「定義」から$U(f)<U(h)$かつ$U'(f)<U'(h)$であるので，U′がUの「増加する線形的関数」であることが表に出て来ることとなる。またf，g，及びhの序列が他の場合でも，同様の論法で結論が従うこととなる。

またこの「定理3」の系として，サヴェジ氏が§5.3, 75, のCOROLLARY 2で注意しているように，「二つの「効用」が二つの無差別ではない「結果」に対して同じ値を付加するのならば，それらは「効用」として一致する」と言うことが従う。さらにまたこの系の直後の段落で，サヴェジ氏は，「効用」の実質的一意性について次のようにまとめている。

To summarize, if there is a utility at all, there are an infinite number, but the array of utilities is not complicated;for all can be generated from any one by increasing linear transformations.

しかし「実質的一意性」に関するこのような議論は「効用」が「存在」しないのならば無内容となってしまうであろう。だが§5.3, 75, の「定理4」と75頁から76頁にかけてのその「証明」とにより，その「存在」が，ただしP1からP6までを前提として，保証されるのである。またこの「証明」においても上で言及した「定理2.4」が本質的な役割をはたしているのである。

なおサヴェジ氏の「証明」は，全ての「かけ」からなる集合上で定義されている，彼の言葉では（「かけ」の全体上の）hyper-utilityと呼ばれる，実数値を取るある写像の「存在」を示すことによる。「かけ」の全体上のhyper-utilityとは，各「かけ」に実数を対応させる写像であって，しかも「かけ」間選好による序列を不変に保ち，また二つの「かけ」の「混合」に関しては線形的である，つまり，一方の「かけ」に「確率」aを，また他方の「かけ」に「確率」1−aを，配分する「混合」に対するその写像の値は，その「一方」に対するその写像の値にaを掛け，またその「他方」に対するその写像の値に1−aを掛けて，これらを加え合わせたものに等しくなる，と言うものである。実際，このような写像の「存在」が示されれば，その定義域を（「かけ」と見なした）「結果」の全体へと制限することによって，自動的に「効用」の「存在」が従うこととなる。なお，サヴェジ氏は，二つの「かけ」の「混合」という操作に関して閉じている「かけ」の集合を，通常の流儀に従って，convexと呼び，convexな集合上で（同様な様式で定義される）hyper-utilityを考えて，さらにまた特に，（同等の場合をも含めて）二つの（「かけ」と見なした）「結果」にはさまれている（それらの「結果」をも含めた）「かけ」の全体を「区間，interval」と呼び，

「区間」上での「存在」と「実質的一意性」とが示されるhyper-utilityを，「かけ」の全体へと延長することによって，「全体」上のhyper-utilityの存在を示しているのである。

ところで§5.4,76,の冒頭の段落を引くと次である。

If $\boldsymbol{I}$ is the interval determined by $g<h$, then, according to Theorem2.4, there is for every $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{I}$ a unique number, call it $V(\boldsymbol{f})$, such that

$$(6)\qquad \boldsymbol{f} \doteq (1-V(\boldsymbol{f}))g+V(\boldsymbol{f})h.$$

By repeated use of Theorem2.2, it follows for any $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{f}'$ ε $\boldsymbol{I}$ that

$$(7)\qquad \rho\boldsymbol{f}+(1-\rho)\boldsymbol{f}' \doteq \rho\{(1-V(\boldsymbol{f}))g+V(\boldsymbol{f})h\}+(1-\rho)\{(1-V(\boldsymbol{f}'))g+V(\boldsymbol{f}')h\}=\{1-[\rho V(\boldsymbol{f})+(1-\rho)V(\boldsymbol{f}')]\}g+[\rho V(\boldsymbol{f})+(1-\rho)V(\boldsymbol{f}')]h,$$

so V is a hyper-utility on the convex set $\boldsymbol{I}$.

ここで「定理2.2」とは§5.2,72,の「定理2」のことであり，その内容は，F，G，及びHを「かけ」とし，aを0より大で1以下の実数とすると，「「FはGよりも選好が上位である，と言うわけではない」と，「「Fに対して「確率」aを，Hに対して「確率」1－aを，配分する混合」は「Gに対して「確率」aを，Hに対して「確率」1－aを，配分する混合」よりも選好が上位である，と言うわけではない」とは，同値である」，と言うものである。なお，サヴェジ氏は，上の引用中の(6)及び(7)から写像Vがhyper-utilityとなると主張しているが，さらに，「$\boldsymbol{f}\leq\boldsymbol{f}'$ と $V(\boldsymbol{f})\leqq V(\boldsymbol{f}')$ とは同値である」が示されねばならない。しかし，これは，§5.2,72,の「定理3」から従うし，また，この「定理3」の内容は，「「かけ」Fは「かけ」Gよりも選好が下位であり，1以下の実数aは0以上の実数bよりも大であるとすると，「Fに対して「確率」aをGに対して「確率」1－aを配分する混合」は，「Fに対して「確率」bをGに対して「確率」1－bを配分する混合」よりも，選好が下位である」，と言うものである。なお，「定理2.4」により懸案の写像が都合良く定義されるのであり，それ故に，「定理2.4」は，「実質的一意性」の場合と同様に，ここでも本質的な役割をはたしていると判断されるのである。

またconvexな定義域上のhyper-utilityが「実質的に一意」であることは，「効用」の「実質的一意性」の場合と同様な（「定理2.4」を利用する）論法によって従うのであり，この「実質的一意性」と「「区間」上での存在」とを利用して，「かけ」の全体上でのhyper-utilityの存在が従うこととなるのである。

なお，ここで言及した§5.2の「定理2」，「定理3」，及び「定理4」に対応する原文を順に引けば次のようである。

THEOREM 2　If $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, and $\boldsymbol{h}$ are gambles, and $0<\rho\leq 1$; then $\rho\boldsymbol{f}+(1-\rho)\boldsymbol{h}\leq\rho\boldsymbol{g}+(1-\rho)\boldsymbol{h}$, if and only if $\boldsymbol{f}\leq\boldsymbol{g}$.

THEOREM 3　If $\boldsymbol{f}<\boldsymbol{g}$, and $0\leq\sigma<\rho\leq 1$, then $\rho\boldsymbol{f}+(1-\rho)\boldsymbol{g}<\sigma\boldsymbol{f}+(1-\sigma)\boldsymbol{g}$.

THEOREM 4　If $\boldsymbol{f}_1<\boldsymbol{f}_2$ and $\boldsymbol{f}_1\leq g\leq\boldsymbol{f}_2$, then there is one and only one ρ such that $\rho\boldsymbol{f}_1+(1-\rho)\boldsymbol{f}_2 \doteq g$.

また，この「定理4」の証明中で，（実数の連続性に関する）the principle of the Dedekind cutが利用されている。

4.「効用」の拡張に関する注意と第7公準P7

上の第2節で言及したように，サヴェジ氏の流儀によれば，「効用」概念は「個人」の「確

率」を利用して「定義」されるのであり，しかもこの「効用」は「かけ」に対して，従って「有限個の値のみを取る「行為」」に対して，さらにまた「「確率」1で有限個の値のみを取る「行為」」に対して，あてはめられるのであった。また，上の第3節で言及したように，P1からP6までを前提として，「効用」の「存在」と「実質的一意性」とが従うのであった。

しかし，より一般的な「行為」に対して，この「効用」をあてはめることができるであろうか。つまり，この「効用」をUとしf及びgを「行為」とすると，「個人」の「確率」に基づく期待値E(U∘f)及びE(U∘g)が確定していると仮定した上でだが，「「fはgよりも選好が上位である，と言うわけではない」と「E(U∘f)はE(U∘g)よりも大である，と言うわけではない」とは同値である」が従うと見なし得るであろうか。あるいはまた，「見なし得る」ためには，「個人」の行動様式に対する，いかなる「要請」が設定されれば充分なのであろうか。

ところで，このような問いに連関して，§5.4, 77, の二番目の段落を末尾の二文を除いて引用すれば次である。

One way to extend the concept of utility to acts with an infinite number of consequences would be to postulate: If $U[\mathbf{f}]$ and $U[\mathbf{g}]$ both exist (the values $+\infty$ and $-\infty$ being regarded as possible); $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$, if and only if $U[\mathbf{f}] \leq U[\mathbf{g}]$. I see no serious objection to making this assumption outright, though it might be complained that the assumption is motivated more by general mathematical ituition and experience than by intuitive standards of consistency among decisions, which I have tried to take as my sole guide thus far. A statement almost as strong as the one in question can, however, be derived on adjoining a new postulate, P7, more in the spirit of P1-6.

ここで$U[\mathbf{f}]$は，上の第2節で言及したように，個人的期待値$E(U\circ\mathbf{f})$のことである。また，P7の追加によって，この「効用」Uは有界となってしまうので，末尾の文のalmost as strong asは，論理上は，as strong asで良いのである。なお，サヴェジ氏は，「P1からP6までを前提としてその「存在」と「実質的一意性」とが示される（「「確率」1で有限個の値のみを取る「行為」」の間の選好を定量的にとらえる）「効用」が，より一般的な「行為」に関する選好をも定量的にとらえる」と仮定してしまうことに対して，深刻な異議などないであろうと見ているようだが，このような「仮定」は，サヴェジ氏の規範的立場からすれば，その性格が通常の数学的仮定とは異なり，「個人」が自身に対して課する「要請」であるはずなのである。しかし，期待値の概念，つまり（「個人」の「確率」に関する）積分値の概念が，この「仮定」では当然のことのように利用されていることを考慮すれば，この「仮定」が他の既に提示されている「公準」と同じ性格のものであると速断することには無理があるであろう。つまり，その「個人」が「一般的で数学的な直観及び経験」を充分に保持しているのならば，問題の「仮定」を，自身の行動様式に対する「要請」として当然の事のように受け入れるかもしれないが，しかし，自身の（一般的な損得勘定に関する）行動様式の一貫性，あるいは自身が下す決定の整合性に，関心を持つありふれた「個人」にとっては，このような「仮定」を，「直観的にもっともらしい諸基準」によって動機づけられていると見なすことは，無理があるであろう。

なお，サヴェジ氏は，§5.4の冒頭の段落である76頁から77頁にかけての段落で，「「確率」1で有限個の「結果」のみを取る「行為」」だけではないより一般的な「行為」へと，「効用」がとらえる「行為」を拡張することの意義について議論しているが，これは，「有限個の「結果」のみを取る「行為」」だけで実際上は間に合うと思われてしまう恐れがあるからなのであ

る。例えば，彼が言及しているように，「個人」の寿命を，10^6分の1秒を最小の単位として，また1000年以下として，とらえる場合には，「可能な寿命」は有限個と見なせるし，また年間収入を問題とする場合には，やはり最小の単位と上の限界とを適当に選んでおけば，「可能な収入」は有限個と見なせるのである。また，より一般的には，問題の段落の76頁から77頁にかけての文を引けば，More generally, it is plausible that, no matter what set of consequences is envisaged, each consequence can be practically identified with some element of a suitably chosen finite, though possibly enormous, subset. となるのである。従って，もし真面目にこのような「有限個の」立場を取るのならば，少なくともその当人にとっては，「無限に多くの「結果」を値として取る「行為」」の「効用」を本格的に考察することは，実際上は，必要がないこととなってしまうのである。しかし，このような「有限個の」立場に対して，サヴェジ氏は，77頁の冒頭から三番目から五番目の文で次のように答えるのである。

If that argument were valid, it could easily be extended to reach the conclusion that infinite sets are irrelevant to all practical affairs, and therefore to all parts of applied mathematics. But it is one of the most profound lessons of mathematical experience that infinite sets, tactfully handled, can lead to great simplification of situations that could, in principle, but only with enormous difficulty, be treated in terms of finite sets. How difficult it would be to study geometry if one made at the outset the "simplifying assumption" that to all intents and purposes at most $10^{1,000}$ points in space can be discriminated from one another!

つまり，現実の数学的経験が教える所に従えば，問題としている状況を数学的に考察する際には，「有限個の」立場を採るのではなく，無限集合を適切に利用することにより定式化を行う方が，その状況の本質を単純かつ明快にとらえることへと通じやすいのである。

ところでサヴェジ氏は，より一般的な「行為」への「効用」の拡張との連関で，七番目の「公準」を導入することとなるのだが，彼の流儀からすれば，この「公準」の動機づけは，「不確定性」に直面している「個人」の（自身にとっての損得に関する）判断にかかわるものでなければならないはずである。つまり彼は，「効用」の拡張をもたらす数学的に見て都合が良い仮定をただ単に持ち出すのではなく，「個人」が自身の行動様式に対して課する「要請」として「自然な」ものを探査しかつ提示して，この「要請」を前提とすれば，問題の「拡張」が副産物としてもたらされると言うことを示さなければならないはずである。そこで，第7公準P7が提示される§5.4, 77, の末尾の段落を引けば次である。

Suppose that every possible consequence of the act **g** is at least as attractive to the person as the act **f** considered as a whole; then it seems to me within the spirit of the sure-thing principle to conclude that **f** $\leq$ **g**; the same might as fairly have been said for the relations $\geq$, and also for the two relations $\leq$ given B and $\geq$ given B. This idea is formalized in the following postulate, which, according to the conventions of mathematical double-talk, is to be interpreted as two propositions—one having $\leq$ and the other $\geq$ throughout.

P7　If **f** $\leq$ $(\geq)$ $g(s)$ given B for every $s \varepsilon B$, then **f** $\leq$ $(\geq)$ **g** given B.

ここでwithin the spirit of the sure-thing

principleという表現に注意してみると，これは，「要請」P7が「商量の原理，sure-thing principle」の「精神，spirit」によって動機づけられるのだと言うサヴェジ氏の主張にかかわるものである。しかし，「商量の原理」そのものは，「基礎論」の§2.7で述べられているように，また三回目の注釈の第8節で言及したように，このP7とは様式を異にするのであり，実際それは，「a及びbを「個人」の行為とし事象A及びBによって「世界」が分割されるとすると，この場合，仮にAが通用しているとするのならばその「個人」にとってbは少なくともaと同等であり，一方仮にBが通用しているとするのならばその「個人」にとって今度もまたbは少なくともaと同等であるのならば，事象による条件づけを表に持ち出さなくとも，「世界」に直面しているその「個人」にとっては，bは少なくともaと同等である」という様式で表現される，「個人」による損か得かの見きわめに関する，「原理」なのであり，これは，(「個人」が問題としている「世界」における）各「状態」に対応する（一方の「行為」の）「結果」が，全体的に考察される他方の「行為」との比較において，少なくとも同等であるのならば，その「一方の「行為」」は少なくともその「他方の「行為」」と同等である，と言う，サヴェジ氏が上の引用文中で提示している，判断の様式とは異なるとせざるを得ないのである。なお，彼は，このP7と同様の判断様式を，§5.5,88,の冒頭の段落では，*Strong form of sure-thing principle*と呼んでいるが，ここでの*Strong*とはいかなる状況を指すのかは説明していない。つまり，サヴェジ氏は，「要請」P7の動機づけに「商量の原理」やその類似物が本格的にかかわると言うことについて，明白には，説明していないのである。

しかし，「行為」**f**を全体的に考察するという作業を，**f**と丁度つりあう，つまり無差別な，「結果」fを捜し出す作業と見れば，このようなfがなんとか存在するものとしてだが，P7の動機づけが「商量の原理」の類似物にかかわるような雰囲気となるのである。実際，「行為」**g**は（その「個人」が問題としている「世界」における）各「状態」sに対して，「行為」**f**と少なくとも同等である，「結果」$g(s)$をもたらすとすると，**f**とfとは同等なのだから，各sに対して$g(s)$は少なくともfと同等となり，従って，常に値fを取る定数的行為を$\langle f\rangle$とすると，各sに対して$g(s)$は少なくとも$\langle f\rangle(s)$と同等となり，「「世界」の「状態」sが任意に与えられているのならば，この場合，「行為」**g**がもたらす「結果」$g(s)$は少なくとも「行為」$\langle f\rangle$がもたらす「結果」$\langle f\rangle(s)$と同等である」ので，ここで「商量の原理」のある類似物を想定するのだが，「状態」sによる場合分けを表に出さずに，「「行為」**g**は少なくとも「行為」$\langle f\rangle$と同等である」が従うと判断して良いであろうし，また$\langle f\rangle$と**f**とは同等であるので，「**g**は少なくとも**f**と同等である」と判断して良いであろう，となる。

ところでサヴェジ氏はP7を導入した後，当然これを利用して，§5.4の79頁から80頁にかけての議論で，「効用」の導入によって（個人的期待値を利用して）定量的に表現できる「選好による序列化」のその範囲が実際に拡張できることを示すのである。ただしその際，P7の導入によって，彼が（個人的確率の概念を利用して)既に正式に「定義」した「効用」が有界となることを，明白には述べていないし，また80頁のDover版での脚注で，Peter Fishburn(1970, pp. 194, 206-207)and I have since discovered to my surprise that these postulates imply bounded utility, which puts the next several paragraphs in a new light. と述べている。つまり，80頁の末尾の段落から82頁の§5.4の末尾までの議論は，「効用」の有界性に気づいていなかった時のものであるが，しかし，そこでのサヴェジ氏の態度には有界性に対する微妙な揺れが現れているように思われるのである。

そこで80頁から81頁にかけての段落を引くと次である。

It would be possible to explore unbounded acts for which expected utility exists to see whether expected utility governs preferences among even such acts under postulates P1-7 or under some extension of them.+ I do not think, however, that the question is sufficiently interesting to warrant attention here, especially since there is some reason, first stated by Gabriel Cramer in a letter partially reproduced in [B10], to postulate that there are upper and lower bounds to utility, in which case all acts would necessarily be bounded.

ここで冒頭の文の末尾の上つきの＋は上で引用したDover版での脚注を示すものである。また,「有界でない諸行為」と言っているが，この「有界でない」とは，写像としての「行為」と(P１からP６までを前提として「存在」と「実質的一意性」とが既に示されている)「効用」との合成写像が「「その「個人」の「確率」に関して本質的に有界である」と言うわけではない」と言うことである。またここでサヴェジ氏は,「「効用」は「個人」にとって有界である」と主張するための説得力のある例示が18世紀の前半に既に提示されているので,「有界でない諸行為」にまで「効用」による統制が及ぶか否かを真剣に議論する気がしないと言っているのである。だがP７が既に導入されているので，サヴェジ氏の「効用」は有界となり，論理上は,「有界でない諸行為」は存在していないのである。

さらにまた81頁の四番目の段落の三番目以下の文を引けば次である。

Again, it is often said, in effect, that the utility to a person of immediate death is a consequence of minus infinite utility, but casual observation shows that this is not true of anyone—at least not of anyone who would cross the street to greet a friend. In the same vein, medicine often gives lip service to the idea that the death of a patient is of minus infinite utility, and, of course, doctors do go to great lengths to keep their patients alive; but a doctor who took the idea too seriously would make a nuisance of himself and soon find himself with no patients to treasure.

ここでは,「「負の無限大」の効用」をもたらす「結果」と言うような事柄は，言葉の上では言及されるかもしれないが，実際の「個人」のありふれた行動様式に注意すれば，そのような「結果」はありそうもないのであり,「最悪の「結果」」とは言っても,「無限大に「最悪」」と言うわけではないであろう，と言うことが簡潔に例示されているのである。つまり,「即座に死んでしまう」ことが「自分」へと「無限大の損失」をもたらすとは言っても，実際は，軽い用事をはたすために（たとい微弱ではあっても「危険な」）通りを横切ったりもするし，また,「患者の死」は「無限大の損失」を「医師」へともたらすとは言っても，実際は,「患者」のあらゆる行動を調査し制御しようなどとは，通常の「医師」ならば考えたりはしないのである。

さらに，この段落の次の段落を引用する。

If the utility of consequences is unbounded, say from above,† then, even in the presence of P1-7, acts (though not gambles) of infinite utility can easily be constructed. My personal feeling is that, theological questions aside, there are no acts of infinite or minus infinite utility, and that one might reasonably so postulate, which would amount to assuming utility to be bounded.

ここで短剣符†はWiley版での脚注を示すものでありそれを引けば次である。

† That is, if, for every V, there is a consequence f such that $V \leq U(f)$. This manner of speaking is permissible; because in view of Theorem3. 3, if one utility is bounded, all are.

上で引用した段落でP1-7となっているが，論理上は，P1-6とすべきものである。また，「結果」の全体が定義域である「効用」が有界であるのならば，その「効用」に関する期待効用が「無限大」や「負の無限大」になる「行為」は存在しないこととなるので，対偶を考えれば，「無限大」あるいは「負の無限大」を期待効用とする「行為」が存在するのならば「効用」は有界ではない，と言うこととなる。また逆に，「効用」が有界でないのならば，P1からP6までを前提としてだが，期待効用が「無限大」あるいは「負の無限大」となる「行為」の存在を(従属選択の原理を利用して)容易に示すことができるのである。従って，which would amount toと言うこととなる。また脚注の方は，一つの「効用」が上に非有界ならば，「効用」の「実質的一意性」により，他の「効用」も上に非有界とならざるを得ない，と言うことへの注意である。なおサヴェジ氏は，P7の導入によって「効用」が有界となってしまうことには気づいていなかったのだが，「私の個人的な感じでは，My personal feeling」とことわった上で，期待効用が「無限大」や「負の無限大」となる「行為」が存在し得ると言う主張を退けているのである。

ところが一方で彼は，「効用」の有界性を明白に仮定することを回避しようとする態度をも示すのであり，このようなサヴェジ氏の「心の揺れ」は次に引く81頁から82頁にかけての段落に現れている。

Justifiable though it might be, that assumption would entail a certain mathematical awkwardness in many practical contexts. For example, as will be discussed at greater length in Chapter15, it sometimes seems reasonable to suppose that the penalty for acting as though a particular unknown number were $\hat{\mu}$ instead of its true value, μ, is proportional to $\delta^2=(\mu-\hat{\mu})^2$. But, if the possible values of μ are unbounded, then so are the possible values of δ, so utility is here taken to be unbounded. On close scrutiny of such an example one always finds that it is not really reasonable to assume the penalty even roughly proportional to δ^2 for large values of δ^2, but rather that large values are so improbable that the error made in misappraising the penalty associated with them is negligible compared to the saving in simplicity resulting from the misappraisal. If the assumption of bounded utility were made part of the theory of personal probability, then any example in which unbounded utility is used for mathematical simplicity would be in contradiction to the postulates. I propose, therefore, not to assume bounded utility formally, but to remember that problems involving unbounded utility are to be handled cautiously.

ここでサヴェジ氏は，「効用」が有界であることは（どこまで明白に意識しているかは不明だが）人が日日行っている（自身にとっての損か得かにかかわる）判断様式を見れば正当化できるであろうとしながらも，「有界性の仮定」が，実際上は，数学的取り扱いを面倒なものにしてしまうであろうと述べているのである。特に自乗損失に関する状況，つまり，「真の」値と「推定された」値との差の自乗が（その「推

定された」値を採用する分析者へともたらされる）損失であると見なされる状況においては，「真の」値となり得る値の全体が有界ではないとしてだが，「推定された」値を固定しておくと，その自乗損失となり得る値の全体は上に非有界となり，「有界性の仮定」が当てはまらなくなるのである。さらに彼は，便利であることが広く認められているこの(自乗損失による)本来の損失の「近似」は，「真の」値が「推定された」値から遠ざかるに従って，「近似」とは呼び得ない程に粗略なものとなると注意しつつ，しかし，一方，「真の」値が遠くはずれることは起りにくく，また，この粗略な「近似」がもたらす数学的な単純さにより分析者の労力がかなり節約されるので，問題の粗略さを承知した上で自乗損失を利用した方が得策であろう，との趣旨の発言をするのである。さらにまた彼は，数学的単純さを得るために非有界な「効用」を利用した方が得策である状況と，彼が展開している個人的確率の理論とが，なんとか両立することを願って，「効用」の有界性をフォーマルには仮定しないという立場を採ろうとするのである。つまり彼は，ここでは，実際に行われている数学的な作業と彼の立場とを妥協させる方向での発言をしていることとなるのである。しかし，彼のP1からP7までの公準を前提とすると，「効用」は有界となり，そのような妥協は，論理上は，成立し得ないこととなる次第なのである。

ところで，上で引用した段落の次の段落，つまり，§5.4, 82, の二番目の段落を引くと次である。

To take stock of the chapter thus far, utility having been established, it is now superfluous to consider that consequences may be of all sorts, since the postulates imply that in virtually every context a consequence is adequately characterized by its utility, some one utility function having been chosen from the linear family of possibilities. Therefore, unless the contrary is clearly indicated, f, g, and h will henceforth mean not exactly consequences in the sense used to date, but rather real numbers measuring utility in units to be called **utiles**. Correspondingly, an act **f** will henceforth be understood to be a real-valued random variable. The entire theory of preference, at least for bounded acts, can now be summarized by the following résumé:

R　$\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$ given B, if and only if $P(B)=0$,
　or $E(\mathbf{f}-\mathbf{g} \mid B) \leq 0$.

From now on, though not formulated as a postulate, it is to be assumed without further quibbling that R holds, provided only that $E(\mathbf{f})$ and $E(\mathbf{g})$ exist and are finite; no attempt will be made to compare acts for which the expected value does not exist or is infinite.

解釈の問題を別にしてフォーマルに見れば，「結果」と言うものは，サヴェジ氏の公準系をみたしている限りその内訳は何でも良かったはずなのだが，その公準系を前提とすると，「効用」の「存在」とその「実質的一意性」とが従い，結局，各「結果」にはその「効用」によって付加される実数値が定まることとなる。そこで，「効用」を一つ固定しておいて，各「結果」には，その「結果」の「個人」にとっての損か得かの程度をその「効用」によって「測定する」ことによってもたらされる，ただし「ユータイル，utile」と言う単位を持った，実数値が対応していると見なして，この各実数値を，あたかも本来の「結果」であるかのように取り扱っても，算術的な議論を行う上では，無駄が省けることはあっても不都合は生じないこととなるであろう。また，このように（「結果」に対応する）実数値を本来の「結果」であるかのよう

に見なしてしまう作業を前提とするのならば，各「行為」を，「世界」の各「状態」に対して実数値を対応させる写像と見なすことも，当然従うであろう。つまり，「効用」の導入によって，各「行為」を実数値を取る確率変数であるかのように見なすことが「自然に」従うのである。

ところで上の引用文中の「要約」Rについてだが，ただし「本質的に有界な「行為」」に対してはこのRの成立は既に示されているわけだが，サヴェジ氏は，「公準，a postulate」としての定式化はしないが，（「個人」の「確率」に関する）有限の期待値が確定する「行為」間でもこのRが成立するのだと「仮定する」と述べ，また，期待値が確定しない「行為」や，確定しても「無限大」や「負の無限大」となる「行為」に対しては，それらを「比較する」ことは試みないと述べるのである。しかし，P1からP7までを前提とすれば，「効用」は有界となり，従って，問題のRは全ての「行為」に対して成立することとなり，彼が導入を試みている（「公準」ではない）「仮定」は，論理上は，必要ではなくなるのである。ところで，「（「個人」の「確率」に関する）有限の期待値が確定する「行為」間でRが成立すると「仮定する」」と言うことは，彼の個人論的流儀からすれば，その「個人」の行動様式へのある「要請」を導入することであり，抽象的で数学的な「仮定」を設定することとは異なるはずであり，しかし，一方，彼はこの「仮定」を「公準」として取り扱ってしまうことは回避しているのであり，それ故に，このRに関する彼の態度には，（「個人」が自身へと課する規範としての）「公準」と言う事柄に対する（彼自身の）「心の揺れ」が潜在しているように思われるのである。

5．期待効用の概念に関する注釈

サヴェジ氏は「基礎論」の91頁から104頁にかけての§5.6（表題はHistorical and critical comments on utility）の前半で，期待効用の概念の歴史に言及しつつ，結果としては，この概念に対する（彼の立場からの）注釈を行っているのである。

§5.6, 91, の二番目の段落の冒頭の三文を引くと次である。

As was mentioned in §4.5, the earliest mathematical studies of probability were largely concerned with gambling, particularly with the question of which of several available cash gambles is most advantageous. Early probabilists advanced the maxim that the gamble with the highest expected winnings is best or, in terms of utility, that wealth measured in cash is a utility function. Some sense can be seen in that maxim, which will here be called by its traditional though misleading name, the **principle of mathematical expectation.**

ここでは，（現金を賞としてもたらす）いくつかの「かけ」の内で，それらの「かけ」にかかわる者たちにとって，どのような「かけ」が最も有利なのか，と言う問いが，初期の（多分17世紀や18世紀前半の）確率研究者の関心を引いたことがまず注意されているが，さらには，このような問いが，いくつかの「かけ」の間の選択に直面している「個人」に対して（その「個人」の選択様式に課されることとなる）いかなるマキシムを勧めるべきなのかと言う問いへと，とらえ直されている。そこで今から見ると，初期の研究者は，「最も高い期待される賞金額を伴った「かけ」を選択せよ」と言うマキシムを「個人」へと勧めているように思われるのであり，またこのマキシムは，「効用」と言う言葉を用いれば，富を現金で測定することによって「個人」の「効用」関数がもたらされる，と言う考えに基づいているようなのである。つまり，今日では「数学的期待値の原理」と呼ば

れているマキシムを提示しているようなのである。

なおこの後でサヴェジ氏は，この「原理」が，一つ一つの「かけ」では（「かけ」に参加する者には）小額の得失しかもたらされないのだが，これらの相互に独立した「かけ」を長期にわたって多数回行う状況を想定することによって，また一方で大数の弱法則に訴えることによって，動機づけられるとする見解があることにふれている。

また彼はその後にBernoulli，Daniel，による（18世紀前半になされた）議論に次のように言及する。

Second, Daniel Bernoulli, who, in [B10], was one of the first to introduce a general idea of utility corresponding to that developed in the preceding three sections, made the following analysis of the principle, which justifies its application in limited but important contexts.

ここでは，彼が問題としている「効用の概念」に対応していると思われる事柄にBernoulli，Daniel，が言及していること，及び，Bernoulli，Daniel，は，この概念を利用して，ある限定された状況において「数学的期待値の原理」が正当化されることを指摘していると言うことを，注意しているのである。つまり，「個人」が所有している富が金額によってとらえられるものとして，その「個人」が直面しているいくつかの「かけ」のいずれもが，その「かけ」がもたらす得失によって，その「個人」の富を大きく変化させることがないのならば，「現在の」富と「かけ」の「結果」の得失によって帰結し得る富とを含むある区間において，その「個人」の「富に関する効用曲線」は，「現在の」富に対応する（曲線上の）点で，ただし富の変化に対して「効用」の値が滑らかに変化するとしてだが，その「効用曲線」に接する直線によって充分に良く近似されるとしても，不当ではないであろう。このように「効用曲線」が接線によってうまく近似される状況では，「「効用」に関する期待値」による「かけ」の（「個人」にとっての損得にかかわる）序列化が，「金額に関する期待値」（つまり「数学的期待値」）による序列化によって，うまく近似されることとなり，結果としては，「数学的期待値の原理」が，ただし「効用関数」の概念を利用した上でだが，正当化されることとなるのである。なお，92頁の冒頭の段落では，「数学的期待値の原理」を無条件に受け入れるべきであると言うことが正当化されているわけではないと言うBernoulli，Daniel，の指摘が言及されているが，サヴェジ氏はその末尾の文で次のように注意している。

None the less, the principle was at first so categorically accepted that it seemed paradoxical to mathematicians of the early eighteenth century that presumably prudent individuals reject the principle in certain real and hypothetical decision situations.

さらにこれに続く段落つまり§5. 6, 92, の二番目の段落を引くと次である。

Daniel Bernoulli(1700-1782), in the paper [B10], seems to have been the first to point out that the principle is at best a rule of thumb, and he there suggested the maximization of expected utility as a more valid principle. Daniel Bernoulli's paper reproduces portions of a letter from Gabriel Cramer to Nicholas Bernoulli, which establishes Cramer's chronological priority to the idea of utility and most of the other main ideas of Bernoulli's paper. But it is Bernoulli's formulation together with some of the ideas that were specifically his that became

popular and have had widespread influence to the present day. It is therefore appropriate to review Bernoulli's paper in some detail.

つまり，「数学的期待値の原理」は，「不確定性」に直面している「個人」の行動様式にかかわる一般的な「原理」であるとは言い難く，最善の場合でも「おおまかな規則」と言うようなものであり，より妥当な「原理」として，「期待効用の最大化」がある，と言うことをBernoulli, Daniel, が指摘していると言うのである。また，今日から見れば「期待効用の最大化」と呼ばれるであろうようなこの「考え方」は，Cramer, Gabriel, から Bernoulli, Nicholas, への手紙の中で既に言及されており，Bernoulli, Daniel, はこれを今日通用しているような様式に定式化したと言うわけである。ここで注意すべきなのは，「数学的期待値の原理」がもたらす結論と人が実際に行っている決定との間に大きなずれがあるにもかかわらず，この「原理」は，当時としては，「不確定性」に直面している「個人」の行動様式に対する規範として，一応は認められていた，と言うことであり，また一方，Bernoulli, Daniel, はこの「原理」よりも適切であると自身には思われる規範(の候補者)を示唆した，と言うことである。

さらに92頁の末尾から二番目の段落を引く。

Many examples show that the principle of mathematical expectation is not universally applicable. Daniel Bernoulli promptly presents one: "To justify these remarks, let us suppose a pauper happens to acquire a lottery ticket by which he may with equal probability win either nothing or 20,000 ducats. Will he have to evaluate the worth of the ticket as 10,000 ducats;and would he be acting foolishly, if he sold it for 9,000 ducats?"

ここでBernoulli, Daniel, は簡潔な想像上の実験に訴えることによって，「数学的期待値の原理」が規範として通用し難い状況を提示するのである。つまり，ある貧乏人が，たまたまある「くじ」券を入手したと想定してみるのである。ここでこの「くじ」券は，0ダカットか2万ダカットかのいずれか一方を，ただし等「確率」で，彼へともたらすものとする。すると「数学的期待値の原理」は，貧乏な彼へと，その「くじ」券の価値を1万ダカットであると見積るように告げるであろう。しかし，貧乏な彼が，その「くじ」券を仮に9千ダカットで売るとしても，はたして彼は愚かな判断をしたこととなるのであろうか。つまり，このような想像上の実験においては，問題の「原理」に従わなくとも充分に賢明であり得るのである。

さらにこの段落の次の段落，つまり92頁から93頁にかけての段落では，「保険をかける」と言う「行為」が問題となっている。つまり，充分に分別のある商人が（海難に備えて）自分の船に「保険をかける」ことは別に異常ではないが，「数学的期待値の原理」ではこの「保険をかける」というありふれた「行為」が正当化できないのである。なおこの段落の末尾の文を引くと次である。

But the principle is neither obvious nor deduced from other principles regarded as obvious;so it may be challenged, and must be, because everyone agrees that it is not really insane to insure.

つまり，「数学的期待値の原理」はそのままで規範として通用することが明らかな「原理」と言うわけではなく，また，規範として通用することが明白な他のいくつかの「原理」から導出されるわけでもなく，また，一方，「保険をかける」と言う「行為」は別に異常なわけではなく，それ故に，この「原理」は，他の「原理」からの挑戦を受けて当然なのである。

ところで，この次の段落，つまり§5. 6, 93, の二番目の段落では，有名なSt. Petersburg paradoxが言及されるのだが，これを引用すれば次である。

Bernoulli cites a third, now very famous, example illustrating that men of prudence do not invariably obey the principle of mathematical expectation. This example, known as the St. Petersburg paradox (because of the journal in which Bernoulli's paper was published) had earlier been publicized by Nicholas Bernoulli, † and Daniel acknowledges it as the stimulus that led to his investigation of utility. Suppose, to state the St. Petersburg paradox succinctly, that a person could choose between an act leaving his wealth fixed at its present magnitude or one that would change his wealth at random, increasing it by $(2^n - f)$ dollars with probability 2^{-n} for every positive integer n. No matter how large the admission fee f may be, the expected income of the random act is infinite, as may easily be verified. Therefore, according to the principle of mathematical expectation, the random act is to be preferred to the status quo. Numerical examples, however, soon convince any sincere person that he would prefer the status quo if f is at all large. If f is \$128, for example, there is only 1 chance in 64 that a person choosing the random act will so much as break even, and he will otherwise lose at least \$64, a jeopardy for which he can seek compensation only in the prodigiously improbable winning of a prodigiously high prize.

ここで二番目の文の途中にWiley版での脚注がついているが，これを引けば次である。

† Daniel refers to this Nicholas Bernoulli as his uncle, but, in view of dates mentioned in the last section of Daniel's paper and the genealogy in Chapter 8 of [B 9], I think he must have meant his elder cousin(1687-1759), perhaps using "uncle" as a term of deference.

ここで問題となっているのは，いわゆる数学的期待値，つまり賞金の金額に関する期待値が，確定はするのだが「無限大」となると言う「くじ」に，「個人」が直面する場合である。なお，このような場合，期待値が確定して有限となる「くじ」からなる系列で，それらの期待値の系列が非減少で「無限大」へと発散するもので，(ただしP7の類似物を想定した上でだが) それらの期待値有限の「くじ」が「個人」の選好に関して問題の「無限大」の「くじ」以下となる，と言うものが取れるはずである。このような状況では，期待値有限のいかなる「くじ」であっても，その系列に属するある「くじ」よりも期待値が小となり，従って，「数学的期待値の原理」によれば，その任意に与えられた「くじ」はそのある「くじ」よりも選好が下位となり，結局，その期待値有限の任意に与えられた「くじ」は「無限大」の「くじ」よりも選好が下位となるであろう。つまり，「数学的期待値の原理」に従う「個人」にとっては，「無限大」の「くじ」はいかなる期待値有限の「くじ」よりも選好が上位となるはずであり，その「個人」は，結局，常に「無限大」の方を選ぶこととなるはずである。ところが，上で引用したSt. Petersburg paradoxでの期待値「無限大」の「行為」によって端的に例示されているように，「現状維持」よりも（いかなる参加料を払おうとも)「無限大」の方が得策なのだ，とは判断し難い状況を容易に想定できるのである。例えば参加料が128＝2^7ドルの場合，64＝2^6回中一回のチャンスでその「行為」を選んだ「個人」は損をしないですむが，他の場合では少なくとも64ドルを失うこととなる次第である。つまり，

問題の「行為」を選ぶ「個人」は，とてつもなく高い賞金を獲得すると言うしかし極めて起りそうもない状況へと，自身を「かける」と言う危険を冒すこととなるのである。

なお，サヴェジ氏の個人的確率を利用してこのSt. Petersburg paradoxにおける「行為」を反省してみることとする。P1からP5までとP6′とを前提とした上でだが，（前回の注釈の第7節で言及した「従属選択の原理」を利用すると）「世界」に対する分割的な事象系列で，つまり事象からなる系列，A_1，A_2，…，A_n，…，で，これらの合併が「世界」に一致し下つきの番号が異なる事象間の共通部分は空となるもので，第n番目の事象A_nに対する個人的確率が2^n分の1となるものが存在することが従う。ここで，A_1，A_2，…，A_n，…，の内でいずれか一つ，しかも一つのみが，通用するのだが，A_nが通用する場合には2^nドルの賞金がもたらされると言う「くじ」Lを想定し，さらにまた，各A_i，i=1，2，…，n，が通用する場合には賞金2^iドルが，A_i，i=n+1，n+2，…，の内のいずれかが通用する場合には賞金2^nドルがもたらされると言う「くじ」L_nを想定する。この場合，金額を「個人」にとっての本来の「効用」のように見なしてしまうと，L_nとL_{n+1}とは，A_1からA_nまでの合併上で一致し，A_i，i=n+1，n+2，…，の合併上ではL_{n+1}の方がより大である金額をもたらすので，L_nよりもL_{n+1}の方がその「個人」にとっては選好が上位となるであろう。ところでL_nとLとは，A_1からA_nまでの合併上で一致し，A_i，i=n+1，n+2，…，の合併上では，この合併に属するいかなる「状態」が通用してもLの方がより大である金額をもたらすので，（P7の類似物を想定しておけば）その「個人」にとってはLの選好はL_n以上となるはずである。従って，L_nよりもL_{n+1}は選好が上位であり，Lは選好がL_{n+1}以上なので，任意の番号nに対して，LはL_nよりも選好が上位となる。ところで，金額に関する期待値が確定して有限である任意の「くじ」L′に対して，ある番号nが存在して，L_nの期待金額はL′よりも大である。一方このnに対してLはL_nよりも選好が上位であるから，金額を「個人」にとっての本来の「効用」のように見なしてしまうと，つまり「数学的期待値の原理」を採用してしまうと，LはL′よりも選好が上位となる。つまりLは，期待金額が確定して有限な任意の「くじ」よりも，選好が上位となるのである。しかし，自身にとっての損得勘定に関心を持つ通常の「個人」が，「充分に」高額な現金の方をこのLよりも得であるとして選ぶことは，ほとんど明らかなことであろう。ところでこのLの期待金額は「無限大」だが，以上の議論には，「無限大」そのものとか「無限大」と有限との比較とかは現れていないのである。

なお§5.6,93,の末尾から二番目の段落を引くと次である。

Appealing to intuition, Bernoulli says that the cash value of a person's wealth is not its true, or moral, worth to him. Thus, according to Bernoulli, the dollar that might be precious to a pauper would be nearly worthless to a millionaire−or, better, to the pauper himself were he to become a millionaire. Bernoulli then postulates that people do seek to maximize the expected value of moral worth, or what has been called moral expectation.

つまり，「数学的期待値の原理」に関する以上のような問題点を提示しつつ，Bernoulli, Daniel, は，「個人」の富を金額で測ることによってもたらされる値そのものは，その「個人」にとっての本来の価値をうまく表現しているとは言い難いことを指摘するのであるが，そこで彼は，人が欲するのは，「期待される金額」の最大化ではなく，「道徳的価値，moral worth」に関する期待値の最大化であると主張するのであり，結局彼は，「数学的期待値の最大化」で

はなく「道徳的価値の期待値の最大化」を，「個人」が自身へと課す規範（の候補者）として提唱するのである。なお彼は，上で引用したように，貧乏人にとっては価値があると見なされるその1ドルは，仮にではあるが金持ちとなることとなっている，その貧乏人自身にとっては，ほとんど価値がないであろう，と言うような仮想的状況にも言及しており，「個人」の富が金額によって測られるという主張に対して簡潔な様式で疑問を呈しているのである。

6．期待効用の概念に関する注釈の続き

さらにまた§5.6の93頁から94頁にかけての段落を引けば次である。

Operationally, the moral worth of a person's wealth, so far as it concerns behavior in the face of uncertainty, is just what I would call the utility of the wealth, and moral expectation is expectation of utility. It seems mystical, however, to talk about moral worth apart from probability and, having done so, doubly mystical to postulate that this undefined quantity serves as a utility. These obvious criticisms have naturally led many to discredit the very idea of utility, but §§2-4 show (following von Neumann and Morgenstern) that there is a more cogent, though not altogether unobjectionable, path to that concept.

ここでサヴェジ氏は，上で言及した「「個人」の富に関する道徳的価値」なるものは，「不確定性」に直面している「個人」の行動を問題とする限りにおいては，「「個人」の富に関する「効用」」にほかならず，また，道徳的期待値とは「「効用」に関する期待値」のことである，と注意する。しかし一方で彼は，Bernoulli, Daniel, による「公準」，つまり「道徳的価値の期待値の最大化」が，提示されているその様式に難点があることをも指摘するのである。つまり，「不確定性」に直面している「個人」は，当然，（その「不確定性」に対する自身の「態度」としての）「確率」を問題とせざるを得ないのだが，Bernoulli, Daniel, は，このような確率概念から分離された様式で道徳的価値について語り，さらに，この性格が定かでない「価値」が，なんらかしらかの「確率」と結びつくことによって，「個人」によって最大化されるべき「道徳的価値の期待値」の役割をはたすと主張するのである。つまり，Bernoulli, Daniel, の「公準」は，その動機づけが二重に不鮮明なのである。しかしサヴェジ氏は，von Neumann and Morgensternの流儀に従うことによって，§5.2から§5.4にかけての議論で，「期待効用最大化の原理」へと通じるより説得力のある道筋を提示しておいたと読者に注意するのである。

なお彼は「von Neumann and Morgenstern に従って」と述べているが，§5.3, 75, の（「効用」の「存在」を主張している）「定理4」の証明の冒頭の二文では次のように注意している。

Von Neumann and Morgenstern prove essentially this theorem, as well as the preceding one, in the appendix of [V 4]. The following proof is theirs, expressed, as the teacher used to say, in my own words.

ここでthe preceding oneとは「効用」の「実質的一意性」を主張する「定理3」のことである。しかし，サヴェジ氏の「効用」は，上の第2節で言及したように，彼の「個人的確率の概念」を利用して「定義」されるのであり，従って，彼が展開している証明は，確率概念の基礎づけには踏み込んでいないvon Neumann and Morgensternの議論とは，数学的には類似していても，解釈上は異なるものである。

次に，§5.6, 94, の二番目の段落では，いわ

ゆる「限界効用逓減の法則」が言及されることとなる。この段落を引くと次である。

Bernoulli argued, elaborating the example of the pauper and the millionaire, that a fixed increment of cash wealth typically results in an ever smaller increment of moral wealth as the basic cash wealth to which the increment applies is increased. He admitted the possibility of examples in which this **law of diminishing marginal utility**, as it has come to be called in the literature of economics, might fail. For example, a relatively small sum might be precious to a wealthy prisoner who required it to complete his ransom. But Bernoulli insisted that such examples are unusual and that as a general rule the law may be assumed. In mathematical terms, the law says that utility as a function of money is a **concave** (i.e., the negative of a convex) function. † It follows from the basic inequality concerning convex functions (Theorem 1 of Appendix 2) that a person to whom the law of diminishing marginal utility applies will always prefer the status quo to any fair gamble, that is, to any random act for which the change in his expected wealth is zero, and that he will always be willing to pay something in addition to its actuarial, or expected, value for insurance against any loss to himself. The law of diminishing marginal utility has been very popular, and few who have considered utility since Bernoulli have discarded it, or even realized that it was not necessarily part and parcel of the utility idea. Of course, the law has been embraced eagerly and uncritically by those who have a moral aversion to gambling.

つまり，「金額で表現される富」に関する固定された増分は，その増分が加わる元の「金額で表現される富」が増加するに従って，より少ない「道徳的価値の増分」をもたらすこととなる，と言うのが，Bernoulli, Daniel, の主張なのだが，彼は，例外を認める一方で，この「法則」が通常は通用すると見なすわけである。ところでこの「法則」は，金額に関して滑らかに変化する効用関数が狭義に凹であること，つまり狭義に上に凸であることを，主張していることとなるであろうが，その結果として，このような効用関数があてはまる「個人」は，「金額で表現される富」の変動量に関する期待値が零となる「かけ」，つまりいわゆる「公正なかけ」よりも，「現状維持」の方を選択することとなるはずであるし，また，保険数理的な金額に加えて，いくらかの金銭を「保険」のために支払う覚悟があるはずなのである。

なおサヴェジ氏は，この「限界効用逓減の法則」が人人の間に非常に広まったことを認め，また，この「法則」があたかも効用関数の概念の一部分であるかのように取り扱われて来たことを注意し，そして，賭け事に対する道徳的な嫌悪感を持っている人人によって，当然のことながら，熱心かつ無批判に支持されて来たことにも言及するのである。ところで，Bernoulli, Daniel, は，貧乏人にとっては価値のある一定額の金銭が金持ちにとってはそれほど価値があるわけではない，と言う想定される状況を考慮して，この「法則」を導入するわけだが，一方，サヴェジ氏は，このような導入のやりかたには疑念を持っているのである。実際，§5.6, 96, の三番目の段落を引けば次である。

What, then, becomes of the intuitive arguments that led to the notion of diminishing marginal utility? To illustrate, consider the poor man and the rich man in the rain. Those of us who consider diminishing marginal utility nonsensical in this context think it

sufficient to say simply that it is a common observation that rich men spend money freely to avoid moderate physical suffering whereas poor men suffer freely rather than make corresponding expenditures of money; in other terms, that the rate of exchange between circumstances producing physical discomfort and money depends on the wealth of the person involved.

つまり，ここでの貧乏人と金持ちの例は，肉体的な不快感をもたらす状況と金銭との間の(「個人」にとっての）交換率が，そのような状況にかかわっているその「個人」が所有している富に依存して変化する，と言うことへの例示ではあっても，「個人」の効用関数が狭義に上に凸であることへの例示とは言い難い，と言うのである。

ところでさらにBernoulli, Daniel, の議論の追跡が続くのである。94頁から95頁にかけての段落で，「富を表現する金額」の関数としての（「個人」の）効用関数のそのグラフの勾配が「金額」の大きさに（大まかに見て）逆比例する，つまり，通常の「個人」の効用関数は大体において対数関数で近似される，と言う彼の主張が言及されるが，サヴェジ氏は，既にふれられているCramerからBernoulli, Nicholas, への手紙の中で指摘されていることだがとことわりながら，この対数関数は（「富を表現する金額」が限りなく増大し得るとしてだが）上に有界ではないので，St. Petersburg paradoxと同様の，損得勘定に関心のある通常の「個人」には受け入れ難い，(「無限大」の期待効用がかかわる）選択の様式をもたらすこととなると，注意するのである。またサヴェジ氏は，少し粗い例だがとことわりながら，「個人」の全体的富が百万(=10^6)ドルだとして，その「個人」は，一枚の（歪んでいない）硬貨を投げ上げることによって自身の全体的富を一億(=10^8)ドルか一万(=10^4)ドルかのいずれか一方にしてしまう，と言うようなことはしないはずであり，それ故に，対数関数そのものを「個人」の効用関数としてしまうことには，論理上は，無理があるであろう，と述べ，さらに，金銭に関する効用関数は少なくとも上に有界であるとするのが正当であろうと主張するのである。さらにまた彼は，人人は日日，適度な損失を回避できると言う大きな「確率」の故に，(「富」なるものをどのように解釈しようとも）自身の全体的富を実際に起る「確率」が小である危険にさらしている，と言う現実に注意しつつ，「個人」の効用関数は下にもまた有界であるとする方が適切である，と言うのである。ところで，対数関数は正の実数の全体上では上にも下にも有界ではないので，「富を表す金額」の広範囲にわたってこれを「個人」の効用関数として用いることには無理があることとなる。なお，「下に有界」に言及している（§5.6, 95, の冒頭の段落の末尾から二番目の）文を引用しておくと次である。

It seems to me that a good argument can also be adduced for supposing utility to be bounded from below, for, however wealth may be interpreted, we all subject our total wealth to slight jeopardy daily for the sake of a large probability of avoiding more moderate losses.

ところでサヴェジ氏は95頁の三番目の段落で，長期にわたって経済学者らは，確率概念に関する考察からは分離された様式で，Bernoulli, Daniel, の道徳的価値，つまり「効用」について議論してきたことにふれている。またその次の段落では，「確率抜きの効用概念，probability-less idea of utility」と言う表現が現れており，さらにまたその次の段落，つまり96頁の二番目の段落でも，この表現とこれに似た表現とが現れている。このような表現を敢えて持ち出すのは，「個人」が自身の損得にかかわる選択を為す際には，明白に意識している

か否かにかかわらず，もろもろの「不確定性」を処理しているはずであり，それ故に，(「個人」にとっての)「効用」の基礎づけを(「個人」にとっての)「確率」の基礎づけから分離した様式で議論することには論理上の問題があるはずだとする，彼の立場を強調するためであるだろう。また，彼が言及しているように，「不確定性」に対する「個人」の態度と言うことを問題とはせずに，従って，「行為」や「かけ」や「くじ」と言うような事柄を持ち出さずに，ただ「結果」のみを問題とするのならば，「結果」のみにかかわる「効用」なるものの狭義単調増加関数もまた「効用」なるものとなるであろうから，「結果」間の選好に関して狭義に単調増加すると言う性質をみたしている限り，任意の関数が「効用」となってしまうこととなり，「効用」なるものを問題とする意義は不明確となるであろう。一方，「不確定性」に直面している「個人」の「行為」を彼は議論しているわけだが，彼が提示している枠組みによれば，「個人」にとっての「確率」を利用して「効用」が「定義」され，しかも，この「効用」の「存在」と「実質的一意性」とが従うのであった。つまり，個人的確率の概念を重視する彼の立場からすれば，「確率抜きの効用概念」なるものは，論理上は難点があり，また数学上は強力でない，と言うこととなるのである。

なおサヴェジ氏は96頁の末尾から二番目の段落でRamsey，Frank Plumpton，の業績に言及しているが，その末尾の二文を引けば次である。

Ramsey improves on Bernoulli in that he defines utility operationally in terms of the behavior of a person constrained by certain postulates. Ramsey's essays, though now much appreciated, seem to have had relatively little influence.

つまりRamseyは，いくつかの「公準」によって制約されている「個人」のその行動を利用して，操作的に，「効用」を「定義」したのだが，これは，サヴェジ氏の見解によれば，「確率」から分離された「効用」をいわば天下り式に導入すると言うBernoulli，Daniel，の流儀を改良したものであると，見なせるのである。だが，今日から見れば重要なRamseyのこの議論は，当時は，影響らしい影響を他へと与えることがほとんどなかったのである。

さらにまたサヴェジ氏は，96頁から97頁にかけての段落で，「個人」の選好がある関数の期待値に対応していると言う主張の論拠が不明確であると言う，期待効用の概念への疑念にふれて，この疑念に対して，その段落の四番目の文で次のように答えている。

The question was answered by the construction of Ramsey and again by that of von Neumann and Morgenstern, which has been slightly extended in §§ 2-4;it is simply a mathematical fact that, almost any theory of probability having been adopted and the sure-thing principle having been suitably extended, the existence of a function whose expected value controls choices can be deduced.

つまり，サヴェジ氏の立場からすれば，その期待値が「個人」の選択様式を統制することとなる関数のその存在が，個人的確率の概念や「商量の原理」やその「拡張」らしきものにかかわるいくつかの「公準」から演繹されると言うことは，単なる数学的事実にほかならないのである。

しかし彼はこの文に続く三つの文で次のように述べている。

That does not mean that as a theory of actual economic behavior the theory of utility is absolutely established and cannot be

overthrown. Quite the contrary, it is a theory that makes factual predictions many of which can easily be observed to be false, but the theory may have some value in making economic predictions in certain contexts where the departures from it happen not to be devastating. Moreover, as I have been arguing, it may have value as a normative theory.

ここで彼は，期待効用の概念の基礎づけが論理的に（そして数学的に）為されたことから，「効用」の理論の実際の経済行動に関する理論としての確立が従うわけではない，と言うことを注意し，「効用」の理論，結局の所「期待効用最大化の原理」が，現実に為されている選択の有り様から少なくとも表面上は隔たった（実際の選択に関する）「予測」をもたらす傾向にあることを認め，しかし一方では，「効用」の理論からの隔たりがはなはだしくはない状況もあり得るであろうと注意し，さらに，彼自身の立場のように，その理論が規範的理論としての価値を持ち得るとする見方も成り立つことを示唆するのである。

ところでサヴェジ氏は，「効用」に関するvon Neumann and Morgensternによる取り扱い方が経済学者の間で議論を引き起したことと連関して，97頁の三番目の段落の冒頭で次のように述べている。

The von Neumann-Morgenstern theory of utility has produced this reaction, because it gives strong intuitive grounds for accepting the Bernoullian utility hypothesis as a consequence of well-accepted maxims of behavior.

つまり彼の見方によれば，Bernoulli, Daniel, が提示した「効用仮説」とでも言うべき事柄を，「個人」の行動に関する「うまく受容できるいくつかのマキシム」から導き出される事柄としてとらえ直すことによって，問題の「効用仮説」を受け入れるための直観的基盤を与えたことが，von Neumann and Morgensternによる（効用概念に対する）取り扱い方の意義なのである。なお同じ段落で，自分の「効用」に関する取り扱い方は彼らのやり方の写しのようなものだと，サヴェジ氏は述べているが，「確率」の基礎づけと言う作業の言わば副産物として「効用」の「定義」や「存在」をとらえようとする彼の流儀は，「確率」の基礎には立ち入らないvon Neumann and Morgensternのやり方とは，論理上は，異なるものであるだろう。

7．補遺

サヴェジ氏の直感によれば「商量の原理」の「拡張」らしきものである第7公準P7の導入によって，彼の公準系は完結することとなり，「不確定性」に直面している「個人」の行動様式を検束するこれらの「公準」によって，個人的確率の概念や期待効用の概念が基礎づけられることとなるのである。しかしここで注意すべきなのは，P1から（P6の特別な場合である）P6′までによって「確率」の「存在」と「一意性」とが従い，この「確率」を利用して「効用」が「定義」され，P1からP6までによって「効用」の「存在」と「実質的一意性」とが従い，最後にP7が導入されることによって，「期待効用最大化の原理」が，つまり「行為」間の選好が「行為」に対応する（ただし個人的確率に関する期待値を考えた上での）「期待効用」の大小関係によって表現されると言うことが，証明される，と言う演繹の順番である。つまり，ここで基本的なのは「確率」であって，「効用」は言わば副次的なのであり，このサヴェジ氏の流儀は，天下り式に効用関数や損失関数を導入しておいて，その後にいわゆる「事前分布」なるもののなんらかしらかの集合を問題とするという流儀とは，論理的性格が異なるのである。

またサヴェジ氏は上の第4，第5，及び第6節で言及したように18世紀前半に為されたBernoulli, Daniel, による議論に注目しているが，この古典的議論が現れる文献を「基礎論」の付録3の文献表の272頁から引くと次である。

Bernoulli, Daniel

[B10] "Specimen theoriae de mensura sortis," *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae* (for 1730 and 1731), 5(1738), 175-192.

[B11] *Die Grundlage der modernen Wertlehre. Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen*(German translation of [B10] by Alfred Pringsheim, with introduction by Ludwig Frick), Leipzig, Duncker V. Humblot, 1896.

[B11a] "Exposition of a new theory on the measurement of risk" (English translation of [B10] by Louise Sommer), *Econometrica*, 22 (1954), 23-26. [この26は36とすべきであり，またこの訳にはSommer女史 の脚注のほかにMenger, Karl, によるものも付加されている。]

ここでサヴェジ氏が実際に読んだのは(羅語の [B10] ではなく) 独訳の [B11] であるが，上の第4節で引用した(「効用」の有界性に関する) 80頁から81頁にかけての段落や，上の第6節で言及した(効用関数の近似としての) 対数関数に関する議論において見られるように，彼は，Cramerが，「本来の効用関数は有界である」と仮定することが実際上は正当である，との趣旨の発言をしていると見なしているようなのである。しかし，英訳 [B11a] の33頁から35頁にかけて引用されている(仏語から英訳された) Cramerの文章を見てみると，「きわめて大きないくつかの金額に対する効用関数の値はほとんど同程度であると，見なし得る」との趣旨の発言はあるようだが，「効用関数の有界性」を積極的に正当化するような議論はしていないようであり，また彼は，「富を表す金額」のその数値の正の平方根がその「金額」に対応する「効用関数の値」である，と言う仮想的状況に言及しているが，「金額」が限りなく増大し得る状況においては，正の平方根を取ることによって導入されるこの「効用関数」は，当然，上に非有界となるのである。従って，サヴェジ氏の「読み」には多分注意する必要があるであろう。

1996年10月31日(木)