経済学研究　47-3
北海道大学　1997.12

静学モデルの或る一般化について

田　中　嘉　浩

1　はじめに

古くは18世紀中頃に，等式制約下での最適化問題を解くために Lagrange の未定乗数法が考案されたのが制約付最適化の始まりであった。その後，不等式系に対する二者択一の定理等が考えられていたが，1951年に Kuhn and Tucker［12］によって，不等式制約に拡張された Kuhn-Tucker の定理により数理計画(Mathematical Programming) という分野が生まれた。これ以降，より一般的な関数を対象とする理論的発展が，60年代から80年代初期に特に進み［9］，解法の見地からは微分可能な問題に対する逐次２次計画法［7］，凸計画問題に対する切除平面法や微分不可能な問題に対する ε-劣勾配の概念を生かしたバンドル法等が考案されてきている［11］［13］。

中でも微分不可能最適化の理論は Clarke［3］［4］が，70年代後半から80年代にかけて発展した劣微分の概念やその数学的基盤，最適制御等への応用を集大成し，画期的発展を遂げた。また，Rockafellar［19］は微分不可能最適化の代表的な問題と取り扱いが簡潔に述べてある。Hiriart-Urruty［10］は d.c. 関数(凸関数の差の関数)に代表される様な或る種の非凸最適化問題のクラスに対して大域最適解が存在する必要十分条件を導出している。　経済学と数理計画の関係も深く，Arrow, Koopmans, Kantorovich, Markowitz 等のノーベル経済学賞受賞者も数理計画関連の研究が評価されたと言うことができる。Hicks［8］により一般化された効用関数分析も数理計画と密接な関係がある。又，最近では失業の理論としては影響力を失った労働市場での暗黙の契約(implicit contract)を数理計画的手法で正確に説明する試みが為されている［15］。

効用関数や支出関数が多数の滑らかな関数の各点の最小である最小化関数を考えたり，或いは断続的に逓減(逓増)する関数を考えるのは自然であり，微分不可能な点での解をも扱える従来より記述力の高い定式化が望まれている。最近 Aubin［2］にゲーム理論を中心に広範に均衡概念の数学的記述が為されているが，Clarke による微分不可能最適化理論が協力ゲームの解析に使われている。

本稿では第２節で微分不可能最適化に必要な基本概念を述べ，第３節で静学最適化モデルへの適用を述べる。第４節では汎用性の高い準凹関数の範囲を考えるが，此処では Arrow and Enthoven［1］の Kuhn-Tucker 条件の十分性に関する定理の拡張を主眼にする。第５節で今後の展望について述べる。

2　準　備

本稿で用いる微分不可能最適化の主要概念について主にClarke ［4］ に基づき簡単に述べる。

局所リプシッツ連続：

$$|f(x'')-f(x')|\leq K|x''-x'| \ \text{for}\ \forall x'',\ x'\in x+\varepsilon B. \tag{1}$$

局所リプシッツ連続関数は勿論連続(よって上

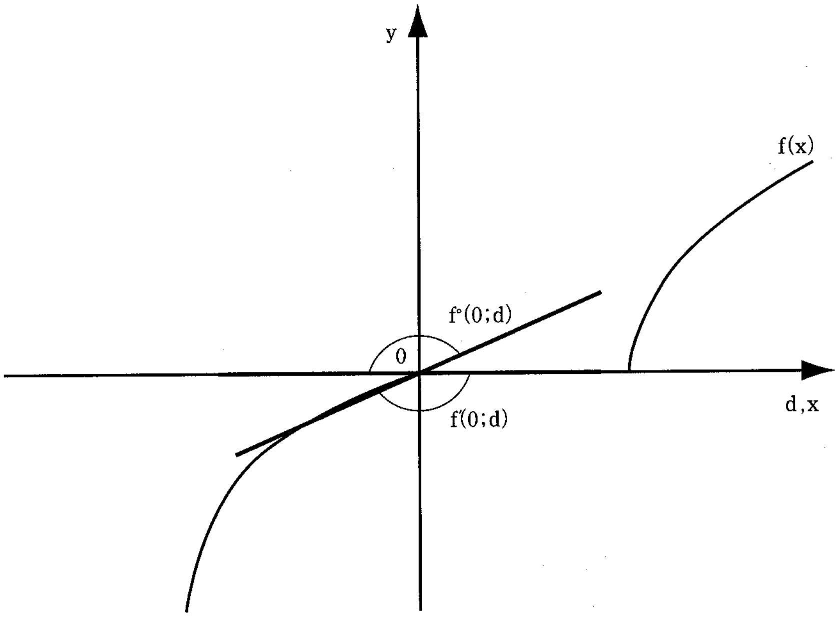

図1.　一般方向微係数と方向微係数

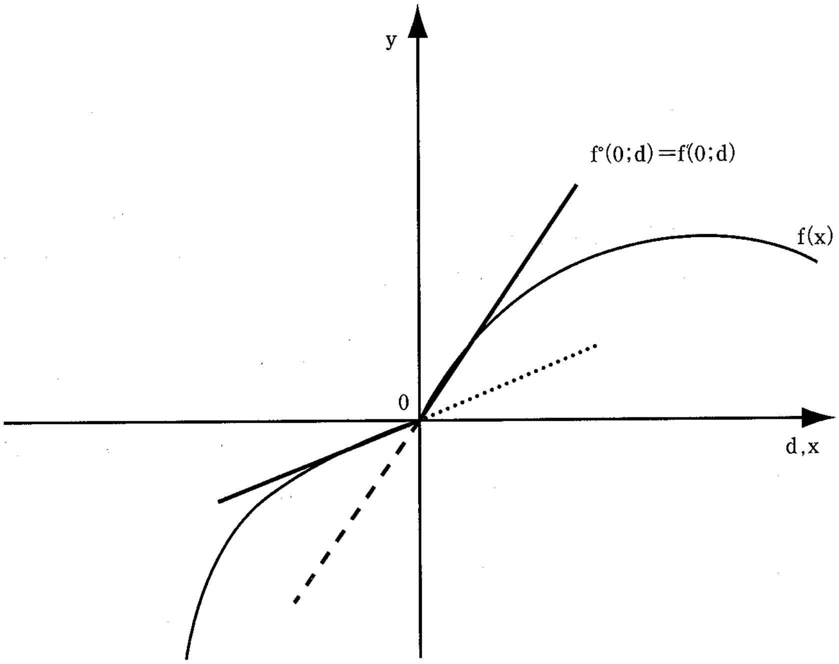

図2.　一般方向微係数と方向微係数(regular)

(下)半連続)であるが,広範なクラスの関数を含む。

関数の局所リプシッツ連続性の仮定の下で諸概念を導入する。

一般方向微係数：

$$f^{\circ}(x;v) \equiv \limsup_{y \to x, t \downarrow 0} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t} \qquad (2)$$

一般方向微係数(generalized directional derivative)の定義から局所リプシッツ連続の仮定下では有限性，正斉次性，劣加法性が言える。

一般勾配：

$$\partial f(x) \equiv \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid f^{\circ}(x;v) \geq \langle \xi, v \rangle \ \forall v \in \mathbb{R}^n\}. \qquad (3)$$

一般勾配(generalized gradient)は非空のコンパクト凸部分集合になる。関数が凸関数の場合は劣勾配(subgradient)と一致し，微分不可能関数の場合は $\nabla f(x)$ と一致する。

一般方向微係数は一般勾配の支持関数(support function)になっている。

$$f^{\circ}(x;v) = \max\{\langle \xi, v \rangle \mid \xi \in \partial f(x)\}. \qquad (4)$$

x^*での局所最適性は $f^{\circ}(x^*;v) \geq 0$ と言えるが，これは $0 \in \partial f(x^*)$ と同値である。

任意の v に対して方向微係数 $f'(x;v) \equiv \lim_{t \downarrow 0}(f(x+tv)-f(x)/t)$ が存在し，$f'(x;v) = f^{\circ}(x;v)$ が成立すれば f は正則(regular) という。更に f が凸関数ならば，

$$\partial f(x^*) \equiv \{a \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq f(x^*) + \langle a, x-x^* \rangle\}$$

であるので x^* が大域最適解であることと，$0 \in \partial f(x^*)$ は同値になることが直接示せる。

領域制約を取り扱う為に，x と集合 C との距離関数 $d_C(x)$ を，$d_C(x) = \min\{|x-c| \mid c \in C\}$ を導入し，接錘(tangent cone) $T_C(x)$ を $T_C(x) \equiv \{v \in \mathbb{R}^n \mid d_C^{\circ}(x;v) = 0\}$ で定義すると次の極錘(polar cone) を定義出来る。

極錘：

$$N(x;C) \equiv \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \langle \xi, v \rangle \leq 0 \ \forall v \in T_C(x)\} \qquad (5)$$
$$= cl\{\sum_{\lambda \geq 0} \lambda \partial d_C(x)\}$$

直接には次の様に書ける。

$$N(x;C) = \mathrm{cl\ co}\{\lambda \lim \frac{v^i}{|v^i|} \mid \lambda \geq 0,$$
$$v^i \perp C \text{ at } x^i, x^i \to x, \ v^i \to 0\}.$$

例. $C = \mathbb{R}^n_+ (\equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \ i=1, \ldots, n\})$ ならば,

$$N(x; \mathbb{R}^n_+) = \bigcup_{\lambda_i \geq} \sum_{\{i \in I \mid x_i = 0\}} \lambda_i(-e_i)$$

但し，$e_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = \delta_{ij}, \ j=1, \ldots, n\}$ (δ_{ij} はクロネッカーのデルタ)である。

3 静学最適化の拡張例

3.1 生産問題

次の生産問題を考える。

$$\text{(P1)} \ C(w,y) = \text{minimize } w^T x$$
$$\text{subject to } u(x) \geq y,$$
$$x \geq 0.$$

但し，$w \in \mathbb{R}^n$ は要素価格，$x \in \mathbb{R}^n \geq 0$ は生産要素，$u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は生産関数，$y \in \mathbb{R}$ は最小生産量である。

最小値の存在を保証する為に生産関数に次の仮定を置くが一般性を損なわない。

(仮定1) $u: \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ が上半連続($\limsup_{k \to \infty} u(x^k) \leq u(x)$) である。

この仮定により，$Y \equiv \{y \mid 0 \leq y\}$ (コンパクト集合)とする時,(長期)費用関数について次の性質が言える。

定理1 [5]. uが(仮定1)により定義されている時，$C(w,y)$ が $w \gg 0$, $y \in Y$ に対して矛盾無

く定義されており，更に次の7つの性質を持つ。

(1)　$w \gg 0$，$y \in Y$.

(2)　(費用関数の非負性) $w \gg 0$，$y \in Y$ ならば，$C(w,y) \geq 0$.

(3)　(費用の価格に於ける一次同次性) $w \gg 0$，$y \in Y$, $\lambda > 0$ ならば，$C(w,\lambda y) = \lambda C(w,y)$.

(4)　(費用の価格に於ける非減少性) $0 < w^0 < w^1$(i.e., $w^0 \leq w^1$, $w^0 \neq w^1$), $y \in Y$ ならば，$C(w^0,y) \leq C(w^1,y)$.

(5)　(費用の価格に於ける凹性) $w^1 > 0$，$w^2 > 0$，$y \in Y$, $0 \leq \lambda \leq 1$ ならば，$C(\lambda w^1 + (1-\lambda) w^2, y) \geq \lambda C(w^1,y) + (1-\lambda) C(w^2,y)$.

(6)　(費用の正価格に於ける連続性) $y \in Y$ に対して $C(w,y)$ は $w > 0$ について連続。

(7)　(費用の出力に於ける非減少性) $w \gg 0$，$y^0 \in Y$, $y^1 \in Y$, $y^0 < y^1$ ならば，$C(w,y^0) \leq C(w,y^1)$.

(8)　(費用の出力に於ける下半連続性) $w \gg 0$，$\alpha \in \mathbb{R}$ ならば，$\{y \mid C(w,y) \leq \alpha\}$は閉集合。□

話を進める為に次の2つの仮定を置く。

(仮定2)　$u: \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ が準凹関数である。

準凹関数はその上レベル集合の凸性と同値であり，均衡の存在を保証する為に通常仮定されることが多い。Diewert, Avriel and Zang [6] は特に関数が2回連続的微分可能であり，凸領域内に停留点を含まない時に，その点のみに於ける情報で準凹関数を判定出来る必要十分条件を導いた。

(仮定3)　$u: \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ が非減少関数であり，$x^0 < x^1$ ならば，$u(x^0) \leq u(x^1)$ である。

仮定3は規模を拡大した時にともかく生産量は非減少であることを示す。

定理2 [5]. u が(仮定1)，(仮定2)，(仮定3)を満たし，$C(w,y)$ が矛盾無く定義され，

$$u^*(x) \equiv \max_y \{y \mid x \in \bigcap_{w > 0} \{x \mid w^T x \geq C(w,y)\}\} \tag{6}$$

ならば $u = u^*$ であり，u は費用関数 C で完全に表現出来る。□

ところで最初に戻って，生産関数 $u: \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ を局所リプシッツ連続とする時，その最適解で

$$w \in \sum_i \lambda^*_i \partial u_i(x^*) - N(x^*; \mathbb{R}^n_+),$$
$$\lambda^*_i (u_i(x^*) - y_i),\ i = 1, \ldots, m,$$
$$\lambda^*_i \geq 0,\ u_i(x^*) \geq y_i,\ i = 1, \ldots, m,\ x^* \geq 0.$$

が成立する。

定理3 (Shephard の補題の拡張).
生産関数 u が(仮定1)を満たし，費用関数 C が (P1) で定義されているとする。$w^* \gg 0$，$y^* \in Y$ とし，x^* を (P1) の解とする。その時，C の w^*, y^* での w に関する一般方向微係数が存在し，

$$x^* \in \partial_w C(w^*, y^*) \tag{7}$$

が成立して $w = w^*$, $y = y^*$ での生産問題 (P1) の唯一解になっている。

[証明]　各 $w \gg 0$ に対し，x^* は $y = y^*$ での (P1) に於いての許容解であるから，

$$w^T x^* \geq C(w, y^*) \tag{8}$$

各 $w \gg 0$ に対し，$f(w) = C(w, y^*) - w^T x^*$ を定義すると (8) より，任意の $w \gg 0$ に対し $f(w) \leq 0$ であり，定義から $f(w^*) = 0$ も成立する。よって $f(w)$ は $w = w^*$ で大域最大解を達成し，

$$0 \in x^* - \partial_w C(w^*, y^*)$$

が成立するので，$x^* \in \partial_w C(w^*, y^*)$ が成立す

る。 □

3.2 消費者理論

次の消費者問題を考える。

$$\text{(P2)}\ V(p)\equiv \text{maximize } u(x)$$
$$\text{subject to } p^T x\leq 1,$$
$$x\geq 0.$$

但し，$u: \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ は任意の非負消費ベクトル $x\in\boldsymbol{R}^n\geq 0$ に関して連続(上半連続より強)である。この $V(p)$ を間接効用関数という。

(仮定4) $u:\boldsymbol{R}^n_+\to\boldsymbol{R}$ が任意の非負消費ベクトル $x\geq 0$ に対して連続。

間接効用関数に対して次の性質が言える。

定理4 [5]. u が(仮定4)を満たすと仮定する。その時 V は (P2) によって $p\gg 0$ に対して矛盾無く定義され，

(1) V は連続（有限）関数。

(2) V は非減少 ($0\ll p^0<p^1$ ならば，$V(p^0)\geq V(p^1)$)。

(3) V は準凸関数。

(4) $x\gg 0$ に対し，$u^*\equiv\min_p\{V(p)\,|\,p^Tx\leq 1, p\geq 0\}$ と定義すれば，u^* は $x\gg 0$ 上で連続，かつ非負象限 $x\geq 0$ に連続拡張を持つ。 □

狭義準凹： 凸集合 $C\subset\boldsymbol{R}^n$ で定義された実数値関数 f は，$x^1\in C$, $x^2\in C$, $0<\lambda<1$, $f(x^2)>f(x^1)$ ならば，$f(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)>f(x^1)$ ならば狭義準凹という。

この定義は Mangasarian [14] によるものであり，最大値が平坦になりうる点で，Diewert らの定義より緩い。この概念を利用して最適解で消費者が予算を使い切らない可能性を排除出来る。即ち予算制約を等式制約として扱うことが出来る。

定理5 [5]. u が(仮定1)を満たし更に準凹とする。その時 u は，

$p\gg 0$，$V(p)<\sup_x\{u(x)\,|\,x\geq 0\}$，$x\in V(p)$の解ならば　$p^Tx=1$. □

ところで最初に戻って，生産関数 $u:\boldsymbol{R}^n_+\to\boldsymbol{R}$ を局所リプシッツ連続とする時，その最適解で

$$\mu^{*T}p\in\partial u(x^*)-N(x^*;\boldsymbol{R}^n_+), \tag{9}$$
$$\mu^{*T}(p^Tx^*-1)=0,$$
$$\mu^*\geq 0,\ p^Tx^*\leq 1,\ x^*\geq 0.$$

が成立する。

4 Arrow-Enthovenの十分定理の拡張

この節では全ての関数が局所リプシッツ連続かつ方向微分可能と仮定するが，そう仮定しても微分可能関数の範疇で考えられた Arrow and Enthoven [1] の結果を含むのは基より，一般性を失わない。

次の最適化問題を考える。

$$\text{(P) maximize } f(x)$$
$$\text{subject to } g_i(x)\geq 0,\ i\in I\equiv\{1,\ldots,m\},$$
$$x\geq 0.$$

但し，$f:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$ は準凹関数，$g_i:\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}$, $i=1,\ldots,m$ は準凹関数である。

関数に一般的とはいえ，準凹の仮定を置いているので，何らかの意味で大域最適解になる条件を導出したい。

一般化された Kuhn-Tucker 条件を適用すると次の様になる。

$$0\in\partial f(x^*)+\sum_{i\in I}\lambda_i^{*T}\partial g_i(x^*)-N(\boldsymbol{R}^n_+;x^*) \tag{10}$$
$$\lambda_i^* g_i(x^*)=0,\ i=1,\ldots,m,$$

$\lambda_i^* \geq 0,\ g_i(x^*) \geq 0,\ i=1,\ldots,m,\ x^* \geq 0.$

定理6(Arrow-Enthoven の十分定理の拡張). $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は準凹関数，$g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i=1,\ldots,m$ は準凹関数であると仮定する。この時，x^* が(P)の最適解である為の必要十分条件は，一般化された Kuhn-Tucker 条件(10)が成立し，更に，

(a) $x^* \neq 0$ ならば，$0 \notin \partial f(x^*)$

(b) $x^*=0$ ならば，$0 \in \partial f(x^*)$ の場合に凹関数であるか，$0 \notin \partial f(x^*)$ の場合に 2 回連続微分可能または凹関数である。

のどちらか一方が成立する場合である。

［略　証］

$$f'(x^*;x^1-x^*)=(f+\lambda^{*T}g)'(x^1-x^*)$$
$$-(\lambda^{*T}g)'(x^*;x^1-x^*) \qquad (11)$$

x^* が (10) を満たし，x^1 が許容解の時，右辺の第1項が非正となる。第2項に関しては，$\lambda_j^*=0$ では j-th 要素が消え，$\lambda_j^*>0$，$g_j(x^*)=0$ の場合 $g_j(x^1) \geq 0$ であるから，$g'(x^*;x^1-x^*) \geq 0$ となるので，非正となる。よって，$f(x), g(x)$ が準凹ならば x^* が (11) を満たせば，

$$g(x^1) \geq 0,\ x^1 \geq 0 \text{ ならば } f'(x^*;x^1-x^*) \leq 0$$

以下場合分けの考察でいずれも $f(x^1) \leq f(x^*)$ が言える。　□

定理6 は関数が微分可能な時に Arrow and Enthoven [9] の定理1 に帰着される点で従来の定理の拡張になっている。

場合分けを無くする為に，Thach and Kojima [20] により提案された準劣微分(quasi subdifferential) の概念を利用出来る。

準劣微分：

$$\partial^H f(x) \equiv \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v,x \rangle =1$$
$$\text{and } f(x) \leq f(y)\ \forall y \text{ s.t. } \langle v,y \rangle \geq 1\}.$$

$\partial^H f(x) \neq \phi$ ならば f は x で準劣微分可能という。

Kuhn-Tucker 定理の成立を保証する為に何らかの制約想定が考えられるが，此処では一般 Slater 条件を置く。

一般 Slater 制約想定：或る点 $x' \geq 0$ で $g(x')>0$ が成立し，各 $j=1,\ldots,m$ に対して，

(a) $g^j(x')$ が凹関数

(b) 制約領域内の各点 x^0 について，$0 \notin \partial g_j(x^0)$ が成立する。

のどちらかが成立する時，一般 Slater 制約想定が満足されるという。

この制約想定は関数が全て凹の時には通常の Slater 制約想定，微分可能な時には Arrow-Enthoven [1] の定理2 の制約想定になる。

定理7. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は準凹関数かつ許容領域内で $0 \in \partial f(x)$ ならば $0 \in \mathrm{int}\,\partial f(x)$，$g_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i=1,\ldots,m$ は準凹関数であると仮定する。更に一般 Slater 制約想定が満足されるとする。この時，x^* が(P)の最適解である為の必要十分条件は，

$$0 \in \partial^H f(x^*) + \sum_{i \in I} \lambda_i^{*T} \partial g_i(x^*) - N(x^*;\mathbb{R}_+^n) \qquad (12)$$
$$\lambda_i^* g_i(x^*)=0,\ i=1,\ldots,m,$$
$$\lambda_i^* \geq 0,\ g_i(x^*) \geq 0,\ i=1,\ldots,m,\ x^* \geq 0.$$

［略　証］ $-f$ は局所リプシッツ連続なので上半連続であり，$0 \in \partial f(x)$ ならば，$0 \in \mathrm{int}\,\partial f(x)$ が成立すれば，$-f$ は [20] の essentially 準凸の定義を満たす。よって [20] 定理 3 を適用して成立する。　□

5　今後の課題

完全競争市場の均衡を記述出来る最適化分析は静学モデルの基本を為すものであるが，効用

関数や支出関数自体についての種々の問題が考えられる。例えば理論的には均衡の存在の為に標準的に準凹が仮定されているが，各々の関数が準凹である時にその和が準凹である条件を微分不可能な枠組で導出出来ていると都合が良い。又，安定した均衡解が存在する為には“強い”準凹性を仮定するのが自然であるが，強凸集合を上レベル集合とする Vial[21] の強準凹関数や線形関数による摂動に安定なPhu and An [17] の s-準凸(準凹)関数等の適用が考えられるであろう。又，微分不可能な枠組の下での価格等の変化に伴う感度分析に対する研究も必要と思われる。基数効用を前提として数理計画的手法を考えてきたが，序数効用を前提としてマトロイド的手法を考える方向もあると思われる。

参考文献

[1] K.J. Arrow and A.C. Enthoven, “Quasi-concave programming”, *Econometrica,* Vol. 29, pp. 779-800 (1961).

[2] J.-P. Aubin, *Optima and Equilibria - An Introduction to Nonlinear Analysis,* Springer (1993).

[3] F.H. Clarke, “Generalized gradients and applications”, *Trans. Amer. Math. Soc.,* Vol. 205, pp. 247-262 (1975).

[4] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis,* Wiley (1983).

[5] W.E. Diewert, “Generalized concavity and economics”, *Generalized Concavity in Optimization and Economics,* (S. Schaible and W.T. Ziemba, Eds.), pp. 511-541, Academic Press (1981).

[6] W.E. Diewert, M. Avriel and I. Zang, “Nine kinds of quasiconcavity and concavity”, *Journal of Economic Theory,* Vol. 25, pp. 397-420 (1981).

[7] P.E. Gill, W. Murray, M.A. Saunders and M.H. Wright, “Constrained nonlinear programming”, *Handbooks in OR & MS, Vol. 1*, (G.L. Nemhauser et al., Eds.), pp. 171-210, North-Holland (1989).

[8] J.R. Hicks, *Value and Capital,* Oxford: Clarendon Press (1946).

[9] J.-B. Hiriart-Urruty, “On optimality conditions in nondifferentiable programming”, *Mathematical Programming,* Vol. 14, pp. 73-86 (1978).

[10] J.-B. Hiriart-Urruty, “From convex optimization to convex optimization. Necessary and sufficient conditions for global optimality”, *Nonsmooth Optimization and Related Topics,* (F.H. Clarke et al., Eds.), pp. 219-239, Plenum (1989).

[11] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms I, II,* Springer (1993).

[12] H.W. Kuhn and A.W. Tucker, “Nonlinear programming”, *Proceedinds of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* (J. Neyman, Ed.), University of California Press, Berkeley (1951).

[13] C. Lemaréchal, “Nondifferentiable optimization”, *Handbooks in OR & MS, Vol. 1*, (G.L. Nemhauser et al., Eds.), pp. 529-572, North-Holland (1989).

[14] O.L. Mangasarian, *Nonlinear Programming,* McGraw-Hill (1969).

[15] 西村清彦,「経済学のための最適化理論入門」, 東京大学出版会 (1990).

[16] 西村和雄, 「ミクロ経済学」, 東洋経済新報社 (1990).

[17] H.X. Phu and P.T. An, “Stable generalization of convex function”, *Optimization,* Vol. 38, pp. 309-318 (1996).

[18] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis,* Princeton Univ. Press, 1970.

[19] T. Rockafellar, “Nonlinear optimization”, *Mathematical Programming: State of the Art 1994*, (J.R. Birge et al., Eds.), pp. 248-258, The University of Michigan (1994).

[20] P.T. Thach and M. Kojima, "A generalized convexity and variational inequality for quasi-convex minimization", *SIAM J. Optimization,* Vol. 6, pp. 212-226 (1996).

[21] J.-P. Vial, "Strong convexity of sets and functions", *Journal of Mathematical Economics,* Vol. 9, pp.187-205 (1982).