経済学研究 *50−2*
北海道大学 2000.9

客観論的見解の三つの問題点

園　　信太郎

1．はじめに

この客観論的見解というのは，「確率」に関する客観論的見解のことであり，その内容は次の節で述べるのだが，しかしこの見解は，今日でもなお，全てではないが，実に多くの統計学の教科書において採用されている見解なのであり，いわゆる頻度論的見解というものにほぼ一致するのである。しかしこの見解には，かなり以前から知られていることだが，少なくとも三つのかなり根元的な問題点があるのであり，それらは，第一には，「確率」に対するこの見解による「定義」及び「解釈」に関係しており，第二には，「条件つき確率」の「定義」及び「解釈」に関係しており，そして第三には，変量をその「実現値」によって「置き換える」作業に関係しているのである。だが，これらの問題点を平明かつ簡潔に論述している教科書がほとんど見当たらないのであり，そこで今回は，これらの問題点を敢えて「確認」することとしたのである。

2．客観論的見解

サヴェジ氏，Savage, Leonard Jimmie, 1917. 11. 20−1971.11.1, は彼の「基礎論」，つまり，

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1954, *Second Revised Edition*, Dover, New York, 1972,

の，第1章第2節の3頁において，確率に関する「客観論的見解，objectivistic views」を次のように要約しているのである。

Objectivistic views hold that some repetitive events, such as tosses of a penny, prove to be in reasonably close agreement with the mathematical concept of independently repeated random events, all with the same probability. According to such views, evidence for the quality of agreement between the behavior of the repetitive event and the mathematical concept, and for the magnitude of the probability that applies (in case any does), is to be obtained by observation of some repetitions of the event, and from no other source whatsoever.

つまり，客観論的見解は，一つの試行が何度か反復される過程というものが，同一の分布に従う幾つかの独立なランダムな変量からなるある系列という，数学的形式によって規定されることとなる概念に，極めて密接に対応することとなっているのである，ということを主張するのであり，しかもこの見解によれば，反復される試行からなる系列と数学的概念であるその変量の系列との対応に関する精密さのその程度に対する証拠や，いかなる状況であれ問題となっているその状況に当てはめられる確率のその大きさに対する証拠は，反復される試行からなる系列がもたらす諸結果を観察することによって，しかもそれのみによって，獲得されることとなるのである。このような客観論的見解は，「一

枚の少なくとも見掛け上は歪んでいない硬貨を，極めて多数回投げ上げ続けて，表が出るか裏が出るかを観察し続ける」という実験との関りで，多分さり気なく採用されているはずであり，例えば「表」に1を「裏」に0を対応させて，0及び1のみを値として取り，しかもこれらの値を各各「確率」2分の1で取る確率変数からなる独立な変数列という，数学的概念が持ち出されたりするのである。

所でサヴェジ氏は，「基礎論」のDover版の前書やその他の論文で，「頻度論的，frequentistic」という形容詞を使って客観論的見解とほぼ同様の見解に言及しているのだが，これは，客観論的見解が，結局の所，反復される試行からなる系列がもたらす諸結果に基づいて各結果が現れる相対的頻度を導入してしまい，しかもそれらの相対的頻度の「極限」として「確率」を「定義」する，あるいは「解釈」してしまう，という流儀を採用するからなのである。例えば「その一枚の硬貨を投げ上げる場合において，表が出る「確率」は2分の1である」とは，客観論的見解においては，「その一枚の硬貨を投げ上げる」という試行を限りなく繰り返すという状況を想定する場合において，「表が出る」という事象が生じる相対的頻度が，2分の1という値に「限りなく近づく」ということなのである。このような「確率」の「定義」，あるいは「解釈」は，今日でもなお，多くの統計学の教科書において，公然と，あるいは暗黙の内に，採用されているのである。しかし，この見解に忠実に統計学を展開しようとすると，少なくとも三つの問題点に突き当ることとなるのである。

3．「定義」における悪循環の疑い

客観論的見解に基づいて「確率」を「定義」しようとすると，例えば，上で言及した，「その一枚の硬貨を投げ上げる場合において，表が出る「確率」は2分の1である」という陳述の「内容」を定めようとする作業が，多分うまく行かなくなるのである。問題は，「相対的頻度が，2分の1という値に「限りなく近づく」」という箇所にあり，実際，この「限りなく近づく」を，できれば平明に，「定義」しなければならないはずだが，どうもそれが困難なのである。つまり，例えば，「その相対的頻度が，2分の1という値から，任意に与えられている正の有理数よりも大である程度において隔たることとなる「たしからしさ」が，試行の回数が限りなく増大する状況において，またその与えられている正の有理数がいかなる値であれ，限りなく0に近づく」というように，とにかく「定義」することとしてみると，今度は，ここでの「たしからしさ」とはいかなる事柄なのかが問題となるのであり，もしそこで，「その一枚の硬貨を投げ上げる場合において，表が出る「確率」」というものを結局の所利用するのならば，その「内容」をできれば平明に定めることが要求されている「確率」という事柄を，その「確率」というものの「内容」が既に定まっていると想定しておいて，「定義」することを「試みる」という，言わば悪循環的状況が生じて来るのである。つまり，客観論的見解に基づく「定義」には，悪循環そのものとまでは行かなくとも，その疑いがあるのである。なお，このような悪循環を多少強引に乗り越えようとすると，その性格が定かでない「確率」の上にさらに性格が定かでない「確率」らしきものを積重ねるというやり方で，その性格が不明確な「確率」らしきものを「はてしなく」積重ねるという作業に行き着くかもしれないのだが，このような「はてしない，「存在」の系列」によって，統計学の平明な基礎づけが達成されるなどとはどうも思われないのである。

所で，「硬貨の投げ上げ実験」との関りで，しかもしばしば二項分布との連関で，「未知ではあるが固定されている確率，unknown but fixed probability」という事柄が言及されたりするのだが，「確率」という言葉が結局何を表

しているのかが，少なくとも客観論的見解においてはいまだに不明確であるのだから，この「確率」に対して「未知であり，しかも固定されている」という主張を為すことは，論理的にはかなり異様であり，実際，「確率」という事柄が明確に「定義」された後に，「「確率」が「存在」して一意的に定まる」という事柄を始めて論理的に議論することが出来得ることとなるのである。なお，「主観確率，subjective probability」の立場からは，既に de Finetti, Bruno,が，交換可能性に関する de Finetti の表現定理を証明することによって，この「未知固定確率」に対する透徹した分析を行っており，またサヴェジ氏の「基礎論」の，50頁から55頁にかけての，第３章第７節においては，de Finetti のこの業績に対する簡潔でしかも本質を明確に捕えている説明が為されているのである。

4．「条件つき確率」の「定義」及び「解釈」に関する問題

「事象 B が与えられている場合の，事象 A の条件つき確率」は，しばしば $P(A \mid B)$ などと表記されるのだが，各事象にその「確率」を対応させる関数 P が既に与えられているものとして，また $P(B)$ は０ではないと仮定して，$P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$ によって，しばしば「定義」されるのである。所が，この「「確率」を「確率」で割る」という独特の操作によって，なぜ「条件つき「確率」」が「定義」されなければ「ならない」のか，という問いに対して，客観論的見解においては論理的に平明な返答が為されていないようなのであり，結局，「条件つき「確率」」の「定義」の論理的な動機づけが不明確なのである。なお，客観論的見解における，この「条件つき「確率」」に対する「解釈」であるが，通常は次のように頻度論的に為されているのである。つまり，事象 A 及び事象 B に関する「結果」をもたらし得るとされている考察の対象となっている一つの試行と，その一つの試行が「限りなく」反復されるという試行の系列とを想定しておいて，さらにこの試行の系列がもたらすであろう「結果の系列」を想定して，その「結果の系列」において，事象 B をもたらす「結果」の全体に注目して，この「結果」の全体が構成する「結果の部分的な系列」を考察することとし，さらに，この「部分的な系列」において，事象 A をもたらす「結果」に注目して，このような「結果」がその「部分的な系列」において現れる「相対的な頻度」を考えて，この「相対的な頻度」の「極限」であるとして，「事象 B が与えられている場合の，事象 A の条件つき確率」である $P(A \mid B)$ を解釈するのである。所で，「「確率」を「確率」で割る」という操作だが，元の「結果の系列」において，始めから n 回までの試行がもたらすであろう「結果」の内で，事象 X をもたらすものの総数を $\#(X;n)$ と表記することとしておけば，始めから n 回までの「結果」の内で，事象 B をもたらすものの総数は $\#(B;n)$ であり，また上で言及した「部分的な系列」において，但し，「元の系列」の始めから n 回までに注目した上でだが，事象 A をもたらす「結果」の総数は $\#(A \cap B;n)$ であり，後者の前者に対する比率である $\#(A \cap B;n) / \#(B;n)$ の，n を「限りなく」増大させる場合の「極限」を考える際に，この分数の分母及び分子を n で割ったものである $(\#(A \cap B;n)/n) / (\#(B;n)/n)$ を考えることとしておけば，n が「限りなく」増大する状況において，分母は $P(B)$ に，分子は $P(A \cap B)$ に，「限りなく近づく」ことであろうと想定されているので，結局この分数の「極限」値として，$P(A \cap B) / P(B)$ という「「確率」の比率」が表に出てくる雰囲気となるのである。なお，「$P(B)$ は０ではない」という仮定から，$\#(B;n)/n$ は，n が「十分に」大であれば，０から離れた値に「集積する」と想定されてしまうので，分

数を考える操作は無意味ではない「はず」なのである。

所で，上の節で言及した客観論的見解における「「確率」の「定義」」の難点を考慮するのならば，「条件つき確率」に対する上述の「解釈」が平明に論理的であるなどとはとうてい言えないであろう。しかし，「解釈」におけるこのような深刻な曖昧さを承知した上で，通常の実に多くの教科書で為されているように，「条件つき確率」を「使ってしまう」としても，さらにまた「解釈」にからむ難点が出てくるのである。つまり，客観論的見解に忠実であるかぎり，「事象Bが与えられている場合の，事象Aの確率」とは，「事象Bをもたらす結果の全体からなる系列」における，「事象Aをもたらす結果」の「相対的な頻度」の，その「極限」なのであるから，「条件つき確率」は，「事象Aをもたらすか否かが問われている，未知ではあるが固定されている，「結果に関っている一つの状態」」に対する「確率」などでは全くなく，あくまでも「結果の無限的系列」に関する一つの指標なのである。

なおここで，例としてはかなりありふれている，簡単な二段階実験を考えてみることとする。つまり，二つの箱があり，各各の箱には同形で同質の赤玉と白玉とが入っており，各箱の赤玉及び白玉の個数は実験者が既に知っており，しかも赤玉のみとか白玉のみとかいうような場合はないものとして，これら二つの箱から，これもまた実験者が既に知っているランダムな手順で一つの箱を選び出し，しかし，いずれの箱が選ばれるのかを実験者は観察しないものとして，さらに，この選ばれることとなる箱からランダムに一つ玉を取り出して，その色を実験者が観察するという，二段階抽出実験を考えてみるのである。このような場合，その実験者が，例えば「抽出「された」玉は赤で「あった」」という実験結果に基づいて，この玉がいずれの箱に由来するのかを問うことは，不自然と言うわけではないであろう。だが，「抽出「された」玉は赤で「あった」」という「事実」に基づいて，「抽出「された」箱は実はこちらの箱であるということの「確率」」を取り扱うことは，客観論的見解の内部では「できない」のである。なぜならば，客観論的な「確率」は，「未知ではあるが固定されている「その」箱は，実はこちらの箱である」というような事柄に対しては当てはめることが「できない」からであり，しかも，客観論的見解における「条件づけ」とは，「「その」玉は赤で「あった」」という「事実」に基づくものではなく，問題の二段階抽出実験を「限りなく」反復する状況を想定する場合に，「抽出される玉は赤である」という観察結果をもたらすであろう実験結果の全体からなるその系列に基づくものなのである。つまり，客観論的見解の内部においては，既に与えられている「証拠」に基づいて，特定の陳述が「実際に通用している」ことに関する「確率」を考察するという作業が，正式には，なんの意義も持ち得ないのである。「既に与えられている「証拠」に基づく条件づけ」という極めて自然な作業に対する，客観論的見解のこのような不適応は，「条件つき確率」の「自然な」利用を阻害するものであると判断せざるを得ない。

なお，サヴェジ氏が「基礎論」で提示している「個人論的見解，personalistic views」からすれば，「事象が与えられている場合の，「その個人」の条件つき選好」によって，「その個人」の「条件つき確率」が自然に導入されるのであり，しかも，この個人論的見解の内部においてその一意的「存在」が証明される定量的な「個人的確率，personal probability」に基づいて，通常は「条件つき確率」の「定義」とされている「「確率」を「確率」で割る」式が，論理的に正当化されてしまうのであり，論理上の不備は「全く」と言って良い程に生じてこないのである。また，個人的確率は，おおまかに述べれば，「特定の命題が成立することに対する，「その個人」にとっての信用の程度」を表すのであり，既に与えられている「証拠」に基づいて，

特定の陳述が「実際に通用している」ことに関する「確率」を考察するという状況に，原理上は，容易に適応するのである。

5．いわゆる変量をいわゆる実現値で「置き換えてしまう」作業について

客観論的見解に従うやり方においては，「観察の結果」をもたらすこととなると想定されている変量を，その変量のいわゆる「実現値，realized value」によって，沈黙の内に，「置き換えてしまう」という作業が，実に驚くべきことだが当然のことのように為されているのである。この「実現値」というのは，例えば，「標本」と呼ばれる変量が「取った」のだと見なされる「値」であるのだが，実際には，しばしば，既に与えられているデータであり，またそのデータから計算される幾つかの数値なのである。この「置き換え」作業の「異様さ」は，特定のいわゆる信頼区間を提示する際に，かなり目立ったものとなるのである。

ここでは，見掛け上はかなり単純であるような例でこの点を説明することとする。つまり，未知ではあるが固定されていると想定されている母数θは実数値を取るものとして，このθが任意に与えられている場合の標本空間Ω上の母集団分布を$P(\cdot\,;\theta)$とし，YをΩ上で定義されている実数値を取る変量とし，さらにAを0より大で1より小の与えられている実数とすると，正の実数l及びuに対して「確率」$P(\theta\,\varepsilon\,[Y-l,\ Y+u]\,;\theta)$を考えることができるのだが，この$l$及び$u$を$A$のみに依存するやり方でうまく選択することによって，この「確率」の値が，各θに対して常にAに等しくなるようにできるとするのならば，但し，この場合のl及びuを各各$l(A)$及び$u(A)$と表記することとして，$P(\theta\,\varepsilon\,[Y-l(A),\ Y+u(A)]\,;\theta)=A$という式が得られる。ここで「区間」$[Y-l(A),\ Y+u(A)]$は$\theta$に関する信頼係数$A$の信頼区間と呼ばれることがあるのだが，しかし，精確には，変量Yの値が特定される「まえ」の信頼区間とでも呼ぶべきものであり，この「区間」は，「区間の値を取る変量」である。所が，このYをその「実現値」であると想定されている，実際には与えられているデータから計算される，値yによって「置き換える」ことによって得られる区間$[y-l(A),\ y+u(A)]$もまた，信頼係数Aの信頼区間と呼ばれるのであり，この区間がいわゆる区間推定に利用されるのである。しかし，この特定の信頼区間と値Aとの関りは少しも明白ではないのであり，実際，Yの値が特定される「まえ」の「区間」に関する式を精確に表記すれば，$P(\{\omega\,\varepsilon\,\Omega\mid\theta\,\varepsilon[Y(\omega)-l(A),\ Y(\omega)+u(A)]\}\,;\theta)=A$であり，$\theta$，$Y$，$l(A)$，$u(A)$，$-$，$+$，そして$\varepsilon$に関る式は$\{\omega\,\varepsilon\,\Omega\mid\cdot\}$によって束縛されており，従って，$Y(\omega)$という記号列を「実現値」を表す記号$y$によって「置き換えてしまう」作業の数学的合法性は不明確であり，また，この作業によって得られる区間と値Aとの関係は，なんら自明ではないのである。

所で，信頼区間$[y-l(A),\ y+u(A)]$に対する「解釈」であるが，変量Yの値を結果としてもたらすと仮定されている一つの試行を「限りなく」反復する状況を想定して，また，この試行の系列がもたらすであろう結果の系列を想定して，さらにまた，この系列の各結果に対して同様の信頼区間を形成する作業を想定して，このような想定される状況において，その試行の系列の冒頭の試行によってもたらされる区間が$[y-l(A),\ y+u(A)]$であると「解釈」する流儀があるのである。なお，客観論的見解においては，得られるであろう信頼区間の系列において，「真の」母数を含む区間の相対的な頻度が，試行の回数が「限りなく」増大するに従って，値Aに「限りなく近づく」こととなっている「はず」なのだが，この値Aは，形成されるであろうと想定されている一連の信

頼区間からなる系列に関る指標ではあっても，「その」信頼区間である$[y-l(A),\ y+u(A)]$には「そのまま」では結び付きようがないのであり，実際，客観論的見解においては，「その」信頼区間が「真の」母数を含むか否かは未知ではあるがしかしいずれか一方に既に定まっているとは言い得ても，「その」区間が「その」母数を含む「たしからしさ」を表現することなどは決して「できない」のであり，信頼係数と呼ばれる数値が「その」区間に関るような「雰囲気」があるとしても，客観論的見解に忠実である限り，この「雰囲気」は多分「錯覚」なのである。

さらに仮説検定について少しだけ述べると，そこでは，「観察の結果」をもたらすはずの変量がいわゆる棄却域に入る値をもたらすこととなる「確率」を，検定される仮説が仮定されている状況で評価しておき，この値を有意水準などと呼び，例えば「某パーセントの有意水準で問題の仮説は棄却される」などというような主張が為されたりするのである。しかし，有意水準は，あるいは第一種の過誤の「確率」は，「その」変量の「その」値が確定する「まえ」の，しかも問題の仮説を仮定した上で計算される，値なのであり，この値が，「その」変量の「その」値が確定した「あと」で，問題の仮説にどのように結びつくのかは，少なくとも客観論的見解による限りでは，少しも明らかではないのである。つまり，通常行われている仮説検定では，「その」変量を「その」値に「置き換えてしまう」という極端に形式的な作業のみが行われて，「その」変量の「その」値が確定した「あと」の「検定される仮説に対する判断の様式」を精確に表現するという言わば要となる作業は，実際上行われていないのである。

所で，サヴェジ氏の個人論的見解によれば，変量のその「実現値」による「置き換え」という作業は，「自然に」そして「合法的に」行われるのである。つまり，今「その個人」が行為f及びgのいずれか一方を選択しなければならないという二者択一の状況に直面しているものとする。ここで，「その個人」が直面している「世界」の各「状態」sに対して，これらの行為は「その個人」に対してそれぞれ「結果」$f(s)$ 及び$g(s)$ をもたらすのだが，一方，「その個人」は，「世界」に対する自身の個人的確率Pと，「結果」の全体に対する自身の個人的効用Uとを保持しているのであり，そこで，Pに基づくこれらの行為の個人的期待効用$E(U(f))$ 及び$E(U(g))$ が定まることとなるのである。そこで，前者の期待効用が後者以下であるのならば行為gを選択し，そうでないのならば行為fを選択するという，「その個人」にとっての合理的な選択様式が従うこととなるのである。次に，「観察」Xの値xが与えられている場合だが，「その個人」は，Pの代りにその条件つき確率$P(\cdot \mid X=x)$ を考えて，この条件つき確率に基づく自身の個人的期待効用を用いて，同様の合理的な選択を為せば良いだけなのである。所で，Xの各値xに対して「その個人」が選択することとなる，言わば「最適な」行為を，$H(x)$ と表記するのならば，これは行為f及びgを値として取るxの関数と見なせるが，「その個人」が，Xの値xを観察する「まえ」に，「観察」Xの値を利用することを前提として，自身にとって「最適な」選択の様式を定めようとするのならば，その選択の様式は，XとHとの合成関数である$H(X)$ によって与えられ，しかも「その個人」は，この選択の様式によって，Xを利用する場合の最大の期待効用である$E(U(H(X)))$ を保持することとなるのである。また当然，Xの値xを観察した「あと」では，$H(X)$ のXをxで「置き換えた」$H(x)$ が，「その個人」にとっての「最適な」選択肢となり，この選択肢の個人的期待効用は，$X=x$が与えられている場合の条件つき期待値を使って，但し，$P(X=x)$ は0ではないと仮定しておいて，$E(U(H(x)) \mid X=x)$ によって与えられるのである。また，Xの値xを観察する「まえ」と

「あと」とのこれらの期待値は，$E(U(H(X))) = \Sigma_x \ E(U(H(x)) \mid X=x) \quad P(X=x)$ によって結びついているのであるが，この式は，$E(U(H(X)) \mid X=x) = E(U(H(x)) \mid X=x)$ という等式から従うのであり，ここで当然，右辺の $H(x)$ は，左辺の $H(X)$ の X を x によって「置き換えた」ものである。このようにサヴェジ氏の個人論的見解においては，変量 X をその「実現値」x によって「置き換える」作業は数学的に全く合法的であり，しかもこの「置き換え」に関っている諸量の「解釈」及びそれらの関係は明白に捕えられるのである。

6．おわりに

実に多くの教科書において唱えられている見解に対して，その見解には論理上無視し得ない難点があることを，敢えて指摘することは，当然，多数派的見解に対する事実上の異議の表明へとつながることであろう。だが，多少の勇気が必要であるとしても，論理上の，しかも根元的な疑念を，折に触れて繰り返し率直に述べて行くことは，やはり，学問上も教育上も，一つの責務であるだろう。

2000年3月14日（火）

参考文献

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1954, *Second Revised Edition*, Dover, New York, 1972.

園　信太郎，「サヴェジ書における objectivistic views 批判について」，『経済学研究』（北海道大学），41(4)，1(287)－21(307)，1992年3月。

園　信太郎，「サヴェジ基礎論における術語 world について（4）」，『経済学研究』（北海道大学），44(4)，118(436)－146(464)，1995年3月。この論文の末尾の節で，筆者は変量の「実現値」による「置き換え」に言及している。