経済学研究 *51−1*
北海道大学 2001. 6

コインの投げ上げに関する未知固定の確率について

園 信太郎

1．はじめに

とにかく次の書物に注目したいのである。

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1954, *Second Revised Edition*, Dover, New York, 1972.

サヴェジ氏はこの「基礎論」の第3章第7節の，50頁から51頁にかけての，冒頭の段落において，「未知固定の，unknown but fixed」確率に関るある重要な論点を簡潔かつ明晰に述べているのであり，これを引くと次である。

A problem often posed by statisticians is to estimate from a sequence of observations the unknown probability p that repeated trials of some sort are successful. On an objectivistic view, this problem is natural and important, for on such a view the probability that a coin falls heads, for example, is a property of the coin that can be determined by experimentation with the coin and in no other way. But on a personalistic view of probability, strictly interpreted, no probability is unknown to the person concerned, or, at any rate, he can determine a probability only by interrogating himself, not by reference to the external world.

つまり，ある種の反復され得る「試行」を想定しておいて，その「試行」がもたらす「結果」が「成功」であるという事象に対する「未知固定の」確率pを，その想定されている「「試行」の系列」がもたらした「結果」であると解釈されている「「観察」の系列」から，「推定する」ことを試みるという問題が，実にしばしば統計家によって取り上げられてきたのである。「客観論的な」見解によれば，問題の確率pは，例えば特に，一枚の（少なくとも多少は歪んでいるかもしれない）コインを投げ上げる場合に「表」が出る確率は，問題の「その」コインに関する「実験」によって，またそれのみによって決定され得る，「その」コイン自身の「客観的な」性質に他ならないのであり，従って，このような「推定」問題は「自然な」ものであり，統計学において基本的な重要性を持つこととなるのである。だが，確率に関する「個人論的な」見解からすれば，この見解を「厳格に」解釈するならば，確率概念を基礎づけるために導入される（理念化された）「その個人」にとっては，いかなる確率も「未知」とはなりえないのであり，つまり「その個人」は，「外的な」世界に言及することによってではなしに，自分自身に対する「行動的な」尋問によって，またそれのみによって，「自身の」確率を定め得るのである。なお，サヴェジ氏の枠組みにおいては，確率が「存在する」ということが「その個人」の「選好」に基づいて「証明される」のだが，この「選好」は，「その個人」が行う「想像上の」実験によって定められるのであり，結局，「その個人」にとっては，確率は「存在する」のみでなく，「実験的に」確定するのである。従って，一見すると，「個人論的な」見解は，統計学における典型的な問題を定式化すること

「すら」できないように思われるのである。しかし，実際には，「コインの投げ上げ」的な状況に対して，「個人論的な」見解に基づく明瞭な定式化と分析とが既に与えられているのだと，サヴェジ氏は判断しているのである。

このような「未知固定の」確率の定式化及び「存在」に関する議論との連関で，ほとんど「必然的に」言及されるのがBruno de Finettiによる古典的な議論であり，これを次の節で取り上げるのだが，しかし，ここではとにかく「未知固定の」確率という事柄が「あたりまえ」のことではないことを簡略に確認しておきたいのである。つまり，実に多くの統計学の教科書において，特に「コインの投げ上げ」の実験との関りにおいて，「未知固定の」確率pが，特に，例えば，「その」コインが「表」を現す「確率」pが，「あたりまえ」のように「数学的な」形式（例えば，ここでの記号p）によって，「さりげなく」導入されているのだが，このようなやり方は今日の「通常の」論法からすれば「少し」問題があるのである。なぜならば，この記号pが指し示している「はず」の「対象」が「未知で固定されている」という想定は，多分，その「対象」が「存在」して「一意的に」定まることを「暗黙の内に」前提としているはずだからなのである。だが，この「対象」とは実は「確率」であり，従って，ここでの「存在」及び「一意性」は，「確率，probability」とは結局いかなる事柄なのかが「明晰な」様式において「定義」されていないのならば，その性格がかなり曖昧であり，しかも，「確率」なるものの内訳は「通常は」少しも明らかではないのである。例えば，あるシステムを考察している研究者が，そのシステムに関するある「法則」を想定して，さらにこれをfと表記して，このfに関するなんらかの方程式を設定したとすると，このようなやり方は，「数学的な」形式の利用の仕方としては（今日では）多分「ありふれている」のだが，しかし，「通常の」論法からすれば，なんらかの「明晰な」枠組みにおいて，その方程式を満たすfの「存在」及び「一意性」が「証明される」ことが要求される「はず」なのである。また，そのような要求に「答える」ために，そのシステムに関する「法則」という事柄を，かなり一般的な様式で，「関数」として「捕え直す」，つまり結局の所「定義する」，作業が行われるはずなのである。だが，「法則」概念よりも「確率」概念の方がより明白であるとは，多分判断し難いのであり，「通常の」ロジックからすれば，「確率」の「存在」及び「一意性」を「あたりまえ」と見なすことはかなり困難となるはずなのである。

ところで，この筆者の論述では，「コインの投げ上げ」的な状況を議論する際にしばしば現れる「確率」pの非自明性を，つまり，記号pによって象徴されているであろう「存在」の性格が「あたりまえ」ではないことを，ある程度まで精確かつ慎重に「確認」したいのである。このような「古典的な論点」の確認は，多少の学問的な，また教育上の，問題提起を含むことであろう。

2．交換可能性に関するde Finettiの表現定理

確率に関する「客観論的な」見解は，統計学においては事実上「頻度論的な」見解なのだが，この「見解」に忠実に（統計学における）確率概念を基礎づけようとすると，既に「コインの投げ上げ」的な状況において無視し得ない問題点に出会うのである。なお，この問題点に関する簡潔な説明として，園(2000年9月)を参照して頂ければ幸いである。だが一方，上の節で言及したように，「「個人論的な」見解に「徹する」場合には，「コインの投げ上げ」的な状況を定式化すること「すら」できないのではないのか」，という疑念が提示され得るのである。そこで，「頻度論的な」流儀において問題の「未知固定の」pが導入される状況を少し反省してみる必要があるであろう。つまり，（多少は歪んでいるかもしれない）コインを投げ上げて，

そのコインのなんらかの「着地」を観察し，その観察が，「そのコインは「表」を現している」という結果か，それとも「そのコインは「裏」を現している」という結果かの，いずれをもたらしているのかを「記録する」という試行を，「その個人」は考えるのだが，彼は，「この試行を「同様の」やり方で「限りなく」反復するという状況を想定する場合に，「表」が現れる相対的な頻度が「限りなく」近づくであろう「ような」値がpである」という，「未知固定の」pに対する「頻度論的な」解釈を知ってはいるのである。しかし，彼自身の立場からは，このようなpを「確率」として承認するわけには行かないのであり，結局，「そのコイン」を一回投げ上げる場合に「表」が出る「確率」とは，「その個人」にとっては，「問題の投げ上げの結果が「表」である場合に，またその場合に限って，1単位の貨幣が賞としてもたらされる」という「くじ」の値段を自身で見積る際の，「その」値段であり，彼にとっては，この「値段」よりも多くの額をその「くじ」のために支払うわけには行かず，一方，それ以下の額とその「くじ」とを引き替える「覚悟」が彼自身にはあるのである。このように，「表」が出る「確率」とは，「その個人」にとっては，自分自身が定める「値段」以外の何者でもなく，それは彼にとっては，少なくとも原理上は，「既知」なのである。(なお，de Finetti (1937)が明瞭に示しているように，貨幣の「効用」の影響を無視できるような状況においては，「個人」が見積る「値段」によって「確率」を「定義する」というこの流儀が「うまく」行き，この「定義」によって(「確率」の初等的な計算の基礎である)加法法則や乗法法則が「証明される」のである。)

ところで，任意の指定されている正の整数nに対して，問題のコインに関する投げ上げを(1回のみでなく) n回行う状況を想定してみると，「その個人」は，この「投げ上げ」が行われる「まえ」に，全体で2^n個ある(各項が「表」か「裏」かである長さnの系列で表現される)可能な観察結果の各各に対して，「原理上は」，自身の「確率」を「定める」ことが「できる」のである。(なお，これらの「確率」の値は(「確率」の計算法則に関して)矛盾をもたらすものであっては「ならない」のであり，この「ならない」とは，「その個人」は，様様な「くじ」の自身にとっての「値段」を見積る際に，「それらの「値段」の内のある組合せが自身に「必ず損をもたらす」」ようであっては「ならない」し，しかも，様様な「くじ」を提供する側も，「それらの「値段」の内のある組合せに対しては「必ず損をする」」などということがあっては「ならない」，ということなのである。)しかし，「コインの投げ上げ」に関する「頻度論的な」議論が持ち出されるような「通常の」状況において，n回までの「その」コインの「投げ上げ」が行われる「まえ」に，n回までの「投げ上げ」において現れる「表」の回数が等しくなっている結果の系列に対して，「その個人」が異なる「確率」を配分することが，はたして容認され得るのであろうか。問題の「通常の」状況では，しばしば，「未知固定のpが与えられていると想定するのならば，その想定の下では「独立で同一」であると見なされる「試行」から成る，一つの系列」というものが持ち出されるのだが，このような独特の「系列」が持ち出されて「しまう」状況では，いわば「同様な」試行の「繰り返し」が問題となっているはずであり，問題の「投げ上げ」が始まる「まえ」においては，n回までの「表」の総数が「等しい」系列は，「その個人」にとっては言わば「無差別」である「はず」であろう。つまり，「同様な」試行の「繰り返し」というような状況を，問題のpを持ち出さずに，従って，安直に独立同一分布の仮定を持ち出さずに，「その個人」の立場から「捕え直す」ことを試みるのならば，結局の所，このような「無差別性」に行き着くのではなかろうか。この「無差別性」を前提とするのならば，「その個人」は，n回までの「表」の総数が等しい系列に対しては同一の「確率」

を配分することとなるであろうし，さらにまた，この「配分」を前提とするのならば，「確率」の計算法則により，n 回までの結果のいくつかから成る部分的な系列において，「表」及び「裏」の総数が共に一致するのならば，それらは「その個人」にとっては同一の「確率」を持つ，ということが従うのである。一方 n は，任意の指定されている正の整数であるから，各正の整数 n に対して同様の「確率」値の配分が（「その個人」によって）遂行されることとなり，しかも，異なる n に関するものではあっても，これらの「値」の全体は（「確率」の計算法則に関して）矛盾しては「ならない」のである。

そこで，「コインの投げ上げ」的な状況を「その個人」の立場から多少反省するのならば，「「試行」から成るその無限的な系列においては，各「試行」がもたらし得る「結果」は「表」か「裏」かのいずれか一方であり，しかもこの無限的な系列の空でない有限的な任意の二つの部分的な系列を考える場合，それらの部分的な系列がもたらし得る「結果」の系列の間で「表」及び「裏」の総数が各各等しいのならば，それらの可能な「結果」の系列に対する「その個人」の「確率」は等しい」という性質を満たす，「「試行」の無限的な系列」に行き着くこととなるようでである。ところで，このような「「試行」の無限的な系列」は「交換可能性，exchangeability」を満たすなどと言われたりするのだが，交換可能性の概念は，今日では（ここでの第 3 節及び第 4 節で言及するように）確率論的な枠組みにおいてより一般的な様式で「定義」されかつ議論されるのが普通である。しかしここでは，「コインの投げ上げ」的な状況に議論を限定しておいて一向にかまわないのである。なお，ここで注意すべきなのは，「頻度論的な」議論において問題の未知固定の p が持ち出されてしまうような状況を「その個人」の立場から反省するのならば，「交換可能性を満たす，「試行」の無限的な系列」に行き着くであろう，ということであって，このような「無限的な系列」が（「その個人」の立場から見て）「自然な」ものなのだなどというわけではなく，つまり，議論の筋道の上で注意すべきことは，「交換可能性を満たす，「試行」の無限的な系列」という概念の「個人論的な」正当性なのではなく，この概念が「頻度論的な」状況を「個人論的に」反省することによって多分「自然に」もたらされるであろうということなのである。

ところで de Finetti は，（かれ自身の主観主義に基づいて）「交換可能な無限的系列」の重要性に気づき，しかも，このような系列に対するある基本的な「命題」を導いたのである。この「命題」は，今日では「de Finetti の表現定理」と呼ばれており，彼は遅くとも 1928 年にはこの結果を得ていて，しかも Bologna の国際数学者会議で報告しているのである。また彼は，1935 年 5 月の 2，3，8，9，及び 10 日の五日間にわたって，the Institut Henri Poincaré において，自身の主観主義的「確率」に関する講義を行い，そこでこの「表現定理」の証明と主観主義的解釈とを与えており，この古典的講義が de Finetti (1937) として公表されているのである。そこでこの「表現定理」を，なんとか de Finetti の流儀を尊重しつつ，提示しよう。まず，S を集合として $\mathfrak{A}$ を S 上の有限加法族とし，さらに P を $(S, \mathfrak{A})$ 上の有限加法的確率測度とする。さらにまた，$X_r, r=1,2,3,\cdots,$ を $(S, \mathfrak{A})$ 上の確率変数から成る列として，しかも，各 X_r が取る値は 1 か 0 かのみであるとする。そこで，変数列 $X_r, r=1,2,3,\cdots,$ は交換可能性を満たすものとする。即ち，「この変数列の空でない任意の有限部分列 $X_{r(k)}, k=1,2,\cdots,K,$ と，各項が 1 か 0 かである任意の数列 $x_k, k=1,2,\cdots,K,$ とに対して，確率 $P(X_{r(k)}=x_k, k=1,2,\cdots,K)$ の値は，数列 $x_k, k=1,2,\cdots,K,$ における 1 及び 0 の総数のみによって定まり，変数列の取り方には依存しない」と仮定するのである。すると，単位区間 $I=[0,1]$ 上の（この区間の部分区間の全体から生成される）Borel 集

合族を定義域とする完全加法的な確率測度 M が存在して，（上で言及した）確率 $P(X_{r(k)}=x_k,\ k=1,2,\cdots,K)$ が，$x_k, k=1,2,\cdots,K$，における 1 及び 0 の総数を各各 a 及び b とすると，変数列の部分列及び（1 及び 0 から成る）数列の取り方がいかなるものであれ，次の積分によって表現されるのである。

$$\int_I p^a(1-p)^b M(dp).$$

しかも，この完全加法的確率測度 M は一意的に定まる。（なお，この積分を便宜上 $\pi(a,b)$ と表すこととしておく。）

サヴェジ氏が簡潔に指摘しているように，この「表現定理」のみを示すのならば，Hausdorff moment problem に関する議論を考慮すれば良いのである。（なお，石黒(1977) の第 2 章第 9 節Ⅲの 82 頁から 88 頁にかけて，この Hausdorff moment problem の説明がある。）また，交換可能性に関する「表現定理」を一般化する議論が幾つか為されているが，古典的な議論として，特に Hewitt and Savage(1955)がある。しかし，ここで問題とするのは，この「表現定理」が「確率」との関りにおいて「意味する」事柄である。de Finetti の主観主義によれば，一連の「確率」の値とは，結局の所，「その個人」が定める「整合的な，coherent」値段のシステムに他ならないのである。そこで，値 1 及び 0 を各各「そのコイン」の「表」及び「裏」と解釈するのならば，「確率」$P(X_{r(k)}=x_k, k=1,2,\cdots,K)$とは正にこのような「個人的な」値段でなければ「ならない」のであり，それらの値は，「コインの投げ上げ」がもたらし得る可能な諸結果に対する「その個人」の整合的な「値段のシステム」を形成することとなるのである。だが，「表現定理」における M は，数学的には紛れもなく確率測度なのだが，「その個人」が定める値段のシステムの一部分ではなく，その値段のシステムを表現するために導入されている「補助的な量」なのであり，それは「本来の」，つまり「その個人」にとっての，「確率」などではないのである。そこで，この「補助的な量」を利用するのならば，「通常の」統計家が，「このコインが「表」を見せる確率 p を自分は知らないのだが，それが二分の一以下であることは確実であると思われる」と表現する状況は，本来は，「このコインの投げ上げから成る系列を，自分は，交換可能性を満たす系列であると見なすのだが，しかもその交換可能な系列に関する測度 M は区間[0, 1/2]に対して値 1 を配分している」と表現されるべき状況となるのである。つまり，交換可能性に関する「表現定理」に現れる「補助的な量」M を利用することによって，「未知固定の」確率 p が(「客観論的な」議論において）持ち出されてしまうような状況に対して，「本来の」確率のみを用いて（「その個人」の立場から）明晰な表現を与えることができるのである。だが，ここで注意すべきことは，「未知固定の」確率を利用している表現そのものを「その個人」が拒絶するというのではなく，つまり「未知固定の」確率という「架空の」存在を用いた表現の「有用性」を「その個人」が認めないというのではなく，そのような表現が関っている状況は，p を持ち出さずに M を利用することで，「その個人」の立場から表現し直すことができるということなのであり，従って，「個人論的な」見解が本来は「未知固定の」確率の存在を認めないはずであるということに基づいて，その見解の「欠陥」を指摘するという流儀は，少なくとも論理的には，正当とは言い難いということなのである。さらに注意すべきことは，「そのコインの任意有限回の投げ上げがもたらすであろう諸結果」というものを「その個人」は想定しているのだが，しかし，「「任意有限回の投げ上げ」が限りなく反復される」というような状況には「その個人」は関ってはいないのであり，さらにまた「その個人」は，「「そのコインを限りなく投げ上げ続ける」という作業が限りなく反復される」というような状況にも関りがないのである。つまり，「その個人」にとっては，「試行」

とは正に「一回限り」のものであり，従って，「投げ上げ」や「投げ上げの系列」は，「その」投げ上げや投げ上げの「その」系列なのであって，為されるとすれば，「唯一回のみ」なのである。

ところで，de Finetti の表現定理における M は「補助的な量」であって「確率」ではないのだが，しかし，やはり de Finetti が示しているように，この M を「「確率」の極限」と見なし得るのである。つまり，

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} X_r$$

と置くと，$\delta \in I$ かつ $M(\{\delta\})=0$ を満たす任意の δ に対して、次の式が従うのである。

$$\lim_{n\to\infty} P(\overline{X}_n \leq \delta) = M([0,\delta]).$$

ここで，$\overline{X}_n$ は「n 回までの投げ上げにおいて現れる「表」の総数の割合」であり，従ってこの式は，δ が完全加法的確率測度 M の連続点であれば，「この「表」の割合が δ 以下となる」ことへと「その個人」が配分する「確率」が，投げ上げの回数が限りなく増大する状況において，値 $M([0,\delta])$ へと限りなく近づくことを意味しているのである。（なお，$n\delta$ 以下である最大の整数を m とすると，「表」及び「裏」から成る長さ n の系列で「表」の総数が m 以下であるものの個数は当然有限であるので，「n 回までの投げ上げにおいて現れる「表」の総数の割合は δ 以下である」という事象に対応する S の部分集合は，有限加法族 $\mathfrak{A}$ に属しているのである。）ここで注意すべきは，「任意有限回の投げ上げ」が遂行される「まえ」に，交換可能性を満たす「確率」P が「その個人」によって「定められている」のであるから，「その個人」が極限的な操作を「遂行する」ことを前提とすれば，「補助的な量」M も，「その個人」によってあらかじめ「定められている」こととなる，ということである。このように，「コインの投げ上げ」における「未知固定の」p が，「その個人」が定める測度 M によって「置き換えられる」のであるが，しかし，「その個人」にとっては「未知固定の」p などは元来「存在しない」のであるから，この M を「「未知固定の」p に対する自分自身の事前分布」などと見なすことは，少なくとも「その個人」には，「できない」はずなのである。つまり，「p の事前分布」という表現を用いるとしても，それは「便宜上の」表現に過ぎないのである。

さらにまた，交換可能性を満たす（「その個人」の）P を利用して，「観察結果が与えられている場合における，特定の結果が今後現れるであろう「確率」」を「その個人」の立場から考察できることは重要である。つまり，例えば，「n 回までの投げ上げの結果が与えられている場合において，$n+1$ 回目の投げ上げで「表」が現れる「確率」」を「その個人」は問題とするのだが，ここで注目すべきなのは，$X_k=x_k, k=1,2,\cdots,n$, という観察結果が与えられているとすると，この場合の「条件つき確率」$P(\cdot \mid X_k=x_k, k=1,2,\cdots,n)$ に関して，変数列 $X_l, l=n+1,n+2,\cdots$, は再び交換可能性を満たしているということなのである。実際，任意の正の整数 m に対して，$X_l=x_l, l=n+1,n+2,\cdots,n+m$, を可能な任意の結果として，この結果における 1 及び 0 の総数を各各 c 及び d とすると，但し，与えられている結果 $X_k=x_k, k=1,2,\cdots,n$, における 1 及び 0 の総数を各各 a 及び b としておくのだが，「条件つき確率」$P(X_l=x_l, l=n+1,n+2,\cdots,n+m \mid X_k=x_k, k=1,2,\cdots,n)$ は次の積分によって与えられることとなる。

$$\pi^{-1}(a,b)\int_I p^{a+c}(1-p)^{b+d}M(dp)$$

$$=\int_I p^c(1-p)^d \frac{p^a(1-p)^b}{\pi(a,b)}M(dp).$$

つまり，n 回目の投げ上げまでの観察結果が与えられているとしても，$n+1$ 回目以降の「試行」の系列は，「その個人」にとっては，依然として交換可能性を満たしているのであり，しかし，表現定理における「補助的な量」M が，次の M' に置き換わるのである。

$$M'(B) = \pi^{-1}(a,b)\int_B p^a(1-p)^b M(dp).$$

なお，このBは単位区間Iにおける任意のBorel集合である。また，注意すべきなのは，「コインの投げ上げ」的な状況では，「その個人」にとっては，「未知固定の」pは元来存在しないのであるから，Mと同様にこのM'も，(「その個人」にとっては）本来の「確率」ではないのである。従って，このM'を，「観察結果が与えられている場合の，pに関する事後分布」と呼ぶとしても，この「pに関する事後分布」という表現は，あくまでも「便宜上の表現」に過ぎないわけである。なお，上では$\pi(a,b)$が0でないことが暗黙の内に仮定されている。

さらに，この「条件つき確率」との連関で，既に観察されている「表」の相対的頻度と，「その観察結果が与えられている場合の，次の投げ上げで「表」が現れる「確率」」との「近さ」が，既に観察されている投げ上げの回数が限りなく増大する状況において，また，ある「確率的な意味」において，0に「収束する」ことが示されるのである。実際，上の$M'(dp)$を$M(dp \mid x_1,\ldots,x_n)$と表記しておき，さらに

$$d_n = \int_I \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k - p\right)^2 M(dp \mid x_1,\ldots,x_n)$$

と置き，εを任意の正の実数として，$d_n \geq \varepsilon$を満たす観察結果$x_k, k=1,\cdots,n,$が得られる「確率」を$a(n,\varepsilon)$とすると，nが限りなく増大する場合に，$a(n,\varepsilon)$が0に収束することが示せるのであり，これより，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k - \int_I pM(dp \mid x_1,\ldots,x_n)$$

の絶対値がε以上となるような観察結果$x_k, k=1,\cdots,n,$が得られる「確率」は，この与えられている任意の正の数εに対して，nが限りなく増大する場合に0に収束することが従うのである。ところで，

$$\int_I pM(dp \mid x_1,\ldots,x_n) = P(X_{n+1}=1 \mid X_k = x_k, k=1,\ldots,n)$$

であるから，この結果は，観察結果から得られる「表」の相対的頻度と，その観察結果が与えられているという条件の下での次の投げ上げで「表」が現れる（「その個人」にとっての）「確率」との「隔たりが」，観察の回数nが限りなく増大する状況において，「確率的な意味」において0に「収束する」ことを主張しているのである。なお，観察結果$x_k, k=1,\cdots,n,$に対応する「確率」が0の場合には$M(dp \mid x_1,\cdots x_n)$を「自然に」定義することはできないが，しかし，このような観察結果が得られる「確率」が，各nに対して0であることが，「その個人」によって「あらかじめ」定められているのである。

このように，「客観論的な」文脈において当然のことのように持ち出される「未知固定の確率」pを，「その個人」の立場から冷静に反省してみると，同様の「試行」の反復から成る「限りない」系列がもたらすであろう相対的頻度の「極限」というようなものはなんら持ち出す必要はなく，むしろ本質的なのは，その「「試行」の無限的な系列」に対する交換可能性と（交換可能性に関する）「表現定理」なのであり，その際現れる（「その個人」の「確率」の「極限」として捕えることができる）「補助的な量」Mによって，「未知固定の」pがはたす役割が言わば「置き換えられてしまう」のである。さらには，観察結果に基づく相対的頻度と，観察結果が与えられている場合の「確率」との隔たりが，観察の回数が限りなく増大する状況において，「ある確率的な意味で，0に収束する」ことを，「その個人」は「あらかじめ」承知していることとなるのである。

3．Kolmogorov systemと「隠される」論点

ところで，交換可能性の概念は，今日では「通常の」確率論的な枠組みにおいて議論されているのであり，つまり，Kolmogorov system（あるいはKolmogorovの公理系）に基づいて「表現定理」が導入されるのだが，しかし，このsystemの（不気味な程の）機能性が，「確率」の「存在」に関する論点を言わば「隠してしまう」のである。このような「事実」は，「数学的な」形式に慣れてしまうと多分「忘れ去られる」恐れがあるのであり，ここで敢えて確認しておくこととする。なお，Kolmogorov systemに基づく交換可能性の簡潔な説明としてGalambos (1982) がある。また論文集のKoch and Spizzichino (1982) があるが，専門的である。

ここで，$\mathfrak{F}$を集合Ω上の完全加法族として，Pを可測空間（$\Omega, \mathfrak{F}$）上の完全加法的確率測度とする。また，$X_i, i=1,2,\cdots,n,\cdots$，を，正の整数を添え数とする（$\Omega, \mathfrak{F}$）上の（実数値を取る）確率変数の列とする。この場合，この変数列が「交換可能，exchangeable」であるとは，任意の正の整数nとこの変数列の任意の有限部分列$X_{(i)}, i=1,2,\cdots,n$，と，さらに任意の実数列$x_i, i=1,2,\cdots,n$，と集合$\{1,2,\cdots,n\}$上の任意の置換σとに対して，

$$P(X_{(1)} \leq x_1, \cdots, X_{(i)} \leq x_i, \cdots, X_{(n)} \leq x_n)$$
$$= P(X_{(1)} \leq x_{\sigma(1)}, \cdots, X_{(i)} \leq x_{\sigma(i)},$$
$$\ldots, X_{(n)} \leq x_{\sigma(n)})$$

が成立することである。なお，この定義から，上の等式の右辺の変数列$X_{(i)}, i=1,2,\cdots,n$，を冒頭から第n項までの変数から成る列$X_i, i=1,2,\cdots,n$，に置き換えてもやはり等号が成立することが従う。ところで，各X_iが1及び0のみを値として取る場合には，この交換可能性の定義は（見掛け上は）前節のものと一致するが，しかしここでは，Pは完全加法的確率測度であり，（$\Omega, \mathfrak{F}, P$）は確率空間であり，つまりKolmogorov systemが前提となっているのである。なお以下では，「コインの投げ上げ」的な状況との連関を考慮して，この1及び0のみの場合を議論する。

前節において$\overline{X}_n$と表記した変数をここではY_nとする。即ち，

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n} X_i$$

とする。Y_nは$X_1,\cdots,X_n$の算術平均であり，n回までの投げ上げにおける「表」の割合である。また，正の整数kに対して$p_k=P(X_i=1, i=1,\cdots,k)$と置く。すると，確率測度$P$に基づく期待値作用素$E$と交換可能性とを利用すると，任意の正の整数$m$及び$n$に対して，

$$E((Y_m - Y_n)^2) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|(p_1 - p_2)$$

が従う。従って，m及びnが「限りなく」増大する状況においては，左辺の期待値は0へと収束することとなる。従って，変数列$Y_n, n=1,2,\cdots$，は$L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$におけるCauchy列であり，$L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$の完備性から，この関数空間に属するある可測関数$U$が存在して変数列$Y_n, n=1,2,\cdots$，はこの関数空間のノルムに関して$U$へと収束する。$P$の零集合上で$U$の値を変更してもこの収束は成立するから，この$U$として実数値をとる確率変数を取ることができる。つまり，変数列$Y_n, n=1,2,\cdots$，はこの変数Uへと平均収束することとなる。従って，$Y_n, n=1,2,\cdots$，はUへと確率収束する。一方，Y_nの値は0以上かつ1以下であるので，Pのある零集合を除けばUの値は0以上かつ1以下となる。故に，Pに関するUの分布は単位区間IのBorel集合族を定義域とする完全加法的確率測度と見なせることとなる。そこでこの（Pに関する）Uの分布をMと表記しておく。すると，$Y_n, n=1,2,\cdots$，はUへと法則収束するので，$M(\{\delta\})=0$を満たす任意の実数$\delta \in I$に対して，

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \leq \delta) = M([0, \delta])$$

が従う。またやはり法則収束から，任意の正の整数kに対して，

$$\lim_{n\to\infty} E(Y_n^k) = E(U^k)$$

が従う。ところが，「nが限りなく増大する状況においては，$E(Y_n^k)$はp_kに収束する」ことがわかるので，

$$p_k = E(U^k)$$

が従う。この等式を M を使って表現すると，

$$p_k = \int_I u^k M(du)$$

となる。これは，任意の正の整数 k に対して従うので，結局，前節の「de Finetti の表現定理」における M による積分表現と同値である。一方，このような測度 M の一意性だが，Weierstrass の多項式近似定理によれば「I 上の実数値を取る連続関数が，実数係数を持つ多項式によって一様に近似される」こととなること，及び「乗法族から生成される Dynkin class はその乗法族から生成される完全加法族と一致する」という Dynkin class lemma に注意すれば，これは従う。（なお，Weierstrass の多項式近似定理の説明は，例えば，高木(1961) の第 6 章第 78 節，284 頁から 286 頁，にあり，また Dynkin class lemma に関する簡潔な説明は，『岩波　数学辞典　第 3 版』(1985) の「測度論」の B にある。）このようにして問題の「表現定理」は，数学的な命題としては，Kolmogorov system の枠組みに基づいて明晰に導出されるのである。

さらにまた，変数列 $Y_n, n=1,2,\cdots,$ は変数 U へと平均収束するのであるから，各正の整数 n に対して，

$$D_n = E((Y_n - U)^2 \mid X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

と置くと，条件つき期待値の列 $D_n, n=1,2,\cdots,$ は L^1 $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ において 0 へと収束し，従って，この条件つき期待値の列は 0 へと確率収束することとなる。このことより，

$$Y_n - E(U \mid X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

が，n が限りなく増大する状況において，0 へと確率収束することが従う。一方，「表現定理」と条件つき確率とに注意すると，P のある零集合を除くと，

$$\begin{aligned} &E(U \mid X_1, X_2, \ldots, X_n) \\ &= P(X_{n+1} = 1 \mid X_1, X_2, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

が従う。故に，Y_n と $P(X_{n+1} = 1 \mid X_1, X_2, \ldots, X_n)$ との差は，n が限りなく増大する状況において，0 へと確率収束することとなる。このように，変数 X_1 から X_n までを可測とする最小の完全加法族が与えられている場合の条件つき期待値及び条件つき確率を用いて，観察結果が与えられている場合の（次の回で）「表」が出る「確率」と，その観察結果における「表」の相対的頻度との差が，観察の回数が増大する場合に，「ある確率的な意味」において 0 へと収束することが従うのである。（なお，条件つき期待値及び条件つき確率の簡略な説明が，上で言及した数学辞典の「確率論」の E にある。）

だが，Kolmogorov system に基づいて証明される「表現定理」における測度 M の解釈は，決して「自明」というわけではないのである。実際，M は変数 U の P に関する分布なのであるから，「頻度論的な」立場からすれば，集合 Ω から確率的な法則 P に従って要素 ω を（無作為に）抽出して変数 U の値 $U(\omega)$ を記録するという実験を，抽出される要素を元に戻すことを前提として「限りなく」反復する場合に，得られるであろう U の値の系列に対して求められる相対的頻度の「「極限」のようなもの」として，この M が「解釈」されるはずなのである。この場合，例えば，u を 0 以上 1 以下の任意の実数とすると，「値 u 以下となる U の値」の割合の「「極限」のようなもの」が，値 $M([0,u])$ なのである。しかしこの解釈は，前節で議論された「コインの投げ上げ」的な状況を捕えているわけでは決してない。なぜならばこの解釈は，「未知固定の」確率 p が関る状況ではなしに，p に相当するパラメータがなんらかの「無作為な」メカニズムによって生成された「あと」に，この p に依存する「確率的な」実験が反復されるという，言わばある種の二段階実験に関っているからである。結局，Kolmogorov system に基づく「表現定理」を「頻度論的に」解釈しようとすると，この「表現定理」が，「未知固定の」p が関る状況に対する

論理的分析に重要な洞察を与えるものであるという「事実」が，終に「忘れ去られる」恐れがあるのであり，このことはかなり用心すべきである。

そこでさらに，確率空間$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$の構成の過程を少し反省してみることとする。つまりまず，Ωを1及び0から成る「無限的な」系列の全体であるとする。よりフォーマルに表現すれば，正の整数の全体から$\{0, 1\}$への写像の全体をΩとするのである。この場合，Ωの要素ωは1及び0から成る「無限的な」系列に他ならない。一方「その個人」は，1及び0から成る（空でない）任意の「有限的な」系列$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$に対して，自身にとっての「確率」$p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$を対応させるのであり，しかも，これらの「確率」の全体は「整合的な」ものでなければ「ならない」のであった。またさらに，「「その個人」は，この「確率」のシステムが交換可能性を満たすように(それらの「確率」の値を)設定する」と，仮定するのである。ここで注意すべきなのは，$p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$から成るこのシステムが，$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_2, \ldots, x_n, 0) + p(x_1, x_2, \ldots, x_n, 1)$などが成立することから，Kolmogorovの拡張定理における「一致条件，consistency condition」を満たすということなのである。そこで，$\{\omega \in \Omega \mid \omega$の第$k$番目の項は$x_k$である$\}$という集合を各正の整数$k$と各$x_k \in \{0, 1\}$とに対して考えて，これらの集合の全体から生成される(Ω上の）完全加法族$\mathfrak{F}$を導入しておくと，可測空間$(\Omega, \mathfrak{F})$上のある完全加法的な確率測度Pが一意的に存在して，このPは$p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$から成る「確率」のシステムの拡張となっていることが，(『確率論の基礎概念』の基本命題であるKolmogorovの拡張定理から）従うこととなるのである。この確率測度Pは当然交換可能性に相当する性質を満たしているのであり，実際，各正の整数kに対して，Ωの各要素ωにωの第k番目の項を（あるいは第k番目の座標を)対応させる写像をX_kとすると，このX_kは$\mathfrak{F}$に関して可測であり，写像の列$X_k, k=1, 2, \cdots, n, \cdots$,は交換可能な変数列となる。従って，この変数列及びPに対して「表現定理」が成立することとなり，問題の変数Uの「存在」が従うこととなる。そこで，もし「その個人」が，「このPは自身にとっての「確率」を定めるものである」と「見なす」のならば，変数UのPに関する分布Mは，当然「その個人」にとっての「確率」を表現することとなるはずである。しかし，前節で注意したように，このMは，「補助的な量」ではあっても「その個人」にとっての「本来の」確率では「ない」はずである。

そこでもう少し反省を進めることとする。問題の変数Uは，1及び0から成る「無限的な」系列の各各に対して実数値を対応させる写像であった。一方「その個人」は，1及び0から成る「有限的な」系列の各各に対して自身にとっての「確率」を配分するのであり，彼にとっての「確率」とは，これらの「確率」から成る「整合的な」システムの構成員のことであり，より「正確に」述べれば，「整合的な」これらの「確率」と（これらの「確率」に対して適用される）「確率の計算」に関する諸法則とによって得られる「値」のシステムの構成員のことであり，他の「値」は（彼にとっては）「本来の」確率では「ない」のである。しかも，ここでの「確率の計算」に関する諸法則とは，不確定性に直面している「その個人」の（損か得かの見きわめに関する）「選好」によって正当化されるものでなければ「ならない」のであり，結局，それらの法則は，諸諸の「くじ」の自身にとっての値段を「その個人」が見積る際に，「あるいくつかの「くじ」が，それらの値段に関して，「その個人」に対して「必ず」損失をもたらすとか，あるいは「必ず」利益をもたらすこととなる」などということがないという，その「見積りの様式」によって正当化されるものでなければ「ならない」のである。そこで，「確率の計算」に関する加法法則及び乗法法則はこのような「見積りの様式」として正当化で

きるのだが，しかし，問題の確率測度 P を（Kolmogorov の拡張定理に基づいて）導入する際に想定されているであろう「極限的な」操作が，このような「値段の見積り作業」によって「正当化される」見込みがどうも「ない」のである。実際，de Finetti は，「確率」に対する完全加法性の仮定を「公理」として認める立場を拒否しているのであり，しかも彼は，少なくとも原理上は，「任意の」事象に対して「確率」を配分できる「はずだ」と判断しているようなのであり，またサヴェジ氏も，de Finetti のこの見解を支持しているのである。結局，P に基づく変数 U の分布 M がもたらす「値」は，上で示したように「本来の」確率の「極限」ではあっても，多分「その個人」にとっての「本来の」確率では「ない」のである。なお，ここで注意すべきことは，「未知固定の」確率 p を持ち出す必要性は（フォーマルには）「ない」のであり，しかも，「その個人」が問題としている「「そのコイン」の任意有限回の投げ上げ」はただ「その一回限り」のものとして想定されているのであり，従って，「頻度論的な」解釈におけるような，「問題となっているコインを「限りなく」投げ続けるという実験を「限りなく」繰り返す」などというような想定を，持ち出す必要性はないのである。とにかく，このような反省の過程を考慮するのならば，「「未知固定の」確率の「存在」」という事柄に関する古典的な論点が，Kolmogorov system の（不気味な程の）機能性によって「隠される」傾向にあることが多分了解されることであろう。

ところで，Kolmogorov の拡張定理は Kolmogorov (1933) の第 2 章第 2 節で提示されているのだが，その際 Carathéodory の外測度が利用されており，この状況のより詳しい説明として，伊藤 清 (1976) の第 2 章の第 2 節及び第 9 節がある。また，この外測度の利用は（測度論における）E. Hopf の拡張定理の応用と見なせるが，この拡張定理の説明が伊藤 清三 (1963) の第Ⅱ章第 9 節にある。また，同書の第Ⅴ章第 22 節Ⅰの 163 頁から 165 頁にかけて，関数空間 L^p, pは 1 以上の実数，の完備性の証明（及び注意）がある。さらに，上で言及した数学辞典の「確率測度」のⅠ及び「測度論」のＥに，それぞれ，Kolmogorov の拡張定理及びＥ. Hopf の拡張定理の簡潔な説明がある。

4．「未知固定の」母集団分布という「存在」と独立同一分布の「仮定」

「コインの投げ上げ」との連関でしばしば言及される「未知固定の」確率という事柄について反省を行って来たのだが，交換可能性とその「表現定理」とによって，結局，このような「未知固定の「存在」」は，少なくとも「その個人」にとっては，論理上は，導入する必要性が「ない」ということが「従う」のである。つまり「その個人」は，「未知固定の」p に言及することがあっても，そのような言及は「補助的な量」M を利用する表現によって「置き換える」ことができるのであり，つまり，p を利用する表現は，「日が昇る」とか「熱の流れ」という表現と同様の雰囲気で，あくまでも「便宜上のもの」なのである。だがさらに，「通常の」統計学においては，「未知固定の」母集団分布という「存在」がしばしば導入されるのである。一方，上の第 2 節の冒頭で簡略に言及したように，「確率」に関する「客観論的な」見解に忠実であろうとすると，このような「存在」を明晰に「定義」することはかなり困難なのである。実際，なんらかの「母集団」を想定しておいて，さらにまた，そこから「無作為に」要素を取り出し，なんらかの観察を行い，その要素を元に戻すという操作を，「限りなく」反復するという作業を想定するとしても，結局，そのような作業によって「得られるであろう」観察結果の系列に沿って導入される相対的頻度の「極限」のようなものや，あるいはその「集まり」を，考察せざるを得ないであろうから，そこで，この「極限」という事柄をなんとか「定義」しな

ければ「ならない」はずなのだが，しかしここで，「定義」しようとしている「母集団分布の概念」が，既に「定義」されているのだとして，議論を進めてしまう「恐れ」があるのである。つまり例えば，「収束」を「定義」する際に「母集団分布に関する確率収束」のようなものを持ち出したり，さらには，要素の「無作為な」抽出を「定義」するために「母集団分布の積」を持ち出してしまう，などということが起り得るのである。しかし，交換可能性の概念を利用することによって，この「未知固定の」母集団分布の「存在」や「無作為な」抽出にかんする独立同一分布の「仮定」に対してかなり明晰な考察を加えることができるのである。なお，上の二つの節では，各変数が 1 及び 0 のみを値として取る場合の「表現定理」を考察したのだが，ここではこの定理を，$\{0,1\}$の場合の「表現定理」と呼ぶこととする。

ここでは前節と同様に$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$を確率空間として，Kolmogorov system の枠組みに基づいて議論することとする。$X_i, i=1,2,\cdots,n,\cdots$, を，$(\Omega,\mathfrak{F})$上の（実数値を取る）確率変数からなる（正の整数を添え数とする）列とし，この変数列が交換可能性を満たすと仮定する。また，各実数xと各正の整数iとに対して，事象$\{X_i \leq x\}$の定義関数を$I_i(x)$とする。即ち，$X_i(\omega) \leq x$であるか否かに従って，$I_i(x)(\omega)$は 1 あるいは 0 になる。すると，各実数xに対して，$I_i(x), i=1,2,\cdots$, は確率変数列となるが，交換可能性の仮定から，この列もまた交換可能性を満たすこととなる。また，各正の数nに対して，

$$Y_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_i(x)$$

と置く。ここで，$\{0,1\}$の場合の「表現定理」を考慮すると，各実数xに対して，ある（0 以上 1 以下の値を取る）確率変数$U(x)$が存在して，変数列$Y_n(x), n=1,2,\cdots$, は$U(x)$へと平均収束することとなり，従って，

$$\lim_{n\to\infty} E((Y_n(x) - U(x))^2) = 0$$

となる。ここで，変数列$Y_n(x), n=1,2,\cdots$,が$U(x)$へと確率収束すること，Pに関する零集合の可算無限個の合併が再びPに関する零集合となること，及び，実数直線において有理数の全体が稠密であることなどに注意すると，「Ωの各要素ωに対して，$U(x)(\omega)$は実数xの関数として単調非減少で右連続である」を満たすように，この変数から成る系$U(x), x$は実数，を選択できることが従うので，以下では，このような変数系を一つ固定しておくこととする。また一方，$Y_n(x)$及び$U(x)$は共に有界な変数であるので，実数から成る空でない任意の有限列$x_k, k=1,2,\cdots,K$, と任意の有界な変数Zとに対して，変数列$Y_n(x_1)Y_n(x_2)\cdots Y_n(x_K)Z, n=1,2,\cdots$, は変数$U(x_1)U(x_2)\cdots U(x_K)Z$へと平均収束することが従う。

ここで，「各実数xに対して，$U(x)$を可測とする」という性質を満たす最小の完全加法族を$\mathfrak{B}$とする。つまり$\mathfrak{B}$は，$\{U(x) \leq u\}, x$及びuは実数，という事象の全体から生成される完全加法族である。この場合実は，$\mathfrak{B}$に属する各事象Bに対して，

$$\lim_{n\to\infty} E(Y_n(x_1)Y_n(x_2)\cdots Y_n(x_K)I_B)$$
$$= P(\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_K \leq x_K\} \cap B)$$

が成立する。但しここで，I_BはBの定義関数であり，Kは任意の正の整数であり，$x_k, k=1,2,\cdots,K$,の各各は任意の実数である。なおこの結果は，「各実数xに対して，変数列$Y_n(x), n=1,2,\cdots$,のある部分列で$U(x)$へと（Pに関して）ほとんど確実に収束するものが存在する」こと，変数列$X_n, n=1,2,\cdots$,が交換可能性を満たすこと，そして Dynkin class lemma などに注意することによって従う。（この要となる等式への Galambos(1982)の説明は簡略に過ぎるように思われる。）

一方，このBに対して，

$$\lim_{n\to\infty} E(Y_n(x_1)Y_n(x_2)\cdots Y_n(x_K)I_B)$$
$$= E(U(x_1)U(x_2)\cdots U(x_K)I_B)$$

が成立している。故に，「完全加法族が与えられている場合の,条件つき確率」の定義により，

$$P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_K \le x_K \mid \mathfrak{B})$$
$$= U(x_1)U(x_2)\cdots U(x_K)$$

という等式が，P に関するある零集合を除けば成立することとなる。そこで，正則条件つき確率（あるいは条件つき確率分布）を考慮すると，あるいはより直接的には，「条件つき確率」の定義，P に関する零集合の可算無限個の合併が再び P に関する零集合となること，及び実数直線において有理数の全体が稠密であることなどに注意すると，「各実数 x に対して $U(x)$ は $\mathfrak{B}$ に関して可測であり，Ω の各要素 ω に対して，$U(x)(\omega)$ は x に関して単調非減少かつ右連続であり，しかも x が負の方向へと限りなく遠ざかる状況においてその値は 0 へと収束し，さらにまた x が正の方向へと限りなく遠ざかる状況においてその値は 1 へと収束する」という性質を満たすように，$U(x)$ を（必要に応じて）選択し直すことができる。この場合，各正の整数 k に対して，$U(x)$ は，実数 x の関数としては,「$\mathfrak{B}$ が与えられている場合の，X_k の条件つき分布関数」であると見なして良い。従って上の等式は，「$\mathfrak{B}$ が与えられている場合には，変数列 $X_i, i=1,2,\cdots,n,\cdots$，は，ほとんど確実に，独立かつ同一の分布に従う」ことを意味していることとなる。また逆に，与えられている変数列に対して，この「条件つきで，独立かつ同一分布に従う」という性質をもたらす完全加法族が存在するのならば，上の等式から，

$$P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_K \le x_K)$$
$$= E(U(x_1)U(x_2)\cdots U(x_K))$$

が従うので，その与えられている変数列は交換可能性を満たすのである。そこで，次の命題(*)が従うこととなる。

(*) $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ を確率空間とする。また，$X_i, i=1,2,\cdots,n,\cdots$，を，$(\Omega, \mathfrak{F})$ 上の実数値を取る確率変数から成る，正の整数を添え数とする列とする。この変数列が P に関して交換可能性を満たすための必要十分条件は，$\mathfrak{F}$ に含まれるある完全加法族 $\mathfrak{B}$ が存在して，その変数列の空でない任意の有限部分列が，$\mathfrak{B}$ が与えられている場合に，P に関してほとんど確実に，独立かつ同一の分布に従うことである。

この(*)は Kolmogorov system に基づく（無限的な変数列に対する）交換可能性の特徴づけに他ならず，「条件つきで，独立かつ同一分布に従う」ということがその特徴づけの内訳なのだが，この命題もまた「de Finetti の定理」として言及されるようである。しかし，de Finetti が示しているのは，第 2 節で述べた{0, 1}の場合の「表現定理」であって，この(*)は証明していないのであり，しかも，彼自身の主観主義からすれば，$U(x)$ に相当する変数などは元来「存在しない」はずなのである。なお，特別な場合として，各変数 X_i が 1 及び 0 のみを値として取る場合を考えてみると，第 3 節の「表現定理」における変数 U に対して，P に関してほとんど確実に，

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_K = x_K \mid U)$$
$$= U^a(1-U)^b$$

となる。但しここで，$x_k, k=1,2,\cdots,K$，は，各項が 1 か 0 かである空でない任意の有限列であり，a 及び b は，各各，この有限列における 1 及び 0 の総数である。だが，ここで問題となってくるのは，(*)が「意味する」事柄である。

「頻度論的な」流儀において「未知固定の」母集団分布という「存在」が導入される状況を，「その個人」の立場から反省してみると，とにかくその状況は，「なんらかの観察を任意有限

回反復する」という想定に関っているようであり，しかも，この「観察の反復」との連関で，「なんらかの母集団からの「同様の」抽出の繰り返し」が持ち出されたりするのであるから，このような状況においては，「想定されている観察の系列がもたらすであろう結果の諸系列は，結果が現れる順番を変更することによって一致するのならば，「同程度に」確からしい」と，「その個人」が判断するとしても，それ程不当ではないであろう。そこで「その個人」は，この「結果が現れる順番に関する無差別性」が満たされることを配慮しつつ，「可能な観察結果から成る諸系列」に対して自身の「確率」を「整合的に」配分することとなるのだが，その際彼は，「「問題となっている観察を既に与えられている任意の回数だけ反復する」という試行を，「限りなく」繰り返す」，というような想定を持ち出す必要はないのであり，さらにまた，「なんらかの仮想的な母集団」というようなものを持ち出す必要もないのである。ところで，観察が反復される回数は任意なのであるから，結局「その個人」は，「交換可能性を満たす，無限的な試行の系列」を設定することとなるであろう。だが，上の(*)によれば，Kolmogorov system に基づく議論を前提とした上でだが，少なくとも「その個人」にとっては，この試行の系列がもたらすであろう諸結果は，「条件つきで，独立かつ同一の分布に従う」のである。特に，(*) における完全加法族$\mathfrak{B}$が，(実数値を取るとは限らない) ある確率変数θを可測とする最小の完全加法族である場合には，「問題の試行の系列がもたらすであろう諸結果は，θが与えられている場合に，独立かつ同一の分布に従う」という状況が「その個人」に対してもたらされることとなるのであり，これは，「頻度論的な」議論において，「「未知かつ固定の」母数が与えられている場合に，観察の系列は独立かつ同一の分布に従う」という想定が持ち出される状況に対する，「その個人」による「正当な」定式化なのである。このように，主観確率に基づく「問題の状況」の定式化は，交換可能性に関する命題(*)によるものではあっても，「未知固定の」母集団分布の「存在」や，「仮想的な」母集団の導入や，「未知固定の」母数が与えられている場合の独立同一分布の「仮定」というような，「頻度論的な」議論における「常識的な」事柄とは別個に，「その個人」の立場から，「整合的に」為されているのである。さらにまたここで，第 3 節と同様の用心が必要である。つまり，(*)を「頻度論的な」立場から解釈しようとすると，なんらかの「ランダムな」機構によって母集団分布が定まり，その「あと」で，その母集団分布に従って観察結果が「独立に」限りなく生成されるという，言わばある種の二段階実験の，「限りのない」反復に関るものとして，この(*)を取り扱うこととなるはずである。だが，このように「見て」しまうと，(*)が，「未知固定の」母集団分布という「存在」や「未知固定の母数が与えられている場合の，独立同一分布の仮定」というような「基本的な」事柄に対する，「個人的な」分析への要であることが，多分「見えなくなる」のである。

5．三つの論述

交換可能性についての論述をこの小論で網羅的に検討することは不可能だが，しかし，たまたま筆者の手元にある三つの論述に言及しておくこととする。

まず Braithwaite(1957)がある。彼は自身が確率に関する「客観論的な」見解に立つこと明言している。従って，「コインの投げ上げ」において，多少歪んでいるかもしれない「そのコイン」が「表」を現す「確率」というものは，「投げ上げ」が行われる物理的な状況が指定されれば，それが「未知」ではあっても「客観的に」定まっていると彼は「見なす」のであり，このような「未知かつ固定」の「確率」について語ることは，彼にとっては「全く」正当なの

である。そこで彼は，結局の所，「頻度論的な」見解を採用するのであり，つまり彼は，「そのコイン」を「多くの」回数にわったて投げ上げる場合に得られるであろう（「表」が現れる）相対的な頻度によって，「表」が出る「確率」が事実上「定まる」と判断しているのである。一方彼は，de Finetti(1937)やサヴェジ氏の「基礎論」に言及しているが，主観論者の問題意識を「何故か」相当に軽く取り扱っているのである。さらにまた彼は，いくつかの袋の中に（色のみが異なる）黒及び白のボールが入っており，それらの袋を「無作為に」選び，さらにその選ばれた袋からやはり「無作為に」ボールを取り出すという，二段階抽出実験に言及することによって，「de Finetti の表現定理」の「頻度論的な」解釈を試みている。しかも彼は，自分自身のこの解釈が問題の「表現定理」の本質をうまく描写していると思っていたようである。だが，上の第 3 節で注意したように，Kolmogorov system によって，その「存在」と「実質的な一意性」とが（不気味な程に明晰に）「証明される」変数 U を「頻度論的に」解釈してしまうと，de Finetti が，「表現定理」を導入することによって精確に分析しようとした「コインの投げ上げ」的な状況が，それとは全く別の「二段階実験的な」状況によって置き換えられてしまい，その結果，「「未知固定の」確率などは元来「存在しない」のであり，しかも，そのような「未知固定の」存在などは元来導入する必要がないはずだ」という，「この世界」に対する主観論者の基本的な「態度」が，つまり，「世間の常識」が肯定しているある種の「未知の存在」に対する厳しい疑問符が，事実上忘れ去られてしまうのである。結局 Braithwaite は，自然科学における（特に物理学における）「確率」の重要性と，それが収めた実に多くの成果とを考慮して，自身が立脚している「客観論的な」見解の正当性を「確かである」と判断するのだが，だが一方彼は，主観論者の根底にある（「常識的な存在」に対する）「冷徹な」疑問符を（自身の心身を通して）感得してしまうことを「何故か」避けたのである。

次に，内井(1974) がある。これは，「確率」に関する主観主義を哲学の立場から論評した労作である。この論評の第一部のⅢにおいてサヴェジ氏の公準系が，また第二部のⅤにおいて「de Finetti の表現定理」が議論されている。しかし内井教授の考察は，サヴェジ氏や de Finetti の思索「それ自体」を発掘し詳述するというよりも，彼らの主観主義と，A. W. Burks, Richard C. Jeffrey，そして Rudolf Carnap, というような論客たちの議論との連関や，さらには，帰納法に関する伝統的な議論と「確率」に関する主観主義との関りということに，その重心があるようである。なお，内井教授が議論しているこの独特な哲学的領域に対して，筆者は残念ながら特別な知見を有していない。そこで，直接的な批判は差し控えることとするが，いくつかの論点は確認しておきたい。まず，サヴェジ氏が「基礎論」で導入している「世界」S だが，これは言葉で強引に表現しようとすれば，「その個人が自身の人生において直面するであろう，不確定性の総体」とでも言うようなもので，ただこれだけではその性格は少しも明瞭でない。しかし，この S には実際的な背景があり，例えば，ある企業家が，仕事や日常生活との関りで（場合によってはほとんど意識せずに）下すであろう（自身の人生における）諸諸の決定を，何故かある時に「この煩わしい現実」から多少の距離をおいて「一人の」場へと立ち戻って，（自己自身の立場から）統合して一つの「大きな」決定として捕え直して，この「大きな」決定が自身へともたらす「一般的な」収入をなんとか「冷静に」見積ろうとする場合，この「収入」が，自身の（「行為」としての）決定のみでなく，「世界の状態」にも依存しており，しかもこの「状態」に対して自身は「ふたしか」であると気づくのならば，彼はこの「大きな世界」S に関りつつあるわけである。さらにまたサヴェジ氏は，この「世界」に直面する「その

個人」の「合理的な」行動を，「確率」に関する個人論的見解との関りで思索し，彼の七つの公準を探査し提示して行く道筋において，定量的な個人的確率の一意的存在，個人的な効用の存在とその実質的な一意性，そして「個人的な期待効用」の最大化の原理という，不確定性下選好に関する基本的な命題を確立するのである。つまり，S に対する言辞的な規定が漠然としていても，統計的決定理論の基本的な枠組みを構築する際には，この S は「数学的な存在」として（ほとんど）申し分なく「機能する」のである。もしこの S に対して，あらかじめ，例えば，特定の内容構成を持つ「くじ」というような性格づけを行ってしまうのならば，サヴェジ氏の公準系の一般的な（しかしあくまでも個人論的な）性格が削減されてしまうであろうし，それでは理論として多分「ゆたかではない」のである。一方，「de Finetti の表現定理」についてだが，de Finetti (1937) の議論は Fourier 変換を用いたもので，「定理」の本質を捕えているなどとは多分言えない。また，彼の言い分を簡潔にまとめてみると上の第 2 節のようになるが，この場合の「表現定理」は，Hausdorff moment problem に関する基本的な命題の帰結以外の何者でもない。だが，第 3 節での Kolmogorov system に基づく議論から「見える」ように，「表現定理」の「本質」とは，$L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ の完備性以外の何者でもない。だがしかし，その際，存在と実質的一意性とが示される確率変数 U は，de Finetti の主観主義からすれば，少なくとも「コインの投げ上げ」的な状況においては，「存在しない」のであり，従って，そのような変数の「確率」分布は，彼の立場からは「存在しない」。また，第 4 節で述べた（「独立同一分布の仮定」に関る）命題(*)だが，この「定理」を de Finetti 自身は証明していない。また，少なくとも「未知固定の」母集団分布が関る状況においては，彼の主観主義からすれば，各確率変数 $U(x)$ は「存在しない」のであり，従って，そのような変数の「確率」分布は，彼の立場からは「存在しない」。また，Galambos (1982) は，この(*)が第 3 節の「表現定理」の a direct consequence だと言っているが，実際には，測度論的な議論を「まじめに」やらないと(*)は出てこない。つまり，de Finetti の議論の「数学的な」性格はかなり微妙なものなのだが，しかし，第 3 節及び第 4 節の議論から多分了解されるように，「未知かつ固定されている確率」という事柄に対する彼の態度とその分析とは，「統計学の基礎づけ」に対する重要な貢献であることには変わりがない。(なお，『岩波　数学辞典　第 3 版』(1985) は，残念ながら，de Finetti の業績にはなんら言及していない。)

最後に Freedman (1995/96) がある。David Freedman は P. Diaconis との一連の共同研究などで知られる本格的な統計家であり，彼の研究には，例えば，有限的な系列に関する交換可能性の考察などがある。しかし，この論述は専門的というよりもジェネラルなものであり，特別な予備知識などは前提としていない。だが彼は，「統計学の基礎づけ」に関する諸概念や論点を的確に押さえており，しかも，自身の見解を執拗に述べて行こうとする気力を持っている。彼は，客観論者が事実上 frequentists であり，主観論者が事実上 Bayesians であることを認めているのだが，さらに彼は，主観論者を「古典的な，classical」主観論者とラディカルな主観論者とに二分している。そして彼は，ラディカルな主観論者の例として，de Finetti とサヴェジ氏とを挙げている。結局，ラディカルな主観論者とは，「未知かつ固定されている母数」の「存在」という事柄そのものに，「厳しい」疑問符を打つタイプのことであり，彼らにとっては，「未知かつ固定されている母集団分布」などは元来存在しないのであり，このような「存在」に対する需要は，より「合理的な」やり方で対処されなければならないのである。つまり，ラディカルな主観論者は，「未知かつ固定の存在」が関ると（世間的には）見なされてい

る状況を，自身の主観主義に基づき再解釈して，さらに，交換可能性に関する「de Finettiの表現定理」を利用して，このような「存在」を持ち出すことがない，(少なくとも論理的には）より明断な定式化を遂行しようとするのである。この「ラディカルな主観論者」というFreedmanの分類は，上の第 2 節，第 3 節，そして第 4 節での論点を考慮したものであり，極めて適切である。しかしFreedmanは，「未知かつ固定」の「存在」を拒否して（自身の合理性に基づいて）定式化を行おうとするこのラディカルな流儀を，結局退けているのである。つまり彼は，ラディカルな主観主義は，「現実には」行き詰まると見ているのである。さらに彼は，Bayesian behaviorの（いわゆるDutch bookを利用した）正当化に言及して，しかも，そのような正当化にかつて彼自身が関ったことを注意して，そのような正当化は「現実には」見掛けほど強い説得力は持ってはおらず，実際，そのような正当化が「現実に」有効となる程にまで多くの賭けを「実際に」為す個人などは，多分いないはずだと判断するのである。

このようにしてFreedmanは，自身の経験と「現実」とを踏まえて，客観主義よりも論理的には一貫しているはずのラディカルな主観主義を退けて，敢えて「自身の」客観主義に立つのである。つまり，彼の客観主義は，「確率」に関する客観論的見解が重い困難を抱えていることを承知した上での客観主義なのであり，恐らくこれは現実主義的な客観主義なのである。さらにまた彼は，頻度論的な解釈などは元来できないデータに対して有意性検定の手順をあてはめて，なんらかの「仮説」を「実証してしまう」というような，広く世間において為されているやり方に対しては，はっきりと拒否する態度を示しているのである。従って彼は，大勢に迎合しない非常にフェアなタイプである。

ところで「古典的な」主観論者だが，これは「通常の」Bayesiansである。つまり彼らは，「未知かつ固定の母数」に対して「事前分布」を導入することから推論や決定を始めるのであり，特に，「コインの投げ上げ」的な状況における「未知固定の」pに対しても同様の流儀を採用するのである。しかし，この小論の冒頭の節で引用したサヴェジ氏の文章が簡潔かつ明断に指摘しているように，彼らが「自身の」主観主義に「徹する」のならば，このようなpの「存在」などは「認められない」はずなのである。

6．おわりに

とにかく，「コインの投げ上げに関する未知固定の確率」は，多くの教科書において，数学的な形式との連関で「さりげなく」導入されているのだが，このような「確率」の「存在」は決して自明ではないのであり，「問いを発する者」は，本来は，学問上も教育上も，この「確率」の近傍で「立ち止まる」べきなのである。しかし実際には，ここで論述した古典的な論点が親切に言及されることは，多くの教科書において，残念ながらついに為され得ないようである。このことは，Bayesian approachを取り扱っている書物においても同様であるらしく，「de Finettiの表現定理」に言及している場合でも，上の第 3 節や第 4 節で述べたような論点を精確に提示することが，どうも回避されているようである。やはり，「古典的な思索」の発掘には，多少の学問的な意義があるのではなかろうか。

2001年 3 月 6 日(火)

参考文献

Braithwaite, R. B., "On unknown probabilities," 1957. この論述は，*Observation and Interpretation in the Philosophy of Physics, With Special Reference to Quantum Mechanics*, edited by S. Körner in collaboration with M. H. L. Pryce, (Proceedings of the Ninth Symposium of the Colston Research Society held in the University of Bristol, April 1st - April 4th, 1957), Dover, New York, 1962, の冒頭に収められている。このDover

版は，*Observation and Interpretation; A Symposium of Philosophers and Physicists*，という標題で，1957年にButterworths Scientific Publications, London, から出版されたものの完全な再版である。

de Finetti, Bruno, "La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives," *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 7, 1-68, 1937. Translated in Kyburg and Smokler(1964, 1980). この論文はHenry E. Kyburg, Jr.,によって仏語から英語へと翻訳されたのだが，その標題は，*Foresights: Its Logical Laws, Its Subjecive Sources*，である。この英訳は，*Breakthroughs in Statistics, Volume I, Foundations and Basic Theory*, edited by Samuel Kotz and Norman L. Johnson, Springer, New York, 1992, にも，134頁から174頁にかけて収められており，その127頁から133頁にR. E. Barlowによる簡略な説明がある。

Freedman, David, "Some issues in the foundation of statistics," *Foundations of Science*, 1, No. 1, 19-39, 1995/96. "Comments on David Freedman's paper," by James Berger, Erich Leo Lehmann, Paul Holland, Clifford Clogg, and Neil Henry, *Foundations of Science*, 1, No. 1, 41-67, 1995/96. "Rejoinder," by David Freedman, *Foundations of Science*, 1, No. 1, 69-83, 1995/96. これらの議論は，*Topics in the Foundation of Statistics*, edited by Bas C. van Fraassen, reprinted from *Foundations of Science*, Volume 1, No. 1, 1995/96, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1997, に収録されている。なお，ここでの1995/96という発行年の表記についてPublishing Editorに問い合わせたのだが，まだ返事が来ない。しかし，実際の発行年は多分1995年であろう。

Galambos, Janos, "Exchangeability," 1982. これは，*Encyclopedia of Statistical Sciences, Volume 2, Classification to Eye Estimate*, Wiley, New York, 1982, の573頁から577頁に収められている項目の一つである。

Hewitt, Edwin, and Leonard Jimmie Savage, "Symmetric measures on Cartesian products," *Transactions of the American Mathematical Society*, 80, 470-501, 1955.

Koch, Giorgio, and Fabio Spizzichino (eds.), *Exchangeability in Probability and Statistics, Proceedings of the International Conference on Exchangeability in Probability and Statistics, Rome, 6th–9th April, 1981, in honour of Professor Bruno de Finetti*, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1982. この冒頭の1頁から6頁にde Finetti自身の短文があり，7頁から20頁にDario Fürstによるde Finettiの思想の簡略な紹介がある。しかしこの論文集は専門的なものである。

Kolmogorov, Andreĭ Nikolaevich, *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd 2, nr. 3, J. Springer, Berlin, 1933. これは言うまでもなく確率論の測度論的基礎を構築した古典である。また，1936年にはG. M. Bavliによるロシア語訳が出ている。この二つの版に基づいて，英訳，*Foundations of the Theory of Probability*, edited by Nathan Morrison, Chelsea, New York, 1950, が出版される。さらにこの英訳の第二版が（やはりChelseaから）1956年に出ているが，その際，A. T. Bharucha-Reidによる追加の文献表及びその簡潔な説明が付け加えられている。また，独語版の邦訳（但し，英語版も参照している）には，コルモゴロフ,A. N.，根本 伸司，一條 洋（よう）訳，『確率論の基礎概念』，東京図書，1969年8月29日，があり，さらにロシア語第二版からの邦訳に，コルモゴロフ,A. H.,根本 伸司訳，『確率論の基礎概念（第二版）』，東京図書，1975年11月28日，がある。

Kyburg, Henry E., Jr., and Howard E. Smokler (eds.), *Studies in Subjective Probability*, Wiley, New York, 1964.

Kyburg, Henry E., Jr., and Howard E. Smokler (eds.), *Studies in Subjective Probability*, Krieger, New York, 1980. このKrieger版はWiley版とはかなり内容が相違するが，de Finetti(1937)の英訳は引き続き収めら

れている。

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1954. *Second Revised Edition*, Dover, New York, 1972. これは「基礎論」であり，統計学へのサヴェジ氏の偉大な貢献である。なお，園(2000年6月）にサヴェジ氏の略伝がある。

石黒　一男，『発散級数論』，森北出版，東京，1977年2月18日。

伊藤 清，『確率論 I』，(これは，岩波講座　基礎数学，解析学(I) vii,『確率論』，を構成する三分冊の冒頭のものである。同講座は全24巻79分冊と索引とから成り，『確率論 I』は同講座の第6回配本の一冊である。)，岩波書店，東京，1976年11月2日。

伊藤　清三，『ルベーグ積分入門』，裳華房，東京，1963年4月25日。この極めて親切な教科書の縮約改訂版とも言うべきものが，伊藤　清三，小松彦三郎編，(但し，執筆者には編者の他に一松　信，柳原　二郎の両氏も加わっている)，『解析学の基礎』，岩波書店，東京，1977年12月6日，のやはり伊藤清三先生による「第2章　測度と積分」である。

内井　惣七，「賭・確率・帰納法——主観主義確率論の基礎——」，『人文学報』(京都大学人文科学研究所)，第37号，1-74，1974年2月。

園　信太郎，「サヴェジ書における objectivistic views 批判について」，『経済学研究』(北海道大学)，第41巻第4号，1(287)-21(307)，1992年3月。この第5節に「基礎論」の第3章第7節への注釈がある。

園　信太郎，「サヴェジ氏の略伝」，『経済学研究』(北海道大学)，第50巻第1号，164(164)-180(180)，2000年6月。

園　信太郎，「客観論的見解の三つの問題点」，『経済学研究』(北海道大学)，第50巻第2号，99(279)-105(285)，2000年9月。

高木　貞治，『解析概論 改訂第三版』，岩波書店，東京，1961年5月27日。この古典的教科書の第一版は1938年7月15日に出ている。

日本数学会編集，『岩波　数学辞典　第3版』，岩波書店，東京，1985年12月10日。