経済学研究 *51−3*
北海道大学 2001. 12

なぜサヴェジ氏は1954年に尤度原理に気づかなかったのか？

園　信太郎

1．ある疑問

サヴェジ氏は彼の「基礎論」，つまり，

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics,* Wiley, New York, 1954. *Second Revised Edition,* Dover, New York, 1972,

の第二版（つまりDover版）の前書の9番目の段落で，第一版を執筆した時点では，彼自身は，いわゆる「尤度原理，likelihood principle」には少しも気づいてはいなかったことを正直に述べているのである。しかし，彼の個人論的な枠組みからすれば尤度原理はBayes' rule（あるいはtheorem）から「恐らくは自動的に」従うはずなので，1954年の時点で彼がこの「原理」に少しも気づいていなかったのは，「あと」から見れば多分意外なことなのである。

所で，一旦尤度原理を認めるのならば，「異常でない」状況においては，観察の「任意停止，optional stopping」に関する良く知られている議論，つまり，「未知固定の母数に関する統計的推論の様式は，その母数に関る観察の反復を停止する際の「停止の様式」とは元来無縁である」という主張を受け入れざるを得なくなるはずである。そこでここでは，「コインの投げ上げ」的な状況に着眼し，しかも「「停止の様式」に関する無縁性」と「尤度原理」との関りに注意しつつ，「なぜ彼は気づかなかったのか」をなんとか推量することとしたいのである。なお以下では，「尤度原理」に関する特別な知識をなんら前提とはしない。

2．コインの投げ上げに関するある状況

「その個人」が「その実験者」の「コインの投げ上げ」を観察するものとする。「そのコイン」は各投げ上げにおいて表か裏かを現すのだが，投げ上げの反復を「いつ」停止するのかは「その実験者」の「気持ち」次第なのである。また「その個人」は，例えば表及び裏に対して各各1及び0を対応させることによって，但しnを正の整数として，1及び0から成る系列$x_i, i=1, 2, \cdots, n,$で1回目からn回目までの投げ上げの実験結果を記録するのであり，さらにまた彼は，「そのコインが表を現す確率」が，「そのコイン」の「プロパティー，property」として「未知ではあっても客観的に定まっている」と見なしてこの「確率」をpと表記すると言う，客観論的な流儀を今の所は採用しているのである。

さて，「その実験者」は「なぜか」丁度n回目の投げ上げまでで実験を停止したとしてみよう。一方，「その個人」は，得られた実験結果$x_i, i=1, 2, \cdots, n,$に基づいて未知固定のpに対する「推論」をなんとか行わなければならないのである。この場合「その個人」は，丁度n回目までで実験を「なぜか」停止した「その実験者」の「気持ち」の内訳を，とにかく知らなければ「ならない」のであろうか。つまり，「その個人」はpに関する「推論」を行う際に，「その実験者」の「気持ちに」多少なりとも「踏み込む」必要があるのであろうか。ここでpは「そのコイン」のプロパティーだとされている。つまり，実現した結果$x_i, i=1, 2, \cdots, n,$は「そのコイン」からのメッセージであり，

「そのコイン」が「語る」には，「自分は1回目でx_1を示した，2回目ではx_2を示した，…，n回目でx_nを示した」ということであり，このような沈黙の「語り」には，「その実験者」の，「なぜか実験を停止したくなる内的な気分」というようなものは多分関りがないことであろう。

所で，プロパティーpに関する「推論」を行おうとする「その個人」は，結果x_i, $i=1, 2, \cdots, n$, が得られる「まえ」に敢えて立ち返ってある問を発するものとしよう。つまり彼は，言わば仮定法的に，「もし仮に，問題の実験が行われる「まえ」に，その実験の結果がこのx_i, $i=1, 2, \cdots, n$, となることの「確率」を問われるのならば，自分はその「確率」をいかにして見積るであろうか」と自問するのである。そこで彼は，「その実験者」が問題の実験を停止する「様式」，つまり「停止の様式」を，Nによって表示するものとする。このNが正の整数nをもたらす場合，問題の実験は丁度n回目の投げ上げまでで停止するのだとする。（なお本来は，Nの値が0や∞の場合，つまり実験が結局行われない場合や，投げ上げがいつまでも停止しない場合をも考慮すべきであろうが，議論を煩雑にしないために正の整数のみを考える。）このNがもたらす値，つまり「停止の時刻」は，恐らくは，（観察されるであろう）実験結果の系列と「その実験者」の「内的な状態」θとに依存して，しかも一般にはランダムに，「定まる」であろう。例えば，「その実験者」は，「裏の数がどうも多すぎるな」とか，「どうもかなり腹が空いてきたぞ」とか，「ここで停止するとあの仮説をかなりの有意水準で棄却できそうだ」とか，「なぜかは不明だが今日は疲れがひどいな」とか，「向こうの山の上を烏らしきものが二三羽飛んで行くのが，この自分にはなぜか「見えてしまう」のだ」とか，「昨日振ったあの釆は，なぜか一の目を出した」などという事柄を「勘案して」，「停止の時刻」を「決める」のである。

そこでこの仮定法的な「確率」，つまり「実験結果x_i, $i=1, 2, \cdots, n$, がもたらされる（pに依存している）確率」だが，より詳しく表せば，「Nが「停止の時刻」nをもたらし，しかもn回目までの投げ上げの結果がx_i, $i=1, 2, \cdots, n$, となる，（pに依存している）確率」となる。これは乗法法則によって，「n回目までの投げ上げの結果がx_i, $i=1, 2, \cdots, n$, となる（pに依存している）確率」と「n回目までの投げ上げの結果はx_i, $i=1, 2, \cdots, n$, であるという条件が与えられている場合の，Nが「停止の時刻」nをもたらす条件つき確率」との積である。なおここで後者の「条件つき確率」は，「停止の様式」Nが，（観察されるであろう）実験結果の系列「のみ」に依存していると想定されるのならば，正にx_i, $i=1, 2, \cdots, n$, が実際に「得られた」のであるから，値が1となるはずである。しかしこの「条件つき確率」は，一般には，「その実験者」の「内的な状態」θに依存するはずであろう。また前者の「確率」は，「通常の流儀」に従うのならば，但し，x_i, $i=1, 2, \cdots, n$, の内の表及び裏の総数を各各a及びbとして，$p^a(1-p)^b$と（「その個人」によって）見積られるはずなのである。

さらにここで，「その個人」は「主観確率，subjective probability」の「存在」を「自覚している」ものとするのだが，だが彼は，「その実験者」の「内的な状態」θに対する自身の主観確率を「平然と」導入してしまう勇気が「なぜか」湧いてこないのであり，つまり結局彼は，pに関する「事前の」主観確率Mのみを導入するのである。なお，このMは単位区間Iの（位相的な）Borel集合族を定義域とする確率測度である。そこで上の議論により，またBayes' ruleにより，問題の実験結果が与えられている場合のpに関する「事後の」主観確率は，少しsymbolicだが，次の（＊）で与えられることとなる。

$$(*)\quad M_\theta(dp|x_i, i=1,\cdots,n, N=n)=\frac{p^a(1-p)^b \mathrm{Prob}_{\theta,p}(N=n|x_i,i=1,\cdots,n)M(dp)}{\int_I p^a(1-p)^b \mathrm{Prob}_{\theta,p}(N=n|x_i,i=1,\cdots,n)M(dp)}.$$

ここで,「「停止の様式」Nに関るランダムネスは,（観察されるであろう）実験結果の系列及び「その実験者」の「内的な状態」θのみに依存し,「そのコイン」のプロパティーpとは無縁である」という，言わば「無縁性の仮定」を導入して見よう。すると,（*）の右辺の分子のProbの下付き添字はθのみとなり，一方分母のProbは積分記号の外に出て，結局分母分子でProbが打ち消し合い，次の（**）が得られることとなる。

$$(**)\quad M(dp\,|\,x_i, i=1,\cdots,n, N=n)=\frac{p^a(1-p)^b M(dp)}{\int_I p^a(1-p)^b M(dp)}.$$

所で「無縁性の仮定」だが，これは,「「その実験者」の「停止の様式」は，実験結果と彼の「内的な状態」とが既に与えられれば,「そのコイン」の未知固定のプロパティーからはさらなる影響を受け得ない」という,「その個人」が導入するであろう「仮定」である。これは,「そのコイン」の未知固定のプロパティーと「その実験者」の「内的な状態」との言わば「分離の可能性」を主張するものであり,「異常なもの」ではないはずである。だが，式（**）を見てみると，実験結果が与えられている場合の（pに関する）「事後の」主観確率は「停止の様式」Nには無縁であり，従ってpに関する「推論」は,「停止の様式」Nには関りのない様式で遂行されることとなる。しかもここで実験結果$x_i, i=1, 2, \cdots, n$, は，$p^a(1-p)^b$という「pの関数」のみを通して「推論」に関っているのである。この「pの関数」は，実験結果が与えられている場合のpの「尤度関数, likelihood function」と呼ばれるものであり，少なくともこの状況における「その個人」に対しては,「データがもたらす（未知固定の母数に関する）「情報」は全てその母数の尤度関数によって表現されており，二つの尤度関数が事後的に「一致する」場合には，データを取得するための様式がたとえ異なっていても，その母数に関する統計的推論の様式は一致して当然である」という,「尤度原理」の主張が表面上は通用していることとなる。

だが，ここでのpの「尤度関数」は，問題の実験結果が得られる「まえ」に立ち返って，その実験結果が「得られるであろう確率」を考察することによって，従って，言わば仮定法的な「確率」を経由して，定められたものなのであり，このような「尤度関数」が,「なぜ」実験結果が得られた「あと」の「推論」に関って来るのかは,「尤度関数」の形式的な定義からは明白ではないはずである。つまりむしろ,「データによる条件づけ」という操作を正当かつ明晰に定式化している「主観確率の理論」の方が「本質」で,「尤度原理」の主張は多分その副産物と見なすべきなのではなかろうか。

所で,「その個人」がBayesianの流儀により徹しようとする場合には事態はどうなるであろうか。結局彼は,「その実験者」の「内的な状態」θが属する母数空間Θを構築し，$I\times\Theta$上に自身の「事前の」主観確率$P(d(p,\theta))$を導入することとなるのである。一方，

$$P_{p,\theta}(x_1,\cdots,x_n,N=n)=$$
$$P_{p,\theta}(x_1,\cdots,x_n)P_{p,\theta}(N=n\,|\,x_1,\cdots,x_n)$$

であり，ここで「通常の流儀」に従えば，

$$P_{p,\theta}(x_1,\cdots,x_n)=p^a(1-p)^b$$

である。従ってBayes'ruleにより,「事後の」主観確率,

$$P(d(p,\theta)\mid x_1,\cdots,x_n,N=n)=$$
$$\frac{P(d(p,\theta))p^a(1-p)^b P_{p,\theta}(N=n\mid x_1,\cdots,x_n)}{\int_{I\times\Theta}P(d(p,\theta))p^a(1-p)^b P_{p,\theta}(N=n\mid x_1,\cdots,x_n)}$$

が得られる。ここで「事前の」独立性の仮定，つまり，

$$P(d(p,\theta))=P(dp)P(d\theta)$$

を導入する。するとFubiniの定理によって，

$$P(J\times\Theta\mid x_1,\cdots,x_n,N=n)=$$
$$\frac{\int_J P(dp)p^a(1-p)^b\int_\Theta P(d\theta)P_{p,\theta}(N=n|x_1,\cdots,x_n)}{\int_I P(dp)p^a(1-p)^b\int_\Theta P(d\theta)P_{p,\theta}(N=n|x_1,\cdots,x_n)}$$

が得られる。(なお，ここでJは単位区間Iに含まれるBorel集合である。) 従って，「無縁性の仮定」を利用すると，Θ上の積分が打ち消し合うので，結局，

$$P(J\times\Theta\mid x_1,\cdots,x_n,N=n)=\frac{\int_J P(dp)p^a(1-p)^b}{\int_I P(dp)p^a(1-p)^b}$$

となり，(＊＊) と同様の結果が得られることとなる。しかしここで，「無縁性の仮定」のみでなく「事前の」独立性の仮定が導入されていることは，恐らくは注意すべきである。

3．「無縁性の仮定」に関るある注意

上の節で (＊) から (＊＊) を導く際に導入した「仮定」は「異常なもの」ではないはずだが，しかし，これが「破れる」とは例えばいかなる状況においてであろうか。もし「その実験者」が，「そのコイン」の外観のみでなく，その手触りや捕えた際の「感覚」から，問題の未知固定のプロパティーpを，言わば (底知れぬ)「職人の技量」で「感得する」タイプならば，彼は，得られる表裏の系列における表の相対頻度がほとんど「そのp」を指し示しているという状況において，またその状況においてのみ，「これだな」と，自分の仕事を「停止する」かもしれないのである。すると，但し，「その個人」は「その実験者」がいかなるタイプかを良く承知しているとしてだが，上の (＊) において，Probの下付き添字pは落とせないから，「推論」に関する「「停止の様式」の無縁性」は従わないこととなる。つまりこの場合，「投げ上げを「停止する」」という「その実験者」の行為そのものが，プロパティーpに「直接的に」関っており，教科書的な$p^a(1-p)^b$はpの「尤度関数」としての「資格」を失ってしまうのである。一方「その個人」は，(＊) からわかるように，但し，彼の主観確率Mが「極端ではない」としてだが，このような多分「日常的とは限らない」状況においては，「得られた」表裏の系列から算出される表の「その」相対頻度に「質量」が「ほとんど」集中している，「事後の」主観確率を保持するに至るのである。

4．「停止時刻」の通常の「定義」について

ここで今日通常為されている「停止時刻，stopping time」の「定義」について，簡略に言及しておきたい。但し，一般的な「定義」ではなしに，上で議論した「コインの投げ上げ」的な状況に話しを限定する。まず0及び1から成る無限的な系列の全体を標本空間Ωとするのだが，結局このΩは，正の整数の全体$\mathbf{N}$から集合$\{0,1\}$への写像の全体である。さらに，Ωの要素ωと正の整数nとに対して，ωにその第n番目の項を，つまり第n座標を対応させる写像をX_nとする。また，0か1かであるxに対して集合$\{X_n=x\}=\{\omega\in\Omega\mid X_n(\omega)=x\}$を考えることとする。各正の整数$n$及び各$x\in\{0,1\}$に対して定まるこのような集合の全体を含む$\Omega$上の最小の完全加法族を$\mathfrak{F}_\infty$とする。また，$n$以下の各正の整数$i$及び各$x\in\{0,1\}$に対して定まる集合$\{X_i=x\}$の全体を含む$\Omega$上の最小の完全加法族を$\mathfrak{F}_n$とする。また，$\mathfrak{F}_0=\{\emptyset,\Omega\}$とする。ここで完全加法族の系列$\mathfrak{F}_n$, $n\in\mathbf{N}\cup\{0\}$，は言わば「増大系，increasing family」となっている。ここで写像の系列 $X_n, n \in \mathbf{N}$，を可測空間（$\Omega, \mathfrak{F}_\infty$）上の確率変数列と見なすと，増大系の各 $\mathfrak{F}_n$は，「n 以下の各正の整数 i に対して，X_i を可測とする」最小の（$\mathfrak{F}_\infty$の部分）完全加法族であり，これはつまり $\mathfrak{F}_n = \mathfrak{F}_\infty(X_i, i=1, \cdots, n)$ ということである。

このような状況で「停止時刻」が次の様に「定義」される。つまり，τ を Ω から $\mathbf{N} \cup \{0\}$ への写像とする。この場合，τ が停止時刻であるとは,「任意の $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対して，$\{\tau \leq n\} \in \mathfrak{F}_n$」ということである。なおここでは，取り得る「時刻」の全体 $\mathbf{N} \cup \{0\}$ が可算集合であるので，この「定義」は,「任意の $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ に対して，$\{\tau = n\} \in \mathfrak{F}_n$」と同値となる。このような「定義」によれば，第2節の4番目の段落で注意したように,「もたらされた実験結果が与えられている場合の,「停止の様式」に関する条件つき確率」が値1を取ることとなるので,（＊＊）が「自動的に」従い，結局,「未知固定の母数 p に関する統計的推論の様式は,「停止の様式」には無縁であり，得られた実験結果は p の「尤度関数」$p^a(1-p)^b$ を通してのみこの推論に関る」ということとなる。しかし，第2節で議論したように,「その実験者」の「停止の様式」に関る議論は，この「定義」が把捉している「実験結果の系列のみに「その実験者」の「停止の様式」は依存する」という状況よりも，より一般的で多分「微妙な」論点に関り得るであろう。(なお，伊藤清（1978）の第5章第4節，240頁から248頁，に「停止時刻」の「定義」やその基本的な性質に関する議論がある。また,『岩波 数学辞典 第3版』の「42 確率過程」の「B. 完全加法族の増大族」にも「停止時刻」の説明がある。但し，この 42B という項目の107頁の下から4行目で，記号 A と記号列 $\{\tau \leq t\}$ との間に記号 $\subset$ が入っているが，これは $\cap$ に置き換えるべきである。)

5．なぜ気づかなかったのか…

「尤度原理」の論理的な「正当化」は Birnbaum（1962）によって為されたとするのが通常の見方であるようだが，サヴェジ氏が「基礎論」の Dover 版の前書で指摘しているように，この「原理」そのものは Barnard（1947）や Fisher（1955）において既に指摘されているのである。一方筆者のこの論述では,「コインの投げ上げ」的な状況に着眼することによって,「その実験者」の（自分自身が行っている「実験」に対する）「停止の様式」との関りで,「尤度原理」が（「形」を成す「まえ」の状況から）なんとか「浮き出てくる」有様を捕えようとしたのである。すると第2節で「見た」ように,「無縁性の仮定」を経由することによって,「「停止の様式」に関する無縁性」が従い,（＊＊）に見られるように,「尤度関数」のみを通して「得られた」データが「推論」に関るという,「尤度原理」の主張が「おもてに」出てくるのである。また,「無縁性の仮定」は「異常なもの」では決してないのだが，第3節で注意したように，この「仮定」が「破れる」状況も想定「できる」のであり，しかもこのような「想定」が,「主観確率の理論」において「あらかじめ」不合理であるとして,「排除される」というわけでは多分ないのである。つまり，言わば「馴染み」の「尤度関数」が,「尤度関数」としての「資格」を失う状況が,「主観確率の理論」においては容認され得るわけである。しかも，第2節の末尾から二番目の段落で指摘したように,「馴染み」の「尤度関数」は,「その実験結果」が得られる「まえ」の状況に立ち返って,「その実験結果」が「得られるであろう確率」を経由して導入されるのであり，このような言わば仮定法的な「確率」が,「その実験結果」が得られた「あと」の「推論」に「なぜ」関るのかは，決して自明ではないのである。

結局，サヴェジ氏が「基礎論」での自身の議論に忠実であるのならば，つまり，彼自身の「個人的確率の理論」との整合性を保つように

自身の思索を展開しているのならば，彼は，「「停止の様式」に関する（「推論」の）無縁性」を，「馴染み」の「尤度関数」との関りで，「個人的確率の理論」の前提である公準系と同等の説得力を持つ「主張」として自身が採用することには，明白には意識せずとも，少なくとも潜在的な「躊躇」を感じ「得る」のである。しかも，「馴染み」の「尤度関数」が利用され得る状況においても，「その実験結果」が得られた「あと」の「推論」に「なぜ」その「尤度関数」が利用されることとなるのかは，その「尤度関数」の「定義」からは明白ではなく，結局，「得られるであろう実験結果を表す変数」を「実際に「得られた」実験結果で置き換える」という操作の根拠が不明であり，むしろサヴェジ氏の公準系に基づいて明晰に定式化される「事象による条件づけ操作」及び明瞭に演繹されるBayes' ruleとによって，「馴染み」の「尤度関数」の「尤度原理的な利用」が「ある仮定」の下で正当化されるわけである。つまり，「馴染み」の「尤度関数」の「尤度原理的な利用」という事柄は，サヴェジ氏の枠組みからすれば，言わば「相対的な」副産物であり，彼が自身の議論の「本質」を重視する限りにおいては，これに「気づかない」としても多分それ程意外ではないのである。

やはり，彼が「尤度原理」に「気づかなかった」のは，「自己」の思索に（恐ろしい程に）忠実であったからなのではなかろうか。

6．末尾の注意

ここでは「そのコイン」の「未知固定の」プロパティーとして「そのコインが表を現す確率」pを捕えたのであり，客観論的にはこのような流儀には多分異論はないはずである。しかし，このような「未知固定の」確率が「存在する」とは結局いかなることなのかという「問い」を（「なぜ」か）発してしまうと，このpの「存在」が少しも自明でないことが「わかって来る」のである。しかも個人論的な立場に徹底するのならば，サヴェジ氏が（「基礎論」の第3章第7節，50頁から51頁にかけての，冒頭の段落で）明白に指摘しているように，「未知固定の」確率の「存在」などは「正式には」認められないはずなのである。（なお，このような「未知かつ固定されている確率」に関する「重い」論点については，園（2001）を通読して頂ければ幸いである。）だがここでは，客観主義と主観主義との間にあるラディカルな争点を避けて，「潜在的な」客体として「p」を導入したわけなのである。しかも「いま」から見れば，このような「p」の導入は第3節で言及した「その実験者」への多分「布石」であった。つまり，「その実験者」は，客体としての「p」を（底知れぬ）「職人の技量」において（つまり，自身の「感性」において）「捕える」のである。このような「感性」の形成は，自身の振る舞いや対象となる諸事物の（冷徹な）「客観」性を（恐ろしい程の）生真面目さで追求して行く「おこない」へと徹している「その実験者」にとっては，恐らくは幻影ではないはずである。

「客観」性を徹底的に追求して行く「その実験者」において，極めて高純度の「感性的な知」が「宿る」とすれば，客観主義の窮極に主観主義を「見る」としても，それほど異常ではあるまい。

2001年9月12日（水）

参考文献

Barnard, George A., "A review of 'Sequential Analysis' by Abraham Wald," *Journal of the American Statistical Association*, 42, 658-664, 1947.

Birnbaum, Allan, "On the foundations of statistical inference," *Journal of the American Statistical Association*, 57, 269-306, 1962. この論文の後に，307頁から326頁にかけてDiscussionが収められている。討論者の名前を順に挙げるとL. J. Savage（つまりサヴェジ氏），George Barnard（Barnardは討論の場にはいなかったのだが，自身のコメントを録音したものを提出

した), Jerome Cornfield, Irwin Bross, George E. P. Box, I. J. Good (Goodのコメントを録音したものが討論の場で拝聴された), D. V. Lindley (Lindley自身は欠席していたのだが，彼の議論はColin L. Mallowsによって読み上げられた), C. W. Clunies-Ross, John W. Pratt, Howard Levene, Thomas Goldman, A. P. Dempster, Oscar Kempthorne (Kempthorneは出席できなかったが，討論の後で彼の文章がBirnbaum及び雑誌編集者に伝えられた)，そしてAllan Birnbaum自身の返答である。なおサヴェジ氏は，このBirnbaumの論文を極めて重要なものと見ており，これによって，個人的確率に基づくBayesian statisticsへの人人の支持が増大すると期待していたようである。さらにまたこのBirnbaumの論文は，*Breakthroughs in Statistics, Volume I, Foundations and Basic Theory*, edited by Samuel Kotz and Norman L. Johnson, Springer, New York, 1992, にも，478頁から518頁にかけて収められており，その前の461頁から477頁には，Jan F. Bjørnstadによる解説がある。さらに，*Synthese, an international journal for epistemology, methodology and philosophy of science, Volume 36*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands, 1977, は，*Foundations of Probability and Statistics*という標題の下に編集されたBirnbaumを記念する論文集だが，ある悲劇的な事情により結果として彼の死後に出版されたのである。なお，この論文集の*No. 1*の冒頭の5頁から13頁にはRonald N. Giereによる“Allan Birnbaum's conception of statistical evidence,”という論文が収められており，15頁から17頁には，やはりGiereによるPublications by Allan Birnbaumがある。さらにこれに続いて，19頁から49頁に，Birnbaum自身による，“The Neyman-Pearson theory as decision theory, and as inference theory; with a criticism of the Lindley-Savage argument for Bayesian theory,”という論文が収められている。このGiereの論文の第2節，8頁，冒頭の段落によれば，Birnbaumは1964年の段階で既に，「尤度原理」がan adequate interpretation of the concept of statistical evidenceを提供するとは，見なしていなかったとのことであり，結局彼は，「尤度原理」とは別の道を歩んだのである。また，Lindley-Savage argumentについては，園 (1994) の第4節，182頁左から186頁右，を参照して頂ければ幸いである。なおBirnbaumは，1923年5月27日に米国California州のSan Franciscoで生まれて，1976年7月1日に英国のLondonで死去している。(Johnson and Kotz (1997) の83頁から85頁にかけての (JohnsonかKotzかの少なくとも一方による) Birnbaum, Allan, の項目の冒頭の段落の末尾の文によると，His tragic, and apparently self-inflicted, death in 1976となっている。)

Fisher, Ronald Aylmer, “Statistical methods and scientific induction,” *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 17, 69-78, 1955.

Johnson, Norman L., and Samuel Kotz (eds.), *Leading Personalities in Statistical Sciences: from the seventeenth century to the present*, Wiley, New York, 1997.

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1954. *Second Revised Edition*, Dover, New York, 1972. これは「基礎論」であり，統計学へのサヴェジ氏の偉大な貢献である。なお，園 (2000年6月) にサヴェジ氏の略伝がある。

伊藤　清，『確率論 III』，岩波書店，東京，1978年5月29日。これは，岩波講座 基礎数学，解析学 (I) vii，『確率論』，を構成する三分冊の最後のものである。同講座は全24巻79分冊と索引とから成り，『確率論III』は同講座の第19回配本の一冊である。なお，やはり伊藤清教授による『確率論I』及び『確率論II』は，各各1976年11月2日の第6回配本の一冊及び1977年6月2日の第12回配本の一冊として出ている。

園　信太郎，「サヴェジ，レオナルド ジミィ，による1961年の講義における個人的確率について」，第43巻第4号，176 (603)-187 (613)，1994年3月。これは，サヴェジ氏が，個人的確率に対する限界代替率的な捕え方に基づいて個人的確率の概念をわかりやすく説明してい

る講演への，さらなる注釈である。なお，「レオナルド」は「レナード」とすべきであったと筆者は反省している。

園　信太郎，「サヴェジ氏の略伝」，『経済学研究』（北海道大学），第50巻第1号，164（164)-180（180），2000年6月。

園　信太郎，「コインの投げ上げに関する未知固定の確率について」，『経済学研究』（北海道大学），第51巻第1号，37（37)-55（55），2001年6月。

日本数学会編集，『岩波 数学辞典 第3版』，岩波書店，東京，1985年12月10日。