経済学研究 51－3
北海道大学 2001. 12

離散最適化に於ける弱双対定理

田 中 嘉 浩

1．序

数理計画（Mathematical Programming）はKarush-Kuhn-Tucker［11］[1]条件の発見以来理論・解法の両面からの研究が活発になった分野であり，工学・理学・経済学への応用が幅広く為されている。特に経済学に於いては，ミクロ経済理論の最小化・最大化問題を扱う静学分析の基盤を与えるものであり，資本回収制約の有る利潤最大化問題に対するAverch-Johnson仮説［1］の導出等の例で分る様に多くの制約付きモデルの解析や，近年ではH. Markowitz［14］のポートフォリオ理論の様に理論・解法の両面に数理計画が用いられている例もある。ともすれば解法研究として経営科学の枠内でしか考えられない数理計画の適用範囲は意外に幅広い。

数理計画は理論では関数解析のHahn-Banach定理からくる分離定理を基礎にした凸解析を中心に双対理論が考えられているが，ラグランジュ双対問題が考えられており，解が主問題の実行可能解になっていれば双対性が言える[2]ことが理論や解法の基礎となっている。しかしながら非凸計画に対しては一般には双対ギャップが存在し，その解消の為に拡張ラグランジュ関数等が考案されてはいるものの，大域的最適解に関する間に合わせの理論の感を拭えない。一方変数が離散の場合の整数計画では，整数線形計画でさえ双対ギャップが存在して，双対理論が作られていないのが現状である。

ところで数理計画の最近の発展は，理論面では非滑関数の最適化（nonsmooth optimization）や半正定値計画（semidefinite programming）等一般化の方向に進んできているが，線形計画に対する多項式時間の解法［10］［8］が発見されて以来，理論・解法の両面から変数の連続性，離散性の境界を究明しようとする研究方向が活発になってきている。

一方，ミクロ経済学に於いて新古典派経済学以降の一般の理論は，離散変数を巨視的視点で連続（かつ関数を微分可能）と近似して構成されているものであるが，不可分財や寡占（oligopoly）を扱うのに離散最適化や非滑最適化の理論を適用する厳密化の方向もこれから重視されていくであろう。

離散最適化の標準的枠組みの整数線形計画に於いて代理（surrogate）双対緩和はH.J. Greenberg and W.P. Pierskalla［5］に依る提案以来，特に分枝限定法等の解法のステップでラグランジュ双対緩和よりきつい下界値を与え，制約を扱い易い等の観点で従来のラグランジュ双対緩和と共に解法面からは有望視され，最大被覆問題等の実践的問題への応用［3］もなされてきている。

しかしながら代理双対緩和の理論的性質はまだ十分に述べられておらず，例えばB. Ram and M.H. Karwan［19］には混合整数計画問題に於いて代理（surrogate）双対ギャップの存在が示されたに過ぎない。

本稿では整数計画に既に代理双対ギャップが

1）W. Karushの修士論文が1939年で最初だが後にH.W. KuhnとT.W. Tuckerが再発見している。

2）この場合正にKarush-Kuhn-Tucker条件になる。

存在することと，著者に依る代理双対ギャップやラグランジュ双対ギャップが存在しない為の必要十分条件の導出，及び混合整数計画への拡張結果について述べる。最後に一般の離散計画に対する双対理論を中心とした最近の話題や展望について述べる。

2．準　備

1982年のACMチューリング賞講演で，S.A. Cook教授が「計算量理論概説」(An overview of computational complexity) という題目の講演を行ない，計算量[3]の定義から始って，クラスPとNP完全という概念が導入されて以来，従来の暗中模索のアルゴリズム研究方向に対して大きな指針を与え，それ以来毎年非常に多くのアルゴリズム関係論文が計算量の短縮や，PとNPの狭間での実践的アルゴリズム（例えば確率アルゴリズム）或いは数学的構造の探求に向けて外国論文誌や国際会議に量産されている。L.G. Khachian［10］やN. Karmarkar［8］の線形計画の多項式時間アルゴリズムもそうした流れの中で生まれたものであり，そうした組合せ多面体の端点を反復法で経由していく組合せ要素を排せない方法ではない内点法で，それ迄計算量の爆発を病的な例では省けないとされていた線形計画法に良い見通しを与え，線形から凸等へ問題を拡張する方向や離散計画自体の見通しにも強い影響を与えている。

次に計算量やP，NPの概念を簡単に説明する。

計算量：アルゴリズム[4]の計算量が$k(n)$とは，問題のサイズnのどんな入力に対しても必ずそのアルゴリズムが$k(n)$時間以内に停止する，ということである。

クラスP：$k(n)$が多項式のアルゴリズムが存在する時に問題はクラスPに属する，と言う。クラスNCを含む。

クラスNP：多項式時間で終了する非決定性アルゴリズムが存在する時に問題はクラスNPに属する，と言う。NPのどの問題も問題C_0に多項式時間で帰着可能な時にC_0は**NP完全**（NP Complete）である，と言う。NP完全な問題はCook自身に依って証明された充足可能性問題を始め，

- 充足可能性問題（SAT）
- ナップザック問題
- 整数計画問題
- ハミルトン閉路問題
- 最長路問題
- 3彩色問題
- 最大クリーク問題

等々のリストが得られている。

クラスco-NP：クラスNPの判定問題の補集合の問題がクラスco-NPである。例えば「最長路でない」ことを判定する問題はco-NPである。

クラスPやクラスNPはより複雑な問題PSPACEに全て属する。P≠NPと信じられてはいるが，まだ証明されておらず，その計算機科学の重大問題に数学の21世紀に解決されるべき問題の1つとして懸賞も掛けられている[5]。

3）実際は、Hartmanis, Stearns［6］らに依って既に基礎付けられている。

4）Hilbertの第10問題（後に否定的に解決された）を契機にアルゴリズムの厳密な定義がTuring等に依ってなされた。

5）Clay数学研究所が他のポアンカレ予想等の計7つの数学の未解決問題リストと共に各々100万ドルの賞金を公表している。

3．整数線形計画問題に対する弱双対定理

一般の整数線形計画問題は次の様に述べられる：

$$(P)\quad \text{minimize}\quad c^T x$$
$$\text{subject to}\quad Ax \geq b,\quad x \in S,$$
$$x \in \mathbb{Z}^n_+,$$

但し，A は $m \times n$ 有理数行列，b，c は適当な次元の有理数ベクトル，$S=\{x \geq 0 | Gx \geq h$，S は有界$\}$，ここで G は $k \times n$ 有理数行列，h は $k \times 1$ 有理数ベクトル，とする。我々は病的な例外を除外する為に本稿では問題 (P) は実行可能であると仮定する。

$\mu \geq 0$ に関する問題(P) の**代理制約緩和** (surrogate constraint relaxation) は，

$$(P^\mu)\quad \text{minimize}\quad c^T x$$
$$\text{subject to}\quad \mu^T(b-Ax) \leq 0,\quad x \in S,$$
$$x \in \mathbb{Z}^n_+,$$

と定義され，対応する**代理双対** (surrogate dual) は，

$$(D_s)\ \max_{\mu \geq 0}\{v(P^\mu)\},$$

となる。

ラグランジュ緩和 (Lagrangian relaxation) は，

$$(P_\lambda)\quad \text{minimize}\quad c^T x + \lambda^T(b-Ax)$$
$$\text{subject to}\quad x \in S,$$
$$x \in \mathbb{Z}^n_+,$$

と定義され，対応する**ラグランジュ双対** (Lagrangian dual) は，

$$(D_L)\ \max_{\lambda \geq 0}\{v(P_\lambda)\},$$

となる。

問題 (P^μ) に於いて整数 x_i を $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_N}$ ($x_{i_1}, \cdots, x_{i_N}$ は 1 又は 0) と通常の方法で 2 進数桁変換するとナップザック問題になるので，問題 (P^μ) は NP 完全 (NP-Complete) 問題に属する。

上の問題の間に次の関係 (cf. [18]) が成立する。

$$v(D_L) \leq v(D_S) \leq v(P). \qquad (1)$$

次の例題を考えよう。

例

$$(P)\quad \text{maximize}\quad x_1 + 2x_2$$
$$\text{subject to}\quad 3x_1 + 2x_2 \leq 9,$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 8,$$
$$0 \leq x_1,\ x_2 \leq 5,\ x_1, x_2 \text{ は整数}.$$

最適解は $x^* = \{(0,2)^T, (2,1)^T\}$，$v(P)=4$ である。一方，代理双対解とラグランジュ双対解は各々 $x^*_S = \{(1,2)^T, (3,1)^T, (5,0)^T\}, v(P^\mu)=5$，及び $x^*_\lambda = \{S\text{内の整数点}\}, v(P_\lambda)=5$，であり，B. Ram and M.H. Karwan [19] の主張と違って，整数計画問題に於いてさえ双対ギャップがあることを例示している。

先に進む前に，我々は問題 (P) の線形緩和問題を，

$$(\bar{P})\quad \text{minimize}\quad c^T x$$
$$\text{subject to}\quad Ax \geq b,\quad x \in S,$$
$$x \in \mathbb{R}^n_+,$$

その解を $\bar{x}$ とする。

次の定理を確立できる。

定理 1　$\bar{x} \notin \text{bdry}\ S$ を仮定する。その時，問題 (P) と問題 (D_S) の間に双対ギャップ，即ち，

$$v(D_S) < v(P) \qquad (2)$$

となる必要十分条件は離散集合 $D=\{x | c^T\bar{x}\} \leq$

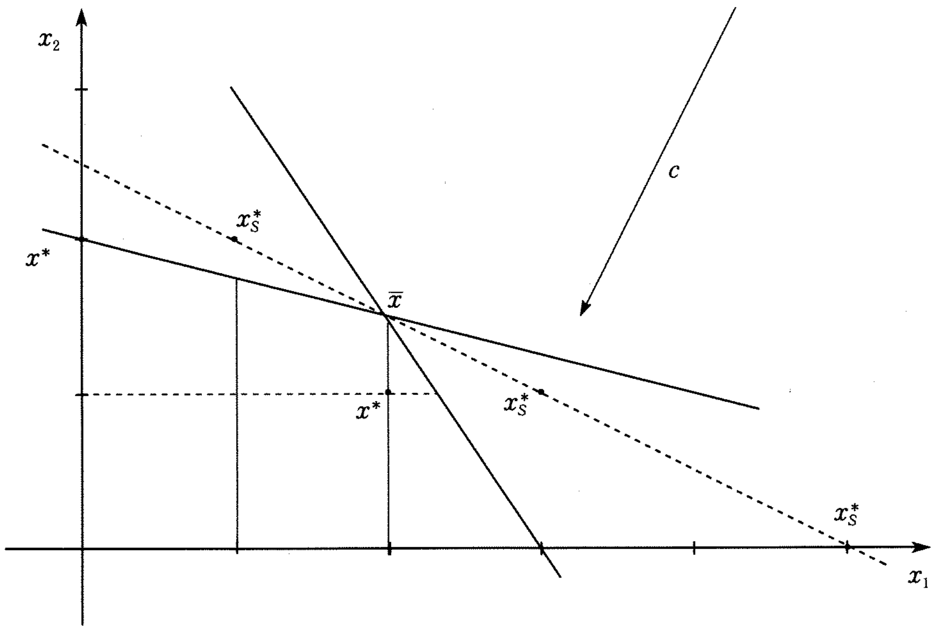

図１：例のグラフ表示

$c^Tx<c^Tx*,\ x\in S\}$ が非空であること，である。

［証明］問題 $(\overline{P})$ に Kuhn-Tucker 条件を適用する。

$$c-A^T\overline{\mu}=0,$$
$$\overline{\mu}\geq 0,\quad A\overline{x}\geq b\quad \overline{\mu}^T(b-A\overline{x})=0.$$

その時，

$$c^T\overline{x}=\overline{\mu}^T\ A\overline{x}=\overline{\mu}^Tb,$$

が成立する。

問題 (Ds) に対して $\mu\neq k\overline{\mu},\ k>0$ と $x\in\{x|\ \mu^T(b-Ax)=0\}$ を取ると，μ^TA と $\overline{\mu}^TA$ の間の為す角 γ は $0<\gamma<\pi$ となるので，$\overline{\mu}^TA$ と $x-\overline{x}$ の間の為す角は $-\frac{\pi}{2}<|\frac{\pi}{2}-\gamma|<\frac{\pi}{2}$ となる。

この時

$$c^Tx-c^T\overline{x}=\overline{\mu}^TA(x-\overline{x})$$
$$=|\overline{\mu}^TA||x-\overline{x}|\cos|\frac{\pi}{2}-\gamma|>0,$$

となるがこれは $\overline{x}$ の最適性を示している。

だから，問題 (Ds) の解で $\mu=\overline{\mu}$ を取ると，$c^T=\overline{\mu}^TA$ となり，$\overline{\mu}^T(b-Ax)=c^T\overline{x}-c^Tx$ だから，問題 (Ds) は次の問題によって決定される。

$$(P^{\overline{\mu}})\quad \text{minimize}\quad c^Tx$$
$$\text{subject to}\quad c^T\overline{x}-c^Tx\leq 0,\quad x\in S,$$
$$x\in\mathbb{Z}^n_+,$$

$D\neq\phi$ ならば x は問題 (Ds) で実行可能なので，$c^Tx<c^Tx^*$ となる。

逆に，(Ds) の実行可能解が $c^Tx<c^Tx^*$ を満たすならば，$D\neq\phi$ が保証される。 ∎

問題 (P) の許容領域を C とする。その時 C が凸多面体になっていることは明らかである。

bdry C を C の境界とし，$N_C(x)$ を C の x でも極錐（normal cone）(cf. [20]）と言う。

命題 1

$$v(D_L)=\min\{cx|Ax\geq b,\ x\in\text{conv } S\} \quad (3)$$

［証　明］［17］Theorem 6.2 の系と言えるが一応証明を記す。

$$\begin{aligned} w_L(\lambda) &= \min_{x\in S}(c-\lambda A)x+\lambda b \\ &= \min_{x\in \text{CONV } S}(c-\lambda A)x+\lambda b \\ &= \min_{x\in \text{CONV } S}\{cx+\lambda(b-Ax)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(D_L) &= \max_{\lambda\geq 0} w_L(\lambda) \\ &= \max_{\lambda\geq 0}\ \min_{x\in \text{CONV } S}\{cx+\lambda(b-Ax)\} \end{aligned}$$

$S=\phi$ ならば，min の部分が任意の λ に対して ∞ になる。よって，$v(D_L)=\infty$。
$S\neq\phi$ ならば，端点を $\{x^k\in\mathbb{R}^n_+|k\in K\}$，極線 (extreme rays) を $\{r^j\in\mathbb{R}^n_+|j\in J\}$ とする。

$$\min_{x\in \text{CONV } S}\{cx+\lambda(b-Ax)\}$$
$$=\begin{cases} -\infty \ \text{if } (c-\lambda A)r_j<0, & \exists j\in J \\ cx^K+\lambda(b-Ax^k), & \exists k\in K \ \text{otherwise.}\end{cases}$$

故に，

$$\begin{aligned} v(D_L) &= \max_\lambda\{\min_{k\in K} cx^k+\lambda(b-Ax^k)\} \\ &\quad \text{sub. to } (c-\lambda A)r^j\geq 0, \text{ for } j\in J, \\ &\quad \lambda\geq 0, \end{aligned}$$

書き直して，

$$\begin{aligned} v(D_L) &= \max_\lambda\ \eta \\ &\quad \text{sub. to } \eta+\lambda(Ax^k-b)\leq cx^k, \text{for } k\in K, \\ &\quad \lambda Ar^j\leq cr^j, \text{ for } j\in J, \\ &\quad \lambda\geq 0. \end{aligned}$$

双対性より，

$$\begin{aligned} v(D_L) &= \min_\lambda \quad c(\textstyle\sum_{k\in K}\alpha^k x^k+\sum_{j\in J}\beta^j r^j) \\ &\quad \text{sub. to } \textstyle\sum_{k\in K}\alpha^k=1, \\ &\quad A(\textstyle\sum_{k\in K}\alpha^k x^k+\sum_{j\in J}\beta^j r^j) \\ &\quad \geq b(\textstyle\sum_{k\in K}\alpha^k), \\ &\quad \alpha^k,\ \beta^j\geq 0 \text{ for } k\in K,\ j\in J, \\ &= \min\{cx|Ax\geq b,\ x\in \text{conv } S\}. \end{aligned}$$ ∎

定理 2　問題 (P) と問題 (D_L) の間に双対ギャップ，即ち，

$$v(D_L)<v(P) \quad (4)$$

となる必要十分条件は緩和解 $\bar{x}$ が整数解でない（即ち，整数性（*integrality property*）が成立しない)，ことである。

［証明］命題 1 の系とも言えるが別証を記す。問題 (P_λ) の解 $x^*_\lambda\notin$ bdry C に対して，(P_λ) に Kuhn-Tucker 条件を適用することにより，

$$c-A^T\bar{\lambda}=0,$$

が必要となる。その時，$\bar{\lambda}$ 及び $v(D_L)=v(P_\lambda)=\bar{\lambda}^T b$ が x に無関係に決定される。

問題 (P) の解 $x^*\notin$ bdry C に対して，$(b-Ax^*)_k<0$ となる k が存在する。$\lambda_k=0$ ならば $v(P_\lambda)=c^T x'_\lambda$, $x^*=x'_\lambda\in$ bdry C, となるがそれは矛盾である。それ故に $\lambda_k>0$ と

$$v(P)=c^T x^*>c^T x^*+\lambda^T(b-Ax^*)=v(D_L),$$

を得る。

証明の残りの部分は bdry C の解に対する考察である。ベクトル場

$$\{c-A^T\lambda(x^*_\lambda)|x^*_\lambda\in\text{bdry } C \text{ is a solution of } (P_\lambda)\}$$

は [20] の Theorem 6.12 から連続で，$-\xi$, $\xi\in N_C(x^*_\lambda)$ に等しく，x^*_λ で内側方向である。結局 $\lambda(x^*_\lambda)$ は (D_L) の解でない。∎

(D_S) と (D_L) の間に次の関係が成立することに注意しよう。

命題 2 ［9］

$$v(D_L) \le v(D_S) \qquad (5)$$

但し等号が成立する必要条件は $\mu_S^{*T}(b-Ax_\lambda^*)=0$, 但し μ_S^* は (D_S) の解である。 ∎

4．混合整数線形計画問題に対する弱双対定理

補題 1 ノルム空間 X に於いて，凸集合 K の非空の内部を含まずに線形多様体 V を含む閉超平面が存在しない必要十分条件は V が K の非空の内部を含むことである。

［証明］十分性は明らかである。必要性は Hahn-Banach 定理（cf.［13］）の対偶から言える。 ∎

一般の混合整数計画問題は次の様に述べられる：

$$(P^M) \quad \text{minimize} \quad c^T x$$
$$\text{subject to} \quad Ax \ge b, \quad x \in S,$$
$$x_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i \in I_Z, \quad x_j \in \mathbb{R}_+, \quad j \in I_R,$$

但し，A は $m \times n$ 行列，x, b, c は適当な次元のベクトル，$I_Z \cup I_R = \{1, \ldots, n\}$ となる。

上の問題の領域制約を，

$$Y = \{x \in S \mid x_i \in \mathbb{Z}_+,\ i \in I_Z,\ x_j \in \mathbb{R}_+,\ j \in I_R;\ I_Z \text{と} I_R \text{は所与}\},$$

と定義する。

例で x_1 を整数条件にしても双対ギャップが無いが，x_2 を整数条件にすれば双対ギャップを生じることに注意しよう。

問題 (P^M) の $\mu \ge 0$ に関する代理制約緩和は：

$$(P^{M\mu}) \quad \text{minimize} \quad c^T x$$
$$\text{subject to} \quad \mu^T(b-Ax) \le 0, \quad x \in S,$$
$$x_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i \in I_Z, \quad x_j \in \mathbb{R}_+, \quad j \in I_R,$$

となり，対応する代理双対は，

$$(D_S^M) \quad \max_{\mu \ge 0}\{v(P^{M\mu})\},$$

となる。

ラグランジュ緩和は：

$$(P_\lambda^M) \quad \text{minimize} \quad c^T x + \lambda^T(b-Ax)$$
$$\text{subject to} \quad x \in S,$$
$$x_i \in \mathbb{Z}_+, \quad i \in I_Z, \quad x_j \in \mathbb{R}_+, \quad j \in I_R,$$

となり，対応するラグランジュ双対は，

$$(D_L^M) \quad \max_{\lambda \ge 0}\{v(P_\lambda^M)\},$$

となる。

問題 (P^M)，(P_λ^M) の解を各々，x_M^*，x_S^{M*} とする。

問題 (P^M) の線形緩和問題 $(I_Z \ne \phi)$ を，

$$(\bar{P}^M) \quad \text{minimize} \quad c^T x$$
$$\text{subject to} \quad Ax \ge b, \quad x \in S,$$
$$x_i \in \mathbb{R}_+, \quad i \in I,$$

とし，その解を $\bar{x}_M$ とする。

定理 3 $\bar{x}_M \notin \text{bdry } S$ を仮定する。$c_k \ne 0$ となる $k \in I_R$ が存在するとも仮定する。その時，問題 (P^M) と問題 (D_S^M) の間に双対ギャップが存在する，即ち，

$$v(D_S^M) < v(P^M) \qquad (6)$$

となる必要十分条件は $\bar{x}_M \notin Y$ となることである。任意の $k \in I_R$ に対して $c_k = 0$ ならば，集合 $G = \{x \mid c^T\bar{x}_M \le c^T x < c^T x_M^*,\ x \in Y\}$ が空でない時に上の不等式が成立する。

［証明］ 解 x_S^{M*} に於いて，$\mu=\overline{\mu}$, $c^T=-\alpha\mu^T A$, $\alpha>0$ が成立するので，定理1の証明と同様に (D_S^M) を次の問題

$$(P^{M\overline{\mu}})\quad \text{minimize} \quad c^T x$$
$$\text{subject to} \quad c^T\overline{x}_M - c^T x \leq 0,$$
$$x \in Y,$$

で定義する。

$k\in I_R$, $c_k\neq 0$ が存在する場合は，$\overline{x}_M\notin Y$ ならば命題2から超平面 $H=\{x\,|\,c^Tx=c^T\overline{x}_M\}$ と交わる線形多様体 $V=\{x\,|\,x_k=x, x_l=x_M^*, k\neq l\}$ 上で $c^Tx_S^{M*}=c^T\overline{x}_M$ を満足するか，bdry S と交わる V 上で $c^T\overline{x}_M<c^Tx_S^{M*}<c^Tx_M^*$ を満足する x_S^{M*} が存在する。

任意の $k\in I_R$ に対して $c_k=0$ の場合は，定理は定理1に帰着される。 ∎

整数計画の双対ギャップを調べる問題は x^* を求める以上NP完全問題になっているが，混合整数計画の双対ギャップを調べる問題は $c_k\neq 0$, $k\in I_R$ の時にはクラスPの問題になっていることに注意しよう。

定理4 問題 (P^M) と問題 (D_L^M) の間に双対ギャップ，即ち，

$$v(D_L^M)<v(P^M) \tag{7}$$

が存在する必要十分条件は $\overline{x}_M\notin Y$ となることである。

［証明］ 問題 (P^M) に於いて，x の実数成分に関する $I_R=\{i_1, \ldots, i_n\}$ に対して，

$$A'=\begin{pmatrix} a_{1i_1} & \cdots & a_{1i_{n'}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{mi_1} & \cdots & a_{mi_{n'}} \end{pmatrix},\quad x'=\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_{n'}} \end{pmatrix},$$

と選ぶ。

$\lambda'\in[0,1]$ に対して，$-(1-\lambda')\cdot -A'x_1'+\lambda'\cdot -A'x_2=-A'\{(1-\lambda')x_1'+\lambda'x_2\in T\}$, $(1-\lambda')x_1'+\lambda'x_2\in S$ なので，集合 $T=\{-A'x'\,|\,x\in S\}$ は凸になるのは明らかである。

その時，問題 (P_λ^M) は S を凸集合 T に置き換える自明なやり方で問題 (P_λ) に帰着される。

証明の残りの部分は定理2と同様である。 ∎

5．一般の離散計画に対する試み

一般の離散問題に対して，先ずマトロイド性と凸性の関係がL.Lovász等に依って明らかにされていたが，最近は離散計画に於ける凸関数として室田［16］等に依りL凸関数やM凸関数が導入され，相互のFenchel共役性や双対定理を確立する方法で離散凸解析が提案されている。

f の整数Fenchel変換を連続変数のFenchel共役[6]の拡張として，

$$f^*(p)=\sup\{\langle p,x\rangle-f(x)\,|\,x\in\mathbb{Z}^n\},\ p\in\mathbb{Z}^n,$$

主問題を，

$$(P)\quad \min\ f(x)\ \text{sub. to}\ x\in S,$$

とする。

拡張ラグランジュ関数を，

$$F_r(x,u)=f(x)+\delta_s(x+u)+r(u),$$

但し $r:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ を $r(0)=0$ を満たすM凸関数とする。

$$\varphi_r(u)=\inf_{x\in\mathbb{Z}^n} F_r(x,u),\quad u\in\mathbb{Z}^n,$$
$$K_r(x,y)=\inf_{u\in\mathbb{Z}^n} F_r(x,u)+\langle u,y\rangle,\quad x,y\in\mathbb{Z}^n,$$
$$g_r(y)=\inf_{x\in\mathbb{Z}^n} K_r(x,y),\quad y\in\mathbb{Z}^n,$$

と定義するとラグランジュ双対問題は，

$$(D_r)\quad \max_{y\in\mathbb{Z}^n} g_r(y),$$

6）Legendre変換と密接な関連が有る。

と書ける。

命題3 ［16］S を整数基底集合と，f を M 凸と仮定し，問題 (P) は実行可能かつ下に有界と仮定する。その時，

$$\min(P) = \varphi_r(0) = \varphi_r^{**}(0) = \max(D_r),$$
$$g_r(y^*) = -\partial_Z \varphi_r(0),$$

が成立する。 ∎

上命題で f の M 凸性は十分条件である。

一方［12］では，非凸計画問題に対して主問題と双対関数を持つ凸計画問題の構成について論じられている。

6．今後の展望

ラグランジュ双対問題に対する双対ギャップが有るかどうかを決定する問題は整数計画，混合整数計画問題の両方に対してクラスP（cf.［10］）になるが，代理双対問題に対して双対ギャップが有るかどうかを決定する問題は整数計画及び，全ての $i \in I_R$ が $c_i = 0$ になる混合整数計画問題に対してNP完全になることを注意しよう。

定理2等と関連するが，一般に（P）の制約条件 $\{x \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\}$ で A, b が整数の時に任意の b に対して端点が整数となる為の必要十分条件は A が完全ユニモジュラ行列（totally unimodular matrix）であることが分っている。

完全ユニモジュラ行列（totally unimodular matrix）：A の全ての小行列式が ±1 か 0 である。

b が任意でなく制限的な時にはより緩い条件で良い。A, b, c が有理数の時に，

完全双対整数性（totally dual integer）：制約 $\{x \mid Ax \geq b,\ x \geq 0\}$ で双対問題（D）が任意の整数 c に対して最適解が整数である。

という条件が考えられており，マッチング問題等との関連が考えられている。他に最近，M. Conforti, G. Cornuéjols, and M.R. Rao［2］[7] は，

バランス行列（balanced matrix）：0,1 行列が行にも列にも2つの1を含む奇数次の正方小行列を含まない時にバランスされる（balanced）という。

を考え，それを係数行列 A にする線形計画では整数解を持つことから，パッキング問題，被覆問題との関連が考えられている。

参考文献

［1］Averch, H. and Johnson, L.（1962）: "Behavior of the firm under regulatory constraint," *American Economic Review*, 52, 369-372.

［2］Conforti, M., Cornuéjols, G., and Rao, M.R.（1999）: "Decomposition of Balanced Matrices," *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 77, 292-406.

［3］Galvão, R.G., Espejo, L.G.A., Boffey, B.（2000）: "A conmaprison of Lagrangean and surrogate relaxizations for the maximal covering location problem," *European Journal of Operations Research*, 124, 377-389.

［4］Geoffrion, A.M.（1974）: "Lagrangean relaxation for integer programming," *Mathematical Programming Study*, 2, 82-114.

［5］Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P.（1970）:

7）M. Conforti and G. Cornuéjols, and M.R. Rao は上記論文に対して、2000年の Fulkerson 賞を得ている。

"Surrogate mathematical programming," *Operations Research,* 18, 924-939.

[6] Hartmanis, J. and Stearns, R.E. (1965): "On the computational complexity of algorithms," *Transactions on American Mathematical Society,* 117, 285-306.

[7] Hiriart-Urruty, J-B. and Lemaréchal, C. (1993): *Convex analysis and minimization algorithms I, II,* Springer, Berlin.

[8] Karmarkar, N. (1984): "A new polynomial-time algorithm for linear programming," *Combinatorica,* 4, 373-395.

[9] Karwan, M.H. and Rardin, R.L. (1979): "Some relationships between lagrangian and surrogate duality in integer programming," *Mathematical Programming,* 17, 320-334.

[10] Khachian, L.G. (1979): "A polynomial algorithm for linear programming," *Doklady Akad. Nauk USSR,* 244, 1093-1096.

[11] Kuhn, H.W. and Tucker, A.W. (1951): "Nonlinear programming," *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* Univ. California Press, Berkeley.

[12] Lemaréchal, C. and Renaud, A. (2001): "A geometric study of duality gaps, with applications," *Mathematical Programming,* 90 (3), 399-427.

[13] Luenburger, D.G. (1969): *Optimization by Vector Space Methods,* Wiley, New York.

[14] Markowitz, H. (1952): "Portfolio selection," *Journal of Finance,* 7, 77-91.

[15] 守屋悦朗 (1997):「チューリングマシンと計算量の理論」, 培風館。

[16] Murota, K. (1998): "Discrete convex analysis," *Mathematical Programming,* 83, 313-371.

[17] Nemhauser, G.L. and Wolsey, L.A. (1988): *Integer and Combinatorial Optimization,* Wiley, NewYork.

[18] Parker, R.G. and Rardin, R.L. (1988): *Discrete Optimization,* Academic, San Diego.

[19] Ram, B. and Karwan, M.H. (1989): "A result in surrogate duality for certain integer programming problems," *Mathematical Programming,* 43, 103-106.

[20] Rockafellar, R.T. and Wets, R.J-B. (1998): *Variational Analysis,* Springer, Berlin.