経済学研究 52−2
北海道大学 2002. 9

内生的景気循環モデルにおける消費税の安定化効果*

高 嶋 宏 明

1. はじめに

グラモン（1985）は貨幣を異時点間の財の交換手段として使う単純な生産経済において内生的に景気循環が発生することを示した[1)]。グラモン（1985）のモデル自体は無限期間に及ぶ循環も生じさせうるが，代表的な周期2の循環に限定して考えると，それは貨幣の収益率と実質貨幣量がともに低い経済とそれらがともに高い経済の循環となっている。

グラモン（1985）における内生的景気循環の発生について簡単に説明すれば以下の通りである。若年期と老齢期の2期間を生存する個人からなる世代重複モデルを考える。この個人は若年期と老齢期における各々の消費と余暇から効用を得ている。経済には貨幣が存在し，各個人は若年期において貨幣の形でもって貯蓄を行う。この貨幣は老齢期に財と交換されて消費される。ここでは，各期に貨幣が保有されるように個人は若年期に必ず正の貯蓄を行うことが仮定されている（サミュエルソンケース）。

この時，若年世代の貯蓄は貨幣の収益率によって決まる。通常において，貨幣の収益率の上昇は貯蓄を増加させる。しかしながら，グラモン（1985）は効用関数がある特性を満たすときには，十分に高い貨幣の収益率の下で，さらなる収益率の上昇は貯蓄を減少させることを示した。この場合には次のようなことが考えられる。いま，ある t 期の経済において貨幣の収益率が高いとしよう。この経済においては，前述した貨幣の収益率と若年の貯蓄が負の相関関係にある状況の下で，若年期の貯蓄は小さくなっている。他方，財市場の均衡から老齢世代の財の超過需要も小さくなっていなければならない。このとき，*t-1* 期における貨幣の収益率について考えてみる。老齢世代の財の超過需要自体は常に貨幣の収益率の増加関数であることから，*t* 期において老齢世代の財の超過需要が小さいということは，*t-1* 期における貨幣の収益率が低くなっていることを意味している。このことは今の条件の下では，*t-1* 期において若年世代の貯蓄は大きく，財市場の均衡から老齢世代の財の超過需要も大きくなることを意味する。このことは先ほどと同様の議論により，*t-2* 期における貨幣の収益率が高い状況にあったことを意味する。すなわち，貨幣の収益率が高い→低い→高い→…と循環していることになる。

グラモン（1986）はこのように生じる循環を金融政策によって安定化させることができることを示している[2)]。本論文では，それに対して，消費税が内生的景気循環の発生を押さえることができることを示す。以下では，具体的なモデルを用いて分析する。

2. モデル

2期間を生存する個人からなる世代重複モデルを考える。各個人には若年期に l^*_y，老齢期に l^*_o だけの時間の賦存量が与えられる。個人は各々

1）グラモン（1985）はサミュエルソン（1958）のConsumption-Loan Modelが原型となっている。

2）グラモン（1986）を参照。

の期で消費と余暇をおこない，それらから効用を得る。本論文では個人の効用関数を以下のように特定化する。$U(c_y,c_o,l_y^*-l_y,l_o^*-l_o)=\phi(c_y,l_y^*-l_y)+\phi(c_o,l_o^*-l_o)$，$\phi(c_h,l_h^*-l_h)=-e^{-c_h}-e^{-(l_h^*-l_h)}$，$h=y,o$ [3]。ここで c, l, l^*-l はそれぞれ個人の消費，労働供給および余暇を表し，y および o はそれらの値の若年期，老齢期の区別を表している。

個人は各期に労働を供給し財の生産をおこなう。財は労働のみをインプットとして生産され，その生産関数は単純に $Q=l$，ここで Q は財の生産量とする。また，各個人は政府によって消費1単位当たり τ だけの消費税が課せられる（$\tau=0$ のとき，グラモン（1985）のモデルとなる)。政府はこのようにして集めた消費税を生産や分配に影響を与えない政府支出に使うと仮定する。経済には貨幣が存在し，各時点において若年世代は貯蓄を次期に持ち越すためにこれを需要する。この貨幣は老齢期に財と交換される。ここでは簡単化のため，政府は新たな貨幣発行をおこなわないものとする [4]。

Mを若年期の貨幣需要量（前述の仮定から常に一定である)，p_t を t 期の財の価格（貨幣単位での）とすると，t 期における若年世代の予算制約式は (1) 式のように与えられる。

$$p_t(1+\tau)c_{y.t}+M=p_tl_{y.t} \tag{1}$$

$c_{h,t}$, $l_{h.t}$ $h=y,o$ は t 期における若年期と老齢期の消費量および労働供給量を表わす。このとき，この個人の老齢期（$t+1$ 期となっている）の予算制約式は (2) 式のように与えられる。

$$p_{t+1}(1+\tau)c_{o,t+1}=M+p_{t+1}l_{o.t+1} \tag{2}$$

以後の分析のために，(1) 式と (2) 式を次のように書きかえる。

$$p_t(1+\tau)c_{y.t}+p_t(l_y^*-l_{y.t})+M=p_tl_y^* \tag{1$'$}$$
$$p_{t+1}(1+\tau)c_{o.t+1}+p_{t+1}(l_o^*-l_{o.t+1})-M=p_{t+1}l_o^* \tag{2$'$}$$

(1)′ 式と(2)′ 式から M を消去すると，t 期における若年世代の生涯の予算制約式を得ることができる。

$$\theta_t[(1+\tau)c_{y.t}+l_y^*-l_{y.t}]+[(1+\tau)c_{o.t+1}+l_o^*-l_{o.t+1}]=\theta_tl_y^*+l_o^*,\qquad \theta_t\equiv\frac{p_t}{p_{t+1}} \tag{3}$$

ここで，θ_t は t 期と $t+1$ 期の財の相対価格を示すが，書き直すと $(1/p_{t+1})/(1/p_t)$ となり貨幣の購買力の比率，つまり貨幣保有に伴う収益率を表わす。各 t 期において，若年世代は (3) 式の制約の下で生涯の効用，$\phi(c_{y.t},l_y^*-l_{y.t})+\phi(c_{o.t+1},l_o^*-l_{o.t+1})$ が最大となるように $c_{y.t},l_{y.t},c_{o.t+1},l_{o.t+1}$ を決定する。この最大化問題をグラモン（1985）にしたがって以下のように定式化しよう。

$$\begin{aligned}
&Max\ V(a_{y.t})+V(a_{o.t+1})\\
&\quad s.t\ \theta_ta_{y.t}+a_{o.t+1}=\theta_tl_y^*+l_o^* \qquad (5)\\
&\quad a_{y.t}\equiv(1+\tau)c_{y.t}+l_y^*-l_{y.t}\\
&\quad a_{o.t+1}\equiv(1+\tau)c_{o.t+1}+l_o^*-l_{o.t+1}\\
&\quad V(a_{y.t})=\phi(c(a_{y.t}),l_y^*-l(a_{y.t}))\\
&\quad V(a_{o.t+1})=\phi(c(a_{o.t+1}),l_o^*-l(a_{o.t+1}))\\
&\quad c(a_{y.t})\equiv\underset{c}{\operatorname{argmax}}\,\phi(c,a_{y.t}-(1+\tau)c)\\
&\quad c(a_{o.t+1})\equiv\underset{c}{\operatorname{argmax}}\,\phi(c,a_{o.t+1}-(1+\tau)c)\\
&\quad l(a_{y.t})\equiv l_y^*+(1+\tau)c(a_{y.t})-a_{y.t}\\
&\quad l(a_{o.t+1})\equiv l_o^*+(1+\tau)c(a_{o.t+1})-a_{o.t+1}
\end{aligned}$$

$a_{h.t}(h=y.o)$ は，t 期における個人（若年期および老齢期）の財の超過需要と時間の賦存量の合計を表す。$V(a_{h.t})$ は個人の若年時と老齢時での効用を $a_{h.t}$ で表した間接効用関数となっている。$\phi(c,l^*-l)=-e^{-c}-e^{-(l^*-l)}$ の下で，

3）このとき，それぞれの要素に関して絶対的危険回避度が一定になっている。

4）グラモン（1985）では貨幣発行を考慮しているが，これを捨象しても以後のモデルの展開に影響はない。グラモン（1986）は新たに発行させた貨幣がLump-sumな形式で個人に配られる，または政府支出に使われる場合を研究した。このとき，金融政策は内生的景気循環の発生を止めることができる。

$V(a_{y.t}) = -Ae^{-\frac{1}{2+\tau}a_{y.t}}$, $V(a_{o.t+1}) = -Ae^{-\frac{1}{2+\tau}a_{o.t+1}}$, A は正の定数，となる。このことを利用すると最大化問題(5)の最適解の一階条件は(6)となる。

$$e^{-\frac{1}{2+\tau}a_{y.t}} = \theta_t e^{-\frac{1}{2+\tau}a_{o.t+1}} \tag{6}$$

(5)式および(6)式から，$a_h(h = y.o)$ は次のように導出される[5]。

$$a_{y.t} = \frac{1}{1+\theta_t}[(\theta_t l_y^* + l_o^*) - (2+\tau)\log(\theta_t)] \tag{7}$$

$$a_{o.t+1} = \frac{\theta_t}{1+\theta_t}[\frac{\theta_t l_y^* + l_o^*}{\theta_t} + (2+\tau)\log(\theta_t)] \tag{8}$$

$\theta_t > 1(< 1)$ の場合には若年期より老齢期の方が消費財の価格が下がる（上がる）ため，τ の増加は老齢期（若年期）の消費および余暇をより魅力的にする効果をもつ。そのため，$\theta_t > 1(< 1)$ ならば，τ の増加は a_y を減少（増加）させ，逆に a_o を増加（減少）させる。

$a_h(h = y.o)$ は若年期および老齢期での時間の賦存量と財の超過需要を足し合わせた値であり，θ に依存している。このとき，θ の上昇が各 a_h の値に及ぼす影響は代替効果と所得効果の2つの効果の和によって決まる。θ の上昇は，その定義から老齢期の消費が若年期の消費に比して安価になることを示すので，若年期の消費を減らし（＝貯蓄を増やす），Old期の消費を増やす効果（代替効果）を持っている。また一方で θ の上昇は，個人の保有する貨幣がより高い収益を生むことを意味するため，個人の実質所得を増加させる。そのため若年期と老齢期の消費をともに増加させる効果（所得効果）も持っている。

ここで注意すべきことは，θ の上昇は，老齢期の超過需要に対しては所得効果と代替効果，いずれの効果もそれを増加させるように働くのに対して[6]，若年期の貯蓄に対してはそれらの効果が互いに逆向きに働きあうということである。したがって代替効果が所得効果より強い場合には，θ の上昇は a_y を減少させるが，所得効果が代替効果より強い場合には θ の上昇は a_y を増加させる。

$(da_y/d\theta)$ は(7)式から(9)式のように与えられる。

$$\frac{da_y}{d\theta} = \frac{1}{(1+\theta)^2}\left[l_y^* - l_o^* + (2+\tau)\left(\log\theta - \frac{1+\theta}{\theta}\right)\right] \tag{9}$$

いま θ_E を(9)式において，$(da_y/d\theta) = 0$ となるような θ としよう。(9)式から，このような θ_E は(10)式を満たす[7]。

$$\log\theta_E - \frac{1+\theta_E}{\theta_E} = -\frac{l_y^* - l_o^*}{2+\tau} \tag{10}$$

(10)式の左辺は θ_E の増加関数であり，$\theta_E \to 0$ ならば $-\infty$ に収束し，また $\theta_E \to \infty$ ならば ∞ に収束する。そのため θ_E はただ1つの正の値に決まっている。θ が θ_E より小さい範囲において $a_{y.t}$ は θ の減少関数となり，θ が θ_E より大きい範囲においては a_y は θ の増加関数となっている[8]。これは θ が θ_E より小さい範囲では θ_t が上昇した時の代替効果が所得効果よりも強くなっており，θ が θ_E より大きい範囲では所得効果が代替効果よりも強くなっていることを示している。$\theta = \theta_E$ のとき，θ の上昇の a_y に対する所得効果と代替効果がちょうど相殺される。このとき，(a_y, a_o) と θ との関係を描いたオファーカーブは図1のようになる。

5）間接効用関数 $V(a)$ 及び(7)式，(8)式の導出は付録を参照。

6）これは(8)式の右辺が θ の増加関数となっていることからも確かめられる。

7）付録2を参照

8）$V(a(\theta))$ の相対的危険回避度が θ の増加関数であるならば，一般的な効用関数の下でもこの θ_E に対応する貨幣の収益率が存在することがグラモン(1985)によって示されている。

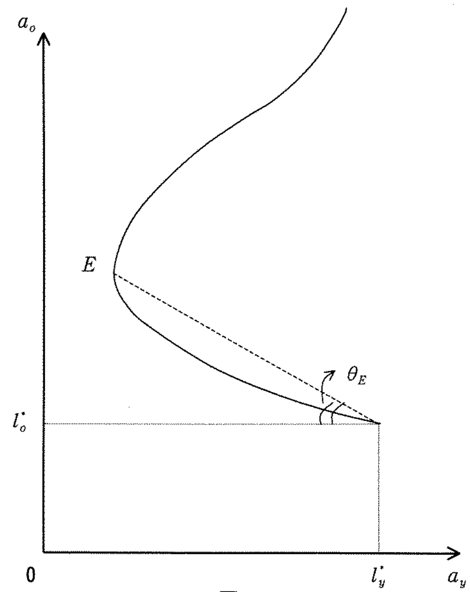

図1

グラモン（1985）では，$V(a_o)$ の相対的危険回避度が θ の増加関数であることを仮定し，これが1より大きいときに a_y が θ の増加関数となりうることを示している[9]。また θ_E が1より小さい場合には，θ が内生的に循環しうることも示している。この θ の内生的循環と消費税を導入することでこのような循環を抑制できることについて触れる。

3．Cycle

前節で記したように θ_E が1より小さい場合には，θ が内生的に循環しうる。図2の $F \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow \cdots$ と続く破線がこのような θ の周期2の循環を描いている。また図2にある $[(1+\tau)c_y - l_y] + [(1+\tau)c_o - l_o] = 0$ は，若年世代および老齢世代の消費と消費税の総計が財の生産量に等しいという財市場の均衡式である。この式とオファーカーブの交点である H 点は貨幣の収益率が1のときに個人が選択する (a_y, a_o) となっている。

図2の F 点は，貨幣の収益率が θ_F のときに若年世代が選択する (a_y^F, a_o^F) を表している。このとき，若年世代の貯蓄と若年世代が支払う消費税の和は $a_y^F - l_y^*$ となる。そして財市場の均衡から，1期前の世代であるその期における老齢世代がおこなう財の超過需要と彼らが支払う消費税の和も $a_y^F - l_y^*$ になっていなければならない。図2において，このような選択を示す点は G 点となる。即ち，ある世代が F 点を選択したとすると，その1期前の世代は G 点を選択している。G 点では若年世代の貯蓄と消費税の和が $a_y^G - l_y^*$ となっており，この値はやはり1期前の世代である老齢世代の財の超過需要と消費税の和に等しくなっていなければならない。図2において，これは個人の選択する点が再び F 点に戻ることになり，このとき $F \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow \cdots$ が周期2の循環を示す。

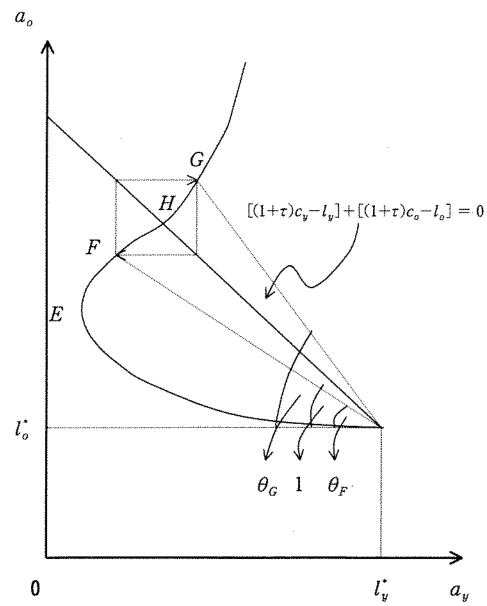

図2

この循環上では貨幣の収益率は $\theta^F \rightarrow \theta^G \rightarrow \theta^F \rightarrow \cdots$ と循環しており，各世代はこれに対応して消費と余暇を選択する。もちろん，余暇の循環的な変動は財の生産量の循環ももたらす。

9）一般的な効用関数の下で，$a'_y(\theta)$ は $V(a_o)$ の相対的危険回避度を使って表すことができる。

注意すべきなのは，この循環が何かのショックによって生じているのではなく，個人の最大化行動の結果として生じているということである。またH点は1度そこに到達すると，もはや別の点に移らなくなるため定常状態となっている。

図2からわかるようにθ_Eが1より大きい場合には，このような循環が生じることはない。このときには，任意の点から出発しても，経済は一様に定常状態Hに収束する。即ち，$\theta_E<1$は循環発生の必要条件となっている。

本論文ではθの周期2の循環が存在する経済を想定する。したがって，$\theta_E<1$を前提とする。このとき，政府が消費税率τを増加させたとしよう。(10)式から，$(d\theta_E/d\tau)$を導出すると以下のようになる。

$$\frac{d\theta_E}{d\tau}=e^{\frac{(l_y^*-l_o^*)}{(2+\tau)}+\frac{(1+\theta_E)}{\theta_E}}\left(\frac{(l_y^*-l_o^*)\theta_E}{(2+\tau)^2(1+\theta_E)}\right)>0 \quad (11)$$

ここで，われわれは一般的に$l_y^*>l_o^*$を仮定する。この仮定の下で，(11)式から消費税率τの上昇はθ_Eの値を増加させる。これは政府が十分に消費税率を高くすることによってθ_Eを1より大きくすることができることを意味している。このとき先の条件から循環が生じることはなくなる[10]。

以上の議論はグラモン（1985）との比較でみると以下のように考えられる。グラモン（1985）は，$V(a_o)$の相対的危険回避度が1を超えたときにa_yがθの増加関数となりうることを示した。本論文においては$V(a_o)$の相対的危険回避度は(12)式のように示される。

$$-\frac{V''(a_o)a_o}{V'(a_o)}=\frac{\theta l_y^*+l_o^*}{(2+\tau)(1+\theta)}+\frac{\theta}{1+\theta}\log(\theta) \quad (12)$$

(12)式から，θを固定すると$V(a_o)$の相対的危険回避度は消費税率τの減少関数となっている。いま，$\theta=1$のときに(12)式によって与えられる$V(a_o)$の相対的危険回避度が1を超えていたとしよう。このときグラモン（1985）の結果から，1より小さいθでa_yがθの増加関数となりうる。これは，$\theta_E<1$で今節で見たようにθの内生的循環がおこる状況である。しかしながら政府はτを十分に大きくすることにより，必ず$V(a_o)$の相対的危険回避度を1より小さくすることができる。このような十分に高いτのもとでは，1より小さいθでa_yがθの増加関数となることはない。即ち，a_yがθの増加関数に変化するθ_Eの値は必ず1より大きくなることを意味している。

4．結論

本論文では，グラモン（1985）による内生的景気循環のモデルにおいて税制を通じた安定化政策について述べている。グラモン（1985）が示した内生的景気循環は，本論文に記したような老齢期の消費と余暇の和によって老齢期の効用を示す間接効用関数が貨幣の収益率の増加関数となるという前提のもとで，1より小さい貨幣の収益率において若年世代の貯蓄が貨幣の収益率の減少関数から増加関数へ転移することがその必要条件になっている。

本論文では，グラモン（1985）モデル自体を消費税率0のモデルとして含む形でグラモンモデルに消費税を導入し分析をおこなっている。その結果は，消費税率を上昇させるに伴って，若年世代の貯蓄が貨幣の収益率の増加関数に転移する貨幣の収益率の値それ自体が上昇するということを示している。そのため，十分に高い消費税率に設定することで1より大きい貨幣の収益率で若年世代の貯蓄がその増加関数となる結果，内生的景気循環が発生しないことが導かれる。

しかしながら本論文で示された消費税の安定

10）サーコフスキーの定理（Guckenheimer and Holmes（1983）p.311）から，周期2の循環が生じない状況では，周期n（nは3以上の自然数）の循環も生じない。

化作用は，消費税によって得た収入がすべて政府支出に使われる仮定の下で導かれている。これを例えば，政府債権の償還や個人へのトランスファーに使うことを考慮に入れるならば，より現実的な消費税の安定化作用を見ることができるだろう。

付録　間接効用関数 $V(a)$ の導出

ここではYoungの間接効用関数 $V(a_y)$ の導出をおこなう。$V(a_o)$ の導出についても全く同様の方法でおこなうことができる。$V(a_y)$ はその定義から，$V(a_y) \equiv \phi(c(a_y), l_y^* - l(a_y))$;$\phi(c, l^* - l) = -e^{-c} - e^{-(l^* - l)}$ となっている。このとき $c(a_y), l_y^* - l_y(a_y)$ はそれらの定義から次の最大化問題の解として与えられる。

$$Max_{c, l^* - l}\ -e^{-c_y} - e^{-(l_y^* - l_y)}$$
$$s.t\quad (1+\tau)c_y + (l_y^* - l_y) = a_y$$

この問題を解くことによって，$c_y(a_y)$ と $l_y^* - l_y(a_y)$ は次のように与えられる。

$$c_y(a_y) = \frac{1}{2+\tau}a_y - \frac{1}{2+\tau}\log(1+\tau)$$
$$l_y^* - l_y(a_y) = \frac{1}{2+\tau}a_y + \frac{1+\tau}{2+\tau}\log(1+\tau)$$

これらの値を $\phi(c, l^* - l)$ に代入すると $V(a_y)$ を得ることができる。

$$V(a_y) = -Ae^{-\frac{1}{2+\tau}a_y}$$
$$A \equiv (1+\tau)\left[(1+\tau)^{\frac{1}{2+\tau}} + (1+\tau)^{-\frac{1+\tau}{2+\tau}}\right]$$

(7) 式および (8) 式の導出。

a_y と a_o は以下の2式から導出される。

$$\theta_e a_{y.t} + a_{o.t+1} = \theta_e l_y^* + l_o^* \tag{5}$$
$$e^{-\frac{1}{2+\tau}a_{y.t}} = \theta_e e^{-\frac{1}{2+\tau}a_{o.t+1}} \tag{6}$$

(6) 式の両辺に対数を採ると，(6)′式に書き換えられる。

$$a_{o.t+1} = a_{y.t} + (2+\tau)\log\theta_t \tag{6$'$}$$

(6)′式を (5) 式に代入することにより，$a_{y.t}$ は，

$$a_{y.t} = \frac{1}{1+\theta_t}[(\theta_t l_y^* + l_o^*) - (2+\tau)\log(\theta_t)]$$

と導出できる。これを (6)′式に代入すると，$a_{o.t+1}$ が以下のように得られる。

$$a_{o.t+1} = \frac{\theta_t}{1+\theta_t}\left[\frac{\theta_t l_y^* + l_o^*}{\theta_t} + (2+\tau)\log(\theta_t)\right]$$

＊本論文の作成にあたり，北海道大学大学院経済学研究科内田和男教授から有益な指摘を多数頂いた。また，近代経済学研究会での発表においても有益なコメントを多数頂いた。この場を借りて深く感謝の意を表したい。

参考文献

1．西村和雄，増山幸一，吉田真理子，(1989).「経済変動：均衡景気循環理論」，伊藤元重，西村和雄編『応用ミクロ経済学』東京大学出版会　第9章.
2．グラモン，J. M. (1985),"On Endogenous Competitive Cycles", *Econometrica,* 53, 995-1045.
3．グラモン，J. M. (1986),"Stabilizing Competitive Business Cycles", *Journal of Economic Theory,* 40, 57-76.
4．Samuelson, P. A. (1958),"An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without Contrivance of Money", *Journal of Political Economy,* 467-482.
5．Guckenheimer, J. and P. Holmes, (1983) *Non-linear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields,* Springer-Verlag, New York, N.Y.