



Title	選点法による構造物の動的問題の解析に関する研究
Author(s)	三上, 隆
Citation	北海道大学. 博士(工学) 乙第3186号
Issue Date	1987-03-25
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/32646
Type	theses (doctoral)
File Information	3186.pdf



[Instructions for use](#)

選点法による構造物の動的問題の
解析に関する研究

選点法による構造物の動的問題の解析
に関する研究

目 次

第1章 序 論

1-1	研究目的	1
1-2	既往の研究	2
1-3	研究の概要	4
	第1章 参考文献	8

第2章 選点法

2-1	概 説	11
2-2	選点法の概略	11
2-3	数値計算簡易化のための準備	15
2-4	選点の選択	19
	付 録	23
	第2章 参考文献	26

第3章 固有振動問題

3-1	概 説	27
	I. Timoshenko 梁	29
3-2	Timoshenko 梁の基礎方程式	30
3-3	定式化のための準備	32
3-4	固有振動方程式	37

(1) 内部選点固有方程式	41
(2) 端点固有方程式	41
3-5 数値計算例	43
(1) 内部選点固有方程式による場合	43
a) 要素分割を行わない場合の解の精度の検討	43
b) 要素分割を行った場合の解の精度の検討	52
c) 有限要素法による結果との比較	55
d) 細長比が大なる梁への適用性	58
(2) 端点固有方程式による場合	64
(3) Timoshenko 梁の数値例より得られた本解析法の特長	69
II. 回 転 殻	69
3-6 古典殻理論に基づく回転殻の基礎方程式	70
(1) 変位成分で表示された運動方程式	74
(2) 境界条件と接続条件	75
3-7 内部選点固有方程式	79
(1) 定式化のための準備	79
(2) 回転殻の内部選点固有方程式	89
a) 単一形状の殻の場合	89
b) 複数の殻からなる場合	91
3-8 数値計算例	92
(1) 単一形状の殻の場合	93
a) 円筒殻	93
a-1) L-選点とC-選点に基づく解の収束性および精度	93
a-2) 不伸長振動解	99
a-3) 固有モードの直交性	101

b) 球殻	103
b-1) 解の収束性と精度	104
b-2) 不伸長振動解	106
b-3) 高い円周方向波数 n に対する解析	108
b-4) 既往研究の欠落固有振動数の検討と固有モードの検討	109
b-5) 浅い球殻に対する適用性	114
c) 任意形状の回転殻	116
c-1) 円錐殻	116
c-2) 双曲殻	116
(2) 複数の殻からなる場合	119
(3) 回転殻の数値例より得られた本解析法の特徴	121
III. 矩形 Mindlin 板	121
3-9 板厚が一方向に直線変化する矩形板の基礎方程式	122
3-10 内部選点固有方程式	125
3-11 数値計算例	128
(1) 等厚板	128
(2) 変厚板	128
(3) Mindlin 板に対する本解析法の特徴および変厚 Mindlin 板の振動特性	130
3-12 結論	137
付録	138
第3章 参考文献	141
第4章 柱・梁の非保存的弾性安定問題	
4-1 概説	144
4-2 基礎方程式	145
4-3 内部選点固有方程式および臨界荷重の算定	147

4 - 4	数値計算例	149
(1)	準接線および接線集中力を受ける片持梁 (Beck の問題)	150
(2)	一様分布接線荷重を受ける梁 (Leipholz の問題)	154
(3)	直線分布接線荷重を受ける梁 (Hauger の問題)	156
4 - 5	結 論	158
	第 4 章 参考文献	159
第 5 章	回転殻の構造振動問題	
5 - 1	概 説	160
5 - 2	階数低下された回転殻の基礎方程式	161
5 - 3	選点法による空間領域の離散化	165
(1)	4 MN 個の条件式	166
(2)	8 個の条件式	169
(3)	8 (N - 1) 個の条件式	173
(4)	時間依存の方程式	174
5 - 4	数値計算例	176
(1)	静的負荷問題	176
a)	液圧を受ける円筒殻	176
b)	半径方向に単位線荷重が作用する円筒殻	178
c)	一様な外圧を受ける球殻	179
d)	風荷重を受ける円筒殻	180
(2)	構造振動問題	184
a)	球 殻	184
b)	円 筒 殻	187
5 - 5	結 論	189
	付 録	189
	第 5 章 参考文献	192

第6章 回転殻の応力波伝播問題

6-1	概 説	194
6-2	修正殻理論に基づく回転殻の基礎方程式	196
6-3	選点法による空間領域の離散化	201
(1)	5MN個の条件式	202
(2)	10N個の条件式	206
6-4	時間領域の離散化と解析アルゴリズム	210
(1)	選点法と陰解法の組合せに対する解析アルゴリズム	211
(2)	選点法と陽解法の組合せに対する解析アルゴリズム	213
(3)	時間刻み幅の設定	214
6-5	数値計算例	218
(1)	棒の縦衝撃問題と梁の横衝撃問題	218
a)	棒の縦衝撃問題	218
b)	Timoshenko 梁の横衝撃問題	222
(2)	回転殻の応力波伝播問題	228
a)	円筒殻	228
b)	双曲殻	237
6-6	結 論	244
	付 録	245
	第6章 参考文献	247

第7章 総 括

	総 括	249
謝 辞		252

第 1 章 序 論

1-1 研究の目的

構造物の挙動は多かれ少なかれ動的である。動的現象の中でも振動問題に限れば、周期的な外力を受け固有振動問題としての取り扱いがある程度可能な問題や、非周期的な外力を受け本格的な動的応答の解析が要求される問題に区別される。

振動問題の解析を行なうにあたり、しばしば直面する重要な問題の一つは高階多元の連立偏微分方程式の境界値問題、初期値問題の解を所要の精度で得ることである。特に最近では、建設材料、施工技術の発展に伴い、構造物が大型化、軽量化、柔軟化の傾向を示すようになり、また立地環境条件もますます厳しくなる状況にあるため、構造物を信頼性が高く、精度のよい手法で解析することが要求されるようになってきた。

さて、未知量を時間および空間座標の関数とする偏微分方程式の解は、理論的に厳密な解が求められるのが最も望ましい。しかしながら、時間依存性を容易に消去でき、空間に関する常微分方程式で表わされる固有振動問題でさえ、標準的な解法が適用できる定数係数の線形常微分方程式で記述されるのはごくわずかであり、しかし、それでさえ、従属変数が多くなるとかなりの困難に遭遇するだろう。それゆえ、無限の自由度を有する連続体の問題は、解の領域を有限個の点とか要素に分割し、有限個の自由度で解析する離散化手法（数値解析的な手法）によらざるを得ない。

時間依存の問題の近似解を得ようとする場合、固有振動問題では時間依存性が取り除かれた空間に関する常微分方程式を離散化し、代数方程式系へ帰着させて解き、一方動的応答問題では、まず空間を離散化し、その結果得られる時間に関する連立常微分方程式を、時間方向に積分することによって解くように、数値解析的な手法で解く場合の第一歩は、何らかの方法により空間を離散化することである。

ところで、空間を離散化する段階で常に問題になることは、取り扱える自由度の数と計算精度の関係である。実際の解析では扱う自由度数はできるだけ少なくして十分な精度の解を得ることが望まれるが、一般には二つの要求はあい矛盾するものであり、原則的には、離散化を密に行ない、解析結果を正解に近づけるのが普通である。最近では、大型計算機の発展と共に取り扱える自由度の数は、問題の性質にもよるが、極めてラージ・スケールなものでも解かれるようになってきたが、精度のよい解を得ようとすればかなりの計算時間を要することになり、経済的な面でもだれにでも利用できるものではない。一方、パーソナルコンピュータに代表される小型計算機の普及は目覚ましいものがあり、構造設計の分野での利用も高まりつつあるように思われる。

空間に対する離散化手法は今日までに、様々な手法が開発されているが、それらには、電子計算機の普及、進歩の過程と密接に関連を持って発展してきたものもあれば、計算機の出現前に、数多くの先人の努力によって既にその基礎が確立されているものもある。特に後者に属する手法には、今日の実際の構造設計で遭遇する多様な問題の解析手段としての柔軟性および適用性の検討が不十

分のため、あるいは得られる解の信頼性の検討が不十分のために、構造解析手法として統一的に用いられているとは言い難いものもある。本論文で用いる選点法もその一つであろう。

本論文の目的は、このような現状から、構造物の動的問題のうち、その支配方程式が空間については二点境界値問題として記述される場合を対象とし、計算機の利用を前提とした選点法に基づく実用的解法を提示すると共に、手法の適用可能性および数値解析上の特性を明らかにすることである。すなわち、提示した手法は、直交多項式の零点を選点とする選点法に要素分割という有限要素法的な手法を加味したもので、解析の全過程がマトリックス代数により組み立てられ、解法を工夫することにより小・中型程度の計算機によっても十分解析可能にしたものである。また提示した手法の適用可能性と数値解析上の特性は、梁、板および回転殻という構造物の基本的な構成要素の場の大域的性質に支配される固有値問題と場の局所的性質に支配される動的応答問題を対象とし、前者の問題では、実固有値問題として定義される固有振動問題および複素固有値問題として定義される動的安定問題、後者の問題では、構造物の全体的振動を扱う構造振動問題および局所的な波の伝播を追いかける波動伝播問題、というような広範囲の問題の解析例より明らかにしたものである。

1 - 2 既往の研究

本論文で扱った個々の問題に対する既往の研究の概略は、各章ごとに後述することにし、ここでは選点法に関連するものに限って述べることにする。

選点法の今日に至るまでの歴史的な背景は、Finlayson と Scriven¹⁾ の重みつき残差法に関するレビューや Finlayson の著書²⁾ に述べられているが、これらによれば、選点法の微分方程式の一般的解法として用いたのは Franzer その他³⁾ であり、その後この方法は、モーメント法、Galerkin 法、最小二乗法などと共に、重みつき残差法として統一化され現在に至っている。

Franzer らの研究とほぼ同じ頃、Lancos⁴⁾ は初期値問題に対して、試行関数を Chebyshev 多項式に展開し、その根を選点とする方法を発表している。この直交多項式を用いる方法は当時は広く使われなかったが、その後 Wright⁵⁾ らによって、Chebyshev 多項式を用いた常数分方程式の解法に改善され、また Villadsen と Stewart⁶⁾ によって、Jacobi 多項式を用いた境界値問題の解法に改善された。特に Villadsen らの方法は、境界条件を満たし、多項式の根が選点を与えるような一連の直交多項式を試行関数とするもので、直交選点法とも呼ばれ、化学工学の種々の問題に 응용されている²⁾

選点法と他の重みつき残差法の等価性については、Russell と Varah⁷⁾ および Villadsen と Stewart⁶⁾ などの研究がある。Russell らは、境界条件を満足する試行関数を用いた場合について、選点法、Galerkin 法および最小二乗法の等価性を議論し、Villadsen らは、同様に直交選点

法、Galerkin 法および最小二乗法の等価性を示している。

さて構造工学の分野において、特に梁、板および殻に限定すれば、選点法を適用した研究には次のようなものがある。

柱・梁の問題への選点法の適用は、古くには Nubar³⁾ がビーム・カラムの座屈荷重を境界条件のみを満足する試行関数（内部法と呼ばれる）を用いて求め、最近では著者と Yoshimura⁹⁾ が、境界条件も微分方程式も満足しない試行関数（混合法と呼ばれる）に多項式を用い、自己随伴および非自己随伴型の微分方程式で記述される場合の固有値問題を、境界条件を介して、解の領域内部に採られた選点における未知量を固有ベクトルとする固有方程式で表わし解析している。

二次元弾性問題への応用は、例えば Schack と Little¹⁰⁾ が、有孔板の解析で応力関数に含まれる係数を決定するのに用い、Knostmann と Silverman¹¹⁾ は、自由境界を有する無孔板の解析で応力関数を固有関数で展開し、それに含まれる未定係数を定めている。これらの研究は、微分方程式は満足するが境界条件は満足しない試行関数（境界法と呼ばれる）による場合で、弾性学の分野における Point matching method と等価である。

板の曲げ問題には、Point matching method による研究は数多い。これらの研究の多くは任意形状板の解析を意図したもので、例えば Conway¹²⁾ による三角板の解析、芳村ら¹³⁾ による台形板の解析などがある。Leissa¹⁴⁾ は、選点法、Galerkin 法、Rayleigh - Ritz 法などのいくつかの方法を板の曲げ問題に適用し、解を比較している。

板の固有値問題では、Klein と Cox¹⁵⁾ が内部法により正方形固定板の座屈問題を解析し、板中央点のみを選点に採るだけで良好な解が得られることを示し、Conway とその協力者らは^{16, 17)}、境界法を用いて種々の形状の板の基本固有振動数と座屈荷重を求めている。水上と西岡¹⁸⁾ は、試行関数を Legendre 多項式に展開する方法により矩形板の固有振動問題を解析した。Subramanian と Mathew¹⁹⁾ は、内部法を採用し、試行関数に含まれる未定係数を微分方程式の残差条件のみならず、その導関数をも零とすることにより解の高精度化を図る方法を述べ、梁と矩形板の固有振動数を求めている。著者と Yoshimura²⁰⁾ は、混合法を採用し、相対する 2 辺が単純支持され、他の 2 辺が任意の支持の Mindlin 板の固有振動問題を解析している。

殻に関する研究のうち、静的な問題への適用には、例えば境界法により浅い球殻の曲げ問題を解析した Conway と Leissa²¹⁾ の研究、同じく境界法により円筒殻の応力集中問題を扱った桜井²²⁾ の研究がある。殻の固有振動問題への適用は、著者と芳村が混合法により、任意形状の回転殻の解析がなされ^{23, 24)}、また同様な手法が形状の異なる殻が組合さった場合に用いられている²⁵⁾。さらに、せん断変形・回転慣性の影響を取り入れた修正理論に基づく梁、板、回転殻の固有振動問題のうち二点境界値問題として記述される場合について、一般的な解法を示している²⁶⁾。殻の動的応答問題への適用は、著者と芳村が選点法を支配方程式の空間領域の離散化手法として用い、回転殻の構造振動問題^{27, 28)} および応力波伝播問題^{29, 30)} を解析している。

上述の選点法は、近似解を領域内部に採られた点あるいは境界上の点のみで、微分方程式あるいは境界条件を満足させるもので、いわばPoint collocationとも呼ばれるものである³⁰⁾。これに類似な手法で、近似解に含まれる未定係数を定めるために、必要な数の連立方程式を与えるのに十分な数の分割領域を考え、そのおのおので微分方程式の残差関数の積分を零とする、Subdomain collocation³⁰⁾、部分領域法 (Subdomain method)²⁾、あるいは領域分解法 (Partition method)³¹⁾とも呼ばれる手法が、特に回転殻の解析に適用されている。Langharrとその協力者は試行関数に3次のHermite補間多項式を用いて、円筒殻の曲げ問題³¹⁾や、双曲殻の安定問題³²⁾を解析している。また同様な手法がBoresiらにより用いられ、回転殻の固有振動問題³³⁾、円筒殻と円錐殻の接続系の応力問題³⁴⁾が解かれている。さらにBoresiとJerath³⁵⁾は、この手法も含み、いくつかの重みつき残差法により定式化した回転殻の有限要素を開発している。

1-3 研究の概要

本論文は、梁、板および回転殻の時間依存の問題のうち、その支配方程式が時間に関して2階の偏微分方程式で表わされ、空間に関しては二点境界値問題として記述可能な場合を対象にし、空間領域の離散化手法としての選点法の適用可能性および有効性に関する著者の研究をまとめたものである。

本論文は7章から構成されるが、各章ごとの内容は次の通りである。

第2章は、本論文で用いる選点法について、その概略および定式化のための準備について述べたものである。本論文の選点法は、性質の異なる問題への適用を容易にし、かつ統一的な定式化手順を確立するため、微分方程式も境界条件も満足しない試行関数(混合法)の採用および数値解の高精度化を図るため領域(要素)分割の導入を前提としている。それゆえ、支配方程式、境界条件および隣接要素上の結合点(要素分割点)における結合(接続)条件式が与えられさえすれば、試行関数に含まれる未定係数または時間の関数を定めるのに必要なすべての条件式の具体形が、一定の手続きにしたがって、マトリックス形式で機械的に得られるように、支配方程式に現われる空間座標の1~4階の導関数と未定係数あるいは時間に関する未知関数の間の関係式について述べる。また解の妥当性に大きな影響を与える選点の取り方については、選点法と類似な定式過程を踏み、関数近似に用いられる補間多項式の標本点の選び方、および選点法と仮想仕事の原理に基づく近似解法の等価性の観点から検討して、選点を直交多項式の零点に選べば数値解は一層信頼できるものになることを示す。

第3章と第4章は、固有値問題について述べている。

第3章は固有振動問題を扱っている。この問題の解(固有振動数、固有振動モード)は、構造物

の動的特性を議論する上にも必要不可欠であり、得られた数値解の精度は、動的応答解析での変形・応力の応答値の精度に密接に関係する。それゆえ本章では、全体を三つの部分に分け、梁、板および回転殻の固有振動問題を述べている。

I 部では Timoshenko 梁を取り上げ、固有振動問題は解の領域内部（あるいは要素ごとの内部）に採られた選点での未知量を固有ベクトルとする内部選点固有方程式と、境界条件が指定される点および隣接要素間の結合点に採られる端点での未知量を固有ベクトルとする端点固有方程式の二つの型で定式化が可能なることを示す。次に数値解析を実施し、選点の取り方、選点数および要素分割数の解の精度に及ぼす影響を明らかにし、ついでせん断変形・回転慣性の影響を取り入れた修正理論に基づく本解析手法は、比較的薄い梁に対しても何ら特別な工夫も必要とせず、妥当な解が得られることを有限要素法の結果と対比しつつ示す。

II 部では、優れた力学的特性ゆえに各種の構造物に多岐にわたって使用され、従来厳密解が得られるのが限られた場合である回転殻の問題を扱っている。ここでは、まず Novozhilov の殻理論に基づいて、任意形状回転殻および任意の支持条件に適用できるような形で、問題を定義するのに必要な条件式的具体形を一括して示す。次に内部選点固有方程式に基づく数値解析を行ない、本手法の妥当性を検討する。具体的には円筒殻および球殻という、それぞれ定数係数および変数係数の微分方程式で与えられる基本的な形状に対して、本手法の適用可能性および数値解析上の特性を検討する。次に、円錐殻および双曲殻を解析し、本手法の任意形状の回転殻への適用性を検討する。最後に、円筒殻と球殻の接合系の固有振動解析を試みる。本手法によって得られた結果は、厳密解その他の解と比較検討され、本手法は比較的少ない自由度数で高精度の解が得られ、他の解法に見受けられる数値計算の困難性を克服するための工夫も要求されない極めて直接的な解法であることを明らかにする。

III 部では、相対する 2 辺が単純支持され、他の 2 辺が任意の支持条件およびこの方向に厚さが直線的に変化する矩形 Mindlin 板を取り上げる。II 部と同様に、問題を定義するのに必要な条件式的具体形を与え、内部選点固有方程式に基づく数値計算を行なう。数値計算例では、まず、種々の境界条件の等厚板に対して示し、得られた結果を既知の厳密解その他と比較検討し、本手法の妥当性を明らかにする。次に、従来解かれることの少なかった変厚板の解析を行ない、本手法の結果は厚さと辺長の比を小さくすれば、古曲板理論の結果に漸近することを確認すると共に、この種の Mindlin 板の動特性を明らかにする。

なお II、III 部での手法は、空間領域の一方方向に Fourier 級数展開をもちいて二次元問題を一次元に還元し、その連立常微分方程式に選点法を適用した、半解析的手法である。

第 4 章は、外力が構造物の変形に伴ってその作用方向が変化する、いわゆる非保存系の弾性安定問題に対する選点法の有効性を柱、梁に対して検討したものである。ここでは、微小の外乱を与えた運動方程式を解き、荷重の変化に対する固有振動数の変化より、安定、不安定の別を判定する方

法に従って、考察している問題を内部選点固有方程式へと帰着させる。数値計算例では、非保存系の代表的な問題である接線方向集中力を受ける Beck の問題、種々の境界条件に対して等分布接線荷重および直線分布接線荷重が作用する場合を解析し、本手法の妥当性を検討する。なお、非保存系の弾性安定問題は、考察している系の複素固有値を求める非自己随伴境界値問題として定式化されるものであり、実固有値を求める随伴境界値問題として定式化される第 3 章の固有振動問題と性質は大きく異なる。それゆえ、数値計算例においては、非自己随伴境界値問題の性質と選点法による空間の近似度に関連した数値計算上の留意点についても述べる。

第 5 章と第 6 章は、動的応答問題について述べている。

第 5 章では、構造物の動的挙動が低次の振動数モードによって支配される構造振動問題の解析を回転殻に対して述べる。ここでは、Novozhilov の殻理論に基づき、階数低下された支配方程式に選点法を適用して空間を離散化し、時間に関する 2 階の連立常微分方程式を導く過程を記述する。数値計算例においては、変位・応力の時間応答を求める問題は解が場の大域的な性質に支配させる第 3、4 章の固有値問題と異なり、局所的な性質が重要となる問題のため、まず、円筒殻と球殻の静的負荷の問題を解析し、境界近傍および荷重点近傍の応力集中に対する追従性の確認、解の精度に及ぼす要素分割数、選点数の影響の検討を行なう。また空間領域の離散化の近似度の判定に、支配方程式の平均二乗残差が有効であることを示す。次に、軸対称、非軸対称荷重を受ける球殻、円筒殻の動的応答問題を、時間方向の積分に直接積分法を用いて解析し、本手法は、回転殻の構造振動問題を簡便にしかも比較的精度よく解析し得る実用的手法であることを明らかにする。

第 6 章は、低次のみならず高次の振動数モードにも支配され、局所的な波の伝播を追跡する波動伝播の解析を回転殻に対して述べている。ここでは、応力波の伝播問題の解析で、重要な役割を果たすせん断変形・回転慣性の影響を考慮した修正殻理論に基づき、空間と時間領域に対する離散化手法の組合せとして、選点法と陽解法、および選点法と陰解法を適用して構成される二つの解析アルゴリズムを提示する。応力波伝播の解析においては、空間的に不連続な解を持つという応力波伝播問題の特性のために、構造振動問題に対する以上の高精度な空間近似が要求される。そのため、大次元マトリックス演算の必要性和それに伴う解の精度低下が予想されるので、提示した手法では解が比較的度数の低いマトリックス演算によって得られるような工夫を行う。さらに、選点法と陽解法の組合せの場合には、安定性を失わないための時間刻みの最大値と選点法の適用により得られる固有値の関連性を明らかにする。数値計算例においては、まず、応力波形が伝播に伴い変化する場合および変化しない場合の問題として、それぞれ Timoshenko 梁の横衝撃および棒の縦衝撃という基本的な問題を取り扱う。ついで、回転殻に対する数値計算例においては、横衝撃荷重を受ける円筒殻を解析し、解析結果に与える空間と時間の離散化因子（選点数、要素分割数および時間刻み）の影響を明らかにする。つぎに、本解析法の任意形状回転殻への適用性を確認する意味で、横衝撃荷重を受ける片持形式の双曲殻を解析し、その応力波伝播特性を解明する。

第7章は総括で、各章の具体的な問題に対する本解析法の適用可能性および数値解析上の特性を述べ、結びとしている。

第 1 章 参 考 文 献

- 1) Finlayson, B.A. and Scriven, L.E. : The method of weighted residuals—
A review, Appl. Mech. Rev., Vol.19, pp.735-748, 1966.
- 2) Finlayson, B.A. : The Method of Weighted Residuals and Variational Principles,
Academic Press, 1972.
- 3) Frazer, R.A., Jones, W.P. and Skan, S.W. : Approximations to functions and to
the solutions of differential equations, Great Britain Aero. Res. Counc. London,
Rep. and Memo. No.1799. Reprinted in Great Britain Air Ministry Aero. Res.
Comm. Tech. Rep., Vol.1, pp.517-549, 1937.
- 4) Lanczos, C. : Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions,
J. Math. Phys., Vol.17, pp.123-199, 1938.
- 5) Wright, K. : Chebyshev collocation method for ordinary differential equations,
Comp. J., Vol.6, pp.358-365, 1964.
- 6) Villadsen, J.V. and Stewart, W.E. : Solution of boundary-value problems by
orthogonal collocation, Chem. Eng. Sci., Vol.22, pp.1483-1501, 1967.
- 7) Russell, R.D. and Varah, J.M. : A comparison of global methods for two-point
boundary value problems, Math. Comp., Vol.29, pp.1-13, 1975.
- 8) Nubar, Y. : Analysis of the general beam-column by the collocation method,
J. Aeronaut. Sci., Vol.11, pp.165-173, 1944.
- 9) Mikami, T. and Yoshimura, J. : On some eigenvalue problems of beams and columns
by the collocation method, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.29, Univ. of
Tokyo Press, pp.307-318, 1981.
- 10) Schlack, A.L. and Little, R.W. : Elastostatic problem of a perforated square
plate, Proc. of ASCE, Vol.90, No. EM5, pp.171-187, 1964.
- 11) Knostmann, H.D. and Silverman, I.K. : Collocation and eigenfunctions in plate
elastostatics, Proc. of ASCE, Vol.94, No. EM3, pp.797-810, 1968.
- 12) Conway, H.D. : Triangular plates analyzed by point matching, J. Appl. Mech.,
Vol.29, pp.755-756, 1962.
- 13) 芳村仁, 榊信昭 : 選点法による台形板の解析について, 土木学会北海道支部論文報告集,
第31号, pp.1-4, 1974.
- 14) Leissa, A.W. et al. : A comparison of approximate methods for the solution of
plate bendings problems, AIAA Journal, Vol.7, pp.920-928, 1968.
- 15) Klein, B. and Cox, H.L. : Approximate structural analysis by the method of
collocation, J. Aeronaut. Sci., Vol.21, p.719, 1954.
- 16) Conway, H.D. and Leissa, A.W. : A method for investigating certain eigenvalue
problems of the buckling and vibration of plates, J. Appl. Mech., Vol.27,
pp.557-558, 1960.
- 17) Conway, H.D. and Farnham, K.A. : The free flexural vibrations of triangular,
rhombic and parallelogram plates and some analogies, Int. J. Mech. Sci.,
Vol.7, pp.811-816, 1965.

- 18) 水上隆男, 西岡隆 : Legendreの多項式を用いた折板構造の一振動解析, 土木学会論文報告集, 第277号, pp.1-14, 1978.
- 19) Subramanian, G. and Mathew, T.V. : On a method of collocation by derivatives, J. Sound Vib., Vol.71, pp.458-461, 1980.
- 20) Mikami, T. and Yoshimura, J. : Application of the collocation method to vibration analysis of rectangular Mindlin plate, Comput. Struct., Vol.18, pp.425-431, 1984.
- 21) Conway, H.D. and Leissa, A.W. : Application of the point-matching method to shallow-spherical-shell theory, J. Appl. Mech., Vol.29, pp.745-747, 1962.
- 22) 桜井考昌 : 剛体円柱に斜交する薄肉円筒シェルの応力集中について, 土木学会論文報告集, 第265号, 1977.
- 23) 三上隆, 芳村仁 : 選点法による回転殻の固有振動数の解析, 土木学会論文報告集, 第335号, pp.69-78, 1983.
- 24) Mikami, T. and Yoshimura, J. : Free vibration of shells of revolution by the collocation method, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.30, pp.323-334, Univ. of Tokyo Press, 1982.
- 25) Mikami, T. and Yoshimura, J. : Free vibration analysis of cylindrical shells with spherical cap by the collocation method, 北海道大学工学部研究報告, pp.1-9, 1985.
- 26) 三上隆, 芳村仁 : 選点法による固有値問題の解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第10巻, pp.10-15, 1986.
- 27) 三上隆 : 空間領域に選点法を用いた回転殻の静的および動的問題の解析, 土木学会論文報告集, 第341号, pp.69-78, 1984.
- 28) Mikami, T. and Yoshimura, J. : Collocation method for static and dynamic analysis of shells of revolution, Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido University, Vol.17, No.4, pp.318-328, 1985.
- 29) Mikami, T. and Yoshimura, J. : Application of the collocation method to static and dynamic analysis of shells of revolution, Proc. of the Fifth ASCE-EMD Specialty Conference, Vol.1 Engineering Mechanics in Civil Engineering, pp.205-208, 1984.
- 30) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity & Plasticity, 3rd ed., Pergamon Press, 1982.
- 31) Langhaar, H.L. and Chu, S.C. : Piecewise polynomials and the partition method for ordinary differential equations, Development in Theoretical and Applied Mechanics, Vol.8, Pergamon Press, pp.553-564, 1970.
- 32) Langhaar, H.L. et al. : Stability of hyperboloidal cooling tower, Proc. of ASCE, Vol.96, No. EM5, pp.753-779, 1970.
- 33) Stoneking, J.E. and Boresi, A.P. : A theory for free vibration of orthotropic shells of revolution, Nucl. Engng. and Des., Vol.14, pp.271-285, 1970.

- 34) Sharma, S.K. and Boresi, A.P. : Finite element weighted residual method ; Axisymmetric shells, Proc. of ASCE, Vol.104, No. EM4, pp.895-909, 1978.
- 35) Jerath, S. and Boresi, A.P. : Stress analysis of bins by shell bending theory, Proc. of ASCE, Vol.105, No. ST6, pp.1069-1087, 1979.
- 36) 三上隆, 芳村仁 : 選点法による回転殻の応力波伝播問題の解析, 土木学会論文集, 第374号 / I-6, pp.319-328, 1986.

第 2 章 選 点 法

2-1 概 説

選点法は、現象を支配する微分方程式とそれに課せられる適切な初期、境界条件のもとに、工学問題に対する近似解を得ようとする数値解析技術であり、モーメント法、Galerkin法、最小二乗法などと共に重みつき残差法の一つとして位置づけられている^{1,2)}。

本章は、次章以下の具体的問題において、空間領域の離散化手法として用いる選点法の概略を述べる。

以下、2-2では選点法の原理をモデル問題を取り上げて説明し、また試行関数について記述する。2-3では、考察している問題の微分方程式と境界条件が与えられさえすれば、問題を定義するのに必要な条件式を、一定の規則に従って、比較的簡単な手続きで得るための準備を行う。2-4では、選点法を有効に適用して問題を解く上の重要な因子である選点の選択について述べる。

2-2 選点法の概略

時間に依存する連続体問題は、空間および時間の座標である独立変数と場の変数（変位、応力など）を従属変数とする偏微分方程式によって表現される。本論文で対象とする偏微分方程式は、時間については2階、空間については高々4階の方程式であり、かつ空間に対しては何らかの方法により一次元に還元された二点境界値問題として記述される場合である。

選点法による空間領域の離散化手続きを説明するため、区間 $[0, \ell]$ における偏微分方程式(2-1)と境界上で規定される境界条件(2-2)を取り上げる。

$$L_1(\ddot{u}) + L_2(u) = f(x, t), \quad 0 < x < \ell \quad (2-1)$$

ここで、 u ：従属変数、 x, t ：それぞれ空間と時間の独立変数、 $(\dot{\quad}) = \partial(\quad)/\partial t$ 、 f ：外力項に相当する既知の関数、 L_1, L_2 ： x に関する線形微分演算子。

$$B_i(u) = 0, \quad (i = 1 \sim m) \quad (2-2)$$

ここで、 B_i ：線形微分演算子、添字 i は問題の完全な解を得るために必要な境界条件の数に対応する。

さらに、式(2-1)が外力項をもたない場合、 $u(x, t)$ を $e^{i\lambda t} u(x)$ の形で表わし時間依存性を取り除けば、固有値 λ^2 と固有関数 $u(x)$ を求める固有値問題に帰着する。

$$L_2(u) - \lambda^2 L_1(u) = 0 \quad (2-3)$$

また、式(2-1)は静的なつりあい状態では、次式で表わされる問題となる。

$$L_2(u) - f(x) = 0 \quad (2-4)$$

選点法の適用は、基本的に二つの段階が含まれる。第一の段階は、まず、なんらかの形に場の従属変数の一般的な挙動を近似し、次に、この近似式を微分方程式と境界条件に代入して、空間領域を離散化するための条件式を導き出すことである。

第二の段階は、第一段階で得られた条件式を解くことにより、近似解を決定することである。

説明を具体的にするために、式(2-1)～(2-4)で与えられる問題を考えることにする。

第一の段階は、未知の正解 u を \tilde{u} で近似する。ただし、 \tilde{u} は未知係数と空間座標の関数の積か、あるいは空間座標の関数と時間座標の関数の積の形で表わされるものとする。

$$u \approx \tilde{u} = \sum_{i=1}^n a_{i-1} \phi_i(x) \quad (2-5)$$

ここで、 $\phi_i(x)$ は試行関数と呼ばれる仮定した関数、 a_i は未知係数か、時間変数によって表わされる未知関数である。

選点法を適用する際に重要なことの一つは、試行関数の選択である。この選択を Collatz³⁾ の定義に従えば、次のように分類できる。

- ① 境界法 (Boundary method) : 微分方程式は満足するが、境界条件を満足しない試行関数。
- ② 内部法 (Interior method) : 境界条件は満足するが、微分方程式を満足しない試行関数。
- ③ 混合法 (Mixed method) : 微分方程式も境界条件も満足しない試行関数。

試行関数は、与えられた問題に応じて決めるべきものであり、問題に課せられた条件の多くが満たされるような試行関数を採用するのが最も望ましい。しかし、微分方程式が高階多元かつ変数係数で与えられる場合には、その解を厳密に求めることが困難となり、境界法の適用が難しい。また境界上で曲げモーメント、せん断力などの力学的境界値が与えられた場合、これらは、一つまたはそれ以上の従属変数に関する高次微係数を含むので、あらかじめ与えられた境界条件を完全に満足する試行関数を準備することができない場合が多く、内部法の適用が困難となる。結局、適用の容易さから判断すれば、混合法が最も適切と考えられる。しかも、あらかじめ高次の項を含む試行関数を用い、もし必要ならば解領域をいくつかの領域(要素)に分割し、各要素に選点法を適用するようにすれば、この試行関数の選択は問題の解に大きな影響を与えないであろう。さらにこの方法によれば、定数係数および変数係数の連立微分方程式に対して、その従属変数の個数に無関係に、また与えられた任意の境界条件の解析を目的とした統一的な解析手法の確立が可能となる。

本論文では、上述の理由から、試行関数には微分方程式も境界条件も満足しない混合法を採用し、式(2-5)の n 個の関数 $\phi_i(x)$ はベキ級数で、 n は解領域の内部に M 個の自由度を持たせ、満足すべき境界条件式の個数 m を考慮して、それぞれ次のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i(x) &= x^{i-1} \quad (i = 1 \sim n) \\ n &= M + m \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

さて、式(2-5)を微分方程式(2-1)、(2-3)および(2-4)に代入すれば、それぞれ次のように表わされる残差Rが生じる。

$$\left. \begin{aligned} R_1(x, t) &= L_1(\ddot{\tilde{u}}) + L_2(\tilde{u}) - f(x, t) \\ R_2(x) &= L_2(\tilde{u}) - \lambda^2 L_1(\tilde{u}) \\ R_3(x) &= L_2(\tilde{u}) - f(x) \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

領域内のM個の点(以下、Mを内部選点数と呼ぶ)で残差を零とすることによって、パラメータ a_i に関するM個の条件式が決定される。これらの条件式は、重みつき残差法の方法に従えば、次のような性質を持っているDiracの δ 関数

$$\left. \begin{aligned} \delta(x - x_i) &= 0, \quad x \neq x_i \\ \delta(x - x_i) &= \infty, \quad x = x_i \\ \int_{-\infty}^{\infty} G(x) \delta(x - x_i) dx &= G(x_i) \end{aligned} \right\} \quad (2-8)$$

を重み関数として、次のように表現される。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\ell R_1(x, t) \delta(x - x_i) dx &= R_1(x_i, t) = 0 \\ \int_0^\ell R_2(x) \delta(x - x_i) dx &= R_2(x_i) = 0 \\ \int_0^\ell R_3(x) \delta(x - x_i) dx &= R_3(x_i) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-9 \text{ a} \sim \text{c})$$

ここで、 $i = 1 \sim M$ 、 x_i は解領域内で指定された選点である。残りのm個の条件式は、式(2-5)を境界条件式(2-2)に代入することにより、次のように表わされる。

$$B_i(\tilde{u}) = 0, \quad (i = 1 \sim m) \quad (2-10)$$

以上、式(2-9)および式(2-10)によって、考察している問題の空間領域の近似が完了し、 $(M+m)$ 個の条件式によって表わされた。それらは、 a_i に関して解かれる代数方程式系か常微分方程式系のどちらかを表わすことになる。

いままでの議論では、解の全領域を仮定した。しかし、式(2-1)、(2-3)および式(2-4)は解領域のどの点においても成立するので、全領域での任意の部分領域あるいは要素に対しても成立する。したがって、解の全領域をいくつかの要素に分割して、個々の要素に注目することにし、その度に一つの要素に対してのみ成立する式(2-5)と同様な局所的な近似を定義する。

こうして、各要素に選点法を適用すれば、各要素の内部で選ばれた選点における残差の条件より、要素挙動を支配する方程式は次のように書くことができる。いま、解の全領域がN個の要素からなるものとし、例えば式(2-9 a, b)は、

$$\left. \begin{aligned} \int_{x^{(k)}} R_1^{(k)}(x^{(k)}, t) \delta(x^{(k)} - x_1^{(k)}) dx^{(k)} = R_1^{(k)}(x_1^{(k)}, t) = 0 \\ \int_{x^{(k)}} R_2^{(k)}(x^{(k)}) \delta(x^{(k)} - x_i^{(k)}) dx^{(k)} = R_2^{(k)}(x_i^{(k)}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-11)$$

ここで、 $i = 1 \sim M^{(k)}$, $k = 1 \sim N$, 上付き添字 (k) は、いままでと同様に、範囲を一つの要素に制限したことを意味する。また

$$\left. \begin{aligned} R_1^{(k)}(x^{(k)}, t) = L_1(\ddot{u}^{(k)}) + L_2(\tilde{u}^{(k)}) - f^{(k)}(x^{(k)}, t) \\ R_2^{(k)}(x^{(k)}) = L_2(\tilde{u}^{(k)}) - \lambda^2 L_1(\tilde{u}^{(k)}) \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

さらに、

$$\left. \begin{aligned} u^{(k)} \approx \tilde{u}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n^{(k)}} a_{i-1}^{(k)} \phi_i^{(k)}(x^{(k)}) \\ \phi_i^{(k)}(x^{(k)}) = x^{(k)i-1} \\ n^{(k)} = M^{(k)} + m \end{aligned} \right\} \quad (2-13 \text{ a} \sim \text{c})$$

空間の近似は、式(2-11)で与えられる条件式のほかに、境界条件より定まる条件式および隣接要素上の結合点(分割点)における結合条件式(接続条件式)を考慮することにより完了する。本節ではこれ以上の議論はしないが、次章以下の個々の問題に対しては、その度に空間近似の条件式の具体形を与えることにする。

第二の段階は、第一段階で得られた条件式、すなわち代数方程式系あるいは常微分方程式系を解いて、式(2-5)または式(2-13 a)によって未知の場の変数 u , $u^{(k)}$ の近似的表示を得ることである。その際方程式系はマトリックス表示した場合、非対称となることには注意を要する。特に大次元となる場合は、既存の数値計算法は扱える大きさに制約があること、また有限要素法に関連して開発された方法も対称性を前提としているために利用できないなどの問題点が生じる。しかし、この数値計算上の問題点は、次節で述べる数値計算の簡易化のための関係式(2-26)を用い、次章以下で述べる空間近似の条件式の記述の一般化(内部選点における未知量と他の未知量に分離表示すること)に考慮を払えば、最終的には解くべき方程式は比較的小さなものへ変換できて避けられる。また最近では、非対称、大次元マトリックスの数値計算法に関する研究が精力的に行われている(4~8)。

2-3 数値計算簡易化のための準備

前節では、選点法の適用の結果、空間近似のための条件式は、何ら物理的意味を持たない未定係数に関する代数方程式系および未定関数に関する常微分方程式系として得られた。したがって、方程式系が一連の選ばれた点での関数値（変位、応力の値）を見出すような形で表わされれば、数値計算上はより好都合となるだろう。以上の観点から本節では、解の全領域がいくつかの要素に分割された場合も個々の要素に直接適用できる形で、現象を支配する常・偏微分方程式に現われる空間に関する導関数と要素内に配置される一連の点における関数値を結びつける関係式を導く。

一般に現象を支配する常・偏微分方程式は、複数の従属変数で記述されるが、議論を容易にするため、ここでは一つの従属変数の場合を取り扱うことにする。また、本論文で計算対象とした構造要素（梁、板、殻）の支配方程式において、個々の従属変数に作用する線形微分演算子は、せん断変形・回転慣性の影響を無視した古典理論による場合は高々4階、せん断変形・回転慣性を考慮した修正理論による場合は高々2階である。以上の点を考慮して、本節では一つの従属変数で表わされた、空間に関して4階および2階の微分方程式を取り上げる。

空間に対して一次元の場の問題が、図2-1(a)に示すようにいくつかの要素に分割されたと仮定し、任意の要素を(k)要素で表わす。また図の●印で示された位置は、境界条件が指定される境界点あるいは隣接要素との結合点を表わすものであり、今後は各要素の両端に位置するとの意味で、端点と総称する。

(k)要素内で0から1までの間にある空間に対する局所座標系 ξ と時間の次元を有するパラメータ t^* で無次元化された時間に対する独立変数 τ 、

$$\xi = x / \ell(k), \quad \tau = t / t^* \quad (2-14)$$

ただし、 $\ell(k)$: 要素長

を用いて、支配方程式(2-1)、(2-3)および式(2-4)を次のように書き改める。

$$\left. \begin{aligned} L_1(\ddot{u}(k)) + L_2(u(k)) &= f(k)(\xi, \tau) \\ L_2(u(k)) - \lambda^2 L_1(u(k)) &= 0 \\ L_2(u(k)) - f(k)(\xi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-15)$$

ここで、 $() = \partial() / \partial \tau$ 、 L_1 と L_2 は、これまでと同様に線形微分演算子を表わし、例えば、

$$L_2(k) = \sum_{i=0}^{2P} b_i(k)(\xi) \frac{\partial^i u(k)}{\partial \xi^i} \quad (P=1 \text{ または } P=2) \quad (2-16)$$

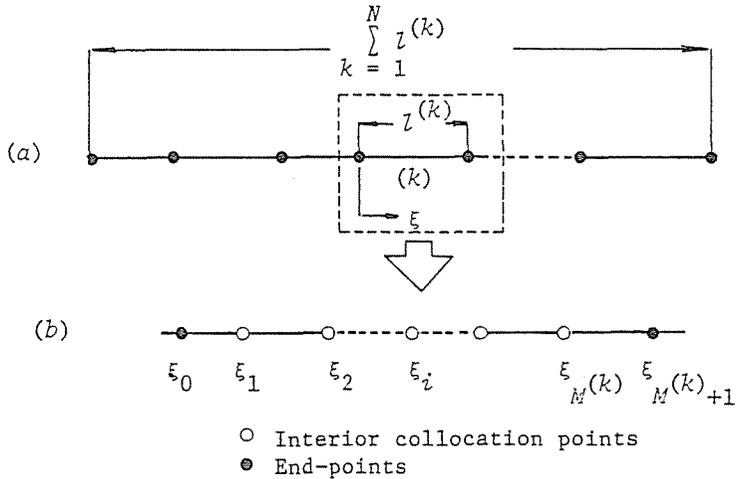


図2-1 1次元の場の問題の解析モデル (a) N個の要素からなる離散化された解の領域, (b) 代表要素の内部選点と端点の配置状況

ここで、 $b_i(\xi)$ は係数であり、 $P = 1$ の場合は L_2 は2階の演算子、 $P = 2$ の場合は L_2 は4階の演算子を表わす。さらに、端点における境界条件式や結合条件式（接続条件式）は、一般に次のような演算子で表わされる。

$$B_i(u^{(k)}) = \sum_{i=0}^{2P-1} d_i^{(k)}(\xi) \frac{\partial^i u^{(k)}}{\partial \xi^i} \quad (P = 1 \text{ または } P = 2) \quad (2-17)$$

ここに、 $d_i(\xi)$ は係数であり、演算子の添字 i は、問題の完全な解を得るために必要な端点における境界条件や結合条件の数に対応する。

(k)要素の試行関数は、式(2-5)、(2-6)および式(2-13)に類似なものが用いられる。このとき、(k)要素内部に $M^{(k)}$ 個の自由度（内部選点）を持たせ、端点における境界条件および結合条件の数を考慮して、支配方程式が4階の微分演算子で記述される場合には $M^{(k)} + 4$ 項で、2階の微分演算子の場合には $M^{(k)} + 2$ 項で近似する。

$$\left. \begin{aligned} u^{(k)} &\approx \tilde{u}^{(k)} = \sum_{i=1}^{n^{(k)}} a_{i-1}^{(k)} \xi^{i-1} \\ n^{(k)} &= M^{(k)} + 2P \quad (P = 1 \text{ または } P = 2) \end{aligned} \right\} \quad (2-18)$$

後の式の展開上、上式を2つの部分に分けて表示しておく。

$$u^{(k)} \approx \tilde{u}^{(k)} = \sum_{i=1}^{M^{(k)}+2} a_{i-1}^{(k)} \xi^{i-1} + \sum_{i=M^{(k)}+3}^{M^{(k)}+4} a_{i-1}^{(k)} \xi^{i-1} \quad (2-19)$$

式(2-19)で右辺の第2項目を無視すれば、2階の微分演算子で表わされる支配方程式の試行関数となる。

式(2-16)および式(2-17)に現われる空間に関する導関数を、図2-1(b)に示すような要素内部に採られた選点 ξ_j ($j=1\sim M^{(k)}$)および端点 $\xi_0=0$, $\xi_{M^{(k)}+1}=1$ における $u^{(k)}$ の関数値に結びつける関係式を導く。まず、式(2-19)を用いて、一連の点 ξ_j ($j=0, 1\sim M^{(k)}+1$)における関数値を求めると次のようにマトリックス表示される。

$$\{ u^{(k)} \}_\tau = [V] \{ a_*^{(k)} \}_\tau + [H] \{ a_{**}^{(k)} \}_\tau \quad (2-20)$$

ここで、ベクトルに付された添字 τ は、式(2-18)の $a_i^{(k)}$ が時間に依存することを意味している。したがって、 $a_i^{(k)}$ が未定係数の場合には、添字 τ が取り除かれて表わされるものとする。式(2-20)において、 $(M^{(k)}+2)$ 次のベクトル $\{ a_*^{(k)} \}_\tau$ と2次のベクトル $\{ a_{**}^{(k)} \}_\tau$ は、

$$\left. \begin{aligned} \{ a_*^{(k)} \}_\tau &= \{ a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \dots, a_{M^{(k)}+1}^{(k)} \}^T \\ \{ a_{**}^{(k)} \}_\tau &= \{ a_{M^{(k)}+2}^{(k)}, a_{M^{(k)}+3}^{(k)} \}^T \end{aligned} \right\} \quad (2-21a)$$

と表わされ、 $(M^{(k)}+2)$ 次のベクトル $\{ u^{(k)} \}_\tau$ は、

$$\{ u^{(k)} \}_\tau = \{ u^{(k)}(\xi_0), u^{(k)}(\xi_1), \dots, u^{(k)}(\xi_{M^{(k)}+1}) \}^T \quad (2-21b)$$

と表わされる。さらに、 $(M^{(k)}+2) \times (M^{(k)}+2)$ のマトリックス $[V]$ と $(M^{(k)}+2) \times 2$ のマトリックス $[H]$ は、次のような成分を有する。

$$V(i, j) = \xi_{i-1}^{j-1}, \quad H(i, \ell) = \xi_{i-1}^{\ell+M^{(k)}+1} \quad (2-22a, b)$$

ただし、 $i, j=1\sim M^{(k)}+2$, $\ell=1, 2$ 。なお、 $[V]$ はVandermondeのマトリックスであり、補間型数値積分則に関係づけられるが、これについては付録に示す。

次に、式(2-19)を ξ について1~4回微分し、一連の点 ξ_j ($j=0, 1\sim M^{(k)}+1$)における微分係数を求めれば、次のようにマトリックス表示できる。

$$\{ u^{(k)\langle r \rangle} \}_\tau = [\bar{A}^{\langle r \rangle}] \{ a_*^{(k)} \}_\tau + [\bar{B}^{\langle r \rangle}] \{ a_{**}^{(k)} \}_\tau, \quad (r=1\sim 4) \quad (2-23)$$

ここで、添字 $\langle r \rangle$ は r 回微分を表わし、 $(M^{(k)}+2)$ 次のベクトル $\{ u^{(k)\langle r \rangle} \}_\tau$ は次のようなものである。

$$\{ u^{(k)\langle r \rangle} \}_\tau = \{ u^{(k)\langle r \rangle}(\xi_0), u^{(k)\langle r \rangle}(\xi_1), \dots, u^{(k)\langle r \rangle}(\xi_{M^{(k)}+1}) \}^T \quad (2-24)$$

さらに、マトリックス $[\bar{A}^{\langle r \rangle}]$ と $[\bar{B}^{\langle r \rangle}]$ は、それぞれ $(M^{(k)}+2) \times (M^{(k)}+2)$ および $(M^{(k)}+2) \times 2$ の大きさで、その成分は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}^{(1)}(i, j) &= (i-1)\xi_{j-1}^{i-2} \\ \bar{A}^{(2)}(i, j) &= (i-1)(i-2)\xi_{j-1}^{i-3} \\ \bar{A}^{(3)}(i, j) &= (i-1)(i-2)(i-3)\xi_{j-1}^{i-4} \\ \bar{A}^{(4)}(i, j) &= (i-1)(i-2)(i-3)(i-4)\xi_{j-1}^{i-5} \end{aligned} \right\} \quad (2-25a)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}^{(1)}(i, \ell) &= (K+1)\xi_{j-1}^K \\ \bar{B}^{(2)}(i, \ell) &= K(K+1)\xi_{j-1}^{K-1} \\ \bar{B}^{(3)}(i, \ell) &= K(K^2-1)\xi_{j-1}^{K-2} \\ \bar{B}^{(4)}(i, \ell) &= K(K^2-1)(K-2)\xi_{j-1}^{K-3} \end{aligned} \right\} \quad (2-25b)$$

ただし、 $i, j = 1 \sim M^{(k)} + 2$, $\ell = 1, 2$, $K = M^{(k)} + \ell$ 。

さて、式(2-20)を $\{a_*^{(k)}\}_\tau$ について解き、式(2-23)に代入すれば、 $\{u^{(k)\langle r \rangle}\}_\tau$ は選点と端点における関数値を成分とするベクトル $\{u^{(k)}\}_\tau$ に結びつけられて、次のようになる。

$$\{u^{(k)\langle r \rangle}\}_\tau = [A^{(r)}] \{u^{(k)}\}_\tau + [B^{(r)}] \{a_*^{(k)}\}_\tau, \quad (r=1 \sim 4) \quad (2-26)$$

ここで、マトリックス $[A^{(r)}]$ と $[B^{(r)}]$ は、それぞれ $(M^{(k)} + 2) \times (M^{(k)} + 2)$ および $(M^{(k)} + 2) \times 2$ の大きさで、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} [A^{(r)}] &= [\bar{A}^{(r)}][V]^{-1} \\ [B^{(r)}] &= [\bar{B}^{(r)}] - [A^{(r)}][H] \end{aligned} \right\} \quad (r=1 \sim 4) \quad (2-27a, b)$$

なお、本論文で取り上げた具体的問題の空間近似は、式(2-26)に基づき行なわれる。

ここで、いま一度マトリックス $[V]$ に検討を加える。式(2-20)で右辺の第2項目を除けば、次式となる。

$$\{y\} = [V] \{a_*\} \quad (2-28)$$

ただし、便宜上 $\{u\}$ を $\{y\}$ に置き換えたが、 $\{y\}$ の意味するところは $\{u\}$ と同様である。なお記述の簡易化のため、添字 (k) とは省略する。式(2-28)は、 ξ 軸上にある区間 $[0, 1]$ 内の相異なる $M+2$ 個の点で正確な関数値 $y(\xi_0), y(\xi_1), \dots, y(\xi_{M+1})$ が与えられたとき、これらの点で正確な関数値に一致するような $M+1$ 次の多項式 $y_{M+1}(\xi)$ を一つ定めるための関係式とみなせる。すなわち、

$$y_{M+1}(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + a_{M+1} \xi^{M+1} \quad (2-29)$$

とおき、次式

$$y_{M+1}(\xi_j) = y(\xi_j), \quad (j=0, 1 \sim M+1) \quad (2-30)$$

を満たす $\{a_*\}$ を求めるための関係式である。

ところで、既に述べたが $[V]$ は Vandermonde のマトリックスである。このマトリックスは、 $\xi_1 \sim \xi_M$ の指定の仕方に大きく依存するが、低い次数の範囲でも特異性が強く、次数の増加と共に急速に条件が悪くなる性質を持っている。しかし、マトリックス $[V]$ は正則であるので、この性質を利用して a_0, a_1, \dots, a_{M+1} を解析的に求め、これらを式 (2-29) に代入すれば、式 (2-30) を満たす $M+1$ 次の多項式、いわゆる Lagrange 補間公式と呼ばれる次式が得られる⁹⁾。

$$y_{M+1}(\xi) = \sum_{j=0}^{M+1} \ell_j(\xi) y(\xi_j) \quad (2-31)$$

ここで、 $M+1$ 次の多項式 $\ell_j(\xi)$ は、次式で与えられる。

$$\ell_j(\xi) = \frac{Y_{M+2}(\xi)}{(\xi - \xi_j) Y'_{M+2}(\xi_j)} \quad (2-32)$$

ただし、 $(\prime) = d(\)/d\xi$ 、 $M+2$ 次の多項式 $Y_{M+2}(\xi)$ は次のようである。

$$Y_{M+2}(\xi) = (\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \cdots (\xi - \xi_M)(\xi - \xi_{M+1}) \quad (2-33)$$

式 (2-31) を用いて、 ξ の $1 \sim 4$ 回微分を行ない、 $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{M+1}$ における微分係数を求めれば次のように表わされる。

$$y_{M+1}^{(r)}(\xi_i) = \sum_{j=0}^{M+1} \ell_j^{(r)}(\xi_i) y(\xi_j) = \sum_{j=0}^{M+1} A^{(r)}(i+1, j+1) y(\xi_j) \quad (2-34)$$

ただし、 $i = 0, 1 \sim M$ 、 $r = 1 \sim 4$ 。上式より明らかなように、 $A^{(r)}(i+1, j+1)$ は式 (2-26) 中に現われるマトリックス $[A^{(r)}]$ の成分を表わしている。この事実は、数値的不安定を示すマトリックス $[V]$ の逆マトリックスを用いずに、式 (2-27) で定義されたマトリックス $[A^{(r)}]$ および $[B^{(r)}]$ を作成できることを示している。

2-4 選点の選択

選点法の定式過程より明らかなように、その適用の第一歩は解の領域内に選ばれた各点において、例えばつりあい問題の支配方程式 (2-4) を用いれば、 $L_2(u) = f(\xi)$ を成立させることである。この過程は、いくつかの標本点で与えられた関数 $y(\xi)$ と値が一致するような補間多項式 $y_n(\xi)$ を求める過程に類似であり、したがって補間多項式の標本点の選び方の基準は、選点法においては選点の選択に対する有用な指針を与えてくれるだろう。

ここでは、式(2-4)で与えられる問題を取り上げて、選点のとり方を検討する。

$$L_2(u) = f(\xi) \quad , \quad 0 < \xi < 1 \quad (a)$$

ただし、 $f(\xi)$ は既知でM回連続微分可能とする。

この問題の近似解 \tilde{u} を境界条件を満たす試行関数を用いて選点 ξ_i ($i=1 \sim M$)で次式、

$$L_2(\tilde{u}) = f(\xi) \quad (2-35)$$

を満足するように定めるとすれば、 $f(\xi)$ はその補間多項式 $L_2(\tilde{u})$ によって次のように近似される¹⁰⁾。

$$f(\xi) = L_2(\tilde{u}) + \frac{1}{M!} \pi(\xi) f^{(M)}(\xi^*) \quad (2-36)$$

ここで、上式の右辺第2項は誤差を表わし、 ξ^* は点 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M$ を含む区間内の1点を表わし、また、

$$\pi(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \cdots (\xi - \xi_M) \quad (2-37)$$

である。式(2-36)を次のように、

$$E(\xi) = f(\xi) - L_2(\tilde{u}) = \frac{1}{M!} \pi(\xi) f^{(M)}(\xi^*) \quad (2-38)$$

書き改める。上式で $E(\xi)$ は誤差関数であり、選点法における残差関数に相当する。

さて、 $E(\xi)$ を区間で可能な限り小さくする問題を、最小二乗近似の立場からとらえれば、次のようになる¹⁰⁾。

$$S_1 = \int_0^1 W(\xi) E^2(\xi) d\xi \quad \rightarrow \quad \min \quad (2-39a)$$

の代りに、

$$S_2 = \int_0^1 W(\xi) \pi^2(\xi) d\xi \quad \rightarrow \quad \min \quad (2-39b)$$

を考えればよい。ただし、式(2-39)中の $W(\xi)$ は区間で非零な重み関数である。式(2-37)の $\pi(\xi)$ は最高次の係数が1である多項式に展開できる。

$$\pi(\xi) = \xi^M + C_{M-1} \xi^{M-1} + \dots + C_1 \xi + C_0 \quad (2-40)$$

ここで、 $C_0 \sim C_{M-1}$ は係数である。上式より次式、

$$\frac{\partial \pi(\xi)}{\partial C_j} = \xi^j \quad , \quad (j=0, 1, \dots, M-1) \quad (2-41)$$

が得られるので、式(2-39b)を最小にする C_j は次式を満足しなければいけない。

$$\frac{\partial S_2}{\partial C_j} = 2 \int_0^1 W(\xi) \frac{\partial \pi(\xi)}{\partial C_j} \pi(\xi) d\xi \quad (2-42a)$$

$$= 2 \int_0^1 W(\xi) \pi(\xi) \xi^j d\xi = 0, \quad (j=0, 1, \dots, M-1) \quad (2-42b)$$

上式が成立するのは、 M 次多項式 $\pi(\xi)$ が区間 $[0, 1]$ で重み関数 $W(\xi)$ のもとで直交多項式になる場合である。このとき、残差関数 $E(\xi)$ も直交多項式で表わされる。すなわち、選点法においては、選点に式 (2-42b) で定義される直交多項式の M 個の零点 ξ_j を採用し、 M 個の点で残差関数 $R(\xi) = E(\xi)$ を零と置けば、近似解に含まれる未定係数を S_2 (式 (2-39b)) が最小になるように定めることができる。なお本節のアプローチとは異なるが、Russell と Varah¹¹⁾ は、選点法は最小二乗法を適用し、最小二乗法の定式化の中に現われる求積を M 点積分公式を用いて評価する場合に同等であることを示している。

さて、視点をかえて、式(a)に変分原理に基礎をおく近似解法を適用してみる。式(a)の近似解として、境界条件を満足する次の関数を考える。

$$\tilde{u} = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \cdots + a_n \varphi_n \quad (2-43)$$

ここで、 a_i は未知パラメータであり、 φ_i は関数別 $\{1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{M-1}\}$ から取られた関数と仮定する。

式(a)は任意の仮想変位 $\delta \tilde{u}$ に対して次式の仮想仕事 (仮想変位) の原理が成立することと等価である。

$$\int_0^1 (L_2(\tilde{u}) - f(\xi)) \delta \tilde{u} d\xi = 0 \quad (2-44)$$

式 (2-43) より得られる

$$\delta \tilde{u} = \delta a_1 \varphi_1 + \delta a_2 \varphi_2 + \cdots + \delta a_n \varphi_n \quad (2-45)$$

を式 (2-44) に代入すれば、

$$\int_0^1 (L_2(\tilde{u}) - f(\xi)) (\delta a_1 \varphi_1 + \delta a_2 \varphi_2 + \cdots + \delta a_n \varphi_n) d\xi = 0 \quad (2-46)$$

となる。任意の δa_i に対して上式が成立するための必要十分条件として次の n 個の方程式が得られる。

$$\int_0^1 (L_2(\tilde{u}) - f(\xi)) \varphi_i d\xi = 0 \quad (i=1 \sim n) \quad (2-47)$$

上式は Galerkin 法にはかならない。

式 (2-47) は、 $W(x) = 1$ と置けば式 (2-42b) に本質的には等価であり、残差関数 $R(\xi) = L_2(\tilde{u}) - f(\xi)$ が直交多項式で表わされるならば成立する。すなわち、区間 $[0, 1]$ で重み関数 $W(\xi) = 1$ をもつ直交多項式の零点を選点に採用すれば、選点法は仮想仕事の原理に等価となる。なお Russell ら¹¹⁾ は、選点法は Galerkin 法を適用し、 M 点積分公式により積分値を近似的に求めるのと同様であることを示している。このことと、Galerkin 法と仮想仕事の原理の等価性を考え合わせれば、選点法と仮想仕事の原理の等価性の成立は当然の帰結であろう。

これまでの記述より、選点には、補間多項式の標本点の選択の立場から議論すれば、式(2-42 b)の直交性を満たす多項式 $\pi(\xi)$ の零点を採用し、選点法と仮想仕事の等価性の立場からは、式(2-42 b)で重み関数 $W(\xi) = 1$ をもつ多項式 $\pi(\xi)$ の零点を採用すればよいことが明らかになった。

式(2-42 b)の直交関係を満足する直交多項式系 $\pi(\xi)$ は、次のようにも定義される。

$$\int_0^1 W(\xi) \pi_j(\xi) \pi_M(\xi) d\xi = 0, \quad (j=0, 1, \dots, M-1) \quad (2-48)$$

ただし、 $\pi(\xi)$ の次数を明らかにするため、添字 j 、 M を付した。重み関数 $W(\xi)$ の選び方は自由度は大きく、例えば、

$$W(\xi) = \xi^\alpha (1-\xi)^\beta, \quad (\alpha > -1, \beta > -1) \quad (2-49)$$

のように選んだとしても、 α と β の条件を満たす直交多項式を任意に作り出すことができる。本論文では実用性を考えて、数値計算の分野でよく知られ、またよく用いられている直交多項式を採用することにする。すなわち、重み関数 $W(\xi) = 1$ ($\alpha = \beta = 0$)をもつ shifted Legendre 多項式 $P_M^*(\xi)$ と $W(\xi) = 1/\sqrt{\xi(1-\xi)}$ ($\alpha = \beta = -1/2$)をもつ shifted Chebyshev 多項式 $T_M^*(\xi)$ を採用し、その零点 ξ_j ($j=1 \sim M$)を選点にとることにする。なお、多項式 $P_M^*(\xi)$ および $T_M^*(\xi)$ はそれぞれ、区間 $[-1, 1]$ で定義される Legendre 多項式 $P_M(\xi)$ および Chebyshev 多項式 $T_M(\xi)$ を区間 $[0, 1]$ に変換したものであり、 $P_M(\xi)$ の零点は Legendre - Gauss の積分公式の分点に、一方 $T_M(\xi)$ の零点は Chebyshev 補間の標本点に用いられている。

以下に二つの多項式 $P_M^*(\xi)$ と $T_M^*(\xi)$ の基本事項を列挙しておこう^{12, 13)}。

① shifted Legendre 多項式, $\pi_M(\xi) = P_M^*(\xi)$

$$\text{Rodrigues の公式; } P_M^*(\xi) = \frac{1}{M!} \frac{d^M}{d\xi^M} \{ \xi^M (1-\xi)^M \} \quad (2-50 a)$$

$$\text{直交関係; } \int_0^1 P_j^*(\xi) P_M^*(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & [j \neq M] \\ 1/(2M+1) & [j = M] \end{cases} \quad (2-50 b)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{漸化式; } P_0^*(\xi) &= 1 \\ P_1^*(\xi) &= 1 - 2\xi \\ MP_M^*(\xi) &= (2M-1)(1-2\xi)P_{M-1}^*(\xi) - (M-1)P_{M-2}^*(\xi) \end{aligned} \right\} (2-50 c)$$

$$\text{零点 } \xi_j; \xi_j = (1 + x_j)/2, \quad (j=1 \sim M) \quad (2-50 d)$$

ただし、 x_j は Legendre 多項式 $P_M(x)$ の零点であり、Legendre - Gauss の積分公式の分点として、ほぼ任意の M に対して数表化されている¹⁴⁾。

② shifted chebyshev 多項式, $\pi_M(\xi) = T_M^*(\xi)$

$$\text{Rodrigues の公式; } T_M^*(\xi) = \frac{(-1)^M 2^{2M} M! \sqrt{\xi(1-\xi)}}{(2M)!} \frac{d^M}{d\xi^M} \left\{ \frac{\xi^M (1-\xi)^M}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} \right\} \quad (2-51 a)$$

$$\text{直交関係: } \int_0^1 \frac{T_j^*(\xi) T_M^*(\xi)}{\sqrt{\xi(1-\xi)}} d\xi = \begin{cases} 0 & [j \neq M] \\ \frac{\pi}{2} & [j = M \neq 0] \\ \pi & [j = M = 0] \end{cases} \quad (2-51b)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{漸近式: } T_0^*(\xi) &= 1 \\ T_1^*(\xi) &= 2\xi - 1 \\ T_M^*(\xi) &= 2(2\xi - 1) T_{M-1}^*(\xi) - T_{M-2}^*(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (2-51c)$$

$$\text{零点 } \xi_j; \xi_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2j-1}{2M} \pi, \quad (j=1 \sim M) \quad (2-51d)$$

なお、多項式 $P_M^*(\xi)$ および $T_M^*(\xi)$ の零点の分布状況は、 $\xi=1/2$ を基準にして対称に配置され、区間の端点 $\xi=0, 1$ 近くで密に、中央部では粗に分布する性質を有している。そのため、境界値問題を解く場合には非常に有利であると考えられる。

付 録

区間 $[0, 1]$ で定義される直交多項式の零点 ξ_j ($j=1 \sim M$) と端点 $\xi_0=0, \xi_{M+1}=1$ で作られるマトリックス $[V]$ は補間型積分則と以下のように関係づけができる。 $[V]$ の作成には端点がかかっているので、関数 $f(\xi)$ の値が区間の両端で計算される次の閉じた型の積分を考える。

$$\int_0^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^{M+1} W_i f(\xi_i) \quad (A-1)$$

ここで、 W_i は重みである。重み W_i は、次式で与えられる誤差 E

$$E(f) = \int_0^1 f(\xi) d\xi - \sum_{i=0}^{M+1} W_i f(\xi_i) \quad (A-2)$$

が、 $f(\xi) = 1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{M+1}$ に対して零になるように定められる。すなわち、次式を解くことにより得られる。

$$[W][V] = [q] \quad (A-3)$$

ここに、マトリックス $[V]$ の成分は式 (2-22a) で与えられ、行マトリックス $[W]$ と $[q]$ は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} [W] &= [W_0, W_1, \dots, W_{M+1}] \\ [q] &= [1/1, 1/2, \dots, 1/(M+2)] \end{aligned} \right\} \quad (A-4)$$

式 (A-1) の結果は、直交多項式 $\pi_M(\xi)$ ($P_M^*(\xi)$ または $T_M^*(\xi)$ を表わす) の零点と端点に基づき、次に示す $f(\xi)$ の補間多項式 $\bar{f}(\xi)$ の積分と同一となる。

$$\bar{f}(\xi) = \sum_{i=0}^{M+1} \frac{\pi_{M+2}(\xi)}{(\xi - \xi_i) \pi'_{M+2}(\xi_i)} f(\xi_i) \quad (\text{A-5})$$

ここに、 $(\prime) = d(\) / d\xi$, $\pi_{M+2}(\xi) = \xi(\xi-1)\pi_M(\xi)$ 。

したがって、重み W_i は次式で与えられる。

$$W_i = \int_0^1 \frac{\pi_{M+2}(\xi)}{(\xi - \xi_i) \pi'_{M+2}(\xi_i)} d\xi, \quad (i=0, 1, 2, \dots, M+1) \quad (\text{A-6})$$

以下に結果を示す。

(a) $\pi_M(\xi) = P_M^*(\xi)$ とする場合

$M=1$ のとき；

$$W_0 = W_2 = 1/6, \quad W_1 = 2/3 \quad (\text{A-7})$$

$M \geq 2$ のとき；

$$\left. \begin{aligned} W_0 = W_{M+1} = 0 \\ W_i = \frac{1}{\xi_i(1-\xi_i) \{P_M^*(\xi_i)\}^2}, \quad (i=1 \sim M) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-8 a, b})$$

となる。特に $M \geq 2$ では、式 (A-8b) で与えられる重みは Legendre Gauss の積分公式の重みの半分に等しい。

(b) $\pi_M(\xi) = T_M^*(\xi)$ とする場合

M が偶数のとき；

$$\left. \begin{aligned} W_0 = W_{M+1} = \frac{1}{2(1-M^2)} \\ W_i = (-1)^i \frac{\cot \theta_i}{M(1-M^2)} + \bar{W}_i, \quad (i=1 \sim M) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-9 a, b})$$

M が奇数のとき；

$$\left. \begin{aligned} W_0 = W_{M+1} = \frac{1}{2(4-M^2)} \\ W_i = (-1)^i \frac{\operatorname{cosec} \theta_i}{M(4-M^2)} + \bar{W}_i, \quad (i=1 \sim M) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-10 a, b})$$

となる。ここで、

$$\theta_i = \frac{(2i-1)\pi}{2M} \quad (\text{A-11 a})$$

$$\bar{W}_i = \frac{1}{M} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\lfloor M/2 \rfloor} \frac{\cos 2k\theta_i}{1-4k^2} \right\} \quad (\text{A-11 b})$$

である。特に $M \geq 2$ では、 W_0 と W_{M+1} は常に負となり、 \bar{W}_i はFejerの公式¹⁵⁾の重みの半分に等しい。

式(A-3)から得られる重みは、式(A-7)～(A-10)で与えた結果と同一となる。この関係は、選点に関するデータのチェックや $[V]$ の逆マトリックスの精度の検討に役立つものである。 $[V]$ の逆マトリックスは、式(2-27)のマトリックス $[A^{< >}]$ および $[B^{< >}]$ の作成のために必要なものである。したがって、 $[V]^{-1}$ の精度の検討は、選点法の適用の結果得られる方程式系の係数マトリックスの数値安定性の判断にも有効である。

第 2 章 参 考 文 献

- 1) Finlayson, B.A. : The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972.
- 2) 鷲津久一郎, 宮本博 他共編 : 有限要素法ハンドブック I.基礎編, 培風館, 1981.
- 3) Collatz, L. : The Numerical Treatment of Differential Equations, Springer-Verlag, 1960.
- 4) Key, J.E. : Computer program for solution of large, sparse, unsymmetric systems of linear equations, Int. J. Num. Mech. Engng., Vol.6, pp.497-509, 1973.
- 5) Hood, P. : Frontal solution program for unsymmetric matrices, Int. J. Num. Mech. Engng., Vol.10, pp.379-399, 1976.
- 6) Dong, S.B. : A block-stodola eigensolution technique for large algebraic systems with non-symmetrical matrices, Int. J. Num. Mech. Engng., Vol.11, pp.247-267, 1977.
- 7) Shimazaki, Y. : Frontal- skyline method for unsymmetric matrices, Proc. of JSCE Structural Eng./Earthquake Eng., Vol.2, No.1, pp.101-108, 1985.
- 8) 戸川隼人 : 非対称固有値問題の新しい解法, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第10巻, pp.7-9, 1986.
- 9) 森正武 : 曲面と曲線, 教育出版, 1978.
- 10) Hilderbrand, F.B. : Introduction to Numerical Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, 1974.
- 11) Russell, R.D. and Varah, J.M. : A comparison of global methods for two-point boundary value problems, Math. Comp., Vol.29, pp.1-13, 1975.
- 12) 伏見康治, 赤井逸 : 直交関数系, 共立出版, 1981.
- 13) Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (ed.) : Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, 1970.
- 14) 一松信 他共編 : 電子計算機のための数値計算法III, 培風館, 1978.
- 15) Davis, P.J. and Rabinowitz, P. (森正武 訳) : 計算機による数値積分法, 日本コンピュータ協会, 1980.

第 3 章 固有振動問題

3-1 概 説

構造物の振動性状を把握することは、その耐震性や耐風性などを解析するために不可欠である。いわば構造物の自由振動性状の把握は、微分方程式の余解を求めることに相当し、地震力などの強制外力に対する解は特解を求めることにほかならない。したがって、動的応答の完全解を知るためには構造物の振動特性を知ることが必須となる。

構造物の自由振動特性の把握は、構造物の固有振動数とその固有振動モードを求める固有値問題に帰着する。固有値問題を記述する基礎方程式は、微分方程式（運動方程式）と境界条件であるが、その解析解を求めることは一般には容易でなく、いきおい、無限の自由度を有する連続体の問題を、有限個の点とか要素に分割する数値解析的な手法（離散化手法）に頼らざるを得ない。

さて、構造要素のうちで、運動方程式が高階多元の微分方程式で与えられる構造要素の一つである回転殻に焦点をあて、その固有振動問題の解析に適用されている解析手法の特徴などを概観しておこう。

境界条件を満足する運動方程式の解を解析的に求めようとする方法は、殻の曲面形状に依存する微分方程式の複雑さに原因して、Warburtonら^{1,2)}の円筒殻、Kalnins³⁾とKunieda⁴⁾による球殻など、極めて限られた形状の殻にしか有効でない。しかも、固有振動数の算出は試行錯誤法により行列式の根を求めるという方法によるため、その欠落には細心の注意が要求される。

回転殻の固有振動問題は、殻の両端部で境界条件が規定されるいわば二点境界値問題でもある。境界値問題を初期値問題に変換し、微分方程式の一般解を基本に組み立てる解法も提案されている。この解法は、マトリックスの掛け算による移項計算を主体とするもので、伝達マトリックス法あるいは行列級数法（Matrix progression method）、Holzer法とも呼ばれ、Carterら⁵⁾、Goldbergら⁶⁾、Tottenhamら⁷⁾およびZarghameeら⁸⁾などの研究報告がある。この解法は、理論体系の明確さ、境界条件を比較的任意に扱えること、および他の解法と比較して、低次の方程式系を扱えばよい特長を有する反面、解法の過程に含まれる数値的不安定性には細心の注意が要求され、特に支間の長い場合や肉厚が薄い場合には、良好な解を得るための何らかの補助的な工夫を要求される。

有限要素法（F.E.M.）による回転殻の研究は数多くなされ、今日なお、要素内変位関数の次数増加による精度向上、曲線要素や曲面要素による殻形状の近似度を向上させる研究が、続けられている^{9~12)}。以上は変位仮定に基づく場合であるが、変位と応力を未知量とする混合法によるアプローチもある^{13,14)}。F.E.M.は、解法の解明さ、任意の境界条件を扱える等の利点がある一方、要素細分割による大次元マトリックス演算の必要性やそれに伴う固有値計算上の精度の低下の問題もある。

差分法（F.D.M.）による解析例もある^{15,16)}。この解法は、周知のように、微分作用素を直接、差分近似し有限個の未知数に関する連立方程式に帰着させるもので、簡便性から種々の回転殻へ適

用されている。しかし、よい近似を得ようとすると格子点数の増加によりたちまち多大な計算量を要求される。また、解の精度は境界条件にも依存する。すなわち、境界の関数値を与える条件（Dirichlet型境界条件または第1種境界条件）は差分表示の必要がないので差分表示誤差は伴わないが、微分方程式で与えられる条件（Neumann型または第2種境界条件、第3種境界条件）は差分表示の際の打ち切り誤差が伴う。

Stodola法に基づく例が、Cohen¹⁷⁾およびWeingartenら¹⁸⁾により報告されている。この解法の基本は、仮定振動モード形を順次調整して真のモード形を求め、それから固有振動数を計算するところにあり、上述の解法とは逆の手順をとる特色ある手法であるが、最大の難点は、高次モードを評価するには、それより低次のモードをすべて、十分な精度で求めておく必要があることである。それゆえ、この方法が有効なのは、比較的低次のモードであろう。

さらに、領域分割法（Partition法、Subdomain collocation法とも呼ばれる）が、Stonekingら¹⁹⁾により用いられている。この方法は場の大域的性質で支配される固有値問題に適した解法と考えられるが、解が領域分割の仕方に大きく依存することには注意を要する。

以上のように、回転殻の固有振動問題に限定しても、多くの研究が行われてきているが、任意の境界条件や形状に対する適用性、高階多元な運動方程式に対する解析の容易さおよび解法の一般性という観点に立てば、解法に関してはまだ検討の余地が残されているものと考えられる。本章は、このような視点から、固有振動問題を微分方程式と境界条件に基づいて、統一的、組織的に解析できる解法の確立を目的としたものである。

さて、選点法は、選点の選択の仕方によっては未知数の個数の減少という利点、および定式化が容易という固有の長所があり、これらを生かせば前記の近似解法以上の結果を期待することも可能と思われるが、固有振動解析への適用例は少なく、著者と芳村の任意形状の回転殻の解析を意図した研究が見当る程度である^{20,21)}。その他著者と芳村は、固有振動問題を二点境界値問題としてとらえられる場合の解析を目的に、梁や板についても一連の研究を行っている^{22~24)}。

ところで、固有振動問題は場の大域的性質に支配される点が、局所的な性質が問題となる変形・応力を求める問題と大きく異なる。しかしながら、固有振動問題の解（固有振動数、固有振動モード）は、任意の動的荷重を受ける構造物の解析においては、構造物の動的挙動に関する基礎的な情報を提供してくれ、また解の精度に関する数値計算上の特性は、変形・応力の動的応答値の精度に関連する情報を提供してくれるだろう。

本章では、こういった立場から、全体をⅠ、Ⅱ、Ⅲ部に分け、Ⅰ部では梁、Ⅱ部では回転殻、Ⅲ部では矩形板の固有振動問題に選点法を適用し、二点境界値問題として記述される構造物要素に対する選点法の適用可能性および数値解析上の特性の検討を行う。以下、Ⅰ部(3-2~3-5)では、Timoshenko梁を例にとり固有振動問題を後述する内部選点固有方程式および端点固有方程式の二つの形で記述する。ついで、数値計算を行ない、本解析法の妥当性、数値計算上の特性を検討する。Ⅱ部(3-6~

3-8)では、まず、任意の形状および任意の境界条件の回転殻の固有振動を算定するための条件式を具体的に与える。ついで、内部選点固有方程式に基づく数値計算を行い、高階多元の微分方程式に適用する際の数値解析上の特性を検討するとともに、本手法が従来手法と比較して何ら特別な工夫もなしに、高精度の解が得られる直接的な解法であることを、いくつかの形状の回転殻の解析を通して明らかにする。Ⅲ部(3-9～3-11)では、対向2辺が単純支持され、他の2辺が任意の支持条件のMindlin板に対して、まず、固有振動を算定するための条件式を導く。つぎに、内部選点固有方程式に基づいて、等厚板に対する数値計算を行ない、得られた結果を既知の厳密解その他と比較検討し、併せて厚さが一方向にのみ直線変化する変厚板の振動特性について言及する。そして、本章の最後3-12では、Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ部を通して明らかになった、選点法による固有振動問題の定式化、その適用性および数値解析上の特性に関するいくつかの知見をまとめて示す。

I. Timoshenko 梁

ここでは、梁、板および回転殻の固有振動問題のうち、二点境界値問題として記述される場合を、Timoshenko 梁を例に挙げ以下の諸点を中心に議論する。

- ① 選点法による固有振動問題の定式化および固有方程式の構成。
- ② 固有値の精度の確認およびそれに与える離散化量の影響。
- ③ 薄肉梁に対する適用可能性の検討。

①では、選点法の適用によって固有振動問題は二つの形の固有方程式で記述されることを示す。一つは内部選点における未知量を固有ベクトルの成分とする“内部選点固有方程式”であり、いま一つは、端点(境界点、要素分割点)における未知量を固有ベクトルの成分とする“端点固有方程式”である。二つの形の固有方程式の出現は、解法に一般性を持たせるために、試行関数に微分方程式も境界条件も満足しないものを用いたため生じたものであり、ともに微分方程式の残差条件と境界条件を満足するように試行関数に含まれる未定係数間の一次従属関係から得られ、前者は内部法(Interior method)、後者は境界法(Boundary method)の一種に位置付けられるものである。

②では具体的な数値解析例を通して、本解析法による固有値の精度の確認を行うと共に、解の精度に及ぼす選点の選び方、内部選点数および要素分割数の影響を明らかにする。

③は、せん断変形・回転慣性の考慮された理論(修正理論)の採用を前提とするときの本解法の薄肉梁への適用可能性の検討を目的としたものである。これは本解析法による厚肉梁(板、殻)および薄肉梁(板、殻)の統一的な解法としての妥当性を確認するものであり、本解析法によれば、変位と曲げのみによる回転角に独立な試行関数を用いているにもかかわらず、他の近似解析手法にみられる数値的不安定現象が生じないことを、数値的、理論的に明らかにする。

以下、3-2ではTimoshenko梁の基礎方程式を示し、3-3では3-4で必要となる結果を述べ、3-4で選点法の適用により得られる二つの形の固有方程式を示す。3-5は本解析法の有効性、適用性を検討するために行った数値計算例である。

3-2 Timoshenko 梁の基礎方程式

Timoshenko 理論²⁵⁾によれば、せん断変形と回転慣性の影響を含み、均質で一樣な断面の梁の振動を支配する運動方程式は、図3-1に示すように横変位を W 、曲げのみによる回転角を Φ と記すことにすれば、次のように表わされる。

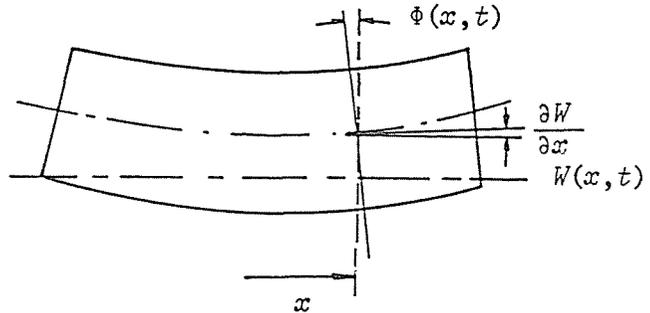


図3-1 Timoshenko 梁

$$\left. \begin{aligned} \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) &= 0 \\ \rho I \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \kappa GA \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \Phi \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

ここで、 ρ ：密度、 A ：断面積、 κ ：せん断補正係数、 G ：せん断弾性係数、 I ：断面2次モーメント、 E ：弾性係数。

梁の末端で規定される同次境界条件は、次の2組の対の適当な組合せによって表わされる。

$$\left. \begin{aligned} W=0 \quad \text{または} \quad Q_x=0 \\ \Phi=0 \quad \text{または} \quad M_x=0 \end{aligned} \right\} \quad (3-2)$$

ここで、 Q_x と M_x はそれぞれ、次式で表わされるせん断力と曲げモーメントである。

$$Q_x = \kappa GA \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \Phi \right), \quad M_x = -EI \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (3-3)$$

ここで後の展開を容易にするために、無次元表示された運動方程式と断面力を求めておく。まず位置に関する座標値が0から1までの値にある次の座標系を用いる。

$$\xi = x/L \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (3-4)$$

ここで、 L ：梁の長さ。たわみ W とたわみ角 Φ は、調和振動の前提のもとに、時間変数 t を分離すると次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} W(\xi, t) &= L_0 w(\xi) e^{i\omega t} \\ \Phi(\xi, t) &= \phi(\xi) e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (3-5)$$

ここで、 L_0 : 基準長、 ω : 固有円振動数。以後の式では、 $e^{i\omega t}$ を書くことは省略する。さらに梁の長さ L 、断面積 A 、断面 2 次モーメント I は、基準長 L_0 、基準断面積 A_0 、基準断面 2 次モーメント I_0 により、次のように表わされるとする。

$$L = \alpha L_0, \quad A = \beta A_0, \quad I = \gamma I_0 \quad (3-6)$$

ここで、 α, β, γ : 定数。

以上の準備のもとに、運動方程式 (3-1) と断面力 (式 (3-3)) は以下のように無次元化表示される。

運動方程式：

$$\left. \begin{aligned} a_1 \frac{d^2 w}{d\xi^2} + a_2 \frac{d\phi}{d\xi} + m_1 \Omega^2 w &= 0 \\ a_3 \frac{dw}{d\xi} + a_4 \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} + a_5 \phi + m_2 \Omega^2 \phi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-7)$$

ここで、 Ω^2 は固有円振動数パラメータ

$$\Omega^2 = \rho A_0 L_0^4 \omega^2 / EI_0 \quad (3-8a)$$

であり、係数 $a_1 \sim a_5$ と m_1, m_2 は次のようなものである。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{\kappa G}{E} \left(\frac{R_0}{\alpha}\right)^2, & a_2 &= -\frac{\kappa G}{E} \frac{R_0^2}{\alpha}, & a_3 &= \frac{\kappa G}{E} \frac{\beta}{\alpha} R_0^4 \\ a_4 &= \gamma \left(\frac{R_0}{\alpha}\right)^2, & a_5 &= -\frac{\kappa G}{E} \beta R_0^4 \end{aligned} \right\} \quad (3-8b)$$

$$m_1 = 1, \quad m_2 = \gamma \quad (3-8c)$$

ただし、 R_0 は基準細長比である。

$$R_0 = \frac{L_0}{\sqrt{I_0 / A_0}} \quad (3-8d)$$

断面力：

$$\frac{Q_x}{\kappa G A_0} = b_1 \frac{dw}{d\xi} + b_2 \phi, \quad \frac{L_0}{E I_0} M_x = b_3 \frac{d\phi}{d\xi} \quad (3-9)$$

ここで、係数 $b_1 \sim b_3$ は次式で与えられる。

$$b_1 = \frac{\beta}{\alpha}, \quad b_2 = -\beta, \quad b_3 = -\frac{\gamma}{\alpha} \quad (3-10)$$

3-3 定式化のための準備

図3-2(a)に示すように、領域 $[0, L]$ をいくつかの部分領域に分割し、すなわち N 個の要素に分割し、 k 番目の要素を (k) 要素と呼び、境界条件が指定される梁の両端を1, $N+1$, 分割点を2, 3, ..., N と番号付けをする。各要素は、式(3-4)に類似な式、 $\xi = x / l^{(k)}$ で表わされる局所座標で定義されるものとする。以下では (k) 要素に対して定義する諸量には、肩添字 (k) を付して表わすことにする。

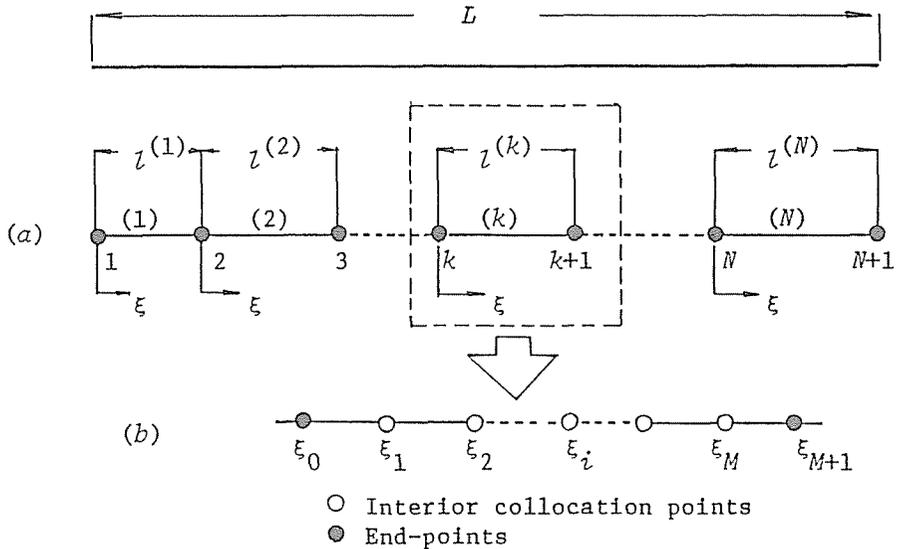


図3-2 (a) N 要素への分割, (b) 内部選点と端点の配置状況

(k) 要素上の試行(未知)関数 $w^{(k)}$ と $\phi^{(k)}$ を、領域内部で M 個の自由度を持たせ、満足すべき境界条件や後述する分割点における接続条件の数を考慮に入れて、 ξ に関する $M+1$ 次の多項式で近似する。

$$(w^{(k)}, \phi^{(k)}) = \sum_{i=1}^{M+2} (d_{i-1}^{(k)}, f_{i-1}^{(k)}) \xi^{i-1} \quad (3-11)$$

ここに、 $d_{i-1}^{(k)}, f_{i-1}^{(k)}$: 未定係数。運動方程式も境界条件も満足しない式(3-11)のタイプの試行関数は、適用が容易であること、特に変数係数の運動方程式や複雑な境界条件のとき好都合となるので、本論文では繰り返し用いられる。

式(3-11)そのものを用いて固有振動問題を定式化すれば、一般には何ら物理的意味を持たない未定係数を固有ベクトルの成分とする線形方程式系が得られるが、ここでは、図3-2(b)に示すように要素内部に配置される内部選点 ξ_i ($i = 1 \sim M$)および要素の両端に配置される端点 $\xi_0 = 0, \xi_{M+1} = 1$ でのたわみ、たわ角の値を固有ベクトルの成分とする形で問題を定式化する。この変換

は2章で述べたように、2階の微分方程式で表わされる Timoshenko 梁に対しては、一連の点 ξ_j ($j = 0, 1 \sim M+1$) における w , ϕ の1, 2次微分係数と一連の点 ξ_j における w , ϕ の値とを結びつける次式によってなされる。

$$\left. \begin{aligned} (\{w^{(k)}\}, \{\phi^{(k)}\}) &= [A^{(1)}](\{w^{(k)}\}, \{\phi^{(k)}\}) \\ (\{w''^{(k)}\}, \{\phi''^{(k)}\}) &= [A^{(2)}](\{w^{(k)}\}, \{\phi^{(k)}\}) \end{aligned} \right\} \quad (3-12)$$

ここで(′)は ξ に関する微分を意味し、 $(M+2)$ 次のベクトル $\{w^{(k)}\}$, $\{w'^{(k)}\}$ などは次のようである。例えば、

$$\left. \begin{aligned} \{w^{(k)}\}^T &= (w^{(k)}(\xi_0), w^{(k)}(\xi_1), \dots, w^{(k)}(\xi_{M+1})) \\ \{w'^{(k)}\}^T &= (w'^{(k)}(\xi_0), w'^{(k)}(\xi_1), \dots, w'^{(k)}(\xi_{M+1})) \\ \{w''^{(k)}\}^T &= (w''^{(k)}(\xi_0), w''^{(k)}(\xi_1), \dots, w''^{(k)}(\xi_{M+1})) \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

さて式(3-11)を式(3-7)に代入すれば、 (k) 要素に対する運動方程式の残差 $R_w^{(k)}$, $R_\phi^{(k)}$ が ξ の関数として以下のように定義できる。

$$\left. \begin{aligned} R_w^{(k)}(\xi) &= a_1^{(k)} \frac{d^2 w^{(k)}}{d\xi^2} + a_2^{(k)} \frac{d\phi^{(k)}}{d\xi} + m_1^{(k)} \Omega^2 w^{(k)} \\ R_\phi^{(k)}(\xi) &= a_3^{(k)} \frac{dw^{(k)}}{d\xi} + a_4^{(k)} \frac{d^2 \phi^{(k)}}{d\xi^2} + a_5^{(k)} \phi^{(k)} + m_2^{(k)} \Omega^2 \phi^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (3-14)$$

内部選点 ξ_i ($i=1 \sim M$) における残差は、式(3-14)の微分階数に留意し、式(3-12)を用いて、一連の点 ξ_j ($j=0, 1 \sim M+1$) の $w^{(k)}$, $\phi^{(k)}$ の値で次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} R_w^{(k)}(\xi_i) &= a_1^{(k)} \sum_{j=1}^{M+2} A^{(2)}(i+1, j) w^{(k)}(\xi_{j-1}) + a_2^{(k)} \sum_{j=1}^{M+2} A^{(1)}(i+1, j) \phi^{(k)}(\xi_{j-1}) \\ &\quad + m_1^{(k)} \Omega^2 w^{(k)}(\xi_i) \\ R_\phi^{(k)}(\xi_i) &= a_3^{(k)} \sum_{j=1}^{M+2} A^{(1)}(i+1, j) w^{(k)}(\xi_{j-1}) + a_4^{(k)} \sum_{j=1}^{M+2} A^{(2)}(i+1, j) \phi^{(k)}(\xi_{j-1}) \\ &\quad + a_5^{(k)} \phi^{(k)}(\xi_i) + m_2^{(k)} \Omega^2 \phi^{(k)}(\xi_i) \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

ここに、 $i=1 \sim M$ 、 $A^{(1)}(i+1, j)$ と $A^{(2)}(i+1, j)$ はそれぞれ、マトリックス $[A^{(1)}]$ と $[A^{(2)}]$ の第 $i+1$ 行、第 j 列の要素を表わす。

式(3-15)を内部選点と端点における未知量に分離し、マトリックス表示すれば次式となる。

$$\{R^{(k)}\} = [K_I^{(k)}] \{\delta_I^{(k)}\} + [K_B^{(k)}] \{\delta_B^{(k)}\} + \Omega^2 [M_I^{(k)}] \{\delta_I^{(k)}\} \quad (3-16)$$

ここで、 $2M$ 次の残差ベクトル $\{R^{(k)}\}$ は

$$\{R^{(k)}\}^T = (R_W^{(k)}(\xi_1), R_W^{(k)}(\xi_2), \dots, R_W^{(k)}(\xi_M), R_\phi^{(k)}(\xi_1), R_\phi^{(k)}(\xi_2), \dots, R_\phi^{(k)}(\xi_M)) \quad (3-17a)$$

と表わされ、 $2M$ 次および4次のベクトル $\{\delta_I^{(k)}\}$ と $\{\delta_B^{(k)}\}$ は、一連の点 ξ_j ($j=0, 1 \sim M+1$) におけるたわみ w 、たわみ角 ϕ を内部選点と端点に関する部分に分離し、例えば、 ϕ の一つを Z と記し、

$$\left. \begin{aligned} \{Z_I^{(k)}\}^T &= (Z^{(k)}(\xi_1), Z^{(k)}(\xi_2), \dots, Z^{(k)}(\xi_M)) \\ \{Z_B^{(k)}\}^T &= (Z^{(k)}(\xi_0), Z^{(k)}(\xi_{M+1})) \end{aligned} \right\} \quad (3-17b)$$

と表示すれば、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \{\delta_I^{(k)}\}^T &= (\{w_I^{(k)}\}^T, \{\phi_I^{(k)}\}^T) \\ \{\delta_B^{(k)}\}^T &= (\{w_B^{(k)}\}^T, \{\phi_B^{(k)}\}^T) \end{aligned} \right\} \quad (3-17c)$$

以下、マトリックスとベクトルの下付き添字 I および B は、それぞれ内部選点および端点に関することを意味する。さらに $(2M \times 2M)$ 次のマトリックス $[K_I^{(k)}]$ と $[M_I^{(k)}]$ 、および $(2M \times 4)$

次のマトリックス $[K_B^{(k)}]$ は、次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} [K_I^{(k)}] &= \begin{bmatrix} [K_{ww}] & [K_{w\phi}] \\ [K_{\phi w}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix}, & [M_I^{(k)}] &= \begin{bmatrix} [M_{ww}] & [0] \\ [0] & [M_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \\ [K_B^{(k)}] &= \begin{bmatrix} [K_{ww}] & [K_{w\phi}] \\ [K_{\phi w}] & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (3-18)$$

ここで、 $(M \times M)$ 次の部分マトリックス $[K_{ww}]$ 、 $[M_{ww}]$ などの要素は以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} K_{ww}(i, j) &= a_1^{(k)} A^{(2)}(i+1, j+1), & K_{w\phi}(i, j) &= a_2^{(k)} A^{(1)}(i+1, j+1) \\ K_{\phi w}(i, j) &= a_3^{(k)} A^{(1)}(i+1, j+1), & K_{\phi\phi}(i, j) &= a_4^{(k)} A^{(2)}(i+1, j+1) + a_5^{(k)} \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (3-19a)$$

ただし、 $i, j=1 \sim M$ 、 δ_{ij} : Kronecker のデルタ。

$$\left. \begin{aligned} [M_{ww}] &= \text{diag} [m_1^{(k)}, m_1^{(k)}, \dots, m_1^{(k)}] \\ [M_{\phi\phi}] &= \text{diag} [m_2^{(k)}, m_2^{(k)}, \dots, m_2^{(k)}] \end{aligned} \right\} \quad (3-19b)$$

さらに、 $(M \times 2)$ 次の部分マトリックス $[K_{ww}]$ などの要素は以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{ww}(i, j) &= a_1^{(k)} A^{(2)}(i+1, \ell), \quad \bar{K}_{w\phi}(i, j) = a_2^{(k)} A^{(1)}(i+1, \ell) \\ \bar{K}_{\phi w}(i, j) &= a_3^{(k)} A^{(1)}(i+1, \ell), \quad \bar{K}_{\phi\phi}(i, j) = a_4^{(k)} A^{(2)}(i+1, \ell) \end{aligned} \right\} (3-19c)$$

ただし、 $i = 1 \sim M$ 、 $j = 1, 2$ であり、 ℓ は次の約束に従う。

$$\ell = \begin{cases} = 1 & ; j = 1 \\ = M+2 & ; j = 2 \end{cases}$$

さて、変形量 (W, ϕ) と力学量 (Q_x, M_x) の組合せで与えられる梁の端末で規定される境界条件および分割点で成立する接続条件を、これまでと同様にマトリックス表示で整理すれば以下のようになる。

変形量 (W, ϕ) について、

(k)要素の端点 $\xi_0 = 0$ 、 $\xi_{M+1} = 1$ における変形量を次式で表わす。

$$\{X^{(k)}\}_{\xi=\xi_\ell}^T = (w^{(k)}(\xi_\ell), \phi^{(k)}(\xi_\ell)) \quad (3-20)$$

ただし、 $\ell = 0$ または $\ell = M+1$ である。上式を内部選点と端点に関する部分に分けてマトリックス表示すれば次式となる。

$$\{X^{(k)}\}_{\xi=\xi_\ell} = [G_I^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} \{\delta_I^{(k)}\} + [G_B^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} \{\delta_B^{(k)}\} \quad (3-21)$$

ただし、各マトリックスの大きさと具体的な内容は次のようなものである。

$$\left. \begin{aligned} [G_I^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} &= [0]_{(2 \times 2M)} \quad (\ell=0, M+1) \\ [G_B^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} (2 \times 4) \\ [G_B^{(k)}]_{\xi=\xi_{M+1}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (2 \times 4) \end{aligned} \right\} (3-22)$$

力学量 (Q_x, M_x) について、

(k)要素の端点における力学量を次式で表わす。

$$\{F^{(k)}\}_{\xi=\xi_\ell}^T = \left(\frac{1}{\kappa GA_0} Q_x^{(k)}(\xi_\ell), \frac{L_0}{EI_0} M_x^{(k)}(\xi_\ell) \right) \quad (3-23)$$

ただし、 $\ell = 0, M+1$ 。式 (3-9) と式 (3-12) の第1式を用いれば、力学量は次式のように一連の点 ξ_j ($j=0.1 \sim M+1$) でのたわみ、たわみ角の値と結びつけられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\kappa GA_0} Q_x^{(k)}(\xi_\ell) &= b_1^{(k)} \sum_{i=1}^{M+2} A^{(1)}(\ell+1, i) w^{(k)}(\xi_{i-1}) + b_2^{(k)} \phi^{(k)}(\xi_\ell) \\ \frac{L_0}{EI_0} M_x^{(k)}(\xi_\ell) &= b_3^{(k)} \sum_{i=1}^{M+2} A^{(1)}(\ell+1, i) \phi^{(k)}(\xi_{i-1}) \end{aligned} \right\} (3-24)$$

ただし、 $\ell = 0, M+1$ 。上式を式(3-21)と同様な形で表わせれば次式となる。

$$\{F^{(k)}\}_{\xi=\xi_\ell} = [Q_I^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} \{\partial_I^{(k)}\} + [Q_B^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} \{\partial_B^{(k)}\} \quad (3-25)$$

ただし、各マトリックスの大きさと内容は以下で与えられる。

$$[Q_I^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} = \begin{bmatrix} \lfloor Q_w \rfloor \lfloor L \ 0 \rfloor \\ \lfloor 0 \rfloor \lfloor L \ Q_\phi \rfloor \end{bmatrix} \quad (2 \times 2M) \quad (3-26a)$$

ここで、 $\lfloor Z \rfloor$ はその成分が Z_1, Z_2, \dots, Z_M の行マトリックスを表わし、零の行マトリックスを除いたそれらは次の成分をもつ。

$$\left. \begin{aligned} Q_w i &= b_1^{(k)}(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1) \\ Q_\phi i &= b_3^{(k)}(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1) \end{aligned} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \ell = 0, M+1 \\ i = 1 \sim M \end{array} \right) \quad (3-26b)$$

$$\left. \begin{aligned} [Q_B^{(k)}]_{\xi=\xi_0} &= \begin{bmatrix} b_1^{(k)} A^{(1)}(1,1) & b_1^{(k)} A^{(1)}(1,M+2) & b_2^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & b_3^{(k)} A^{(1)}(1,1) & b_3^{(k)} A^{(1)}(1,M+2) \end{bmatrix} \\ [Q_B^{(k)}]_{\xi=\xi_{M+1}} &= \begin{bmatrix} b_1^{(k)} A^{(1)}(M+2,1) & b_1^{(k)} A^{(1)}(M+2,M+2) & 0 & b_2^{(k)} \\ 0 & 0 & b_3^{(k)} A^{(1)}(M+2,1) & b_3^{(k)} A^{(1)}(M+2,M+2) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} (2 \times 4) \\ (2 \times 4) \end{array} \right\} \quad (3-27)$$

要素の分割点で成立する接続条件式は、次のようになる。すなわち、 $(k-1)$ 要素の端点 $\xi = \xi_{M+1}$ と (k) 要素の端点 $\xi = \xi_0$ において次式が成立しなければいけない。式(3-20)、(3-23)より、

$$\left. \begin{aligned} \{X^{(k-1)}\}_{\xi=\xi_{M+1}} &= \{X^{(k)}\}_{\xi=\xi_0} \\ \{F^{(k-1)}\}_{\xi=\xi_{M+1}} &= \{F^{(k)}\}_{\xi=\xi_0} \end{aligned} \right\} \quad (3-28a, b)$$

式(3-28a)と式(3-28b)にそれぞれ、式(3-21)と式(3-25)を用いれば、式(3-28)は次のように表現される。

$$\begin{aligned} [S_I^{(k-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \{\partial_I^{(k-1)}\} + [S_B^{(k-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \{\partial_B^{(k-1)}\} + [S_I^{(k)}]_{\xi=\xi_0} \{\partial_I^{(k)}\} \\ + [S_B^{(k)}]_{\xi=\xi_0} \{\partial_B^{(k)}\} = \{0\} \end{aligned} \quad (3-29)$$

ここで、各マトリックスは次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 [S_I^{(k-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} &= \begin{bmatrix} [G_I^{(k-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \\ [Q_I^{(k-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \end{bmatrix} \quad (4 \times 2M) \\
 [S_B^{(k-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} &= \begin{bmatrix} [G_B^{(k-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \\ [Q_B^{(k-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \end{bmatrix} \quad (4 \times 4) \\
 [S_I^{(k)}]_{\xi=\xi_0} &= \begin{bmatrix} -[G_I^{(k)}]_{\xi=\xi_0} \\ -[Q_I^{(k)}]_{\xi=\xi_0} \end{bmatrix} \quad (4 \times 2M) \\
 [S_B^{(k)}]_{\xi=\xi_0} &= \begin{bmatrix} -[G_B^{(k)}]_{\xi=\xi_0} \\ -[Q_B^{(k)}]_{\xi=\xi_0} \end{bmatrix} \quad (4 \times 4)
 \end{aligned} \right\} \quad (3-30)$$

3-4 固有振動方程式

選点法による固有振動問題の定式化手順を二つの具体例に従って述べる。これにより他の構造要素に対する場合も容易に類推できよう。第一の問題は図3-3(a)に示す片持梁で、全領域(要素数 $N=1$)に選点法を適用する場合であり、第二の問題は第一の問題を二つの要素に分割し($N=2$)、各要素に選点法を適用し定式化する問題である。

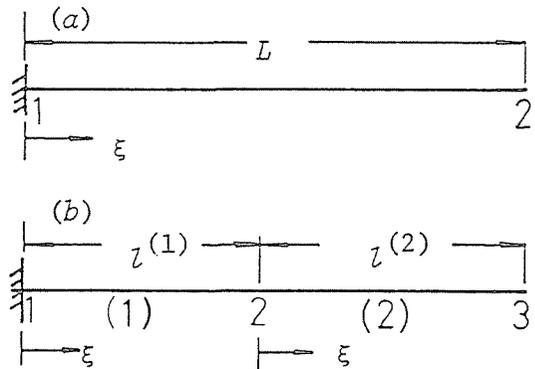


図3-3 片持梁 (a) $N=1$, (b) $N=2$

以下に各問題を定義するのに必要な未知数に対する条件式を列挙し、その後それらに基づいて固有振動方程式を導き出し考察を加えることにする。

a) 第一の問題(図3-3(a))

試行関数を式(3-11)で表わせば、未知数の数は $2(M+2)$ 個である。このうち $2M$ 個の条件式は、運動方程式の残差条件、すなわち解の領域内で採られた内部選点で残差が零となる条件より得られ、残り4個の条件式は境界条件より定まる。

残差より得られる条件式は、式(3-14)に重み関数としてDiracの δ 関数を掛けて、積分することにより次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 R_w^{(1)}(\xi) \delta(\xi - \xi_i) d\xi = R_w^{(1)}(\xi_i) = 0 \\ \int_0^1 R_\phi^{(1)}(\xi) \delta(\xi - \xi_i) d\xi = R_\phi^{(1)}(\xi_i) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (i=1 \sim M) \quad (3-31)$$

上式は式(3-16)を用いて次のようにマトリックス表示される。

$$[K_I^{(1)}] \{ \delta_I^{(1)} \} + [K_B^{(1)}] \{ \delta_B^{(1)} \} + \Omega^2 [M_I^{(1)}] \{ \delta_I^{(1)} \} = \{ 0 \} \quad (3-32a)$$

または

$$[K_I] \{ \delta_I \} + [K_B] \{ \delta_B \} + \Omega^2 [M_I] \{ \delta_I \} = \{ 0 \} \quad (3-32b)$$

残りの条件式は、梁の端点 $\xi = \xi_0$ での固定 ($W^{(1)} = \phi^{(1)} = 0$) と $\xi = \xi_{M+1}$ での自由 ($M_x^{(1)} = Q_x^{(1)} = 0$) の条件より得られる。すなわち、式(3-21)、(3-25)より次のように表わされる。

$$\left[\begin{array}{c} [G_I^{(1)}]_{\xi=\xi_0} \\ [Q_I^{(1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \end{array} \right] \{ \delta_I^{(1)} \} + \left[\begin{array}{c} [G_B^{(1)}]_{\xi=\xi_0} \\ [Q_B^{(1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \end{array} \right] \{ \delta_B^{(1)} \} = \{ 0 \} \quad (3-33a)$$

または

$$[S_I] \{ \delta_I \} + [S_B] \{ \delta_B \} = \{ 0 \} \quad (3-33b)$$

以上、第一の問題を記述するのに必要な $2(M+2)$ 個の条件式は、式(3-32)と式(3-33)と与えられたことになる。なお、任意の境界条件に対する $[S_I]$ と $[S_B]$ (式(3-33b)) の作成は、規定された条件に応じて、式(3-21)、(3-25)で定義したマトリックスの行マトリックスを用いてなされる。

b) 第二の問題 (図3-3(b))

各要素の試行関数 $w^{(k)}$ 、 $\phi^{(k)}$ ($k=1, 2$) を式(3-11)で表わせれば、未知数の数は $2(2M+4)$ 個となる。このうち各要素で成立する運動方程式の残差条件より $4M$ 個の条件式が、境界条件が規定される境界点1, 3と分割点2でそれぞれ、4個の条件式が与えられる。

$4M$ 個の条件式は、第一の問題と同様に次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 R_w^{(k)}(\xi) \delta(\xi - \xi_i) d\xi = R_w^{(k)}(\xi_i) = 0 \\ \int_0^1 R_\phi^{(k)}(\xi) \delta(\xi - \xi_i) d\xi = R_\phi^{(k)}(\xi_i) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{array}{c} (k=1, 2) \\ i=1 \sim M \end{array} \right\} \quad (3-34)$$

上式を式(3-16)を用いて表わせれば次式となる。

$$[K_I^{(k)}] \{ \delta_I^{(k)} \} + [K_B^{(k)}] \{ \delta_B^{(k)} \} + \Omega^2 [M_I^{(k)}] \{ \delta_I^{(k)} \} = \{ 0 \}, \quad (k=1, 2) \quad (3-35)$$

したがって、式(3-35)を用いて全体系の方程式に組み立てると、 $4M$ 個の条件式は次のよ

うに表わされる。

$$[K_I]\{\delta_I\} + [K_B]\{\delta_B\} + \Omega^2 [M_I]\{\delta_I\} = \{0\} \quad (3-36)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} [K_I] &= \begin{bmatrix} [K_I^{(1)}] & [0] \\ [0] & [K_I^{(2)}] \end{bmatrix} \quad (2M \times 2M), & [K_B] &= \begin{bmatrix} [K_B^{(1)}] & [0] \\ [0] & [K_B^{(2)}] \end{bmatrix} \quad (2M \times 8) \\ [M_I] &= \begin{bmatrix} [M_I^{(1)}] & [0] \\ [0] & [M_I^{(2)}] \end{bmatrix} \quad (2M \times 2M) \end{aligned} \right\} (3-37a)$$

$$\left. \begin{aligned} \{\delta_I\}^T &= (\{\delta_I^{(1)}\}^T, \{\delta_I^{(2)}\}^T) \\ \{\delta_B\}^T &= (\{\delta_B^{(1)}\}^T, \{\delta_B^{(2)}\}^T) \end{aligned} \right\} (3-37b)$$

残り 8 個の条件式は、次のように得られる。(1)要素の境界点 1 (端点 $\xi = \xi_0$) での固定 ($W^{(1)} = \phi^{(1)} = 0$) および境界点 3 (端点 $\xi = \xi_{M+1}$) での自由 ($Q_x^{(2)} = M_x^{(2)} = 0$) の条件よりそれぞれ、式 (3-20) および式 (3-25) で与えられる計 4 個の条件式が得られ、分割点 2 において (1)要素の端点 $\xi = \xi_{M+1}$ と (2)要素の端点 $\xi = \xi_0$ で成立する接続条件式 (3-29) より 4 個の条件式が得られる。これらをまとめて示せば次の方程式となる。

$$[S_I]\{\delta_I\} + [S_B]\{\delta_B\} = \{0\} \quad (3-38)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} [S_I] &= \begin{bmatrix} [G_I^{(1)}]_{\xi=\xi_0} & [0] \\ [S_I^{(1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} & [S_I^{(2)}]_{\xi=\xi_0} \\ [0] & [Q_I^{(2)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \end{bmatrix} \quad (8 \times 2M), & [S_B] &= \begin{bmatrix} [G_B^{(1)}]_{\xi=\xi_0} & [0] \\ [S_B^{(1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} & [S_B^{(2)}]_{\xi=\xi_0} \\ [0] & [Q_B^{(2)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \end{bmatrix} \quad (8 \times 8) \end{aligned} \right\} (3-39)$$

以上、第二の問題を定義するのに必要な $2(2M+4)$ 個の条件式は、式 (3-36) および式 (3-38) で与えられたことになる。

さて上述の二つの問題を基礎にして、図 3-3 に示した片持梁を N 個の要素に分割した場合の全体系の方程式を示しておこう。

個々の要素で課せられる運動方程式の残差条件を、すべての要素について書き表わせば次式となる。

以上、これまでの展開より明らかなように、選点法の適用により定式化された固有振動問題は、内部選点における未知量 $\{\delta_I\}$ と端点における未知量 $\{\delta_B\}$ に分離された形で、運動方程式の残差条件から導かれる条件式 (3-40) および境界点、分割点における条件から組み立てられる条件式 (3-42) によって記述されることになる。

式 (3-40) と式 (3-42) は、次のように解かれる。

(1) 内部選点固有方程式

式 (3-42) を $\{\delta_B\}$ について解く。

$$\{\delta_B\} = -[S_B]^{-1} [S_I] \{\delta_I\} \quad (3-44)$$

上式を式 (3-40) に代入すると、内部選点における未知量 $\{\delta_I\}$ を固有ベクトルとする形の固有値問題となる。

$$[K] \{\delta_I\} + \Omega^2 [M_I] \{\delta_I\} = \{0\} \quad (3-45)$$

ここに、 $[K]$ は縮約された形の $(2MN \times 2MN)$ 次のマトリックスで、次のようなものである。

$$[K] = [K_I] - [K_B] [S_B]^{-1} [S_I] \quad (3-46)$$

式 (3-45) が非自明解をもつための必要十分条件は、周知のように次のようである。

$$\det | [K] + \Omega^2 [M_I] | = 0 \quad (3-47)$$

本論文では、式 (3-47) を“内部選点固有方程式”、式 (3-46) の $[K]$ を“内部選点マトリックス”と呼ぶことにする。これは、式 (3-45) が境界条件、接続条件を介して全要素の端点に関する未知量が消去され、内部選点のみの未知量に縮小されたものとなっているからである。なお式 (3-45) はその誘導過程からも明らかなように、内部法の種類に位置付けられる。

式 (3-45) に基づき数値計算を行う場合には、 $[K]$ が非対称マトリックスなので、 $[K]$ を Hessenberg 型のマトリックスに変換したのち QR 法で固有値を求めるのが一般的である²⁶⁾。

(2) 端点固有方程式

式 (3-40) は次のようにも書き直すことができる。

$$[T(\Omega)] \{\delta_I\} + [K_B] \{\delta_B\} = \{0\} \quad (3-48)$$

ここで $[T(\Omega)]$ は、固有振動数パラメータ Ω^2 に依存する $(2MN \times 2MN)$ 次のマトリックスである。

$$[T(\Omega)] = [K_I] + \Omega^2 [M_I] \quad (3-49)$$

式 (3-48) は Ω^2 の値を仮定することにより、 $\{\delta_I\}$ について解くことができる。

$$\{\delta_I\} = -[T(\Omega)]^{-1} [K_B] \{\delta_B\} \quad (3-50)$$

上式を式 (3-42) に代入すれば、端点における未知量 $\{\delta_B\}$ を固有ベクトルとする次の形の固有値問題に帰着する。

$$[S(\Omega)] \{ \delta_B \} = \{ 0 \} \quad (3-51)$$

ここで、 $[S(\Omega)]$ はその大きさが内部選点数 M に無関係な $(4N \times 4N)$ 次のマトリックスである。

$$[S(\Omega)] = [S_B] - [S_I] [T(\Omega)]^{-1} [K_B] \quad (3-52)$$

式(3-51)が非自明な解をもつための条件として、次式が要求される。

$$\det | [S(\Omega)] | = 0 \quad (3-53)$$

したがって、固有値 Ω^2 はパラメータ Ω^2 を仮定して、試行錯誤的に行列式(3-53)の値0に対応するパラメータ Ω^2 を見い出すことになる。本論文では式(3-53)を“端点固有方程式”、式(3-52)の $[S(\Omega)]$ を“端点マトリックス”と呼ぶことにする。これは、式(3-51)が運動方程式の残差条件を介して内部選点に関する未知量が消去され、端点に関する未知量に縮小された形になっているからである。なお式(3-51)はその誘導過程からも明らかなように、境界法の一つであると考えられる。

この解法の適用で注意すべき点は、パラメータ Ω^2 の関数である $[T(\Omega)]$ の逆行列演算を含む点である。この $[T(\Omega)]$ は式(3-41b)より明らかなように、各要素の $[T^{(k)}(\Omega)] (= [K_I^{(k)}] + \Omega^2 [M_I^{(k)}])$ が対角マトリックス的に組み立てられたものであり、また以下に示すように $[T^{(k)}(\Omega)]$ は、 (k) 要素の両端を固定条件とみなしたときの固有マトリックスである。

(k) 要素の運動方程式の残差条件は次式で与えられる。

$$[K_I^{(k)}] \{ \delta_I^{(k)} \} + [K_B^{(k)}] \{ \delta_B^{(k)} \} + \Omega^2 [M_I^{(k)}] \{ \delta_I^{(k)} \} = \{ 0 \} \quad (a)$$

(k) 要素の端点 $\xi = \xi_0, \xi_{M+1}$ での固定条件より

$$\{ \delta_B^{(k)} \}^T = (w^{(k)}(\xi_0), w^{(k)}(\xi_{M+1}), \phi^{(k)}(\xi_0), \phi^{(k)}(\xi_{M+1})) = \{ 0 \} \quad (b)$$

あるいは、式(3-21)より、

$$\begin{bmatrix} [G_I^{(k)}]_{\xi=\xi_0} \\ [G_I^{(k)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \end{bmatrix} \{ \delta_I^{(k)} \} + \begin{bmatrix} [G_B^{(k)}]_{\xi=\xi_0} \\ [G_B^{(k)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \end{bmatrix} \{ \delta_B^{(k)} \} = \{ 0 \} \quad (c)$$

式(3-22)より、式(c)の左辺1項目のマトリックスが零マトリックス、左辺2項目のマトリックスの行列式の値は-1となり式(b)が成立。したがって、式(a)、(b)より次式が得られる。

$$[K_I^{(k)}] + \Omega^2 [M_I^{(k)}] \{ \delta_I^{(k)} \} = [T^{(k)}(\Omega)] \{ \delta_I^{(k)} \} = \{ 0 \} \quad (d)$$

それゆえ、全体系に対する Ω^2 が、両端を固定条件とした (k) 要素の固有値 Ω^2 の値に一致するとき、またはそれに近くなるときには、 $[T(\Omega)]$ が特異となり、解を見落す危険性を有している。

なおこの難点の解消は、低次の固有値に限れば、要素分割数 N を増すことが効果的であろう。この推論の検証は後の数値例で行うことにする。

ところで、この定式化の利点は、自由度が縮小されたマトリックス $[S(Q)]$ を取り扱えばよい点にあると考えられる。さらに、一般に長い計算時間を必要とするマトリックス $[T(Q)]$ の逆行列の演算が、 $[T(Q)]$ の内容の組み立てられかたより理解できるように、要素単位の $[T^{(k)}(Q)]$ の逆行列演算によって可能である。

3-5 数値計算例

いままでに述べてきたことの数値的妥当性を確認するため、一定断面の Timoshenko 梁の固有振動問題を解析し、選点法の適用可能性および数値解析上の特性を検討する。(1)で内部選点固有方程式による場合について述べ、(2)で端点固有方程式による場合について述べ、(3)で(1)および(2)で明らかになった点をまとめて示す。

さて、選点法の適用により得られる固有値（固有円振動数）の精度に関連する因子は、概略次の3点と思われる。

- ① 内部選点数 (M)
- ② 要素分割数 (N)
- ③ 選点の選び方

特に、③については、shifted Legendre 多項式 $P_M^*(\xi)$ および shifted Chebyshev 多項式 $T_M^*(\xi)$ の零点を選点に採用する場合を対象にし、以後それぞれ L -選点および C -選点と略称する。以下、上述の3点を中心に議論するが、その際の固有方程式は内部選点固有方程式によった。これは、固有方程式の形式の相違は、一次従属関係にある未知ベクトル $\{\delta_I\}$ と $\{\delta_B\}$ の消去過程の違いの反映であり、同一の内部選点数、要素分割数および選点の配置で数値計算を行えば、数値計算上の誤差が混入しない限り、同じ解が期待できるからである。

数値計算例では、弾性係数 E とせん断弾性係数 G との比 $E/G = 2.667$ 、せん断補正係数 κ を $5/6$ とした。

(1) 内部選点固有方程式による場合

a) 要素分割を行わない場合の解の精度の検討

数値計算は、細長比 $R (= L/r, r = \sqrt{I/A})$ の 10, 50, 100 なる場合について行った。

表 3-1(a), (b) および (c) はそれぞれ、各細長比の両端単純支持に対する解 $Q (= \omega L^2 \sqrt{\rho A/EI})$ を内部選点数 $M = 8, 11, 13$ について示したものである。内部選点数 M に対して $2M$ 個の固有値が求められるが、厳密解に対する相対誤差の絶対値がほぼ 1% 以内のものを、低次より表にま

とめた。表で内部選点数Mに対応する各ブロックに示した数値は、上段の左右にそれぞれL一選点とC一選点による値、下段には厳密解に対する誤差をパーセントで示し、表(b)と(c)で“Missed”と記した箇所は解が求まらなかったことを意味している。なお両端単純支持梁に対しては、次のような閉じた形の2つの固有円振動数パラメータ Ω^2 の解析式が得られる。

$$\Omega_1^2 = \frac{1}{2} R^2 \left[\left(n\pi \right)^2 \left(1 + \frac{\kappa G}{E} \right) + R^2 \frac{\kappa G}{E} \mp \left[\left\{ \left(n\pi \right)^2 \left(1 + \frac{\kappa G}{E} \right) + R^2 \frac{\kappa G}{E} \right\}^2 - 4 \left(n\pi \right)^4 \frac{\kappa G}{E} \right]^{\frac{1}{2}} \right] \quad (3-54)$$

ただし、n：振動モード形の半波長の数。上式の Ω の下添字1と2は固有振動数の小さい方から順に付されたもので、第1モード(曲げモード)および第2モード(せん断モード)と呼ばれる各モードに対応するものである。表3-1の厳密解の欄で、数値の右肩に●印が付されたものは第2モードに対応する解を、それ以外のは第1モードに対する解を表わしている。これらの表より、解の精度は内部選点数の増加とともに向上し、特にL一選点による場合が良好であることがわかる。さらにL一選点によれば、解はもれなく、第1モードに対応する解に限れば少なくとも低次 $[M/2]$ 個($[]$: Gaussの記号)までは、ほぼ1%以内の誤差で解が求まっている。

表3-2(a)、(b)および(c)に、各細長比に対してL一選点に基づいて得られた2M個の固有値から第2モードのそれを取り出し、厳密解(式(3-54)の Ω_2^2)との比較で誤差1%以内のものを示した。これによると、第2モードに対応する解も第1モードと同様に、少なくとも $[M/2]$ 個は正確に得られている。

図3-4(a)および(b)は、それぞれ細長比50および100のときの4~6次固有振動数の厳密解に対する相対誤差(%)を内部選点数M(=8~13)をパラメータにとり、両端固定(C-C)、固定-単純支持(C-H)、両端単純支持(H-H)および固定-自由(C-F)の場合についてプロットしたものである。L一選点による場合は実線で、C一選点のそれは破線で示した。これらの図から理解できる点は、先に表3-1で指摘したことと同様であるが、特にL一選点に基づく場合が高精度な解を与え、それが細長比が大きいとき、内部選点数が小さいとき、および高次振動数において著しいことを強調しておきたい。さらにこれらの図から、解の精度には境界条件の影響も認められ、特に内部選点数が小さいときに明確に現われ、両端固定(C-C)の場合に顕著なことがわかる。なお、内部選点数M=11とした場合の両端単純支持を除いた3つの支持条件に対する解(ほぼ誤差1%以内)を、表3-3(a)、(b)および(c)に示した。表の細長比に対応するブロック内に示した数値は、上段が厳密解、中段の左右がそれぞれL一選点、C一選点による値、下段には相対誤差をパーセントで示した。

以上の要素数N=1(要素分割が行われていない)に対する検討から得られた本解析法の数

値解析上の基礎的な特性は、次のようにまとめられる。

- 1) 内部選点数をMと記せば、厳密解との比較においてはほぼ1%以内の精度で解(固有値)が得られる振動次数は、低次 $[M/2]$ までである。
- 2) L-選点に基づいた結果が、C-選点に基づいた結果に比べ一般に好結果を生んでいる。
- 3) 解の精度は、支持条件にも依存し、特に両端固定の場合に精度低下がみられる。

次のb)では特性1)に着目し、解の精度に与える要素分割数の影響を検討する。なお特性2)についてはIIの回転殻において再検討するが、以下ではL-選点による結果を示す。

表3-1 両端単純支持梁の固有振動数 Ω (a) $L/r = 10$

(a) $L/r = 10$

Mode Number	Exact Solution	This study					
		M=13		M=11		M=8	
1	8.3649	8.3649 0.00	8.3649 0.00	8.3649 0.00	8.3649 0.00	8.3649 0.00	8.3649 0.00
2	25.196	25.196 0.00	25.196 0.00	25.196 0.00	25.196 0.00	25.196 0.00	25.197 0.00
3	43.775	43.775 0.00	43.775 0.00	43.775 0.00	43.775 0.00	43.787 0.03	43.810 0.08
4	62.509	62.509 0.00	62.509 0.00	62.510 0.00	62.512 0.00	62.327 0.29	55.902 10.57
5	65.958 [⊙]	65.958 0.00	65.958 0.00	65.958 0.00	65.958 0.00	65.958 0.00	65.958 0.00
6	81.088	81.088 0.00	81.086 0.00	81.057 0.04	81.034 0.07		
7	87.588 [⊙]	87.588 0.00	87.588 0.00	87.588 0.00	87.588 0.00		
8	99.483	99.520 0.04	99.574 0.09	100.36 0.38	101.16 1.69		
9	113.43 [⊙]	113.43 0.00	113.43 0.00	113.43 0.00	113.43 0.00		
10	117.72	117.32 0.34	117.13 0.50				

表 3-1 両端単純支持梁の固有振動数 Ω (b) $L/r = 50$, (c) $L/r = 100$

(b) $L/r = 50$

Mode Number	Exact Solution	This study					
		$M=13$		$M=11$		$M=8$	
1	9.7890	9.7890 0.00	9.7890 0.00	9.7890 0.00	9.7890 0.00	9.7890 0.00	9.7890 0.00
2	38.244	38.244 0.00	38.244 0.00	38.244 0.00	38.244 0.00	38.244 0.00	Missed
3	82.986	82.986 0.00	82.986 0.00	82.986 0.00	82.986 0.00	83.106 0.14	83.267 0.34
4	140.95	140.95 0.00	140.95 0.00	140.96 0.00	141.00 0.04	141.37 0.30	141.89 0.67
5	209.12	209.12 0.00	209.12 0.00	209.16 0.02	209.30 0.09		
6	284.90	285.20 0.11	285.63 0.26				
7	366.23	366.74 0.14	367.72 0.41				

(c) $L/r = 100$

Mode Number	Exact Solution	This study					
		$M=13$		$M=11$		$M=8$	
1	9.8492	9.8492 0.00	Missed	9.8492 0.00	9.8492 0.00	9.8492 0.00	Missed
2	39.156	39.156 0.00	39.156 0.00	39.156 0.00	39.156 0.00	39.156 0.00	39.156 0.00
3	87.225	87.225 0.00	87.225 0.00	87.225 0.00	87.224 0.00	87.402 0.20	87.626 0.46
4	152.98	152.98 0.00	152.98 0.00	152.99 0.01	153.05 0.05	153.56 0.38	154.28 0.85
5	235.06	235.06 0.00	235.05 0.00	235.13 0.03	235.34 0.12		
6	331.95	332.55 0.18	333.38 0.43				
7	442.05	443.27 0.28	445.06 0.68				

表 3-2 両端単純支持梁の第 2 モードに対する解 Ω_2 (a) $L/r=10$, (b) $L/r=50$, (c) $L/r=100$

(a) $L/r = 10$

n	Ω_2	M		
		8	11	13
1	65.958	65.958	65.958	65.958
2	87.588	87.588	87.588	87.588
3	113.43	113.42	113.43	113.43
4	141.22	141.95	141.22	141.22
5	170.10		170.30	170.10
6	199.65		198.33	199.59

(b) $L/r = 50$

n	Ω_2	M		
		8	11	13
1	1409.0	1409.0	1409.0	1409.0
2	1442.6	1442.6	1442.6	1442.6
3	1495.9	1495.9	1495.9	1495.9
4	1565.7	1568.3	1565.7	1565.7
5	1648.9	1638.9	1649.2	1648.9
6	1742.9		1736.0	1742.7

(c) $L/r = 100$

n	Ω_2	M		
		8	11	13
1	5601.7	5601.7	5601.7	5601.7
2	5636.2	5636.2	5636.2	5636.2
3	5692.8	5692.8	5692.8	5692.8
4	5770.5	5772.9	5770.5	5770.5
5	5868.0	5852.0	5868.4	5868.0
6	5983.6		5979.0	5983.5

n : Number of half waves in vibration mode-shape

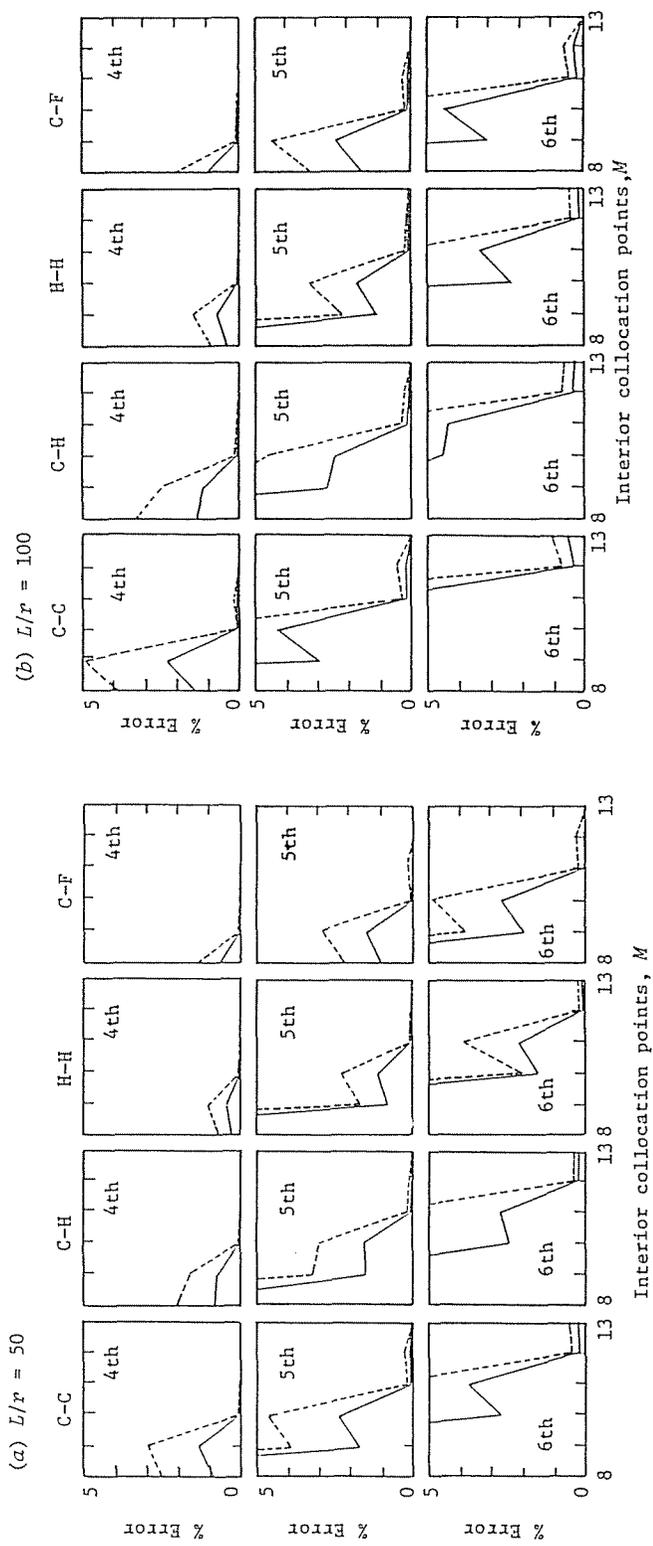


図 3-4 4 ~ 6 次固有振動数の厳密解に対する相対誤差 (a) $L/r = 50$, (b) $L/r = 100$

表 3-3(a) 両端固定梁の固有振動数 Ω ($M = 11$)

Mode Number	Slenderness ratio, L/r					
	10		50		100	
1	13.731 0.00	13.731 0.00	21.649 0.00	21.649 0.00	22.185 0.00	22.185 0.00
2	28.263 0.00	28.263 0.00	57.348 0.00	57.348 0.00	60.494 0.00	60.494 0.00
3	45.247 0.00	45.247 0.00	107.14 0.00	107.14 0.00	116.92 0.00	116.92 0.00
4	61.282 0.00	61.282 0.00	167.84 0.04	167.93 0.09	189.94 0.07	190.26 0.17
5	67.590 0.00	67.592 0.00	236.79 0.05	237.01 0.15	278.42 0.12	278.89 0.29
6	79.664 0.03	79.684 0.05				
7	88.889 0.03	88.912 0.04				
8	99.613 0.76	98.864 1.44				
9	114.06 0.25	113.77 0.41				
10	115.34 1.90	117.57 1.70				

表3-3(b) 片持梁の固有振動数 Ω ($M=11$)

Mode Number	Slenderness ratio, L/r					
	10		50		100	
1	11.021		15.123		15.343	
	11.021	11.021	15.123	15.123	15.343	15.343
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	26.909		47.485		49.304	
	26.909	26.909	47.485	47.485	49.304	49.304
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	44.456		94.939		101.63	
	44.456	44.456	94.940	94.937	101.63	101.63
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	58.519		154.40		171.11	
	58.519	58.519	154.42	154.47	171.16	171.25
	0.00	0.00	0.01	0.05	0.03	0.08
5	62.737		223.02		256.32	
	62.738	62.741	223.16	223.38	256.66	257.10
	0.00	0.00	0.06	0.16	0.13	0.30
6	75.617					
	75.617	75.615				
7	81.509					
	81.479	81.457				
8	98.097					
	98.477	98.744				
9	101.54					
	102.03	102.54				
10	117.56					
	115.34	115.57				
	1.89	1.69				

表 3-3(c) 固定-単純支持梁の固有振動数 Ω ($M = 11$)

Mode Number	Slenderness ratio, L/r					
	10		50		100	
1	3.2222 3.2222 0.00	3.2222 3.2222 0.00	3.5024 3.5024 0.00	3.5024 3.5024 0.00	3.5126 3.5126 0.00	3.5126 3.5126 0.00
2	14.389 14.389 0.00	14.389 14.389 0.00	21.459 21.459 0.00	21.459 21.459 0.00	21.886 21.886 0.00	21.886 21.886 0.00
3	31.287 31.287 0.00	31.287 31.287 0.00	58.087 58.087 0.00	58.087 58.087 0.00	60.723 60.723 0.00	60.723 60.723 0.00
4	47.501 47.501 0.00	47.501 47.501 0.00	108.83 108.83 0.00	108.83 108.83 0.00	117.45 117.45 0.00	117.45 117.45 0.00
5	61.676 61.676 0.00	61.677 61.677 0.00	170.86 170.93 0.04	171.10 171.10 0.14	191.02 191.17 0.08	191.49 191.49 0.25
6	67.404 67.405 0.00	67.407 67.407 0.00	241.41 241.60 0.08	242.10 242.10 0.29	279.94 280.31 0.13	281.11 281.11 0.42
7	79.864 79.864 0.01	79.858 79.858 0.01				
8	88.043 88.064 0.02	88.131 88.131 0.10				
9	101.51 101.80 0.29	102.00 102.00 0.48				
10	108.22 108.27 0.05	108.71 108.71 0.45				
11	125.34 124.60 0.59	125.22 125.22 0.10				

b) 要素分割を行った場合の解の精度の検討

解の精度向上は、内部選点数Mの増加のみならず、要素分割の導入あるいは前2者の組合せによっても達成されるだろう。ここでは内部選点マトリックス $[K]$ の大きさがほぼ等しくなるような内部選点数Mと要素分割数Nの組合せに対して、固有振動解析を行い、解の精度への要素分割数の影響を検討する。

表3-4(a)と(b)はこの目的のために行った結果である。表は細長比50、100について、MとNの組合せ $(M, N) = (22, 1)$ 、 $(11, 2)$ 、 $(8, 3)$ の3種を用いて解析した $2MN$ 個の固有値から誤差1%以内で求めた解を整理したものである(表は、低次5個の解を除いてある)。表の各ブロックに示した値は、上段が厳密解、中段が左より $(M, N) = (22, 1)$ 、 $(11, 2)$ 、 $(8, 3)$ に基づく解、下段は相対誤差をパーセントで示した。これらの表から、MとNの組合せによらず低次11個の固有振動数は良好な精度で求まっていること、さらに要素内の試行関数が低次近似(Mの値が小さい)でも分割を細かくすれば、精度の向上を期待できることがわかる。

さて各要素にM個の選点を配置するとすれば、N要素に対しては MN 個の選点が系全体に配置されることになる。したがって表3.4の結果とa)の結果より判断すれば、要素分割の導入による本解析法の解は、 $[MN/2]$ 次までの固有振動数については相当精度のよいものが期待できよう。

表 3-4 (a) 要素分割数の解(Q)に与える影響 (L/r = 50)

Mode number	Boundary condition											
	H-H			C-H			C-C			C-F		
6	284.90			298.48			311.71			241.41		
	284.90	284.90	284.90	298.48	298.48	298.48	311.71	311.71	311.71	241.41	241.41	241.41
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	366.23			378.99			391.36			318.30		
	366.23	366.23	366.23	378.99	378.99	378.99	391.36	391.36	391.36	318.30	318.30	318.30
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8	451.55			463.20			474.47			399.82		
	451.55	451.57	451.55	463.20	463.21	463.20	474.47	474.49	474.50	399.82	399.82	399.82
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
9	539.73			550.11			560.16			484.73		
	539.73	539.79	539.75	550.11	550.19	550.16	560.16	560.29	560.20	484.73	484.76	484.65
	0.00	0.01	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00	0.02	0.01	0.00	0.01	0.02
10	629.91			638.99			647.80			572.07		
	629.91	629.88	629.90	638.99	638.98	638.97	647.80	647.79	647.86	572.07	572.25	572.13
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.03	0.01
11	721.49			729.30			736.90			661.15		
	721.64	722.92	721.90	729.49	730.65	730.49	737.13	738.13	738.05	661.15	661.25	661.30
	0.02	0.20	0.06	0.03	0.19	0.16	0.03	0.12	0.16	0.00	0.02	0.02

表 3-4 (b) 要素分割数の解(Ω)に与える影響 ($L/r=100$)

Mode number	Boundary condition											
	H-H			C-H			C-C			C-F		
6	331.95			355.70			379.76			279.94		
	331.95	331.95	331.95	355.70	355.70	355.70	379.76	379.76	379.76	279.94	279.94	279.94
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7	442.05			467.68			493.42			382.64		
	442.05	442.05	442.05	467.68	467.68	467.68	493.42	493.42	493.42	382.64	382.64	382.64
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
8	563.82			590.72			617.59			497.55		
	563.82	563.82	563.82	590.72	590.78	590.75	617.59	617.68	617.63	497.55	497.55	497.55
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
9	695.75			723.40			750.89			623.16		
	695.75	695.78	695.79	723.40	723.71	723.80	750.89	751.43	751.40	623.16	623.26	623.19
	0.00	0.00	0.01	0.00	0.04	0.06	0.00	0.07	0.07	0.00	0.02	0.00
10	836.49			864.41			892.09			758.07		
	836.49	836.51	836.50	864.42	864.86	864.59	892.09	892.63	892.38	758.07	758.68	758.54
	0.00	0.00	0.00	0.00	0.05	0.02	0.00	0.06	0.03	0.00	0.08	0.06
11	984.80			1012.60			1040.09			901.00		
	985.19	985.98	985.90	1013.17	1016.80	1015.30	1040.99	1043.80	1042.06	901.01	901.71	901.09
	0.04	0.12	0.11	0.06	0.41	0.27	0.09	0.36	0.19	0.00	0.08	0.01

c) 有限要素法による結果との比較

Timoshenko 梁の数値解析の方法としては、最近では有限要素法 (F. E. M.) による解析も広くなされている。数多くの具体的な有限要素の基本的特徴については、文献 27, 28) などに譲ることにし、ここでは特徴的と思われる 2, 3 の要素による結果との比較を通して、本解析値の精度をいま一度検討することにする。

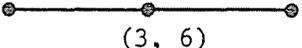
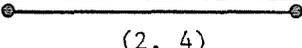
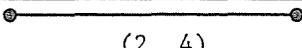
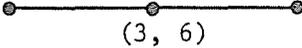
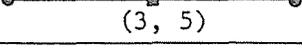
比較のために用いた有限要素は、Dong と Wolf の要素²⁹⁾、Hughes らの要素³⁰⁾、および Tessler と Dong の要素²⁸⁾ である。各要素の概略は次のようである。Dong と Wolf の要素は、変位パラメータ W と ϕ に独立な変位関数を用いた要素である。このようなたわみと傾きを独立に補間する要素を細長比の大きな梁に適用すれば、時として異状な数値解を生じることがあり、せん断変形を考慮した梁の Locking 現象としてよく知られている。この難点を解消する有力な手段は、一つには Hughes らの要素にみられるように、剛性マトリックスの計算で、せん断ひずみによる項の評価を厳密にせず、低次の数値積分公式で近似的に評価する、いわゆる次数低減積分の採用であり、他の一つは Tessler らの要素にみられるように、Bernoulli - Euler の仮定 ($\phi = \partial W / \partial x$) を、要素内の離散点で満足させる離散化 Kirchhoff の拘束の導入である。なお用いた有限要素の特性をまとめると表 3-5 となる。以下では、各要素に対し表中に示した略号を用いることにする。

数値例は文献 28) で取り上げられた両端単純支持の梁を対象にし、結果を表 3-6 および表 3-7 に示す。

表 3-6 (a) と (b) に、それぞれ細長比 10 と 50 の場合の固有振動数を示す。F. E. M. の結果は、Element E を用いた 39 自由度を除き他の要素は 40 自由度によるものである。本解析法による場合は、F. E. M. の自由度にほぼ等しくするため、内部選点数 M と要素分割数 N の組合せ (M, N) に対して、(20, 1) と (10, 2) を用いて解析した。表より明らかなように、本解析法による結果は、ほぼ同じ自由度数を用いているにもかかわらず、F. E. M. の場合より飛躍的に精度が向上している。さらに F. E. M. による解の精度は、細長比が大きくなるにつれて低下する傾向にあるが、本解析値は細長比に左右されないものとなっている。

表 3-7 は、細長比 3464 に対する場合で、16 自由度の F. E. M. と (M, N) = (8, 1) による本解析値と比較したものである。この細長比の値は、単位幅の中実矩形断面を仮定すれば、スパン L と梁高 h の比 L/h が 1000 に相当する極めて薄い梁であるが、本解析法は安定した数値解が得られており、細長比が大なる梁への適用可能性がうかがわれる。なお本解析法の細長比が大なるときへの適用性については、次の d) で論じる。

表 3-5 比較のために用いた有限要素

Element	Reference	Nodal configuration (No. of nodes, No. of d.o.f.)
A	Dong and Wolf [29]	 (3, 6)
B	Hughes et al. [30]	 (2, 4)
C	Tessler and Dong [28]	 (2, 4)
D		 (3, 6)
E		 (3, 5)

\circ : W, ϕ \square : ϕ
 W : Deflection
 ϕ : Angle of rotation due to bending only

表 3-7 細長比が大なる場合 ($L/r=3464$) の本解析値(Q)と有限要素解の比較 (両端単純支持梁)

Mode number	Exact solution	Element B	Element C	Present method
1	9.86958	10.0628(1.95)	9.93032(0.61)	9.86958(0.00)
2	39.4781	42.7178(8.21)	40.3098(2.11)	39.4781(0.00)
3	88.8251	106.633(20.1)	91.7202(3.26)	88.8257(0.00)
4	157.909	221.693(40.4)	160.837(1.85)	157.935(0.02)

Numbers in parentheses indicate percentages of relative error.

表 3-6 本解析法と有限要素法による固有振動数 Ω の比較 (両端単純支持梁)
 (a) $L/r = 10$, (b) $L/r = 50$

(a) $L/r = 10$

Mode number	Timoshenko solution	F.E.M.				This study	
		Element A (40 d.o.f.)	Element C (40 d.o.f.)	Element E (39 d.o.f.)	Element D (40 d.o.f.)	$N=1, M=20$ (40 d.o.f.)	$N=2, M=10$ (40 d.o.f.)
1	8.36487	8.3876(0.27)	8.3734(0.10)	8.3692(0.05)	8.36493(0.00)	8.36487(0.00)	8.36487(0.00)
2	25.1965	25.352(0.62)	25.300(0.41)	25.312(0.46)	25.199(0.01)	25.1965(0.00)	25.1965(0.00)
3	43.775	44.166(0.89)	44.179(0.92)	44.384(1.39)	43.798(0.03)	43.775(0.00)	43.775(0.00)
4	62.509	63.242(1.17)	63.539(1.65)	64.308(2.88)	62.610(0.16)	62.509(0.00)	62.509(0.00)
5	65.9577	66.619(1.00)	66.020(0.09)	66.082(0.19)	65.9581(0.00)	65.9577(0.00)	65.9577(0.00)
6	81.088	82.325(1.53)	83.184(2.58)	85.062(4.90)	81.398(0.38)	81.088(0.00)	81.088(0.00)
7	87.588	88.186(0.68)	87.926(0.39)	88.034(0.51)	87.601(0.02)	87.588(0.00)	87.588(0.00)
8	99.483	101.48(2.01)	103.20(3.74)	106.86(7.42)	100.23(0.75)	99.483(0.00)	99.483(0.00)
9	113.43	114.00(0.50)	114.43(0.88)	114.37(0.83)	113.60(0.15)	113.43(0.00)	113.43(0.00)

(b) $L/r = 50$

Mode number	Timoshenko solution	F.E.M.				This study	
		Element A (40 d.o.f.)	Element C (40 d.o.f.)	Element E (39 d.o.f.)	Element D (40 d.o.f.)	$N=1, M=20$ (40 d.o.f.)	$N=2, M=10$ (40 d.o.f.)
1	9.78902	9.7954(0.07)	9.7990(0.10)	9.7893(0.00)	9.78909(0.00)	9.78902(0.00)	9.78902(0.00)
2	38.2444	38.347(0.27)	38.398(0.40)	38.263(0.05)	38.2485(0.01)	38.2444(0.00)	38.2444(0.00)
3	82.986	83.515(0.64)	83.718(0.88)	83.173(0.23)	83.031(0.05)	82.986(0.00)	82.986(0.00)
4	140.95	142.65(1.20)	143.10(1.52)	141.85(0.64)	141.19(0.17)	140.95(0.00)	140.95(0.00)
5	209.12	213.35(2.02)	213.98(2.32)	211.98(1.37)	209.95(0.40)	209.12(0.00)	209.12(0.00)
6	284.90	293.81(3.13)	294.23(3.28)	291.98(2.49)	287.16(0.79)	284.90(0.00)	284.90(0.00)
7	366.23	382.97(4.57)	382.28(4.38)	380.93(4.01)	371.43(1.42)	366.23(0.00)	366.23(0.00)
8	451.55	480.27(6.36)	477.06(5.65)	478.41(5.95)	462.13(2.34)	451.55(0.00)	451.55(0.00)
9	539.73	584.74(8.34)	577.89(7.07)	583.98(8.20)	559.26(3.62)	539.74(0.00)	540.17(0.00)
10	629.91	669.96(6.36)	684.35(8.64)	696.37(10.6)	665.53(5.65)	629.91(0.00)	633.82(0.00)

Numbers in parentheses indicate percentages of relative error.

d) 細長比が大なる梁への適用性

選点法の適用により得られる数値解の安定性は、内部選点マトリックス $[K]$ (式(3-46))の性質の反映と考えられ、その特性を分析することにより議論ができる。以下では、まず静的問題を対象にして選点法によれば、前述の有限要素にみられるような特別な工夫なしに良好な結果が期待できることを具体例で示し、次いでマトリックス $[K]$ の特性分析を理論的、数値的にを行い、この結果を踏まえて先の静的問題に考察を加え、最後に固有振動問題への適用結果を示す。なお、要素分割を行わない場合($N=1$)を考える。

静的問題は、図3-5に示す二つの基本的な梁の問題、先端に集中荷重を受ける片持梁と等分布荷重を満載した両端単純支持の梁を取り上げる。前者の問題はHughesらの文献³⁰⁾で扱われ次数低減積分の採用により解の精度の改善に成功している。計算はせん断変形の寄与を表わす無次元パラメータ

$$\theta = \kappa AGL^2 / EI \quad (3-55)$$

を用い、 $\theta = 6 \times 10^4$ (厚肉梁)と $\theta = 6 \times 10^6$ (薄肉梁)の場合について行った。

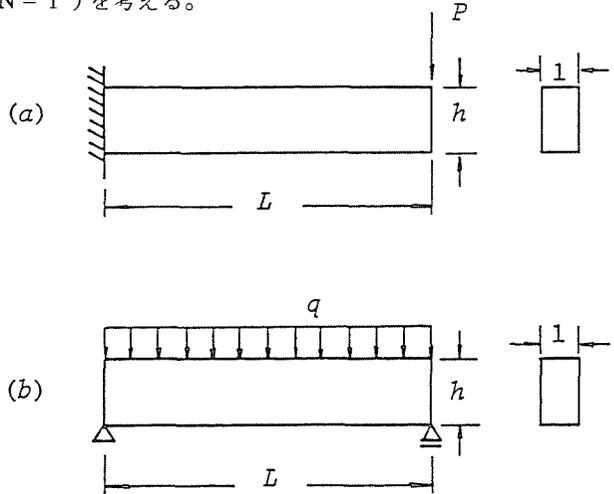


図3-5 静的問題 (a)片持梁, (b)両端単純支持梁

表3-8に、片持梁の先端のたわみ

W を厳密解 $W_{exact} (= PL^3 (1+3/\theta) / 3EI)$ で正規化して示した。比較のために、HughesらによるF. E. M.の結果も併せて示した。F. E. M.(自由度 $2N$)においては、要素数の増加と薄肉梁に対しては次数低減積分の採用により妥当な解が得られているが、本解析法($[K]$ の大きさは $2M$ 次)の結果は、内部選点数によらず厚肉および薄肉梁に対して正解を与えている。

表3-9に、両端単純支持梁の支点におけるたわみ角 ϕ を厳密解 $\phi_{exact} (= qL^3 / 24EI)$ で正規化した値で示す。結果は、上述の片持梁のそれとは異なり、内部選定数 $M=2$ で正解に比して低目の値を示し、特に薄肉梁では零に近づいている。以下に $M=2$ の解の精度低下を $[K]$ の特性分析により明らかにする。

静的問題を表わすのに必要な $2(M+2)$ 個の条件式は、固有値問題に対するのと同様な手順にしたがえば、次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} [K_I] \{ \delta_I \} + [K_B] \{ \delta_B \} + \{ q \} &= \{ 0 \} \\ [S_I] \{ \delta_I \} + [S_B] \{ \delta_B \} + \{ p \} &= \{ 0 \} \end{aligned} \right\} \quad (3-56)$$

ここで、 $\{q\}$ と $\{p\}$ はそれぞれ、両端単純支持の梁の問題（図 3-5 (b)）および片持梁の問題（図 3-5 (a)）を記述するのに必要なベクトルである。式(3-56)より $\{\delta_B\}$ を消去すれば次式が得られる。

$$[K] \{\delta_I\} = \{f\} \quad (3-57)$$

ここで、 $[K]$: 内部選点マトリックス、 $\{f\}$ は問題に応じて次のように表わされる荷重ベクトルである。

$$\left. \begin{array}{l} \text{両端単純支持梁 : } \{f\} = -\{q\} \\ \text{片持梁 : } \{f\} = [K_B][S_B]^{-1}\{p\} \end{array} \right\} \quad (3-58)$$

なお、表 3-8、3-9 に示した結果は、式(3-57)に基づいたものである。

さて、内部選点マトリックス $[K]$ の性質を調べるため、式(3-56)のマトリックス $[K_I]$ と $[K_B]$ を曲げとせん断ひずみに関する項に分離し、前述のパラメータ θ (式(3-55))を用い、

$$[K_i] = [K_i^b] + \theta [K_i^s] \quad (i = I, B) \quad (3-59)$$

と表示（添字 b 、 s はそれぞれ、曲げおよびせん断ひずみに関する項を意味する）すれば、式(3-57)は次のように表わされる。

$$([K^b] + \theta [K^s]) \{\delta_I\} = \{f_1\} + \theta \{f_2\} \quad (3-60)$$

ここで、

$$\left. \begin{array}{l} [K^b] = [K_I^b] - [K_B^b][S_B]^{-1}[S_I] \\ [K^s] = [K_I^s] - [K_B^s][S_B]^{-1}[S_I] \end{array} \right\} \quad (3-61)$$

であり、 $\{f_1\}$ と $\{f_2\}$ は各問題に対応して以下となる。

両端単純支持の梁：

$$\{f_1\} = -\{q\} \quad , \quad \{f_2\} = \{0\} \quad (3-62a)$$

片持梁：

$$\{f_1\} = [K_B^b][S_B]^{-1}\{p\} \quad , \quad \{f_2\} = [K_B^s][S_B]^{-1}\{p\} \quad (3-62b)$$

式(3-60)を $\theta \rightarrow \infty$ なる場合 ($\theta [K^s] \gg [K^b]$) について考えれば、次のようになる。

$$\text{両端単純支持の梁 : } \theta [K^s] \{\delta_I\} = \{f_1\} \quad (3-63a)$$

$$\text{片持梁 : } \theta [K^s] \{\delta_I\} = \theta \{f_2\} \quad (3-63b)$$

ここで $[K^S]$ が非特異マトリックスと仮定すれば、式(3-63a)より $\{\delta_I\} = \{0\}$ 、式(3-63b)より $\{\delta_I\} = [K^S]^{-1} \{f_2\}$ なる解が得られ、 $\theta \rightarrow \infty$ では梁はBernoulli-Euler的な変形を表わしえないことがわかる。

このような難点は、 $[K^S]$ に次のような特異性を持たせることによって取り除くことができる。

$$[K^S] \{\delta_I\} = \{0\} \quad \text{ただし} \quad \{\delta_I\} \neq \{0\} \quad (3-64)$$

式(3-64)が成立するならば、最終の解は曲げ変形が支配的なものになることは明らかである。

図3-6は、 $[K^S]$ の行列式の値 $D = \det [K^S]$ を、両端単純支持(H-H)、両端固定(C-C)、固定-自由(C-F)および固定-単純支持(C-H)の支持条件について、内部選点数 $M (= 2 \sim 15)$ をパラメータにとりプロットしたものである。図では $|D|$ の値が、 1.0^{-50} 以下のものについては 1.0^{-50} として図示した。この図から、 $[K^S]$ の性質として、条件C-Fでは常に特異であること、条件C-C、C-H、H-Hでは $M=2$ で非特異、 $M \geq 3$ で特異となること、さらに M を増せばいずれの条件に対して特異性が強くなることわかる。

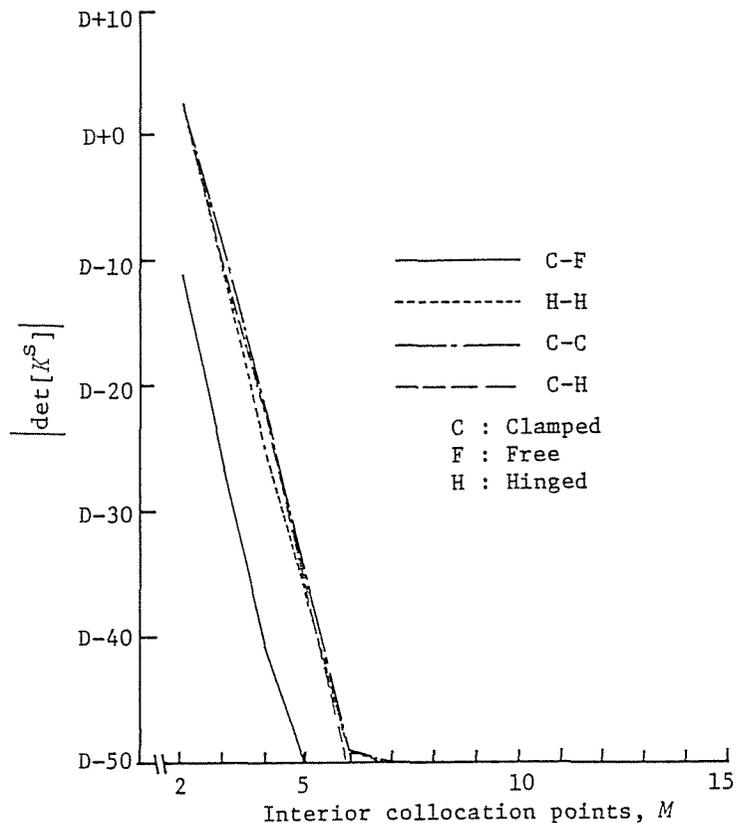


図3-6 マトリックス $[K^S]$ の行列式の値

さて、図3-6から得られた $[K^S]$ の特性に基づき、表3-8、3-9の結果に検討を加えてみたい。すなわち、表3-8に示した条件C-Fに対する高精度な解は、内部選点数 M に依存しない $[K^S]$ の特異性の結果であり、一方表3-9に示した条件H-Hに対する解で、 $M=2$ の薄肉梁の結果($\phi \rightarrow 0$)は $[K^S]$ の非特異性による剛性の過大評価の影響であり、 $M \geq 3$ における精度向上は $[K^S]$ の特異性の反映であることが理解されよう。

これまでの数値的、理論的な考察により、本解析法は形式的には $\theta \rightarrow \infty$ の梁に対しても適用が可能であることが明らかにされた。しかし、数値計算上は使用する電算機の語長 (Word length) の関係で、 θ (あるいは L/h)がある値以上になると計算が不可能になることが予想される。図3-7は、計算可能な θ (L/h)の上限値を定めるために、先の片持梁の問題を内部選点数 $M=11$ で解析し、先端のたわみ (W/W_{exact}) をスパンと高さの比 L/h に対して図示したものである。これによれば、計算可能な L/h の上限値はほぼ 10^4 であることがわかる。なお、 $L/h > 10^4$ で W/W_{exact} の値は急激に減少しているが、これは $[K^S]$ が $[K^b]$ のほぼ $(L/h)^2$ のオーダーであるから、厚さが薄くなれば使用電算機 (北海道大学大型計算機センター HITAC M-200H) の語長の関係で近似的に $[K] \div \theta [K^S]$ の状態に近くなるからと考えられる。

本解法の細長比の大きな梁の固有振動問題への適用例として、細長比が6928 (単位幅の中実矩形断面とすれば $L/h = 2000$)、17320 (同じく $L/h = 5000$)の二つの場合および支持条件H-H、C-H、C-F、C-C、F-Fの五つの場合について、 $M=11$ を用いて解析した低次5つの固有振動数を古典解とともに表3-10に示した。結果はいずれの細長比、支持条件に対しても妥当なものである。

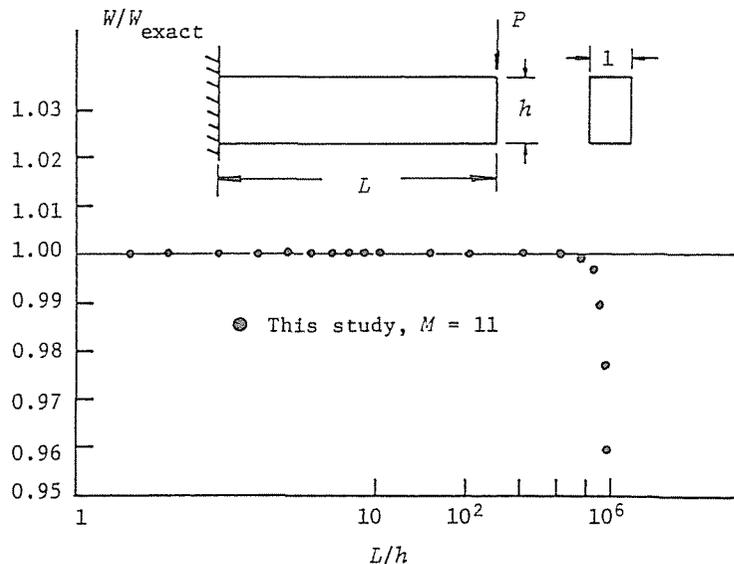


図3-7 L/h と片持梁の先端たわみの関係

表 3-8 片持梁の先端たわみ (厳密解に対する比)

(a) $\theta=6.0 \times 10^1$

M	This study
2	1.000
3	1.000
4	1.000
6	1.000
8	1.000
10	1.000
11	1.000
13	1.000

N	F.E.M.	
	Reduced integration	Exact integration
2	0.940	0.445
4	0.985	0.762
8	0.996	0.927
16	0.999	0.981

F.E.M.: Finite element method
 M : Number of interior collocation points
 N : Number of elements

(b) $\theta=6.0 \times 10^6$

M	This study
2	1.000
3	1.000
4	1.000
6	1.000
8	1.000
10	1.000
11	1.000
13	1.000

N	F.E.M.	
	Reduced integration	Exact integration
2	0.938	0.800×10^{-4}
4	0.984	0.320×10^{-3}
8	0.996	0.128×10^{-3}
16	1.000	0.512×10^{-3}

F.E.M.: Finite element method
 M : Number of interior collocation points
 N : Number of elements

表 3-9 両端単純支持梁の支点のたわみ角 (厳密解に対する比)

M	This study	
	$\theta=6.0 \times 10^1$	$\theta=6.0 \times 10^6$
2	0.375	0.375×10^{-5}
3	1.000	1.000
4	1.000	1.000
6	1.000	1.000
8	1.000	1.000
10	1.000	1.000
11	1.000	1.000
13	1.000	1.000

表3-10 細長比が大きな梁の固有振動数 Ω

Boundary condition	Mode number	Classical solution	Slenderness ratio, L/r	
			6928	17320
H-H	1	9.86960	9.86954(0.00)	9.87107(0.02)
	2	39.4784	39.4783(0.00)	39.4769(0.00)
	3	88.8264	88.8261(0.00)	88.8281(0.00)
	4	157.914	157.938(0.02)	157.938(0.02)
	5	246.740	246.821(0.03)	246.824(0.03)
C-H	1	15.4182	15.4182(0.00)	15.4191(0.00)
	2	49.9649	49.9647(0.00)	49.9633(0.00)
	3	104.247	104.247(0.00)	104.249(0.00)
	4	178.270	178.333(0.04)	178.332(0.04)
	5	272.032	272.538(0.19)	272.545(0.19)
C-F	1	3.51602	3.51602(0.00)	3.50985(0.00)
	2	22.0345	22.0344(0.00)	22.0375(0.01)
	3	61.6972	61.6970(0.00)	61.6973(0.00)
	4	120.902	120.901(0.00)	120.900(0.00)
	5	199.860	200.060(0.10)	200.068(0.10)
C-C	1	22.3733	22.3733(0.00)	22.3736(0.00)
	2	61.6728	61.6726(0.00)	61.6743(0.00)
	3	120.903	120.903(0.00)	120.904(0.00)
	4	199.859	200.060(0.10)	200.064(0.10)
	5	298.557	299.052(0.16)	299.055(0.17)
F-F	1	22.3733	22.3734(0.00)	22.3035(0.31)
	2	61.6728	61.6727(0.00)	61.6703(0.00)
	3	120.903	120.903(0.00)	120.901(0.00)
	4	199.859	200.060(0.10)	200.060(0.10)
	5	298.557	299.053(0.16)	299.058(0.17)

Numbers in parentheses indicate percentages of relative error.

(2) 端点固有方程式による場合

この方程式を採用する際の注意すべき点は、既に述べたように、 $\det | [T(\Omega)] | = 0$ (式 3-52)) を満たす Ω^2 に対しては計算が不可能になる点である。すなわち、 $\det | [T(\Omega)] | = 0$ ということは、仮定した Ω^2 が、全体系を構成する各要素の境界上の変位を拘束したときの固有値に相当し、これが全体系の固有値に一致する場合、または近接する場合には真の解を見落す可能性があることである。しかしながら、この問題点は後に示す数値例からもわかるように、低次の固有値に着目するならば、要素細分割の導入および試行錯誤で解を追跡するときの固有値パラメータのステップ幅に考慮を払うことにより、ある程度は改善されよう。以下で、以上の状況を具体的な問題によって確かめることにする。

数値例は、細長比 L/r が 10 なる場合を対象とし、解は固有振動数パラメータのステップ幅 $\Delta\Omega$ を 0.1 に固定し、 $D = \det | [S(\Omega)] |$ を計算し、 D の符号の互いに異なる 2 点 ($\Omega^{(k-1)}, D^{(k-1)}$)、($\Omega^{(k)}, D^{(k)}$) 間を直線で結んで求めた。

まず両端固定の梁を取り上げる。この支持条件に対しては、要素数 $N = 1$ による解析は式 (3-51) より明らかなように、自明な解 $\{\delta_B\} = \{0\}$ を持つので、要素数 $N \geq 2$ で解析しなければいけない。図 3-8 (a) と (b) は、それぞれ内部選点数 M と要素分割数 N (等分割) の組合せ $(M, N) = (7, 2)$ および $(7, 3)$ によるときの行列式の値 D を固有振動数パラメータ Ω の変域 $[0, 100]$ について示したものである。縦軸が行列式の値 D であり、横軸が固有振動数パラメータ Ω である。図中、縦軸に平行な一点破線は、 $[T(\Omega)]$ の行列式の値が零となる $\Omega = \Omega^*$ (全体系の解と区別するために右肩に * を付す) を表わし、 $N = 2$ では $\Omega_1^* (i = 1 \sim 4) = 32.60, 61.70, 88.64, 98.83$ 、 $N = 3$ で $\Omega_1^* = 50.89, \Omega_2^* = 93.99$ である。これらの Ω^* は、既に述べたようにスパン L/N の両端固定梁の固有振動数と等価であり、 $D - \Omega$ 曲線においては特異解の形で現われている。図から明らかなように、 $[0, \Omega_1^*], [\Omega_1^*, \Omega_2^*], \dots$ 、内の零点 (図の ● 印) は、低次 7 つの固有振動数 (表 3-3 (a)) の位置を明確に指示している。

図 3-9 (a) および (b) に、固定-単純支持に対する $D - \Omega$ 曲線を、それぞれ $(M, N) = (14, 1)$ 、 $(7, 2)$ の場合について示した。これによれば、低次 8 つの固有振動数は、 $\det | [T(\Omega)] | = 0$ を満たす $\Omega = \Omega^*$ に一致することもなく、また線形補間により解を推定したのにもかかわらず、正解 (表 3-3 (b)) にほぼ一致している。

最後に片持梁の $D - \Omega$ 曲線を示す。図 3-10 (a) は $(M, N) = (14, 1)$ による結果で、低次 8 つの固有振動数はほぼ正しく求まっている (表 3-3 (e))。図 3-10 (b) は、 $(M, N) = (7, 2)$ に基づく場合であり、曲線の零点は 5 次固有振動数に対応するそれを除き他の固有振動数の位置を明確に指示している。5 次固有振動数の見逃しは、固有振動数パラメータのステップ幅、 $\Delta\Omega = 0.1$ が特異解をまたぐことによって生じたものであり、さらにステップ幅を小さく取れば求まることがわかる (図に、 $\Delta\Omega = 0.01$ としたときの特異解近傍の $D = \det | [S(\Omega)] |$ の挙動

を示した)。この数値例が示すように、 $D-\Omega$ 曲線に現われる特異解は、解の追跡を困難にし、また解を得るための労力を多大なものにすることが予想される。この難点を少しでも改善するのが要素分割である。図 3-10(e)に、 $(M, N) = (7, 3)$ に対する $D-\Omega$ 曲線を示した。明らかに、この曲線での特異解の数は他の分割数 $N = 1, 2$ に対するときよりも減少している。したがって、解を見落す危険性の問題は、低次固有振動数に限れば、特異解の数が少なくなった $D-\Omega$ 曲線を用い、特異解近傍の曲線追跡を小さなステップ幅によって詳しく行うこと、そして固有振動に関する性質（固有モード）からチェックすることによって大よそ解決することができるだろう。

以上、2、3の限られた数値例であるが、端点固有方程式の適用可能性に関しては確認できたものと考えられる。ここでは、解の精度については直接的な検討を行なわなかったが、前にも触れたように本質的には内部選点数 M と要素分割数 N に依存するものであり、固有振動数パラメータのステップ幅を小さく取ることにより、同一の内部選点数、要素分割数で解析した内部選点固有方程式の結果と同程度のものが期待できよう。

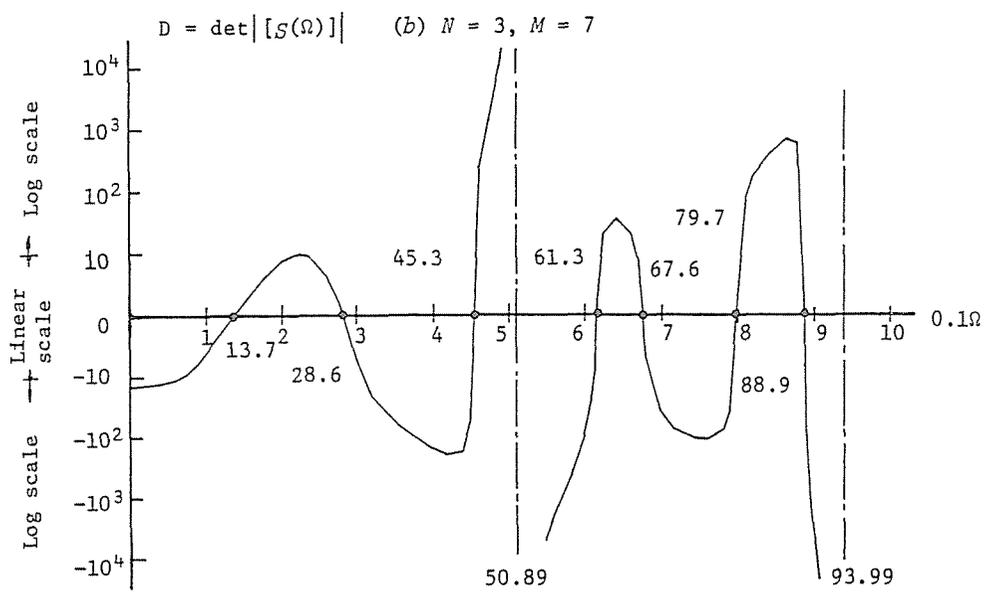
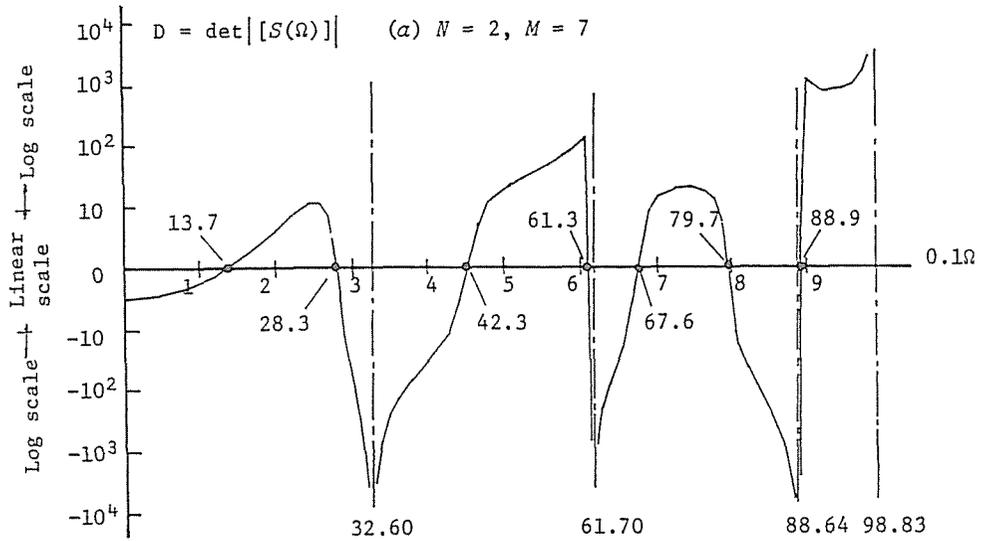


図3-8 両端固定梁のD-Q曲線 ($L/r=10$)
 (a) $N = 2, M = 7$, (b) $N = 3, M = 7$

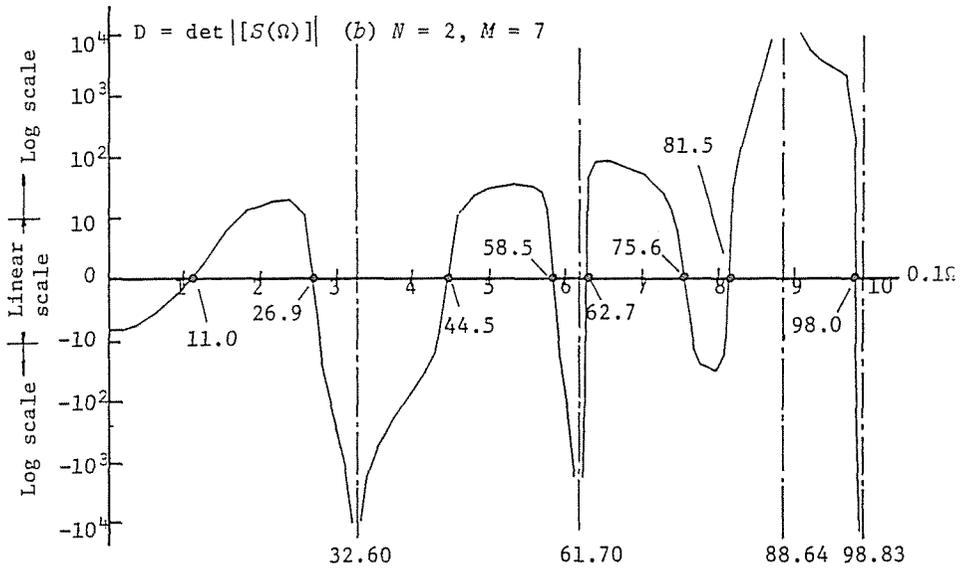
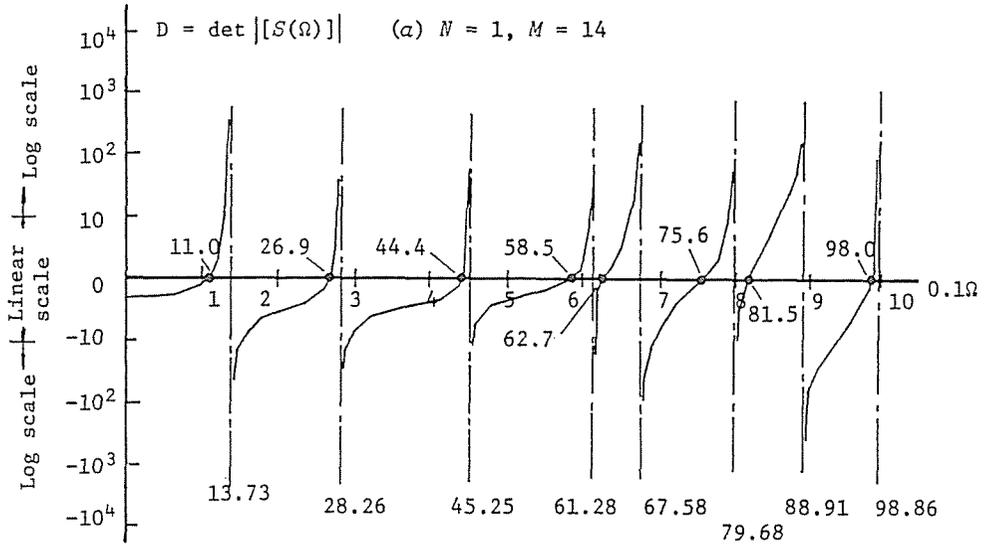


図 3-9 固定-単純支持梁の $D-\Omega$ 曲線 ($L/r=10$)
(a) $N = 1, M = 14$, (b) $N = 2, M = 7$

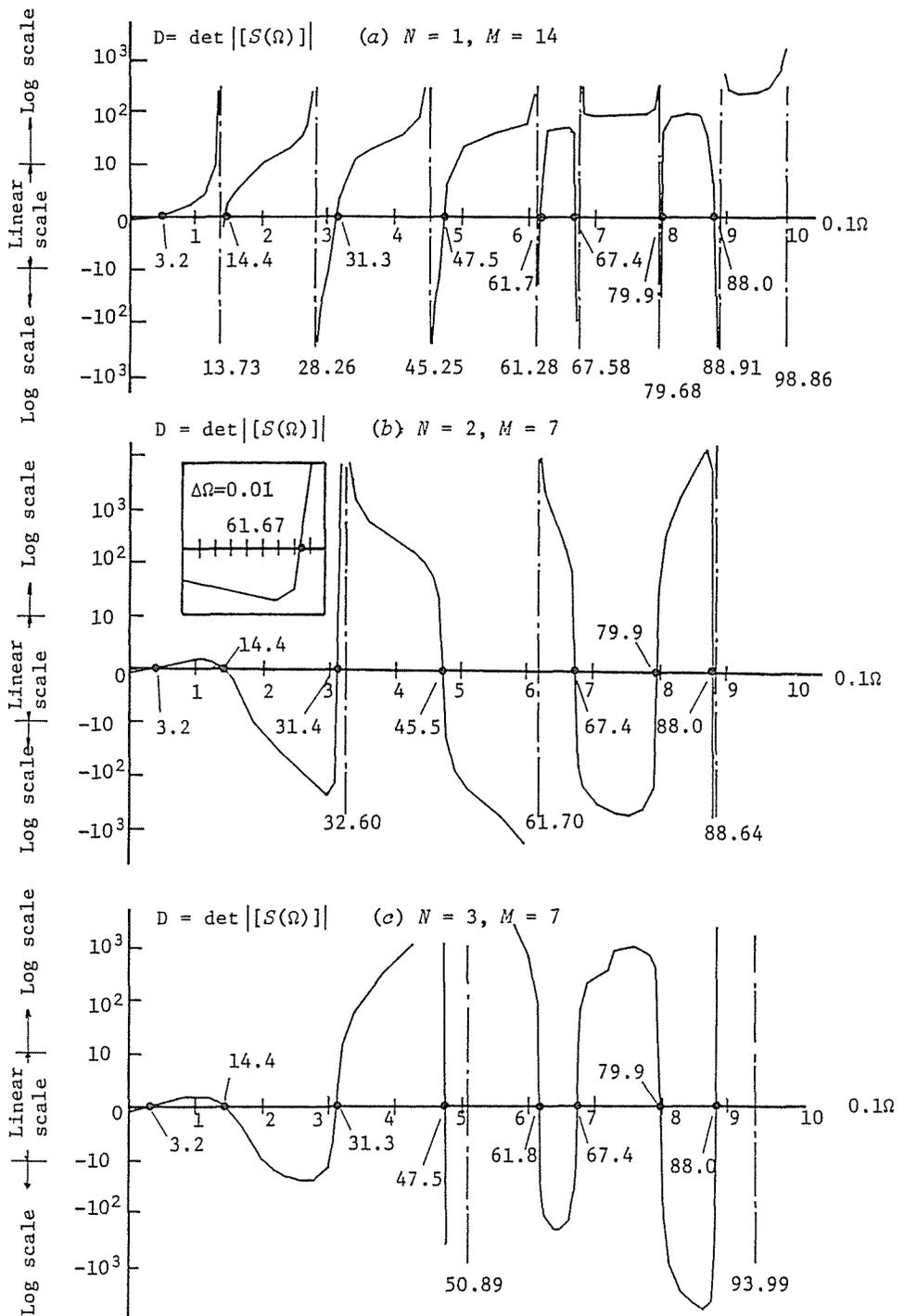


図3-10 片持梁のD-Q曲線 ($L/r=10$)

(a) $N = 1, M = 14$, (b) $N = 2, M = 7$, (c) $N = 3, M = 7$

(3) Timoshenko 梁の数値例より得られた本解析法の特徴

内部選点固有方程式および端点固有方程式に基づく Timoshenko 梁の数値例より得られた本解析法の特徴は以下の通りである。

内部選点固有方程式による場合：

- 1) L-選点に基づいた結果が、C-選点に基づいた結果に比べ一般に好結果を生んでいる。
- 2) 要素分割数を N 、内部選点数を M (L-選点を採用) と記せば、厳密解との比較においてほぼ 1% 以内の精度で固有振動数が求められる振動次数は、 $N=1$ では低次 $[M/2]$ 次まで、 N 要素分割では低次 $[MN/2]$ 次までである ($[]$: Gauss の記号)。
- 3) 本解析法によれば、厚肉梁も、薄肉梁も、同程度の精度で解が得られる。このことは、Bernoulli-Euler 梁に適用しても特性 2) が成立することを示唆している。なお、薄肉梁の解を Timoshenko 梁理論に基づき本解析法で算定する場合、使用する計算機の語長の関係で制約が生じる。例えば単位幅の中実矩形断面の片持梁の静的問題の結果から判断すれば、適用可能なスパン L と梁高 h との比 L/h の上限値は 10^4 である。

端点固有方程式による場合：

- 1) この方程式による場合は、解の見落しに注意する必要がある。見落しの危険性は、低次の解に限定すれば、要素分割数を増すことによって改善される。
- 2) 解の精度は、同一の離散化条件で解析すれば内部選点固有方程式と同程度のものが期待できる。

II 回 転 殻

これまでの選点法の固有振動問題への適用性の検討は、微分方程式が 2 階の線形演算子で表わされる場合に対するものであった。実際の構造問題では、高階かつ多元な微分方程式、数値計算上の困難さがより増す場合を扱う必要性も生じるだろう。例えば、ここで議論する回転殻もその一つである。殻理論の特徴は、殻の曲率が微分方程式の中の変数係数として現われる点であり、および膜的な特性と曲げの特性の二つの異なる特性より成る点である。前者は微分方程式を解析的に解くことを一般に困難にし、前に述べたように様々な数値解析的なアプローチがなされてきた大きな原因であり、後者は微分方程式の解が減衰項と発散項から組み立てられることを意味し、発散項の存在が数値的取り扱いを困難にする大きな原因である。

以上の観点からここでは、高階かつ多元な微分方程式で表わされ、その数値的な取り扱いがしばしば面倒になる回転殻の固有振動問題を対象にし、選点法の数値解析上の特性および適用上の留意事項に検討を加える。

以下、3-6では回転殻の基礎方程式を Novozhilov の殻理論に基づいて述べる。3-7では、殻の形状が与えられ、殻の端末の境界条件が指定されさえすれば、一定の手順に従って数値計算が行えるという見通しのよい解析法を、内部選点固有方程式の形で記述する。3-8では数値計算例を紹介する。具体的には、本解析法を種々のガウス曲率をもつ回転殻(円筒、球、円錐および双曲殻という単一な形状の殻)、および形状の異なる殻が組合さった回転殻(円筒殻と球殻から成る場合)に適用し、本解析法の適用性や数値解析上の特性を検討する。

3-6 古典殻理論に基づく回転殻の基礎方程式

回転曲面を定義するための諸量は以下のようなものである(図3-11)。

φ : 曲線上の任意点Pで立てた法線と回転軸の交角(経角)、

$x(\xi)$: 経線方向座標(無次元化された経線方向座標)、

θ : y_2 軸からの母線の回転角(円周方向座標)、

R : 曲面上の任意点Pにおける回転半径

R_1 : 点Pにおける母線の曲率半径

R_2 : 点Pで母線に立てた法線の回転軸との交点までの長さ。

R_1 と R_2 は主曲率半径とよばれるもので、殻の中央面を $R = R(x)$ で与えれば次式で表わされる。

$$R_1 = -\frac{\sqrt{1 - (dR/dx)^2}}{d^2R/dx^2}, \quad R_2 = \frac{R}{\sqrt{1 - (dR/dx)^2}} \quad (3-65)$$

また図3-11(b)より幾何学的に次の関係式が成立する。

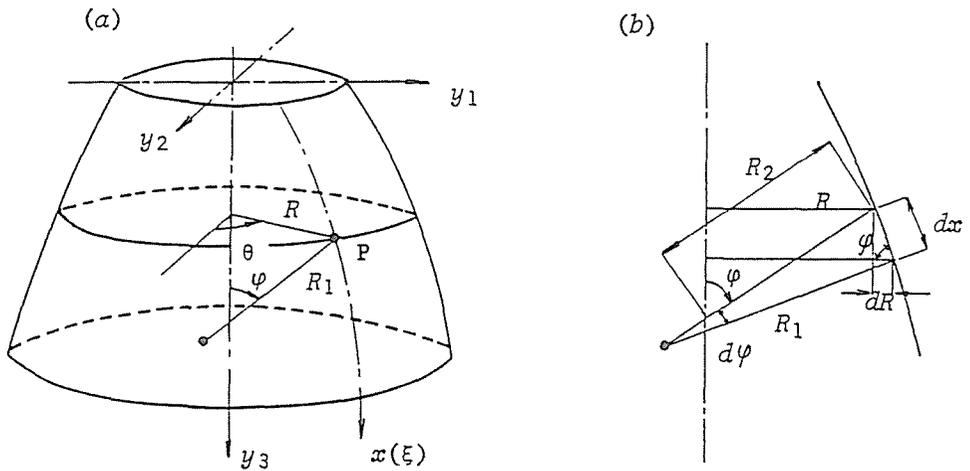


図3-11 回転曲面

$$R = R_2 \sin \varphi, \quad dx = R_1 d\varphi, \quad dR/d\varphi = R_1 \cos \varphi \quad (3-66)$$

さて、任意形状の薄肉回転殻の基礎方程式の誘導に当たっては、Novozhilovの殻理論³¹⁾に基礎を置き、殻は等方等質な様な厚さとした。殻の運動方程式は、平衡方程式、断面力（合応力合モーメント）-ひずみ関係式、ひずみ-変位関係式から、円周方向Fourier級数展開により経線方向座標に関する微分方程式で表わされる。以下では、まず経線方向の独立変数に φ を用いた場合の関係式を列挙し、次にそれらを回転曲面の幾何学的特性を用いて、独立変数 ξ に書き換え、後の定式化の準備とする。

図3-12に示すように、 $x(\xi)$ 軸方向（経線方向）、 θ 軸方向（円周方向）および z 軸方向（法線方向）の変位をそれぞれ、 U 、 V および W で定義する。肉厚断面に生じる合応力と合モーメント成分をそれぞれ、 $(N_x, N_\theta, N_{x\theta}, N_{\theta x}, Q_x, Q_\theta)$ および $(M_x, M_\theta, M_{x\theta}, M_{\theta x})$ で表示する。

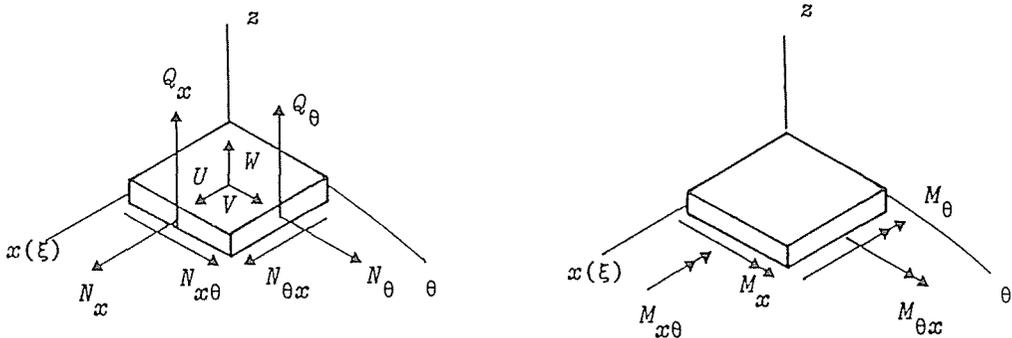


図3-12 殻要素の変位、合応力および合モーメント

回転殻の運動方程式は、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varphi} (RN_x) + R_1 \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} - R_1 N_\theta \cos \varphi + \frac{1}{R_1} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \varphi} (RM_x) + R_1 \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - R_1 M_\theta \cos \varphi \right\} \\ & = \rho h R R_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3-67a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \varphi} (RN_{x\theta}) + R_1 \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + R_1 N_{\theta x} \cos \varphi + \frac{1}{R} \left\{ R_1 \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (RM_{x\theta}) + R_1 M_{\theta x} \cos \varphi \right\} \\ & = \rho h R R_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3-67b)$$

$$\begin{aligned}
& -R_1 N_\theta \sin \varphi - RN_x + \frac{1}{R} \left\{ R_1 \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} (RM_{x\theta}) + R_1 M_\theta \cos \varphi \right\} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} (RM_x) \right. \\
& \left. + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - M_\theta \cos \varphi \right\} = \rho h R R_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (3-67c)
\end{aligned}$$

ここで、 t : 時間、 ρ : 単位体積当りの質量、 h : 殻の厚さ。

ひずみと合応力、曲率と合モーメントの関係式は次の式となる。

$$\left. \begin{aligned}
N_x &= K(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta), \quad N_\theta = K(\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x) \\
N_{x\theta} &= N_{\theta x} = K(1-\nu) \varepsilon_{x\theta} / 2 \\
M_x &= D(\chi_x + \nu \chi_\theta), \quad M_\theta = D(\chi_\theta + \nu \chi_x) \\
M_{x\theta} &= M_{\theta x} = D(1-\nu) \chi_{x\theta} / 2
\end{aligned} \right\} \quad (3-68a \sim f)$$

ここで、 $K = Eh / (1 - \nu^2)$ 、 $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ 、 E : 弾性係数、 ν : ポアソン比。

一方、変位とひずみ、曲率の関係は次のようである。

$$\left. \begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} + W \right), \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \left(U \cos \varphi + \frac{\partial V}{\partial \theta} + W \sin \varphi \right) \\
\varepsilon_{x\theta} &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} - V \cos \varphi \right) \\
\chi_x &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial \Phi_x}{\partial \varphi}, \quad \chi_\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \Phi_\theta}{\partial \theta} + \Phi_x \cos \varphi \right) \\
\chi_{x\theta} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \Phi_x}{\partial \theta} - \Phi_\theta \cos \varphi \right) + \frac{1}{R_1 R_2} \frac{\partial V}{\partial \varphi}
\end{aligned} \right\} \quad (3-69a \sim f)$$

ここで、 Φ_x と Φ_θ はそれぞれ、経線方向および円周方向の回転角で次のように与えられる。

$$\Phi_x = \frac{1}{R_1} \left(U - \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right), \quad \Phi_\theta = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R} \frac{\partial W}{\partial \theta} \quad (3-70a, b)$$

以上に示した諸式は、経線方向の独立変数に φ をとり表わしたものである。次に式(3-66)に留意し、無次元化された経線方向座標 ξ に関する諸式へ変換する。その際、次に定義される演算子と殻の形状パラメータに関する無次元量を導入する。

演算子：

$$\left. \begin{aligned}
()' &= \partial () / \partial \xi, \quad ()^* = \partial () / \partial \theta \\
()^\circ &= \partial () / \partial \tau
\end{aligned} \right\} \quad (3-71)$$

ただし、 ξ と τ はそれぞれ、経線に沿う区間 $[0, 1]$ で定義される無次元座標および無次元時間である。

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = \frac{t}{a} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3-72)$$

ここに、 L : 経線の長さ、 a : 代表長さ。

殻の形状パラメータ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= L/a, \quad \delta = h/a, \quad r = R/a \\ r_1 &= a/R_1, \quad r_2 = a/R_2 \end{aligned} \right\} \quad (3-73)$$

式(3-71)、(3-72)を用いて、主曲率半径(式(3-65))、運動方程式(3-67)、変位とひずみ、曲率関係式(3-69)および回転角(式(3-70))は、次のように書き換えられる。

主曲率半径 :

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{r''/\alpha^2}{\sqrt{1 - (r'/\alpha)^2}} \\ r_2 &= \frac{\sqrt{1 - (r'/\alpha)^2}}{r} = -\frac{(r' + r^2)}{\alpha^2 r_1} \end{aligned} \right\} \quad (3-74)$$

ここで、

$$\gamma = r'/r \quad (3-75)$$

であり、さらに一般に回転曲面では次の幾何学的関係が成立する。

$$r_2' = \gamma(r_1 - r_2), \quad r''/r = -\alpha^2 r_1 r_2 \quad (3-76)$$

運動方程式 :

$$\begin{aligned} a \{ (rN_x)'/\alpha + N_{\theta x}^* - r'N_{\theta}/\alpha \} + r_1 \{ (rM_x)'/\alpha + M_{\theta x}^* - r'M_{\theta}/\alpha \} \\ = E \delta \text{ar} \overset{\circ\circ}{U} \end{aligned} \quad (3-77a)$$

$$\begin{aligned} a \{ (rN_{x\theta})'/\alpha + N_{\theta}^* + r'N_{\theta x}/\alpha \} + r_2 \{ M_{\theta}^* + (rM_{x\theta})'/\alpha + r'M_{\theta x}/\alpha \} \\ = E \delta \text{ar} \overset{\circ\circ}{V} \end{aligned} \quad (3-77b)$$

$$\begin{aligned} -\text{ar} (r_1 N_x + r_2 N_{\theta}) + \{ M_{\theta}^* + (rM_{x\theta})'/\alpha + r'M_{\theta x}/\alpha \}^* / r \\ + \{ (rM_x)'/\alpha + M_{\theta x}^* - r'M_{\theta}/\alpha \}' / \alpha = E \delta \text{ar} \overset{\circ\circ}{W} \end{aligned} \quad (3-77c)$$

変位-ひずみ、曲率関係式：

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= (U'/\alpha + r_1 W)/a, \quad \varepsilon_\theta = (V^*/r + r_2 W + rU/\alpha)/a \\ \varepsilon_{x\theta} &= (V'/\alpha + U^*/r - rV/\alpha)/a \\ \chi_x &= (\Phi_x'/\alpha)/a, \quad \chi_\theta = (\Phi_\theta^*/r + r\Phi_x/\alpha)/a \\ \chi_{x\theta} &= \{\Phi_x^*/r - r\Phi_\theta/\alpha + (r_2 V'/\alpha)/a\}/a \end{aligned} \right\} \quad (3-78a \sim f)$$

回転角：

$$\Phi_x = (r_1 U - W/\alpha)/a, \quad \Phi_\theta = (r_2 V - W^*/r)/a \quad (3-79a, b)$$

以上の準備のもとに、変位成分で表示された運動方程式、境界条件および形状の異なる殻が組合さった問題において必要となる接続条件は、次のように整理される。

(1) 変位成分で表示された運動方程式

変位 U 、 V および W は、調和振動の前提のもとに時間変数 τ を分離し、円周方向に Fourier 級数展開により次のように与えられる。

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} = \frac{\sigma a}{E} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} u_n(\xi) \cos n\theta \\ v_n(\xi) \sin n\theta \\ w_n(\xi) \cos n\theta \end{Bmatrix} e^{i\Omega\tau} \quad (3-80)$$

ここで、 σ ：基準応力、 n ：円周方向波数、 u_n 、 v_n 、 w_n ：無次元化された変位関数。以後簡単のために、Fourier 級数展開の係数 u_n 、 v_n 、 w_n はそれぞれ、 u 、 v 、 w と略記する。

また Ω は固有円振動数パラメータであり、固有円振動数 ω との間には次の関係がある。

$$\Omega = a\omega \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3-81)$$

変位成分で表わされた運動方程式は、合応力と合モーメント（式（3-68））を変位-ひずみ曲率関係式（3-78）を用いて変位関数 u 、 v 、 w で表わした後、式（3-77）に代入すれば、変数係数の 4 階 3 元連立常微分方程式として次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) - \Omega^2 u &= 0 \\ L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) - \Omega^2 v &= 0 \\ L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) - \Omega^2 w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-82)$$

ただし、微分演算子 $L_{11}, L_{12}, \dots, L_{33}$ は次のようなものである。

$$\left. \begin{aligned}
 L_{11} &= a_1 ()'' + a_2 ()' + a_3 \\
 L_{12} &= a_4 ()' + a_5 \\
 L_{13} &= a_6 ()''' + a_7 ()'' + a_8 ()' + a_9 \\
 L_{21} &= a_{10} ()' + a_{11} \\
 L_{22} &= a_{12} ()'' + a_{13} ()' + a_{14} \\
 L_{23} &= a_{15} ()'' + a_{16} ()' + a_{17} \\
 L_{31} &= a_{18} ()''' + a_{19} ()'' + a_{20} ()' + a_{21} \\
 L_{32} &= a_{22} ()'' + a_{23} ()' + a_{24} \\
 L_{33} &= a_{25} ()'''' + a_{26} ()''' + a_{27} ()'' + a_{28} ()' + a_{29}
 \end{aligned} \right\} (3-83)$$

ここで、 a_i ($i = 1 \sim 29$) は、式 (3-73) の殻の形状パラメータ、ポアソン比 ν 、円周方向波数 n で表わされる係数で、その具体的内容は本章の付録に示す。

(2) 境界条件と接続条件

円周方向に閉じ、頂点 ($R = r = 0$) をもたない場合の同次境界条件は、一般に次式の適当な組合せで与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 U = 0 \text{ または } N_x = 0, \quad V = 0 \text{ または } S_{x\theta} = 0 \\
 W = 0 \text{ または } T_x = 0, \quad \phi_x = 0 \text{ または } M_x = 0
 \end{aligned} \right\} (3-84a)$$

ここで、 T_x および $S_{x\theta}$ は次式で定義される等価せん断力

$$\left. \begin{aligned}
 T_x &= Q_x + (M_x \theta^* / r) / a \\
 S_{x\theta} &= N_{x\theta} + r_2 M_{x\theta} / a
 \end{aligned} \right\} (3-85)$$

であり、 Q_x は面外方向のせん断力である。

$$Q_x = \frac{1}{ar} \left\{ \frac{1}{\alpha} (rM_x)' + M_{\theta x}^* - \frac{r'}{\alpha} M_{\theta} \right\} (3-86)$$

ここで、 $(N_x, S_{x\theta}, T_x, M_x, \phi_x)$ を $(n_x, \bar{S}_{x\theta}, t_x, m_x, \phi_x)$ を係数とする形で、円周方向に Fourier 級数展開しておく。

$$\left. \begin{aligned}
 \begin{pmatrix} N_x \\ S_{x\theta} \\ T_x \end{pmatrix} &= \sigma_a \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} n_x \cos n\theta \\ -S_{x\theta} \sin n\theta \\ t_x \cos n\theta \end{pmatrix} e^{iQ\tau} \\
 M_x &= \sigma_a^2 \sum_{n=0}^{\infty} m_x \cos n\theta e^{iQ\tau} \\
 \phi_x &= \frac{\sigma}{E} \sum_{n=0}^{\infty} \phi_x \cos n\theta e^{iQ\tau}
 \end{aligned} \right\} \quad (3-87)$$

ここに、各 Fourier 係数の内容を示すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 n_x &= b_{11}U' + b_{12}U + b_{13}V + b_{14}W \\
 \bar{S}_{x\theta} &= b_{55}U + b_{56}V' + b_{57}V + b_{58}W' + b_{59}W \\
 t_x &= b_{10}U'' + b_{11}U' + b_{12}U + b_{13}V' + b_{14}V + b_{15}W''' \\
 &\quad + b_{16}W'' + b_{17}W' + b_{18}W \\
 m_x &= b_{19}U' + b_{20}U + b_{21}V + b_{22}W'' + b_{23}W' + b_{24}W \\
 \phi_x &= b_{25}U + b_{26}W'
 \end{aligned} \right\} \quad (3-88a \sim e)$$

ただし、係数 b_i ($i = 1 \sim 26$) の具体的内容は付録に示す。

なお、式 (3-84a) を Fourier 係数で表示すれば次式となる。

$$\left. \begin{aligned}
 u = 0 \text{ または } n_x = 0, \quad v = 0 \text{ または } \bar{S}_{x\theta} = 0 \\
 w = 0 \text{ または } t_x = 0, \quad \phi_x = 0 \text{ または } m_x = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (3-84b)$$

式 (3-84) の可能な組合せは、表 3-11 に示すように一端において 16 通りである³²⁾。

表3-11 周方向に閉じた殻の端末で規定される境界条件の組合せ

End conditions	Case No.	Boundary conditions
Clamped	1	$U=V=W=\phi'_x=0$
	2	$N_x=V=W=\phi'_x=0$
	3	$U=S_{x\theta}=W=\phi'_x=0$
	4	$N_x=S_{x\theta}=W=\phi'_x=0$
Simply supported	5	$U=V=W=M_x=0$
	6	$N_x=V=W=M_x=0$
	7	$U=S_{x\theta}=W=M_x=0$
	8	$N_x=S_{x\theta}=W=M_x=0$
Freely supported	9	$U=V=T_x=\phi'_x=0$
	10	$N_x=V=T_x=\phi'_x=0$
	11	$U=S_{x\theta}=T_x=\phi'_x=0$
	12	$N_x=S_{x\theta}=T_x=\phi'_x=0$
Free	13	$U=V=T_x=M_x=0$
	14	$N_x=V=T_x=M_x=0$
	15	$U=S_{x\theta}=T_x=M_x=0$
	16	$N_x=S_{x\theta}=T_x=M_x=0$

殻が頂点 ($R = r = 0$) をもつ場合には、変位-ひずみ、曲率関係式 (3-78) には $1/r$ 、 $1/r^2$ の項が含まれているから、一般的に用いられる境界条件を規定することができない。この場合は頂点で有限な解を保証する条件を指定すればよく、次のようになる³³⁾。

$$\left. \begin{aligned} n = 0 : u = v = w' = m_x' &= 0 \\ n = 1 : u + v = w = u' = m_x &= 0 \\ n \geq 2 : u = v = w = w' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-89)$$

ここで、 $n = 0$ の $m_x' = 0$ と $n = 1$ の $m_x = 0$ の条件を変位成分で表わせれば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} m_x' = 0 : C_1 u'' + C_2 w''' &= 0 \\ m_x = 0 : C_3 v' + C_4 w'' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-90)$$

ただし、

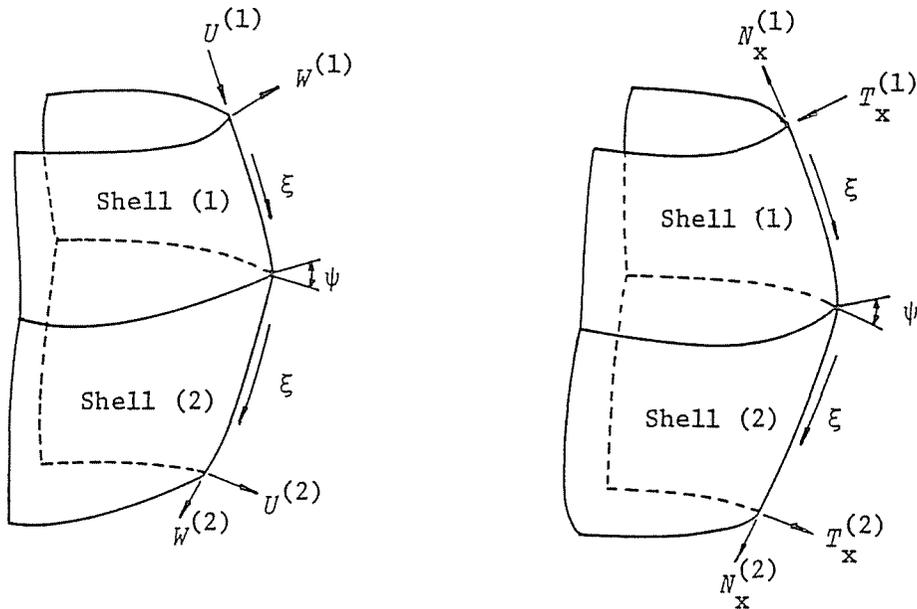
$$\left. \begin{aligned} C_1 = \alpha r_1, \quad C_2 = -1, \quad C_3 = \alpha(r_1 + r_2)/2 \\ C_4 = -(2 + \nu)/2 \end{aligned} \right\} \quad (3-91)$$

幾何学的に不連続部を有する回転殻の取り扱いは次のようになる。いま図3-13に示すように、殻(1)と殻(2)の部分からなり、不連続部でそれぞれの殻の経線に立てた法線のなす角度を Ψ としよう。このとき、各々の回転殻の変形量 (u, v, w, ϕ_x) と力学量 ($n_x, \bar{s}_x \theta, t_x, m_x$) に肩付き添字(1)および(2)を付して表わすことにすると、不連続部において成立する幾何学的接続条件と力学的接続条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u^{(2)} &= u^{(1)} \cos \Psi - w^{(1)} \sin \Psi \\ w^{(2)} &= u^{(1)} \sin \Psi + w^{(1)} \cos \Psi \\ v^{(2)} &= v^{(1)} \\ \phi_x^{(2)} &= \phi_x^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (3-92a)$$

$$\left. \begin{aligned} n_x^{(2)} &= n_x^{(1)} \cos \Psi - t_x^{(1)} \sin \Psi \\ t_x^{(2)} &= n_x^{(1)} \sin \Psi + t_x^{(1)} \cos \Psi \\ \bar{s}_x \theta^{(2)} &= \bar{s}_x \theta^{(1)} \\ m_x^{(2)} &= m_x^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (3-92b)$$

なお、式(3-92)は $\Psi = 0$ と置けば、殻を幾つかの要素に分割した場合の連続条件になる。



Ψ : Inclination change at a discontinuity

図3-13 殻の不連続部における接続条件

3-7 内部選点固有方程式

(1) 定式化のための準備

解析対象としている回転殻は、形状の異なる複数の回転殻あるいは回転軸に沿って分割された幾つかの回転殻要素からなるものとする。単一な形状の回転殻あるいは分割された回転殻要素の試行（未知）関数 u 、 v 、 w は、それぞれ領域内部に M 個の自由度を持たせ、満足すべき境界条件や接続条件の個数を考慮に入れて、 u と v は $M+2$ 項、 w は $M+4$ 項の多項式で近似する。

$$\left. \begin{aligned} (u, v) &= \sum_{i=1}^{M+2} (d_{i-1}, f_{i-1}) \xi^{i-1} \\ w &= \sum_{i=1}^{M+4} e_{i-1} \xi^{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (3-93)$$

ただし、 d_{i-1} 、 e_{i-1} 、 f_{i-1} : 未知定数。

さて、3-6 の基礎方程式で、 ξ に関する高階導関数は u 、 v 、 w について、それぞれ 3、2、4 階である。このことに留意すれば、端点 ($\xi_0 = 0$, $\xi_{M+1} = 1$) と内部選点 (ξ_j , $j = 1 \sim M$) における n 階微分係数は、式 (2-26) より次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \{u^{(n)}\} &= [A^{(n)}] \{u\} \quad (n = 1 \sim 3) \\ \{v^{(n)}\} &= [A^{(n)}] \{v\} \quad (n = 1, 2) \\ \{w^{(n)}\} &= [A^{(n)}] \{w\} + [B^{(n)}] \{e\} \quad (n = 1 \sim 4) \end{aligned} \right\} \quad (3-94)$$

ここに、記号 $\langle n \rangle$ は n 階微分を表わし、各ベクトルは次のような成分をもつ。

$$\{e\}^T = (e_{M+2}, e_{M+3}) \quad (3-95a)$$

さらに、 u 、 v 、 w を代表して Z と記せば、

$$\left. \begin{aligned} \{Z\}^T &= (Z(\xi_0), Z(\xi_1), \dots, Z(\xi_{M+1})) \\ \{Z^{(n)}\}^T &= \left(\frac{d^n Z}{d\xi^n}(\xi_0), \frac{d^n Z}{d\xi^n}(\xi_1), \dots, \frac{d^n Z}{d\xi^n}(\xi_M) \right) \end{aligned} \right\} \quad (3-95b)$$

試行関数を運動方程式 (3-82) に代入すれば、次式で定義される残差関数が得られる。

$$\left. \begin{aligned} R_u(\xi) &= L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) - \mathcal{Q}^2 u \\ R_v(\xi) &= L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) - \mathcal{Q}^2 v \\ R_w(\xi) &= L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) - \mathcal{Q}^2 w \end{aligned} \right\} \quad (3-96)$$

内部選点 ξ_i ($i = 1 \sim M$) における残差は、式 (3-82) の微分階数に注意し、式 (3-94) を用いて次のように表現される。例えば、 $R_u(\xi_i)$ は

$$\begin{aligned}
 R_u(\xi_i) = & \sum_{j=1}^{M+2} \left[\{a_1(\xi_i)A^{(2)}(i+1, j) + a_2(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j) \right. \\
 & + a_3(\xi_i)\delta_{i+1, j}u(\xi_{j-1}) + \{a_4(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j) \\
 & + a_5(\xi_i)\delta_{i+1, j}v(\xi_{j-1}) + \{a_6(\xi_i)A^{(3)}(i+1, j) \\
 & + a_7(\xi_i)A^{(2)}(i+1, j) + a_8(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j) + a_9(\xi_i)\delta_{i+1, j}w(\xi_{j-1}) \left. \right] \\
 & + \sum_{\ell=1}^2 \{a_6(\xi_i)B^{(3)}(i+1, \ell) + a_7(\xi_i)B^{(2)}(i+1, \ell) \\
 & + a_8(\xi_i)B^{(1)}(i+1, \ell)\} e_{M+1+\ell} - \mathcal{Q}^2 u(\xi_i) \quad (3-97)
 \end{aligned}$$

となる。ここに $i = 1 \sim M$ 、 $A^{(k)}(m, n)$ と $B^{(k)}(m, n)$ はマトリックス $[A^{(k)}]$ と $[B^{(k)}]$ の第 m 行、第 n 列の要素を表わし、 $\delta_{i+1, j}$ は Kronecker のデルタである。

$$\delta_{i+1, j} \begin{cases} = 0 & ; i+1 \neq j \\ = 1 & ; i+1 = j \end{cases}$$

同様に、 $R_v(\xi)$ と $R_w(\xi)$ についても式 (3-97) に類似なものが得られる。ここで、式 (3-96) から定まる内部選点における残差を、内部選点における未知量 $\{\delta_I\}$ と他の未知量に分離してマトリックス表示すれば次式となる。

$$\{R\} = [K_I] \{\delta_I\} + [K_B] \{\delta_B\} - \mathcal{Q}^2 [M_I] \{\delta_I\} \quad (3-98)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 \{R\}^T &= (\{R_u\}^T, \{R_v\}^T, \{R_w\}^T)_{1 \times 3M} \\
 \{\delta_I\}^T &= (\{u_I\}^T, \{v_I\}^T, \{w_I\}^T)_{1 \times 3M} \\
 \{\delta_B\}^T &= (\{u_B\}^T, \{v_B\}^T, \{w_B\}^T)_{1 \times 8}
 \end{aligned} \right\} \quad (3-99a)$$

であり、各部分行列は次のようなものである。

$$\left. \begin{aligned}
 \{R_k\}^T &= (R_k(\xi_1), R_k(\xi_2), \dots, R_k(\xi_M))_{1 \times M}, (k = u, v, w) \\
 \{Z_I\}^T &= (Z(\xi_1), Z(\xi_2), \dots, Z(\xi_M))_{1 \times M}, (Z = u, v, w) \\
 \{Z_B\}^T &= (Z(\xi_0), Z(\xi_{M+1}))_{1 \times 2}, (Z = u, v) \\
 \{W_B\}^T &= (w(\xi_0), w(\xi_{M+1}), e_{M+2}, e_{M+3})_{1 \times 4}
 \end{aligned} \right\} \quad (3-99b)$$

さらに、(3M×3M)次のマトリックス $[K_I]$ と $[M_I]$ 、および(3M×8)次のマトリックス $[K_B]$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 [M_I] &= \text{diag} [1, 1, 1, \dots, 1] \\
 [K_I] &= \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uv}] & [K_{uw}] \\ [K_{vu}] & [K_{vv}] & [K_{vw}] \\ [K_{wu}] & [K_{wv}] & [K_{ww}] \end{bmatrix}, \quad [K_B] = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{uu}] & [\bar{K}_{uv}] & [\bar{K}_{uw}] \\ [\bar{K}_{vu}] & [\bar{K}_{vv}] & [\bar{K}_{vw}] \\ [\bar{K}_{wu}] & [\bar{K}_{wv}] & [\bar{K}_{ww}] \end{bmatrix}
 \end{aligned} \right\} (3-100)$$

ただし、 $[K_I]$ と $[K_B]$ を構成する部分マトリックスの具体的内容は以下のようになる。

$[K_I]$ について

$$\left. \begin{aligned}
 K_{uu}(i, j) &= a_1(\xi_i) A^{(2)}(i+j, j+1) + a_2(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_3(\xi_i) \delta_{ij} \\
 K_{uv}(i, j) &= a_4(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_5(\xi_i) \delta_{ij} \\
 K_{uw}(i, j) &= a_6(\xi_i) A^{(3)}(i+1, j+1) + a_7(\xi_i) A^{(2)}(i+1, j+1) \\
 &\quad + a_8(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_9(\xi_i) \delta_{ij} \\
 K_{vu}(i, j) &= a_{10}(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{11}(\xi_i) \delta_{ij} \\
 K_{vv}(i, j) &= a_{12}(\xi_i) A^{(2)}(i+1, j+1) + a_{13}(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{14}(\xi_i) \delta_{ij} \\
 K_{vw}(i, j) &= a_{15}(\xi_i) A^{(2)}(i+1, j+1) + a_{16}(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{17}(\xi_i) \delta_{ij} \\
 K_{wu}(i, j) &= a_{18}(\xi_i) A^{(3)}(i+1, j+1) + a_{19}(\xi_i) A^{(2)}(i+1, j+1) \\
 &\quad + a_{20}(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{21}(\xi_i) \delta_{ij} \\
 K_{wv}(i, j) &= a_{22}(\xi_i) A^{(2)}(i+1, j+1) + a_{23}(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{24}(\xi_i) \delta_{ij} \\
 K_{ww}(i, j) &= a_{25}(\xi_i) A^{(4)}(i+1, j+1) + a_{26}(\xi_i) A^{(3)}(i+1, j+1) \\
 &\quad + a_{27}(\xi_i) A^{(2)}(i+1, j+1) + a_{28}(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{29}(\xi_i) \delta_{ij}
 \end{aligned} \right\}$$

(3-101a)

ただし、 $i, j = 1 \sim M$, δ_{ij} : Kronecker のデルタ。

[K_B] について：

$$\begin{aligned}
 \bar{K}_{uu}(i, j) &= a_1(\xi_j)A^{(2)}(i+1, \ell) + a_2(\xi_j)A^{(1)}(i+1, \ell) \\
 \bar{K}_{uv}(i, j) &= a_4(\xi_j)A^{(1)}(i+1, \ell) \\
 \bar{K}_{uw}(i, j) &= a_6(\xi_j)A^{(3)}(i+1, \ell) + a_7(\xi_j)A^{(2)}(i+1, \ell) + a_8(\xi_j)A^{(1)}(i+1, \ell) \\
 \bar{K}_{uw}(i, j+2) &= a_6(\xi_j)B^{(3)}(i, j) + a_7(\xi_j)B^{(2)}(i, j) + a_8(\xi_j)B^{(1)}(i, j) \\
 \bar{K}_{vu}(i, j) &= a_{10}(\xi_j)A^{(1)}(i+1, \ell) \\
 \bar{K}_{vu}(i, j) &= a_{12}(\xi_j)A^{(2)}(i+1, \ell) + a_{13}(\xi_j)A^{(1)}(i+1, \ell) \\
 \bar{K}_{vw}(i, j) &= a_{15}(\xi_j)A^{(2)}(i+1, \ell) + a_{16}(\xi_j)A^{(1)}(i+1, \ell) \\
 \bar{K}_{vw}(i, j+2) &= a_{15}(\xi_j)B^{(2)}(i, j) + a_{16}(\xi_j)B^{(1)}(i, j) \\
 \bar{K}_{wu}(i, j) &= a_{18}(\xi_j)A^{(3)}(i+1, \ell) + a_{19}(\xi_j)A^{(2)}(i+1, \ell) + a_{20}(\xi_j)A^{(1)}(i+1, \ell) \\
 \bar{K}_{wv}(i, j) &= a_{22}(\xi_j)A^{(2)}(i+1, \ell) + a_{23}(\xi_j)A^{(1)}(i+1, \ell) \\
 \bar{K}_{ww}(i, j) &= a_{25}(\xi_j)A^{(4)}(i+1, \ell) + a_{26}(\xi_j)A^{(3)}(i+1, \ell) + a_{27}(\xi_j)A^{(2)}(i+1, \ell) \\
 &\quad + a_{28}(\xi_j)A^{(1)}(i+1, \ell) \\
 \bar{K}_{ww}(i, j+2) &= a_{25}(\xi_j)B^{(4)}(i, j) + a_{26}(\xi_j)B^{(3)}(i, j) + a_{27}(\xi_j)B^{(2)}(i, j) \\
 &\quad + a_{28}(\xi_j)B^{(1)}(i, j)
 \end{aligned}$$

(3-101b)

ただし、 $i = 1 \sim M$ 、 $j = 1, 2$ であり、 ℓ は次の約束に従うものとする。

$$\ell \begin{cases} = 1 & ; \quad j = 1 \\ = M+2 & ; \quad j = 2 \end{cases}$$

同様に、殻の端末の境界条件および不連続部の接続条件を表わすのに必要な変形量と力学量を整理しておく。

変形量 (u, v, w, ϕ_x) について：

端点 $\xi_0 = 0$ 、 $\xi_{M+1} = 1$ における変形量は、

$$u|_{\xi=\xi_k} = u(\xi_k), \quad v|_{\xi=\xi_k} = v(\xi_k), \quad w|_{\xi=\xi_k} = w(\xi_k) \quad (3-102a)$$

および ϕ_x については、式 (3-88e) と式 (3-94) より

$$\begin{aligned}
 \phi_x|_{\xi=\xi_k} = \phi_x(\xi_k) &= b_{25}(\xi_k)u(\xi_k) + b_{26}(\xi_k) \sum_{i=1}^{M+2} A^{(1)}(k+1, i)w(\xi_{i-1}) \\
 &\quad + b_{26}(\xi_k) \sum_{j=1}^2 B^{(1)}(k+1, i)e_{M+1+i} \quad (3-102b)
 \end{aligned}$$

と表わされる。ただし $k = 0$ または $k = M + 1$ 。

式(3-102)を式(3-98)に習い、未知量 $\{\delta_I\}$ と $\{\delta_B\}$ に分けてマトリックス表示すると次式となる。

$$\{X\}_{\xi=\xi_k} = [G_I]_{\xi=\xi_k} \{\delta_I\} + [G_B]_{\xi=\xi_k} \{\delta_B\} \quad (3-103)$$

ここで、

$$\{X\}_{\xi=\xi_k}^T = (u(\xi_k), v(\xi_k), w(\xi_k), \phi(\xi_k)) \quad (3-104)$$

であり、 $(4 \times 3M)$ 次と (4×8) 次のマトリックス $[G_I]_{\xi=\xi_k}$, $[G_B]_{\xi=\xi_k}$ は次のようなものである。

$$[G_I]_{\xi=\xi_k} = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [G_\phi] \end{bmatrix} \quad (k=0, M+1) \quad (3-105 a)$$

ここで、 $[Z]$ はその成分が Z_1, Z_2, \dots, Z_M である行マトリックスを表わし、 $[0]$ は成分が零の行マトリックスを表わす。 $[G_\phi]$ は次のような成分をもつ。

$$G_{\phi i} = b_{26}(\xi_k) A^{(1)}(k+1, i+1) \quad (3-105 b)$$

ここで、 $k = 0, M + 1, i = 1 + M$ 。さらに、

$$[G_B]_{\xi=\xi_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_{25}(\xi_0) & 0 & 0 & 0 & \alpha b_{26}(\xi_0) & \beta b_{26}(\xi_0) & \bar{\alpha} b_{26}(\xi_0) & \bar{\beta} b_{26}(\xi_0) \end{bmatrix} \quad (3-106 a)$$

ここで、 $\alpha = A^{(1)}(1, 1)$, $\beta = A^{(1)}(1, M+2)$, $\bar{\alpha} = B^{(1)}(1, 1)$, $\bar{\beta} = B^{(1)}(1, 2)$ 。

また、

$$[G_B]_{\xi=\xi_{M+1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b_{25}(\xi_{M+1}) & 0 & 0 & \alpha b_{26}(\xi_{M+1}) & \beta b_{26}(\xi_{M+1}) & \bar{\alpha} b_{26}(\xi_{M+1}) & \bar{\beta} b_{26}(\xi_{M+1}) \end{bmatrix} \quad (3-106 b)$$

ここで、 $\alpha = A^{(1)}(M+2, 1)$, $\beta = A^{(1)}(M+2, M+2)$, $\bar{\alpha} = B^{(1)}(M+2, 1)$, $\bar{\beta} = B^{(1)}(M+2, 2)$ 。

力学量 $(\mathbf{n}_x, \bar{\mathbf{S}}_x \theta, \mathbf{t}_x, \mathbf{m}_x)$ について：

端点 $\xi_0 = 0$, $\xi_{M+1} = 1$ における力学量は、式 (3-88 a ~ d) と式 (3-94) より求められる。
一例として、 \mathbf{n}_x と $\bar{\mathbf{S}}_x \theta$ について示せば次のようになる。

$$\mathbf{n}_x \Big|_{\xi=\xi_k} = \mathbf{n}_x(\xi_k) = b_1(\xi_k) \sum_{i=1}^{M+2} A^{(1)}(k+1, i) \mathbf{u}(\xi_{i-1}) + b_2(\xi_k) \mathbf{u}(\xi_k) \\ + b_3(\xi_k) \mathbf{v}(\xi_k) + b_4(\xi_k) \mathbf{w}(\xi_k) \quad (3-107 a)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_x \theta \Big|_{\xi=\xi_k} = \bar{\mathbf{S}}_x \theta(\xi_k) = b_5(\xi_k) \mathbf{u}(\xi_k) + b_6(\xi_k) \sum_{i=1}^{M+2} A^{(1)}(k+1, i) \mathbf{v}(\xi_{i-1}) \\ + b_7(\xi_k) \mathbf{v}(\xi_k) + b_8(\xi_k) \left\{ \sum_{i=1}^{M+2} A^{(1)}(k+1, i) \mathbf{w}(\xi_{i-1}) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^2 B^{(1)}(k+1, i) \mathbf{e}_{M+1+i} \right\} + b_9(\xi_k) \mathbf{w}(\xi_k) \quad (3-107 b)$$

ここで、 $k = 0, M+1$ 。

同様に $\mathbf{t}_x, \mathbf{m}_x$ についても式 (3-107) に類似なものが得られ、端点における力学量をマトリックス表示すれば次式となる。

$$\{\mathbf{F}\}_{\xi=\xi_k} = [\mathbf{Q}_I]_{\xi=\xi_k} \{\delta_I\} + [\mathbf{Q}_B]_{\xi=\xi_k} \{\delta_B\} \quad (3-108)$$

ここで、

$$\{\mathbf{F}\}_{\xi=\xi_k}^T = (\mathbf{n}_x(\xi_k), \bar{\mathbf{S}}_x \theta(\xi_k), \mathbf{t}_x(\xi_k), \mathbf{m}_x(\xi_k)) \quad (3-109)$$

であり、 $(4 \times 3M)$ 次のマトリックス $[\mathbf{Q}_I]_{\xi=\xi_k}$ と (4×8) 次のマトリックス $[\mathbf{Q}_B]_{\xi=\xi_k}$ は次のようなものである。

$$[\mathbf{Q}_I]_{\xi=\xi_k} = \begin{bmatrix} [Q_u^1] & [0] & [0] \\ [0] & [Q_v^1] & [Q_w^1] \\ [Q_u^2] & [Q_v^2] & [Q_w^2] \\ [Q_u^3] & [0] & [Q_w^3] \end{bmatrix}, \quad (k = 0, M+1) \quad (3-110 a)$$

ここで、成分が零の行マトリックス $[0]$ を除いた行マトリックスは次のような成分を持つ。

$$\left. \begin{aligned} Q_u^1 i &= b_1(\xi_k) A^{(1)}(k+1, i+1) \\ Q_v^1 i &= b_6(\xi_k) A^{(1)}(k+1, i+1) \\ Q_w^1 i &= b_8(\xi_k) A^{(1)}(k+1, i+1) \\ Q_u^2 i &= b_{10}(\xi_k) A^{(2)}(k+1, i+1) + b_{11}(\xi_k) A^{(1)}(k+1, i+1) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 Q_v^2 i &= b_{13}(\xi_k) A^{\langle 1 \rangle}(k+1, i+1) \\
 Q_w^2 i &= b_{15}(\xi_k) A^{\langle 3 \rangle}(k+1, i+1) + b_{16}(\xi_k) A^{\langle 2 \rangle}(k+1, i+1) + b_{17}(\xi_k) A^{\langle 1 \rangle}(k+1, i+1) \\
 Q_u^3 i &= b_{19}(\xi_k) A^{\langle 1 \rangle}(k+1, i+1) \\
 Q_w^3 i &= b_{22}(\xi_k) A^{\langle 2 \rangle}(k+1, i+1) + b_{23}(\xi_k) A^{\langle 1 \rangle}(k+1, i+1)
 \end{aligned}$$

(3-110 b)

ただし、 $k = 0, M+1, i = 1 \sim M_0$ 。さらに、 $[Q_B]_{\xi=\xi_k}$ は

$$[Q_B]_{\xi=\xi_0} = \begin{bmatrix}
 b_1 \alpha^{\langle 1 \rangle} + b_2 & b_1 \beta^{\langle 1 \rangle} & b_3 & 0 \\
 b_5 & 0 & b_6 \alpha^{\langle 1 \rangle} + b_7 & b_6 \beta^{\langle 1 \rangle} \\
 b_{10} \alpha^{\langle 2 \rangle} + b_{11} \alpha^{\langle 1 \rangle} + b_{12} & b_{10} \beta^{\langle 2 \rangle} + b_{11} \beta^{\langle 1 \rangle} & b_{13} \alpha^{\langle 1 \rangle} + b_{14} & b_{13} \beta^{\langle 1 \rangle} \\
 b_{19} \alpha^{\langle 1 \rangle} + b_{20} & b_{19} \beta^{\langle 1 \rangle} & b_{21} & 0 \\
 b_4 & 0 & 0 & 0 \\
 b_8 \alpha^{\langle 1 \rangle} + b_9 & b_8 \beta^{\langle 1 \rangle} & b_8 \bar{\alpha}^{\langle 1 \rangle} & b_8 \bar{\beta}^{\langle 1 \rangle} \\
 b_{15} \alpha^{\langle 3 \rangle} + b_{16} \alpha^{\langle 2 \rangle} + b_{17} \alpha^{\langle 1 \rangle} + b_{18} & b_{15} \beta^{\langle 3 \rangle} + b_{16} \beta^{\langle 2 \rangle} + b_{17} \beta^{\langle 1 \rangle} & b_{15} \bar{\alpha}^{\langle 3 \rangle} + b_{16} \bar{\alpha}^{\langle 2 \rangle} + b_{17} \bar{\alpha}^{\langle 1 \rangle} & b_{15} \bar{\beta}^{\langle 3 \rangle} + b_{16} \bar{\beta}^{\langle 2 \rangle} + b_{17} \bar{\beta}^{\langle 1 \rangle} \\
 b_{22} \alpha^{\langle 2 \rangle} + b_{23} \alpha^{\langle 1 \rangle} + b_{24} & b_{22} \beta^{\langle 2 \rangle} + b_{23} \beta^{\langle 1 \rangle} & b_{22} \bar{\alpha}^{\langle 2 \rangle} + b_{23} \bar{\alpha}^{\langle 1 \rangle} & b_{22} \bar{\beta}^{\langle 2 \rangle} + b_{23} \bar{\beta}^{\langle 1 \rangle}
 \end{bmatrix}$$

(3-111 a)

ただし、 $b_1 \sim b_{24}$ は端点 $\xi = \xi_0$ における値であり、

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha^{\langle i \rangle} &= A^{\langle i \rangle}(1, 1), \quad \beta^{\langle i \rangle} = A^{\langle i \rangle}(1, M+2) \\
 \bar{\alpha}^{\langle i \rangle} &= B^{\langle i \rangle}(1, 1), \quad \bar{\beta}^{\langle i \rangle} = B^{\langle i \rangle}(1, 2)
 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1 \sim 3) \quad (3-111 b)$$

である。また、

$$[Q_B]_{\xi=\xi_{M+1}} = \begin{bmatrix}
 b_1 \alpha^{\langle 1 \rangle} & b_1 \beta^{\langle 1 \rangle} + b_2 & 0 & b_3 \\
 0 & b_5 & b_6 \alpha^{\langle 1 \rangle} & b_6 \beta^{\langle 1 \rangle} + b_7 \\
 b_{10} \alpha^{\langle 2 \rangle} + b_{11} \alpha^{\langle 1 \rangle} & b_{10} \beta^{\langle 2 \rangle} + b_{11} \beta^{\langle 1 \rangle} + b_{12} & b_{13} \alpha^{\langle 1 \rangle} & b_{13} \beta^{\langle 1 \rangle} + b_{14} \\
 b_{19} \alpha^{\langle 1 \rangle} & b_{19} \beta^{\langle 1 \rangle} + b_{20} & 0 & b_{21}
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc}
0 & b_4 & 0 & 0 \\
b_8\alpha^{(1)} & b_8\beta^{(1)}+b_9 & b_8\bar{\alpha}^{(1)} & b_8\bar{\beta}^{(1)} \\
b_{15}\alpha^{(3)}+b_{16}\alpha^{(2)}+b_{17}\alpha^{(1)} & b_{15}\beta^{(3)}+b_{16}\beta^{(2)}+b_{17}\beta^{(1)}+b_{18} & b_{15}\bar{\alpha}^{(3)}+b_{16}\bar{\alpha}^{(2)}+b_{17}\bar{\alpha}^{(1)} & b_{15}\bar{\beta}^{(3)}+b_{16}\bar{\beta}^{(2)}+b_{17}\bar{\beta}^{(1)} \\
b_{22}\alpha^{(2)}+b_{23}\alpha^{(1)} & b_{22}\beta^{(2)}+b_{23}\beta^{(1)}+b_{24} & b_{22}\bar{\alpha}^{(2)}+b_{23}\bar{\alpha}^{(1)} & b_{22}\bar{\beta}^{(2)}+b_{23}\bar{\beta}^{(1)}
\end{array}
\quad (3-112a)$$

ただし、 $b_1 \sim b_{24}$ は端点 $\xi = \xi_{M+1}$ における値であり、

$$\left. \begin{array}{l}
\alpha^{(i)} = A^{(i)}(M+2, 1), \quad \beta^{(i)} = A^{(i)}(M+2, M+2) \\
\bar{\alpha}^{(i)} = B^{(i)}(M+2, 1), \quad \bar{\beta}^{(i)} = B^{(i)}(M+2, 2)
\end{array} \right\} \quad (i=1 \sim 3) \quad (3-112b)$$

である。

さて、殻の不連続部における接続条件(式(3-92))は、図3-13に示したように、殻(1)においては端点 $\xi = \xi_{M+1}$ 、殻(2)においては端点 $\xi = \xi_0$ で成立することに注意すれば、式(3-103)、(3-108)で定義したマトリックスを用いて次のように書ける。

幾何学的接続条件：

$$\begin{aligned}
& [G_I^{(1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \{\delta_I^{(1)}\} + [G_I^{(1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \{\delta_B^{(1)}\} = [L][G_I^{(2)}]_{\xi=\xi_0} \{\delta_I^{(2)}\} \\
& \quad + [L][G_B^{(2)}]_{\xi=\xi_0} \{\delta_B^{(2)}\}
\end{aligned} \quad (3-113a)$$

力学的接続条件：

$$\begin{aligned}
& [Q_I^{(1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \{\delta_I^{(1)}\} + [Q_B^{(1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \{\delta_B^{(1)}\} = [L][Q_I^{(2)}]_{\xi=\xi_0} \{\delta_I^{(2)}\} \\
& \quad + [L][Q_B^{(2)}]_{\xi=\xi_0} \{\delta_B^{(2)}\}
\end{aligned} \quad (3-113b)$$

ここで、マトリックスとベクトルの右肩に付した添字(1)、(2)は殻(1)、(2)で定義されるものであり、また(4×4)次のマトリックス[L]は次のようなものである。

$$[L] = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-114)$$

なお、式(3-114)で $\Psi = 0$ と置けば、式(3-113)は要素分割を施した場合の連続条件に相当する。

殻の頂点で課せられる制約条件式(3-89)は、端点 $\xi = \xi_0$ で課せられるものとすれば、次のように表わされる。

$$[D_I]_{\xi=\xi_0} \{\delta_I\} + [D_B]_{\xi=\xi_0} \{\delta_B\} = \{0\} \quad (3-115)$$

ただし、 $(4 \times 3M)$ 次のマトリックス $[D_I]$ と (4×8) 次のマトリックス $[D_B]$ は、それぞれ円周方向波数 n に応じて次のような内容のものである。

$n = 0$ のとき：

$$[D_I]_{\xi=\xi_0} = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [D_w^1] \\ [D_u^1] & [0] & [0] & [D_w^2] \end{bmatrix} \quad (3-116a)$$

ただし、行マトリックスは次のような成分を持つ。

$$\left. \begin{aligned} D_w^1 i &= A^{(1)}(1, i+1) \\ D_u^1 i &= C_1(\xi_0) A^{(2)}(1, i+1), (i=1 \sim M) \\ D_w^2 i &= C_2(\xi_0) A^{(3)}(1, i+1) \end{aligned} \right\} \quad (3-116b)$$

$$[D_B]_{\xi=\xi_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^{(1)} & \beta^{(1)} & \bar{\alpha}^{(1)} & \bar{\beta}^{(1)} \\ \alpha^{(2)} C_1(\xi_0) & \beta^{(2)} C_1(\xi_0) & 0 & 0 & \alpha^{(3)} C_2(\xi_0) & \beta^{(3)} C_2(\xi_0) & \bar{\alpha}^{(3)} C_2(\xi_0) & \bar{\beta}^{(3)} C_2(\xi_0) \end{bmatrix} \quad (3-117a)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(i)} &= A^{(i)}(1, 1), \beta^{(i)} = A^{(i)}(1, M+2) \\ \bar{\alpha}^{(i)} &= B^{(i)}(1, 1), \bar{\beta}^{(i)} = B^{(i)}(1, 2) \end{aligned} \right\}, (i=1 \sim 3) \quad (3-117b)$$

$n = 1$ のとき :

$$[D_I]_{\xi=\xi_0} = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [D_u^1] & [0] & [0] \\ [0] & [D_v^1] & [D_w^1] \end{bmatrix} \quad (3-118a)$$

ただし、行マトリックスは次のような成分を持つ。

$$\left. \begin{aligned} D_u^1 i &= A^{(1)}(1, i+1) \\ D_v^1 i &= C_3(\xi_0) A^{(1)}(1, i+1), \quad (i=1 \sim M) \\ D_w^1 i &= C_4(\xi_0) A^{(2)}(1, i+1) \end{aligned} \right\} \quad (3-118b)$$

$$[D_B]_{\xi=\xi_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^{(1)} & \beta^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{(1)} C_3(\xi_0) & \beta^{(1)} C_3(\xi_0) & \alpha^{(2)} C_4(\xi_0) & \beta^{(2)} C_4(\xi_0) & \bar{\alpha}^{(2)} C_4(\xi_0) & \bar{\beta}^{(2)} C_4(\xi_0) \end{bmatrix} \quad (3-119a)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(i)} &= A^{(i)}(1, 1), \quad \beta^{(i)} = A^{(i)}(1, M+2) \\ \bar{\alpha}^{(i)} &= B^{(i)}(1, 1), \quad \bar{\beta}^{(i)} = B^{(i)}(1, 2) \end{aligned} \right\}, \quad (i=1, 2) \quad (3-119b)$$

$n \geq 2$ のとき :

$$[D_I]_{\xi=\xi_0} = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [D_w^1] \end{bmatrix} \quad (3-120a)$$

ただし、行マトリックスは次のような成分である。

$$D_{wi}^1 = A^{(1)}(1, i+1) \quad (i=1 \sim M) \quad (3-120b)$$

$$[D_B] \xi = \xi_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A^{(1)}(1,1) & A^{(1)}(1,M+2) & B^{(1)}(1,1) & B^{(1)}(1,2) & \end{bmatrix}$$

(3-121)

(2) 回転殻の内部選点固有方程式

回転殻の内部選点固有方程式は、3-4に示したTimoshenko梁の場合と同様に導くことができる。ここでは、まず図3-14(a)に示す単一の形状の殻に対する内部選点固有方程式を誘導する。次に実際の構造問題で、しばしば重要となる形状の異なる殻が組合さった問題に拡張する(図3-14(b))。なお、後者の定式化の手順は、解の高精度化を図るための要素分割に対してもそのまま利用することができる。

a) 単一形状の殻の場合

この問題の場合、未知数の数は式(3-93)より明らかなように、 $3M+8$ 個である。この未知数を定めるのに必要な $3M+8$ 個の条件式は、運動方程式の残差の条件と殻末端で指定される境界条件によって以下のように得られる。

$3M$ 個の条件式は、領域内における M 個の内部選点で式(3-96)の残差関数を零とすることにより得られ、Diracの δ 関数を用いて次のように表現される。

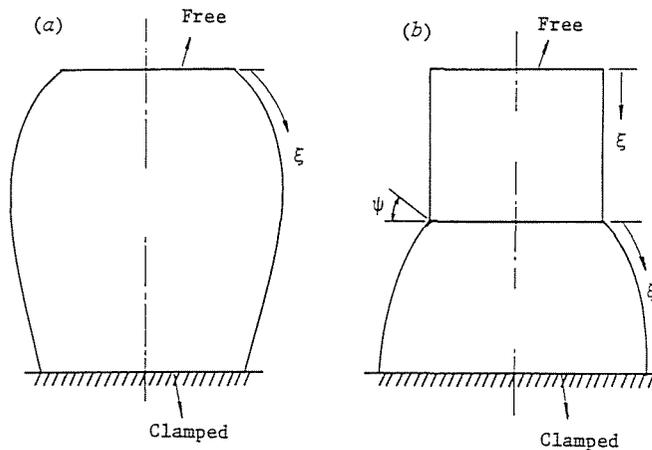


図3-14 定式化のための2つの回転殻モデル (a) 単一の形状の場合、
(b) 形状の異なる2つの殻が組合さった場合

$$\int_0^1 R_s(\xi) \delta(\xi - \xi_i) d\xi = R_s(\xi_i) = 0 \quad (3-122)$$

ただし、 $i = 1 \sim M$ 、 $s = u, v, w$ 。上式を $s = u, v, w$ について考えれば、 $3M$ 個の条件式は式(3-98)を用いて次のように表わされる。

$$[K_I] \{ \delta_I \} + [K_B] \{ \delta_B \} - \mathcal{Q}^2 [M_I] \{ \delta_I \} = \{ 0 \} \quad (3-123)$$

残り8個の条件式は、端末 ($\xi = \xi_0, \xi_{M+1}$) で指定される条件より定められる。具体例として、 $\xi = \xi_0$ で自由 ($n_x = \bar{S}_x \theta = t_x = m_x = 0$)、 $\xi = \xi_{M+1}$ で固定 ($u = v = w = \phi_x = 0$) を考える。このとき、自由の条件および固定の条件に対してはそれぞれ、式(3-108)および式(3-103)が適用でき、これらをまとめて次のように表わす。

$$[S_I] \{ \delta_I \} + [S_B] \{ \delta_B \} = \{ 0 \} \quad (3-124a)$$

ここで、 $[S_I]$ と $[S_B]$ は次式で与えられる。

$$[S_I] = \begin{bmatrix} [Q_I]_{\xi=\xi_0} \\ [G_I]_{\xi=\xi_{M+1}} \end{bmatrix} (8 \times 3M), \quad [S_B] = \begin{bmatrix} [Q_B]_{\xi=\xi_0} \\ [G_B]_{\xi=\xi_{M+1}} \end{bmatrix} (8 \times 8) \quad (3-124b)$$

なお、殻が頂点をもつとすれば、 $[S_I]$ と $[S_B]$ は式(3-115)を用いて、次のように表わされる。

$$[S_I] = \begin{bmatrix} [D_I]_{\xi=\xi_0} \\ [G_I]_{\xi=\xi_{M+1}} \end{bmatrix} (8 \times 3M), \quad [S_B] = \begin{bmatrix} [D_B]_{\xi=\xi_0} \\ [G_B]_{\xi=\xi_{M+1}} \end{bmatrix} (8 \times 8) \quad (3-124c)$$

ただし、 $[D_I]_{\xi=\xi_0}$ と $[D_B]_{\xi=\xi_0}$ は、円周方向波数 n に応じて、式(3-116)と(3-117)、式(3-118)と(3-119)および式(3-120)と(3-121)のいずれかをとりものである。他の境界条件(表3-11)に対する $[S_I]$ と $[S_B]$ は、変形量については式(3-103)、力学量については式(3-108)を用い、指定された条件に対応する行マトリックスを抜き出すことによって容易に組み立てることができる。

さて、式(3-123)と式(3-124a)より $\{ \delta_B \}$ を消去すれば、内部選点における未知量を固有ベクトルとする次式が得られる。

$$[K] \{ \delta_I \} - \mathcal{Q}^2 [M_I] \{ \delta_I \} = \{ 0 \} \quad (3-125)$$

ここで、 $[K]$ は $(3M \times 3M)$ の非対称マトリックスで次式で与えられる。

$$[K] = [K_I] - [K_B] [S_B]^{-1} [S_I] \quad (3-126)$$

式(3-125)の固有値解析を行えば、3M個の固有値 Ω^2 とそれに対応する固有モードが求められる。

b) 複数の殻からなる場合

図3-14(b)に示した幾何学的不連続部を有し、二つの殻(1)と(2)からなる問題を扱う。殻(1)と(2)の双方の試行関数に、領域内部にM個の自由度を持たせた式(3-93)を用いれば、未知数の数は $2(3M+8)$ 個となる。このうち6M個の未知数については、殻(1)と(2)の運動方程式の残差条件から6M個の条件式が得られ、16個の未知数に対しては、殻の端末で指定される境界条件と殻の不連続部における接続条件から、それぞれ8個の条件式が得られる。

6M個の条件式は、残差関数の式(3-96)を用いて、次のように表わされる。

$$\int_0^1 R_s^{(j)}(\xi) \delta(\xi - \xi_i) d\xi = R_s^{(j)}(\xi_i) = 0 \quad (3-127)$$

ただし、 $i = 1 \sim M$, $j = 1, 2$ および $s = u, v, w$ 。上式は、式(3-98)を用いて表わすと次式となる。

$$[K_I^{(j)}] \{\delta_I^{(j)}\} + [K_B^{(j)}] \{\delta_B^{(j)}\} - \Omega^2 [M_I^{(j)}] \{\delta_I^{(j)}\} = \{0\} \quad (3-128)$$

ここで、 $j = 1, 2$ であり、添字(j)は殻(j)に関するマトリックス、ベクトルを表わす。

式(3-128)を全体系の方程式で示すと、式(3-123)と同じ形の方程式にまとめられる。

$$[K_I] \{\delta_I\} + [K_B] \{\delta_B\} - \Omega^2 [M_I] \{\delta_I\} = \{0\} \quad (3-129)$$

ただし、

$$\{\delta_I\}^T = (\{\delta_I^{(1)}\}^T, \{\delta_I^{(2)}\}^T), \{\delta_B\}^T = (\{\delta_B^{(1)}\}^T, \{\delta_B^{(2)}\}^T) \quad (3-130a)$$

であり、各マトリックスは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} [K_I] &= \begin{bmatrix} [K_I^{(1)}] & [0] \\ [0] & [K_I^{(2)}] \end{bmatrix} \quad (6M \times 6M) \\ [M_I] &= \begin{bmatrix} [M_I^{(1)}] & [0] \\ [0] & [M_I^{(2)}] \end{bmatrix} \quad (6M \times 6M) \end{aligned} \right\} , \quad [K_B] = \begin{bmatrix} [K_B^{(1)}] & [0] \\ [0] & [K_B^{(2)}] \end{bmatrix} \quad (6M \times 16) \end{aligned} \right\}$$

$$(3-130b)$$

16個の条件式は、以下のように得られる。すなわち、殻の端末における境界条件が a) の問題に同様とすると、8個の条件式は殻(1)の $\xi = \xi_0$ における式(3-108)と殻(2)の $\xi = \xi_{M+1}$ における式(3-103)より得られ、残り8個の方程式は殻の不連続部の接続条件式(3-113)より定められる。これらを全体系の方程式として書き表わせれば次式となる。

$$[S_I] \{ \delta_I \} + [S_B] \{ \delta_B \} = \{ 0 \} \quad (3-131)$$

ただし、

$$[S_I] = \begin{bmatrix} [Q_I^{(1)}]_{\xi=\xi_0} & & [0] \\ [G_I^{(1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} & - [L] [G_I^{(2)}]_{\xi=\xi_0} & \\ [Q_I^{(1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} & - [L] [Q_I^{(2)}]_{\xi=\xi_0} & \\ [0] & & [G_I^{(2)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \end{bmatrix} \quad (16 \times 6M) \quad (3-132)$$

であり、(16×16)次のマトリックス $[S_B]$ は式(3-132)で、添字 I を B に置き換えたものに等しい。

なお、図3-14(b)に示した不連続点における角度 ψ を零とおけば、式(3-132)の $[L]$ (式(3-114))は単位対角マトリックスとなり、式(3-132)は単一の形状の殻を2要素に分割し解析する際の条件式となる。

式(3-129)と式(3-131)より、 $\{ \delta_B \}$ を消去すれば、二つの殻からなる回転殻の固有振動問題は、式(3-125)と同じ形の式で記述される。この式の固有値解析を行えば、6M個の固有値とそれに対応する固有モードが得られる。

3-8 数値計算例

本節の前半では、種々のガウス曲率をもつ単一形状の殻の数値計算例を示す。まず、定数係数と変数係数の微分方程式で与えられる殻として、それぞれ円筒殻と球殻を取り上げ、不伸長振動も含む固有振動解析を行い、解の良否を左右する因子(選点数など)およびこれまでに触れなかった固有モードの直交性などの本解析法の数値解析上の基本的な特性について検討する。次いで本解析法の任意形状の回転殻への適用性を例示するため、円錐殻と双曲殻の解析結果を示す。後半では、幾何学的不連続部をもつ場合への適用例として、円筒殻と球殻の結合系に対する固有振動解析を試みる。

(1) 単一形状の殻の場合

a) 円筒殻

数値例は、殻厚 h と半径 a との比 h/a が 0.01、長さ L と半径 a との比 L/a が 2.16、およびポアソン比 ν が 0.3 の場合を取り扱った。考慮した境界条件は、固定（以下 C と記す）、自由 (F) および単純支持 (S) であり、以下に条件式を示す。

$$\left. \begin{array}{l} \text{固 定 (C) : } U = V = W = \phi_x = 0 \\ \text{自 由 (F) : } N_x = S_x \theta = T_x = M_x = 0 \\ \text{単純支持 (S) : } N_x = V = W = M_x = 0 \end{array} \right\} \quad (3-133)$$

ここでは、まず、選点の選び方の解の精度への影響を調べるが、選点に shifted Legendre 多項式の零点および shifted Chebyshev 多項式の零点を採用する場合をそれぞれ、 L -選点および C -選点と略記する。

a-1) L -選点と C -選点に基づく解の収束性および精度

本解析法によって得られる解の精度は、離散化誤差を支配する因子（内部選点数、選点の選び方、要素分割数）に左右され、計算対象とする境界条件にも依存することは既に指摘した。ここではこれらの点を考慮して、本解析法を高階多元の微分方程式に適用する場合の解の精度および収束性の検討を行い、十分な精度を得るための実用的な内部選点数を明らかにする。なお要素分割を施さない場合を解析した。

表 3-12 に、境界条件 $C-C$ 、 $C-F$ および $F-F$ に対して、内部選点数 M を 8、9、… 12 と変化させた際の固有振動数を、円周方向波数 n と経線方向のモード次数 m の種々の組合せについて示す。これによると、低次の振動数は内部選点数 M の影響をほとんど受けないが、高次では M を増す必要があること、また選点数が小さければ L -選点による方が、解の精度は幾分良好であることがわかる。なお表中の厳密解は、文献 1, 2) に基づき算定した値である。

表 3-13(a)、(b) および (c) に、それぞれ条件 $C-C$ 、 $C-F$ および $F-F$ の固有振動数 ($M = 11$ による) を、条件 $C-C$ はモード次数 $m = 5$ 、 $C-F$ は $m = 6$ 、条件 $F-F$ は $m = 7$ まで示した。表のブロック内の数値は、上段に厳密解、中段の左右にそれぞれ L -選点と C -選点による値、下段には相対誤差をパーセントで示した。これらの表によると、本解析値は高次で厳密解との差が認められるが、ほぼ 1% 以内の相対誤差であることがわかる。なお条件 $F-F$ の表では、モード次数 $m = 1, 2$ の値が抜けている。この値は不伸長振動解に相当するもので、後程検討を加えることにする。

図 3-15 に、円周方向波数 $n = 0, 1, 2, \dots, 8$ と変化させ求めた 4 ~ 6 次固有振動数の厳密解に対する相対誤差の最大値を、境界条件ごとに図示した。この図より、精度は条件 $F-F$ 、

C-F、C-Cの順に悪化していること、内部選点数Mが小さければL-選点による方が良好なこと、Mを増せばいずれの選点を用いても大きな差が生じていないことが理解できる。解の精度の境界条件への依存性については、既にTimoshenko梁を例に指摘したが(図3-4(a)と(b))、その共通する点は、解の精度が自由の条件(F)が関与すれば良好で、固定の条件(C)が関与するとき悪くなることである。これは、固有値とそれに対応する領域内の選点での変位モード値(U, V, W)を決定する本解析法について、殻の端末近傍で密な選点の果す役割(端末近傍の変位モード値に関する情報の不足を是正する役割)が、殻端末で変位関数値(U, V, W)が規定されない自由条件に対して効果的に発揮することによるものと考えられる。以上のように、本手法による解の誤差は、境界条件が力学量(N_x , $S_x\theta$, T_x , M_x)で指定されるとき小さく、変形量(U, V, W, ϕ_x)で指定されるとき大きくなると予想される。しかし、本手法の適用によって生じる誤差は、数値例が示すように、実用上は問題にならないと思われる。

さらに、表3-13と図3-15より、大きさ($3M \times 3M$)の内部選点マトリックス $[K]$ から得られる解のうち、厳密解との比較ではほぼ1%以内の精度で解が得られるモード次数mは、低次 $m = [M/2]$ ($[]$: Gaussの記号)個であることがわかる。m = $[M/2]$ の関係式は、大きさ($2M \times 2M$)のマトリックス $[K]$ より定めたTimoshenko梁においても成立するものであり、それゆえ本手法によれば、1%以内の誤差で解が求まる振動次数は、内部選点マトリックス $[K]$ の大きさに無関係に低次 $[M/2]$ 個であると推察される。

以上、ここで得られた数値解析上の特性は、最も基本的な形状の円筒殻に対して得られたものであるが、先のTimoshenko梁に対するときと同様なものが得られたことを考慮すれば、本手法を他の構造要素に適用する際の一応の目安になるものと考えられる。

表 3-12 種々の支持条件の円筒殻の固有振動数 Ω の収束性

(a) Boundary condition, C-C

M	$m=2, n=6$		$m=3, n=8$		$m=4, n=7$	
	L-collo.	C-collo.	L-collo.	C-collo.	L-collo.	C-collo.
8	2.639	2.643	3.631	3.655	4.922	4.934
9	2.634	2.632	3.613	3.611	4.980	4.997
10	2.634	2.633	3.610	3.609	4.958	4.951
11	2.633	2.633	3.610	3.610	4.961	4.961
12	2.634	2.634	3.610	3.610	4.961	4.961
Exact	2.634	2.634	3.610	3.610	4.961	4.961

(b) Boundary condition, C-F

M	$m=1, n=1$		$m=4, n=7$		$m=5, n=6$	
	L-collo.	C-collo.	L-collo.	C-collo.	L-collo.	C-collo.
8	2.634	2.635	3.984	3.999	5.711	5.695
9	2.633	2.633	3.973	3.973	5.781	5.804
10	2.633	2.632	3.972	3.972	5.758	5.757
11	2.633	2.633	3.972	3.972	5.761	5.763
12	2.633	2.633	3.972	3.973	5.762	5.762
Exact	2.633	2.633	3.972	3.972	5.762	5.762

(c) Boundary condition, F-F

M	$m=3, n=8$		$m=4, n=7$		$m=5, n=6$	
	L-collo.	C-collo.	L-collo.	C-collo.	L-collo.	C-collo.
8	2.230	2.230	2.931	2.933	4.758	4.772
9	2.230	2.230	2.932	2.932	4.744	4.745
10	2.230	2.230	2.932	2.932	4.744	4.745
11	2.230	2.230	2.932	2.932	4.744	4.744
12	2.230	2.230	2.932	2.932	4.744	4.744
Exact	2.230	2.230	2.932	2.932	4.744	4.744

図 3-15 4 ~ 6 次固有振動数の厳密解に対する相対誤差の最大値

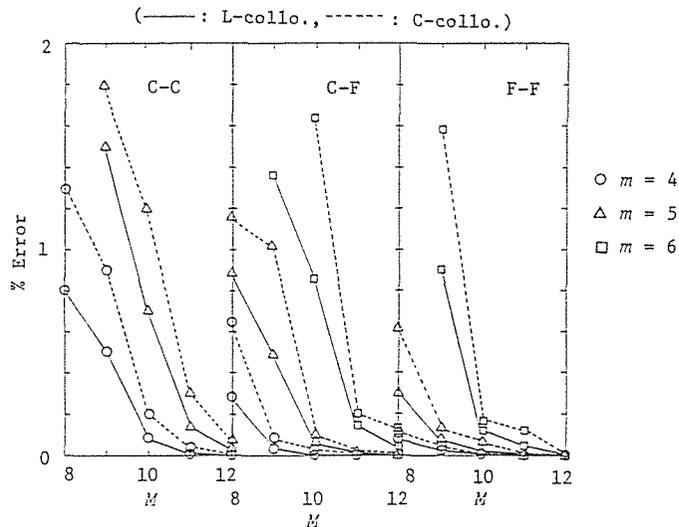


表3-13 (a) 両端固定の円筒殻の固有振動数 Ω ($M=11$)

(a) Boundary condition, C-C

$m \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	5.755 5.755 5.755 0.00 0.00	3.664 3.663 3.663 0.03 0.03	2.507 2.506 2.506 0.04 0.04	1.852 1.852 1.852 0.00 0.00	1.538 1.537 1.537 0.07 0.07	1.508 1.508 1.508 0.00 0.00	1.708 1.708 1.708 0.00 0.00	2.066 2.066 2.066 0.00 0.00
2	8.672 8.672 8.672 0.00 0.00	6.524 6.524 6.524 0.00 0.00	4.844 4.844 4.844 0.00 0.00	3.726 3.725 3.725 0.03 0.03	3.019 3.019 3.019 0.00 0.00	2.634 2.633 2.633 0.04 0.04	2.526 2.526 2.526 0.00 0.00	2.657 2.657 2.657 0.00 0.00
3	9.433 9.477 9.477 0.47 0.47	8.188 8.188 8.188 0.00 0.00	6.763 6.762 6.763 0.00 0.00	5.551 5.551 5.552 0.00 0.02	4.644 4.643 4.644 0.02 0.00	4.032 4.032 4.032 0.00 0.00	3.695 3.694 3.695 0.03 0.00	3.610 3.610 3.610 0.00 0.00
4	9.767 9.767 9.767 0.00 0.00	9.006 9.006 9.006 0.00 0.00	7.989 7.989 7.989 0.00 0.00	6.966 6.966 6.967 0.00 0.01	6.085 6.085 6.086 0.00 0.02	5.409 5.409 5.410 0.00 0.02	4.961 4.961 4.962 0.00 0.02	4.744 4.743 4.744 0.02 0.00
5	9.890 9.999 10.003 1.10 1.14	9.499 9.499 9.500 0.00 0.10	8.791 8.789 8.789 0.02 0.02	8.008 8.004 8.001 0.05 0.09	7.267 7.261 7.256 0.08 0.15	6.645 6.638 6.632 0.11 0.20	6.190 6.182 6.175 0.13 0.24	5.924 5.916 5.908 0.14 0.27

表3-13 (b) 固定-自由の円筒殻の固有振動数 Ω ($M=11$)

(b) Boundary condition, C-F

$m \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2.633	1.285	0.738	0.622	0.779	1.076	1.456	1.904
	2.633 2.633	1.285 1.285	0.738 0.738	0.622 0.622	0.779 0.779	1.076 1.076	1.456 1.457	1.904 1.904
	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.07	0.00 0.00
2	6.943	4.386	2.895	2.068	1.670	1.604	1.789	2.142
	6.943 6.943	4.386 4.386	2.895 2.895	2.068 2.068	1.670 1.669	1.604 1.604	1.789 1.789	2.142 2.142
	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.06	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00
3	8.743	7.266	5.536	4.241	3.381	2.889	2.716	2.811
	8.743 8.743	7.266 7.266	5.536 5.536	4.240 4.241	3.381 3.381	2.889 2.889	2.716 2.716	2.810 2.811
	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.02 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.04 0.00
4	9.450	8.552	7.252	6.039	5.065	4.376	3.973	3.840
	9.450 9.450	8.552 8.551	7.252 7.252	6.038 6.038	5.065 5.065	4.376 4.376	3.972 3.972	3.840 3.840
	0.00 0.00	0.00 0.01	0.00 0.00	0.02 0.02	0.00 0.00	0.00 0.00	0.03 0.03	0.00 0.00
5	9.624	9.187	8.296	7.338	6.464	5.762	5.275	5.021
	9.624 9.624	9.187 9.188	8.296 8.296	7.338 7.339	6.464 6.467	5.761 5.763	5.275 5.276	5.021 5.022
	0.00 0.00	0.00 0.01	0.00 0.00	0.00 0.01	0.00 0.04	0.02 0.02	0.00 0.02	0.00 0.02
6	9.877	9.606	8.985	8.271	7.564	6.957	6.494	6.212
	9.877 9.877	9.607 9.608	8.983 8.982	8.266 8.264	7.561 7.558	6.949 6.946	6.485 6.482	6.203 6.200
	0.00 0.00	0.01 0.02	0.02 0.03	0.06 0.08	0.04 0.08	0.11 0.16	0.14 0.18	0.14 0.19

表3-13 (c) 両端自由の円筒殻の固有振動数 Ω ($M=11$)

(c) Boundary condition, F-F

$m \backslash n$	2	3	4	5	6	7	8
3	5.721	3.691	2.503	1.912	1.750	1.893	2.230
	5.721 5.720	3.691 3.691	2.503 2.503	1.911 1.912	1.750 1.750	1.893 1.894	2.229 2.230
	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.05	0.04 0.00
4	7.760	6.167	4.783	3.787	3.181	2.932	2.983
	7.760 7.760	6.167 6.167	4.783 4.783	3.787 3.786	3.181 3.181	2.932 2.932	2.982 2.983
	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.03	0.00 0.00	0.00 0.00	0.03 0.00
5	8.846	7.684	6.509	5.500	4.744	4.275	4.091
	8.846 8.846	7.684 7.684	6.509 6.509	5.500 5.500	4.744 4.744	4.275 4.275	4.090 4.090
	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.00 0.00	0.02 0.02
6	9.314	8.545	7.664	6.820	6.109	5.595	5.307
	9.314 9.315	8.546 8.548	7.666 7.668	6.821 6.824	6.110 6.114	5.596 5.600	5.309 5.313
	0.00 0.01	0.01 0.04	0.03 0.05	0.01 0.06	0.02 0.08	0.02 0.09	0.04 0.11
7	9.695	9.148	8.501	7.843	7.252	6.790	6.498
	9.695 9.696	9.140 9.136	8.484 8.476	7.821 7.811	7.229 7.220	6.768 6.762	6.478 6.474
	0.00 0.01	0.09 0.13	0.20 0.29	0.28 0.41	0.32 0.44	0.32 0.41	0.31 0.37

a-2) 不伸長振動解

前に述べたように、条件F-Fに対する1、2次固有振動数(ω_1, ω_2)は、不伸長振動解に相当する。ここでは本解析値と不伸長理論³⁴⁾に基づく結果の比較を行う。ただし選点はL-選点によった。

条件F-Fの不伸長振動解(ω_1, ω_2)は、それぞれ経線方向に一樣なおよび直線変化する変形の形式を表わす変位関数を用いて、Rayleighの原理より次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{Eh^2}{12\rho a^4(1-\nu^2)} \cdot \frac{(n^3-n)^2}{n^2+1} \\ \omega_2^2 &= \omega_1^2 \frac{1+24(1-\nu)a^2/(L^2n^2)}{1+12a^2/\{L^2n^2(n^2+1)\}} \end{aligned} \right\} \quad (3-134)$$

表3-14に、内部選点数M=11による本解析値とRayleigh法の結果を円周方向波数n=2~7に対して示す。本解析値は波数n=2,3の ω_2 の値を除き、Rayleigh法に基づく値より小さく、その差は波数の増加と共に大きくなる傾向にある。Rayleigh法による結果が厳密解の上限を与えること、および仮定振動モードが自由の条件を近似的にしか満足していないことを考え合せば、本解析値はより厳密解に近いものと思われる。

図3-16には、本解法による変形モードを波数n=2,4,6について示した。図は、経線方向モード次数m=1では経線方向に一樣なモードを(図の下半分に示す)、m=2では経線方向に線形に変化するモードを近似的であるが示している。

次に、境界条件が単純支持-自由(S-F)の結果を示す。この条件の不伸長振動解 ω は、経線方向に線形変化する変位関数を用いてRayleighの原理より次のように得られる。

$$\omega^2 = \frac{Eh^2}{12\rho a^4(1-\nu)} \cdot \frac{(n^3-n)^2}{n^2+1} \cdot \frac{1+6(1-\nu)a^2/(L^2n^2)}{1+3a^2/\{L^2n^2(n^2+1)\}} \quad (3-135)$$

表3-15は、選点数M=11による本手法と式(3-135)の結果を示したものである。これによれば、本計算値とRayleigh法による値との差はわずかであり、その差の傾向は先の条件F-Fに対する場合にほぼ同様である。

以上の数値例が示すように、本計算値は不伸長変形モードを仮定することなく、一般的な殻理論より得られるものであり、また解は境界条件を満足するように定まるものであり本手法の有効性が理解されよう。

表3-14 両端自由の円筒殻の不伸長振動解 Ω (M=11)

m	Solution procedure	n					
		2	3	4	5	6	7
1	Rayleigh	0.081	0.230	0.440	0.712	1.045	1.438
	This study	0.081	0.229	0.439	0.709	1.041	1.433
2	Rayleigh	0.105	0.268	0.485	0.760	1.095	1.480
	This study	0.109	0.269	0.484	0.756	1.089	1.480

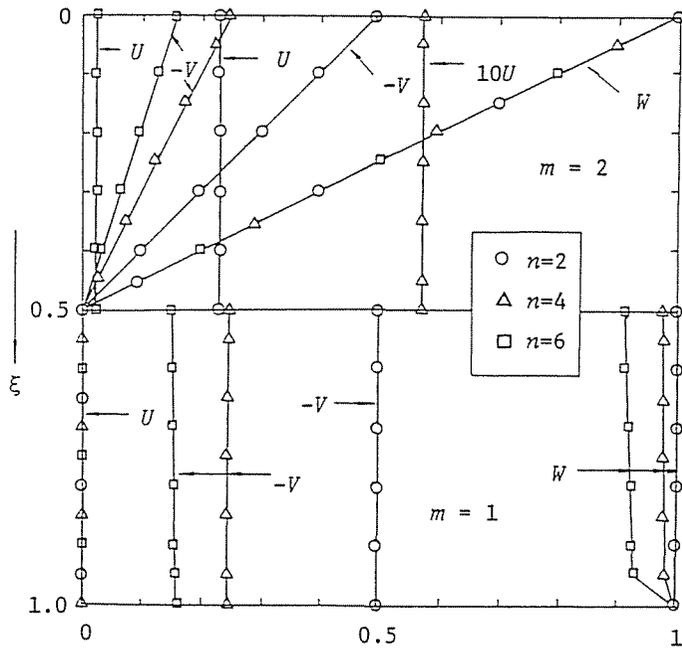


図 3-16 両端自由の円筒殻の振動モード
(不伸長振動解との比較, $M=11$)

表 3-15 単純支持-自由の円筒殻の不伸長振動解 Ω ($M=11$)

m	Solution procedure	n					
		2	3	4	5	6	7
1	Ralyeigh	0.088	0.240	0.452	0.725	1.057	1.451
	This study	0.089	0.239	0.451	0.722	1.054	1.446

a-3) 固有モードの直交性

非減衰の固有振動モードの基本的な性質として、固有モードベクトルの直交性がある。本解析法によれば、固有振動問題を記述する内部選点マトリックス $[K]$ は実非対称であり、実対称の場合と異なり、一般に固有モードの直交性は保証されるものでない。それゆえ、本解析法により得られる固有モードの直交性を確認することは、数値解析的な観点からも必要と思われる。

固有モードの直交性の検証は次式によってなされる。

$$I = \int \int_s (U_{mn} U_{st} + V_{mn} V_{st} + W_{mn} W_{st}) R_1 R d\varphi d\theta \quad (3-136)$$

ここで、添字 mn は固有振動数パラメータ Q_{mn} に対応する経線および円周方向に m, n 次の固有モードを表わし、添字 st も同様とする。式(3-136)に式(3-80)を代入し、積分区間を無次元化された経線方向座標 ξ によって表わせれば、式(3-136)に類似な次式が得られる(ただし時間に関する項は省略した)。

$$\bar{I} = \int_0^1 (U_{mn} U_{st} + V_{mn} V_{st} + W_{mn} W_{st}) r d\xi \quad (3-137)$$

ただし、 \bar{I} は次の関係を満たすものである。

$$\bar{I} \begin{cases} \neq 0 & : \quad n = t \quad \text{かつ} \quad m = s \\ = 0 & : \quad n = t \quad \text{かつ} \quad m \neq s \end{cases} \quad (3-138)$$

式(3-138)がモードベクトル間の直交性を与える式である。したがって、本解析法による固有振動モードの直交性の検討は、式(3-137)の \bar{I} の値を求め、それと式(3-138)との相対的な大きさをもってなされることになる。

表3-16に、条件C-CとC-Fの場合の \bar{I} の値の絶対値を示した。ただし、内部選点数 $M=11$ (L-選点)とし、積分はGauss 24分点則によった。表より、本手法によって得られた固有モード間の直交性は、十分な精度で成立していることがわかる。

表 3-16 固定-自由および両端固定の円筒殻の振動モードの直交性(M=11)

(a) Boundary condition, C-F

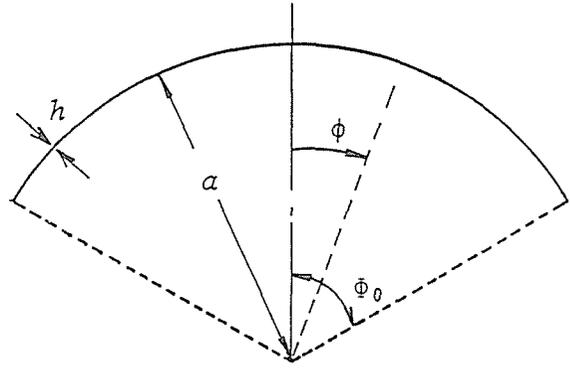
$n \backslash s \ m$	1	2	3	4	5
1	0.77	0.92×10^{-6}	0.86×10^{-4}	0.14×10^{-4}	0.34×10^{-4}
2		0.69	0.16×10^{-3}	0.27×10^{-4}	0.40×10^{-4}
3			0.57	0.93×10^{-4}	0.14×10^{-3}
4				0.67	0.27×10^{-4}
5					0.31
1	0.32	0.99×10^{-6}	0.22×10^{-4}	0.22×10^{-4}	0.16×10^{-4}
2		0.43	0.14×10^{-3}	0.12×10^{-3}	0.17×10^{-3}
3			0.44	0.27×10^{-3}	0.34×10^{-3}
4				0.46	0.44×10^{-3}
5					0.41
1	0.28	0.52×10^{-4}	0.23×10^{-4}	0.25×10^{-4}	0.16×10^{-4}
2		0.35	0.49×10^{-5}	0.36×10^{-4}	0.11×10^{-3}
3			0.39	0.16×10^{-3}	0.32×10^{-3}
4				0.43	0.50×10^{-3}
5					0.43
1	0.27	0.15×10^{-3}	0.51×10^{-4}	0.41×10^{-4}	0.19×10^{-4}
2		0.32	0.50×10^{-4}	0.27×10^{-4}	0.37×10^{-5}
3			0.35	0.75×10^{-5}	0.56×10^{-4}
4				0.39	0.15×10^{-3}
5					0.42
1	0.28	0.11×10^{-3}	0.42×10^{-4}	0.31×10^{-4}	0.48×10^{-5}
2		0.35	0.23×10^{-4}	0.35×10^{-4}	0.64×10^{-4}
3			0.35	0.95×10^{-4}	0.11×10^{-3}
4				0.37	0.44×10^{-4}
5					0.40

(b) Boundary condition, C-C

$n \backslash s \ m$	1	2	3	4	5
1	0.77	0.15×10^{-3}	0.18×10^{-3}	0.16×10^{-3}	0.35×10^{-3}
2		0.53	0.78×10^{-5}	0.11×10^{-3}	0.12×10^{-3}
3			0.44	0.77×10^{-3}	0.52×10^{-4}
4				0.46	0.17×10^{-3}
5					0.49
1	0.53	0.92×10^{-4}	0.28×10^{-3}	0.87×10^{-4}	0.12×10^{-4}
2		0.54	0.27×10^{-3}	0.16×10^{-3}	0.39×10^{-3}
3			0.53	0.30×10^{-3}	0.19×10^{-4}
4				0.50	0.35×10^{-3}
5					0.47
1	0.46	0.39×10^{-4}	0.12×10^{-3}	0.21×10^{-4}	0.16×10^{-3}
2		0.52	0.16×10^{-3}	0.11×10^{-3}	0.47×10^{-3}
3			0.56	0.24×10^{-3}	0.58×10^{-3}
4				0.48	0.56×10^{-3}
5					0.48
1	0.44	0.51×10^{-4}	0.27×10^{-4}	0.25×10^{-4}	0.12×10^{-3}
2		0.50	0.93×10^{-5}	0.37×10^{-4}	0.26×10^{-3}
3			0.54	0.11×10^{-5}	0.58×10^{-3}
4				0.46	0.33×10^{-3}
5					0.50
1	0.44	0.13×10^{-3}	0.79×10^{-4}	0.54×10^{-4}	0.53×10^{-4}
2		0.50	0.20×10^{-4}	0.28×10^{-4}	0.90×10^{-4}
3			0.52	0.19×10^{-3}	0.32×10^{-3}
4				0.47	0.11×10^{-3}
5					0.50

b) 球 殻

ここで取り扱う球殻は、頂点が閉じ、裾にのみ境界を有するドーム形に限定する(図3-17)。頂点が閉じた球殻の特徴は、頂点が微分方程式の確定特異点であることである。それゆえ数値解析手法では、頂点近傍の取り扱いに様々な工夫がみられる。Holzer 法⁸⁾では、頂点まわりにおける級数解が用いられ、差分法¹⁰⁾では、頂点を中心に微小な円孔を設けて上部開孔を有する球殻として解析している。有限要素法では、頂点を含む要素剛性マトリックスの作成が不可能となるため、上述の差分法と同様な扱いがなされたり、また頂点の特異性を考慮した特別要素



- h : Shell thickness
- a : Radius of curvature
- ϕ : Meridional coordinate
- Φ_0 : Half opening angle

図3-17 頂点が閉じて裾にのみ境界を有する球殻

(Cap element)¹¹⁾が開発されている。一方、解析的に微分方程式に取り組む厳密解法の場合は、厳密解を構成する特殊関数の特性に起因する数値計算上の困難さ、および固有振動数の見落しの危険性が指摘されている^{17, 35)}。

本解析法は、頂点で成立する制約条件式(3-89)をあたかも一端における境界条件として課するだけで、前述の数値解析手法にみられるような特別な工夫も必要とせず、また有限要素法や差分法でなされる要素細分割、格子点数の増加による離散化精度の向上が、選点に採られた直交多項式の零点の性質によって自動的になされるなど、きわめて直接的な解析が可能と思われる。

以下では、本解析法の変数係数の微分方程式で記述される回転殻への適用可能性を、不伸長振動を含む球殻の固有振動解析を通して明らかにするとともに、球殻の解析における数値解析上の問題および球殻理論に関する留意事項として、それぞれ解の欠落の問題および浅い球殻理論の適用性について言及する。

なお、選点にはTimoshenko 梁と円筒殻に対する数値結果より判断してL-選点を採用し、またポアソン比は0.3とした。

考慮した境界条件は次の通りである。

固定支持 (Clamped edge) :

$$U = V = W = \phi_x = 0 \quad (3-139 a)$$

回転支持 (Fixed-hinged edge) :

$$U = V = W = M_x = 0 \quad (3-139 b)$$

移動支持 (Roller-hinged edge) :

$$W = N_x = N_\theta = M_x = 0 \quad (3-139 c)$$

自由 (Free) :

$$N_x = S_x \theta = T_x = M_x = 0 \quad (3-139 d)$$

b-1) 解の収束性と精度

殻厚 h と半径 a との比 h/a が 0.01、裾の境界条件が固定と回転支持の場合を扱う。

表 3-17 と 3-18 にそれぞれ、半開角 ϕ_0 が 45° と 90° になる場合について、内部選点数 M を 9, 10, 11, 12 と変化させた際の円周方向波数 $n = 0, 1$ における低次 5 つの固有振動数を厳密解⁴⁾ との比較で示す。これらの表より、本手法によって得られる解の性質について次のようなことが指摘できよう。

- 1) 解の内部選点数 M への依存性は、定数係数の微分方程式で表わされる円筒殻に対するものとはほぼ同様であるが、変数係数の影響が高次固有振動数に幾分現われている。
- 2) 低次 5 つの解を精度よく (厳密解に対して 1% 以内の相対誤差で) 求めるには、内部選点数 M は 10 ないし 11 程度で十分である。また内部選点数を M と記せば $[M/2]$ 個までの固有振動数は十分な精度で得られている。

表 3-17 球殻 ($\phi_0 = 45^\circ$) の固有振動数 Ω の収束性

n	m	Exact	Interior collocation points, M			
			9	10	11	12
Clamped edge						
0	1	0.965	0.965(0.00)	0.965(0.00)	0.965(0.00)	0.965(0.00)
	2	1.061	1.061(0.00)	1.061(0.00)	1.061(0.00)	1.061(0.00)
	3	1.232	1.232(0.00)	1.232(0.00)	1.232(0.00)	1.232(0.00)
	4	1.496	1.506(0.67)	1.496(0.00)	1.496(0.00)	1.496(0.00)
	5	1.675	1.685(0.60)	1.679(0.00)	1.675(0.00)	1.675(0.00)
1	1	0.971	0.971(0.00)	0.971(0.00)	0.971(0.00)	0.971(0.00)
	2	1.034	1.034(0.00)	1.034(0.00)	1.034(0.00)	1.034(0.00)
	3	1.151	1.151(0.00)	1.151(0.00)	1.151(0.00)	1.151(0.00)
	4	1.386	1.384(0.00)	1.387(0.00)	1.386(0.00)	1.386(0.00)
	5	1.755	1.804(2.79)	1.765(0.57)	1.758(0.17)	1.757(0.11)
Fixed-hinged edge						
0	1	0.953	0.953(0.00)	0.953(0.00)	0.953(0.00)	0.953(0.00)
	2	1.040	1.040(0.00)	1.040(0.00)	1.040(0.00)	1.040(0.00)
	3	1.188	1.187(0.00)	1.188(0.00)	1.188(0.00)	1.188(0.00)
	4	1.448	1.460(0.00)	1.448(0.00)	1.449(0.00)	1.449(0.00)
	5	1.658	1.662(0.24)	1.659(0.06)	1.658(0.00)	1.658(0.00)
1	1	0.971	0.971(0.00)	0.971(0.00)	0.971(0.00)	0.971(0.00)
	2	1.025	1.025(0.00)	1.025(0.00)	1.025(0.00)	1.025(0.00)
	3	1.112	1.112(0.00)	1.112(0.00)	1.112(0.00)	1.112(0.00)
	4	1.314	1.314(0.00)	1.315(0.08)	1.314(0.00)	1.314(0.00)
	5	1.651	1.686(2.12)	1.655(0.24)	1.653(0.12)	1.651(0.00)

Numbers in parentheses indicate percentages of relative error.

表 3-18 球殻 ($\phi_0 = 90^\circ$) の固有振動数 Ω の収束性

n	m	Exact	Interior collocation points, M			
			9	10	11	12
Clamped edge						
0	1	0.760	0.761(0.00)	0.761(0.13)	0.761(0.13)	0.761(0.13)
	2	0.938	0.939(0.10)	0.938(0.00)	0.938(0.00)	0.938(0.00)
	3	0.984	0.958(2.64)	0.984(0.00)	0.984(0.00)	0.984(0.00)
	4	1.020	0.988(3.14)	1.007(1.27)	0.020(0.00)	1.020(0.00)
	5	1.071	1.030(3.83)	1.053(1.68)	1.057(1.31)	1.071(0.00)
1	1	0.568	0.568(0.00)	0.568(0.00)	0.568(0.00)	0.568(0.00)
	2	0.893	0.894(0.11)	0.894(0.11)	0.893(0.00)	0.893(0.00)
	3	0.966	0.965(0.10)	0.966(0.00)	0.966(0.00)	0.966(0.00)
	4	1.002	1.019(1.70)	1.001(0.10)	1.002(0.00)	1.002(0.00)
	5	1.044	1.064(1.92)	1.164(1.92)	1.044(0.00)	1.043(0.10)
Fixed-hinged edge						
0	1	0.747	0.749(0.27)	0.748(0.13)	0.748(0.13)	0.748(0.13)
	2	0.932	0.932(0.00)	0.932(0.00)	0.932(0.00)	0.932(0.00)
	3	0.979	0.959(2.04)	0.979(0.00)	0.979(0.00)	0.979(0.00)
	4	1.013	0.982(3.06)	0.004(0.89)	1.014(0.10)	1.013(0.00)
	5	1.059	1.013(4.34)	1.053(0.57)	1.048(1.04)	1.060(0.09)
1	1	0.560	0.561(0.18)	0.560(0.00)	0.560(0.00)	0.560(0.00)
	2	0.885	0.885(0.00)	0.885(0.00)	0.885(0.00)	0.885(0.00)
	3	0.960	0.960(0.00)	0.960(0.00)	0.961(0.10)	0.961(0.10)
	4	0.996	0.965(3.11)	0.995(0.10)	0.996(0.00)	0.996(0.00)
	5	1.034	1.000(3.29)	1.016(1.74)	1.034(0.00)	1.034(0.00)

Numbers in parentheses indicate percentages of relative error.

b-2) 不伸長振動解

裾が自由な条件に対しては、不伸長理論の適用が可能である。不伸長振動解³⁴⁾は、次に示すように A_n を係数とする振動モード

$$\left. \begin{aligned} U &= A_n \sin \Psi \tan^n \frac{\Psi}{2} \cos \theta e^{i\omega t} \\ V &= A_n \sin \Psi \tan^n \frac{\Psi}{2} \cos \theta e^{i\omega t} \\ W &= -A_n (n + \cos \Psi) \tan^n \frac{\Psi}{2} \cos \theta e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (3-140)$$

を仮定し、Rayleighの原理より次のように得られる。

$$\omega^2 = \frac{Eh^2}{12\rho a^4(1+\nu)} \frac{(2n^2-1)(n^3-n)}{f(n)} \quad (3-141)$$

ただし

$$f(n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^{2n} \frac{\Psi}{2} \left\{ (n + \cos \Psi)^2 + 2 \sin^2 \Psi \right\} \sin \Psi d\Psi$$

図3-18は、厚さ h と半径 a の比 h/a が0.01の半球殻について、本解析値($M=11$)とRayleighの解を円周方向波数 n の範囲 $1 \leq n \leq 18$ に対して図示したものである。また図には比較のためにHwangの実験値³⁵⁾も示した。二つの計算手法による解の相違は、波数 n の小さいとき($n \leq 4$)はそれ程大きくないが、 n の増加と共に大きくなる傾向にある。一方、本解析解と実験値の差は、波数 n が大きくなるにつれて生じ始めるが、互いに近い値を示している。このことと、Rayleigh法による振動数は、それに対応する厳密解の上界を与えること、また仮定振動モードが境界条件を近似的にしか満たさないことを考え合せば、本解析値の信頼性は高いものと言えよう。

図3-19に、波数 n が2, 4, 6, 8の場合の固有モード(最大値で基準化したもの)を示す。これによると、本解析法によっても、振動が頂点近傍に集中する半球殻特有の不伸長モードが表現され、波数 n の増加と共にその傾向が著しくなる様子が得られている。さらに、 U と V の振動モードの振幅の最大値は、式(3-140)より明らかのように $U=V$ の関係が成立するが、本解析値も近似的であるがこの関係が成立している。計算方法の相違の影響は、振動の振幅に現われ、本解析法による場合はRayleigh法による場合より大きく、波数 n が大きいときに顕著である。Rayleigh法に基づく振幅はそれによる振動数とは逆に、厳密解より一般に小さくなる点を考慮すれば、本手法の結果は妥当なものと判断される。

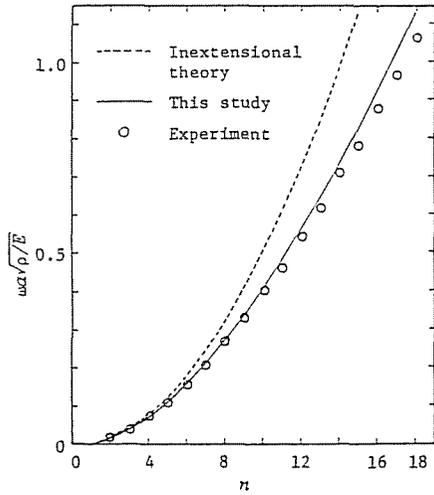


図3-18 端部自由の半球殻の基本固有振動数 Ω
 (不伸長振動解との比較, $M=11$)

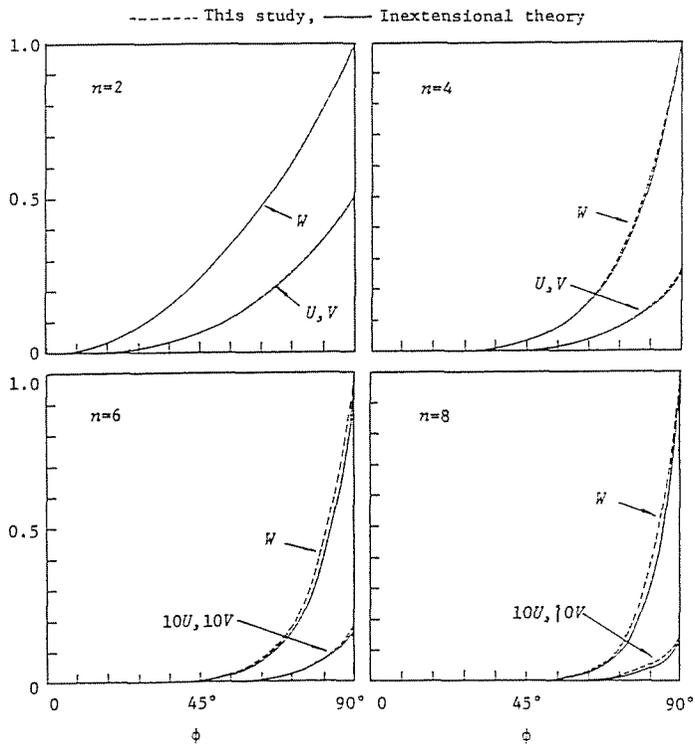


図3-19 端部自由の半球殻の振動モード
 (不伸長振動解との比較, $M=11$)

b-3) 高い円周方向波数 n に対する解析

球殻の固有振動に関する研究は、そのほとんどが対称振動（波数 $n = 0$ ）および逆対称振動（ $n = 1$ ）に限られている。想定した動的な荷重が高い波数をもって殻を振動させると考えられる場合には、高い波数に関する振動特性の知識が必要となるのは明らかである。

ここでは、波数 n の大きな値に対する Souza ら¹⁶⁾ の数値結果を引用し、本解析法によって得られる解に検討を加える。なお、文献16)は差分法を用い、頂点の特異性を避けるため頂点を中心に小さな円孔を設け、そこに自由の条件を課して解析するとともに、格子点数 10, 20, 30 および 40 の結果に基づき Richardson の外挿式によって最終的な解を推定している。

計算は端部固定の球殻を取り上げ、厚さ h と半径 a との比 h/a が 0.005、半開角 ϕ_0 が 45° と 90° の 2 つの場合について行った。表 3-19 に波数 $n \leq 28$ を満たす数種の n に対する本解析値（内部選点数 $M = 11$ による）を経線方向をモード次数 $m = 4$ まで示した。表より明らかのように、両手法による結果は、半開角 45° の波数が大きい場合を除いて良い一致を示している。

表 3-19 任意波数 $n (\geq 2)$ に対する球殻の固有振動数 Ω
（差分解との比較, $M = 11$ ）

(a) $\phi_0 = 45^\circ$

n	$m=1$		$m=2$		$m=3$		$m=4$	
	This study	F.D.M.						
2	0.992	0.992	1.036	1.036	1.094	1.094	1.177	1.177
5	1.036	1.037	1.109	1.110	1.224	1.224	1.404	1.402
8	1.107	1.107	1.247	1.242	1.455	1.454	1.759	1.748
10	1.187	1.186	1.390	1.391	1.672	1.668	2.016	2.013
12	1.302	1.302	1.577	1.578	1.929	1.929	2.324	2.333
15	1.546	1.546	1.936	1.935	2.364	2.328	3.004	2.885
18	1.876	1.875	2.374	2.376	2.906	2.921	3.881	3.515
20	2.141	2.140	2.708	2.713	3.344	3.321	4.280	3.973
22	2.439	2.438	3.077	3.084	3.840	3.756	4.576	4.470
25	2.947	2.943	3.697	3.699	4.657	4.463	5.099	5.269
28	3.523	3.519	4.400	4.385	5.404	5.234	5.899	6.139

(b) $\phi_0 = 90^\circ$

n	$m=1$		$m=2$		$m=3$		$m=4$	
	This study	F.D.M.						
2	0.900	0.899	0.962	0.963	0.984	0.972	1.000	1.004
5	0.975	0.974	0.994	0.991	1.017	1.019	1.042	1.037
8	0.998	0.999	1.017	1.018	1.037	1.044	1.057	1.076
10	1.015	1.015	1.040	1.040	1.066	1.076	1.134	1.118
12	1.036	1.036	1.069	1.070	1.111	1.147	1.197	1.171
15	1.083	1.083	1.133	1.113	1.206	1.199	1.295	1.278
18	1.157	1.158	1.230	1.230	1.322	1.319	1.473	1.426
20	1.225	1.225	1.314	1.314	1.423	1.417	1.623	1.556
22	1.308	1.309	1.415	1.415	1.546	1.539	1.761	1.673
25	1.466	1.466	1.597	1.593	1.773	1.747	1.951	1.909
28	1.661	1.661	1.819	1.818	2.046	1.992	2.170	2.195

b-4) 既往研究の欠落固有振動数の検討と固有モードの検討

球殻の固有振動問題を解析的に取り組む場合には、解の見落しの可能性があることは前に触れた。ここでは、まずCohen¹⁷⁾、Navaratna⁹⁾によって固有振動数の欠落を指摘されたKalninsの対称振動問題⁹⁾を取り上げて、本解析法による欠落固有振動数の確認を行い、次に対称、非対称振動問題を扱った最近の研究⁴⁾にも同様な解の欠落があることを指摘し、球殻の固有振動解析を行う際には解の欠落防止に細心の注意が要求されることを強調したい。

表3-20は、Kalninsの問題(半開角 $\phi_0 = 60^\circ$ 、厚さ h と半径 a の比 $h/a = 0.01$)の低次5つの固有振動数を、自由、回転支持、固定および移動支持の場合について、内部選点数 $M = 11$ による本計算値と他の解と比較したものである。表でCohenとNavaratnaの値は、それぞれStodola法および有限要素法の結果である。表より明らかなように、Kalninsの解で見落された固定、回転支持の3次固有振動数に対応する本計算値は、他の解とよい一致を示している。図3-20(a)と(b)に、欠落固有振動数に対応する固有モードを、Navaratnaの有限要素解との比較で示したものである。この図から理解できるように、本手法の結果は良好であり、回転支持のWのモード形に見られるように節点を持たない特異なモード形も容易に得られている。なお、ここでの直接的な目的ではないが、本手法で得られるモードの精度の1つの検証例として、移動支持の $Q = 2.546$ に対するモードを図3-21に示す。これによれば、Kalninsの法線方向変位モードWは曲げの寄与のない伸びモードを呈しているが、本手法のそれは、Ross³⁶⁾が言及しているように、伸びモードに曲げの影響による振幅の小さな短周期の振動が重畳した形状を呈している。

さて、Kalninsの結果で欠落した固有振動数を固有モードの直交性の立場から検討を加えることにし、併せて本手法により求まる変数係数の微分方程式で記述される回転殻の固有モードの精度の検証を行う。表3-21は、この目的のために行った結果である。表の値は、式(3-137)で与えられた \bar{I} のそれであり、波数 $n = 0$ に加えて、 $n = 1, 3, 5$ なる場合について、Gauss 24分点則により求めたものである。結果は、変数係数の微分方程式のため定数係数の円筒殻の場合(表3-16)に比較すればやや乱れているが、Kalninsの欠落固有振動数に対応する固有モードも含めて直交性は十分保たれていることを示している。

次に最近の解析解に基づく計算結果⁴⁾にも解の見落としがあることを指摘し、解析解によれば解の見落しの危険性が常に存在すること、またこれを防ぐには十分な注意が必要なことを強調したい。表3-22は、 $\phi_0 = 45^\circ$ 、 $h/a = 0.005$ および固定支持に対する固有振動数を、本計算値($M = 11$)と解析解の両者を比較したものである。なお、Souzaら¹⁶⁾も同一の諸元の球殻を差分法により解析しており、表には比較検討のために差分解も併記した。本計算値と差分解の比較より判断すれば、波数 $n = 0$ の2次($m = 2$)と $n = 1$ の3次($m = 3$)固有振動数の欠落が認められる。参考のために、図3-22に欠落振動数に対応する固有モー

ドを示し、表3-23に固有モードの直交性の指標としての \bar{I} の値を示した。

表3-20 球殻 ($\phi_0 = 60^\circ, h/a = 0.01$) の欠落固有振動数 Ω の検討

Mode number, m	This study	Kalnins	Navaratna	Cohen
(a) Free edge				
1	0.931	0.931	0.932	
2	1.088	1.088	1.094	
3	1.533	1.533	1.544	
4	2.348	2.348	2.363	
5	2.547	2.544	2.548	
(b) Fixed-hinged edge				
1	0.963	0.962	0.963	0.959
2	1.332	1.334	1.338	1.325
3	1.650	Missed	1.653	1.646
4	2.128	2.128	2.131	
5	3.175	3.176	3.185	
(c) Clamped edge				
1	1.006	1.006	1.008	
2	1.391	1.391	1.395	
3	1.696	Missed	1.702	
4	2.375	2.375	2.378	
5	3.487	3.486	3.506	
(d) Roller-hinged edge				
1	0.995	0.995		
2	1.380	1.380		
3	2.110	2.110		
4	2.546	2.546		
5	3.183	3.183		

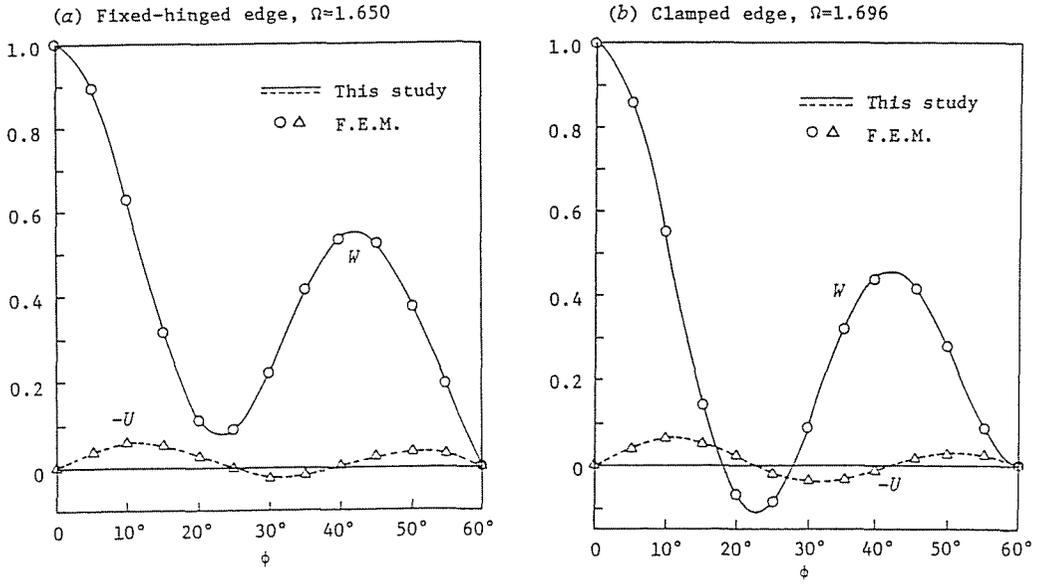


図3-20 球殻($\phi_0 = 60^\circ$, $h/a = 0.01$, $n=0$)の欠落固有振動数に対応する振動モード

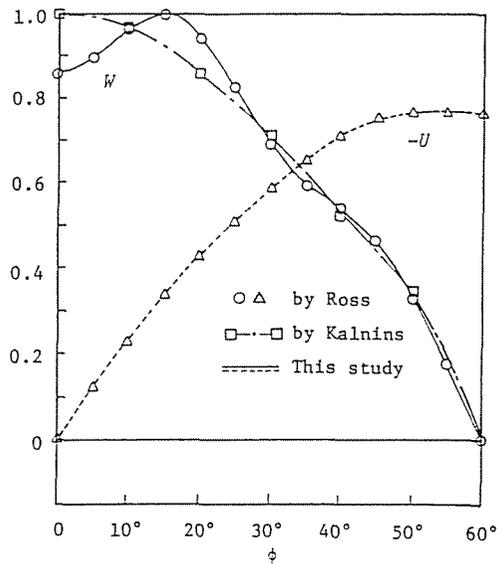


図3-21 移動支持された球殻の解 $Q = 2.546$ に対応する振動モード

表3-21 球殻 ($\phi_0 = 60^\circ$, $h/a = 0.01$, $n = 0$) の固有振動モードの直交性, \bar{I} の値 ($M = 11$)

(a) Fixed-hinged edge

$n \setminus s \setminus m$	1	2	3	4	5	
0	1	0.06	0.27×10^{-8}	0.23×10^{-8}	0.43×10^{-7}	0.19×10^{-5}
	2		0.05	0.14×10^{-7}	0.12×10^{-6}	0.14×10^{-5}
	3			0.07	0.41×10^{-6}	0.48×10^{-5}
	4				0.03	0.57×10^{-5}
	5					0.02
1	1	0.39	0.31×10^{-3}	0.44×10^{-4}	0.64×10^{-4}	0.11×10^{-4}
	2		0.14	0.64×10^{-4}	0.10×10^{-3}	0.27×10^{-5}
	3			0.12	0.13×10^{-3}	0.12×10^{-4}
	4				0.36	0.81×10^{-4}
	5					0.09
3	1	0.24	0.26×10^{-3}	0.78×10^{-4}	0.91×10^{-4}	0.50×10^{-4}
	2		0.22	0.82×10^{-4}	0.41×10^{-4}	0.68×10^{-4}
	3			0.15	0.55×10^{-4}	0.25×10^{-3}
	4				0.12	0.49×10^{-3}
	5					0.30
5	1	0.22	0.17×10^{-3}	0.41×10^{-5}	0.13×10^{-3}	0.81×10^{-4}
	2		0.18	0.13×10^{-4}	0.68×10^{-5}	0.15×10^{-3}
	3			0.17	0.15×10^{-3}	0.36×10^{-3}
	4				0.13	0.51×10^{-3}
	5					0.24

(b) Clamped edge

$n \setminus s \setminus m$	1	2	3	4	5	
0	1	0.04	0.30×10^{-8}	0.48×10^{-8}	0.59×10^{-8}	0.68×10^{-6}
	2		0.09	0.42×10^{-7}	0.58×10^{-6}	0.15×10^{-7}
	3			0.04	0.60×10^{-6}	0.20×10^{-5}
	4				0.03	0.13×10^{-4}
	5					0.02
1	1	0.30	0.23×10^{-3}	0.25×10^{-4}	0.68×10^{-4}	0.13×10^{-4}
	2		0.12	0.39×10^{-4}	0.94×10^{-4}	0.47×10^{-5}
	3			0.12	0.13×10^{-3}	0.30×10^{-5}
	4				0.29	0.20×10^{-4}
	5					0.08
3	1	0.21	0.17×10^{-3}	0.66×10^{-4}	0.69×10^{-4}	0.91×10^{-4}
	2		0.17	0.86×10^{-4}	0.73×10^{-5}	0.12×10^{-3}
	3			0.18	0.25×10^{-3}	0.17×10^{-3}
	4				0.16	0.62×10^{-3}
	5					0.29
5	1	0.20	0.16×10^{-3}	0.58×10^{-5}	0.24×10^{-3}	0.11×10^{-3}
	2		0.16	0.24×10^{-4}	0.68×10^{-4}	0.22×10^{-3}
	3			0.14	0.32×10^{-3}	0.55×10^{-3}
	4				0.15	0.11×10^{-3}
	5					0.25

表 3-22 固定支持された球殻 ($\Phi_0 = 45^\circ$, $h/a = 0.005$, $n = 0, 1$) の
 欠落固有振動数 Q の検討

n	m	Exact	This study	F.D.M.
0	1	0.952	0.952	0.952
	2	Missed	1.004	1.004
	3	1.057	1.057	1.058
	4	1.154	1.154	
	5	1.308	1.310	
1	1	0.965	0.965	0.969
	2	1.004	1.004	1.004
	3	Missed	1.040	1.046
	4	1.109	1.109	1.125
	5	1.233	1.238	

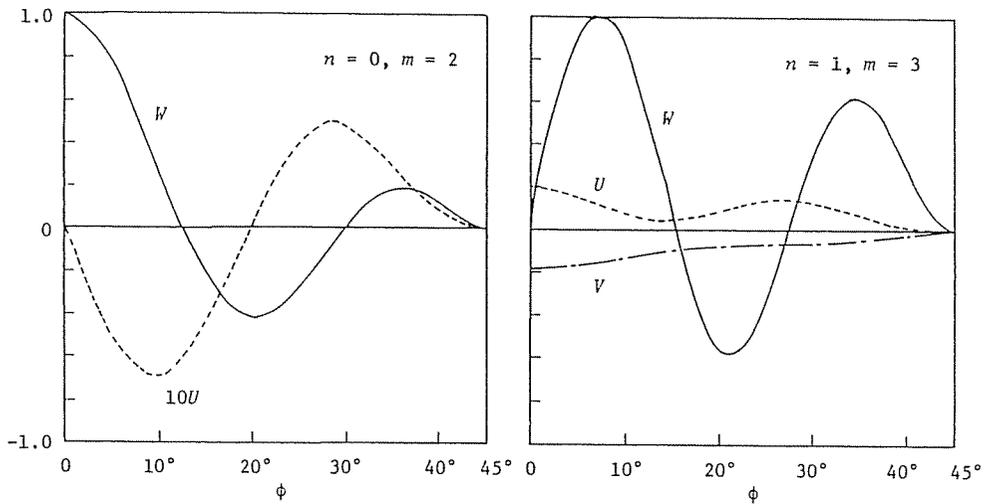


図 3-22 固定支持された球殻 ($\Phi_0 = 45^\circ$, $h/a = 0.005$, $n = 0, 1$) の
 欠落固有振動数に対応する振動モード

表 3-23 固定支持された球殻 ($\Phi_0 = 45^\circ$, $h/a = 0.005$, $n = 0, 1$) の
 固有振動モードの直交性, \bar{I} の値 ($M = 11$)

$n \setminus s \setminus m$	1	2	3	4	5	
0	1	0.05	0.10×10^{-7}	0.42×10^{-6}	0.16×10^{-5}	0.10×10^{-4}
	2		0.02	0.41×10^{-6}	0.25×10^{-6}	0.13×10^{-4}
	3			0.02	0.17×10^{-4}	0.11×10^{-4}
	4				0.02	0.31×10^{-4}
	5					0.01
1	1	0.12	0.27×10^{-4}	0.82×10^{-5}	0.61×10^{-5}	0.78×10^{-5}
	2		0.10	0.16×10^{-4}	0.11×10^{-4}	0.20×10^{-5}
	3			0.08	0.15×10^{-5}	0.92×10^{-4}
	4				0.06	0.14×10^{-3}
	5					0.05

b-5) 浅い球殻に対する適用性

球殻は半開角あるいはライズの大きさによって、深い球殻と浅い球殻に、同様に球殻理論も深い理論と浅い理論に分類できる。本論文で採用した理論は深い場合であり、したがって本解析法が浅い球殻に対しても有効と確認されれば、その適用範囲が拡大するであろう。この点を確認する意味で、以下の表3-24と3-25を作成した。

表3-24は、端部固定、 $\phi_0 = 5^\circ$ 、 $h/a = 0.01$ の球殻の基本固有振動数を波数 $n = 0, 1, 2, 3$ について、本計算値 ($M=11$) と Holzer 法による解⁸⁾ を比較したものである。両計算手法による解の差は、最大で1.5%といままでの基本固有振動数の精度に比べると多少劣っている。しかし Holzer 法は頂点まわりに級数解を用いた近似解であり、両計算手法の良否を直接的に論じることはできないが、本解析法の浅い球殻に対する適用可能性がうかがわれる。

表3-25は、端部固定の二つの球殻 ($\phi_0 = 5^\circ 44.4'$ 、 $h/a = 0.01$ と $\phi_0 = 17^\circ 27.5'$ 、 $h/a = 0.03$) について、本計算値と浅い理論に基づく Kalnins の厳密解³⁾ の比較を行ったものである。これによると、半開角 ϕ_0 が小さい場合には、深い理論による本計算値 ($M=11$) と浅い理論による厳密解には差がほとんどなく (最大で0.4%)、本手法によっても浅い球殻の正確な固有振動数の算定が可能と考えられる。一方、半開角が大きい場合には、浅い理論の結果が深い理論のそれと幾分大きな差を示している (ほぼ3%)。本手法の解が、いままでの数値例より明らかなように、内部選点数 M に対しては少なくとも $[M/2]$ 次以下の解については十分な精度で得られていることを考えれば、表3-25は浅い理論の適用範囲を示唆している結果として興味深い。浅い球殻理論の適用限界として、例えば Kalnins³⁾ は、浅い理論による対称振動数の深い理論のそれに対する許容誤差を2.5%と仮定し、半開角 $\phi_0 \leq 30^\circ$ の結論を得ているが、波数、半開角、殻厚などの様々な因子の組み合わせに対する固有振動解析を実施しなければ、浅い球殻理論の適用限界については明言できないように思われる。

表 3-24 固定支持された浅い球殻 ($\phi_0 = 5^\circ$) の基本固有振動数 Ω ($M=11$)

n	0	1	2	3
This study	4.292	8.506	13.893	20.303
Holzer method	4.312	8.605	14.115	20.616
Relative error (%)	0.46	1.14	1.57	1.52

表 3-25 深い理論 (本解析法) と浅い理論 (厳密解) に基づく場合の端部固定された球殻 ($\phi_0 = 5^\circ 44.4'$, $17^\circ 27.5'$) の固有振動数 Ω の比較

n	m	$\phi_0=5^\circ 44.4'$ $h/a=0.01$		$\phi_0=17^\circ 27.5'$ $h/a=0.03$	
		This study (Deep theory)	Kalnins (Shallow theory)	This study (Deep theory)	Kalnins (Shallow theory)
0	1	3.383	3.386	1.708	1.735
	2	12.042	12.05	4.033	4.157
	3	26.885	26.98	8.747	9.037
	4	40.108	40.18	13.207	13.440
	5	47.714	47.89	15.486	15.987
1	1	6.492	6.520	2.307	2.380
	2	18.345	18.41	5.953	6.147
	3	20.516	20.54	6.831	6.957
	4	33.256	33.32	10.913	11.107
	5	36.224	36.37	11.768	12.160
2	1	10.566	10.60	3.552	3.663
	2	25.520	25.62	8.302	8.570
	3	31.912	31.96	10.545	10.693
	4	42.765	42.83	14.070	14.280
	5	46.399	46.57	15.068	15.547

c) 任意形状の回転殻

本手法の回転殻の固有振動問題への適用可能性と、その精度を確認するという点に関しては、いままでの円筒殻と球殻に対する数値計算でほぼ達成されたものと考えられる。ところで本手法の特徴の一つは、計算対象とする回転殻の微分方程式と境界条件の基に、首尾一貫した流れで定式化および計算が可能である。この特徴的な点を例証し、併せて任意形状の回転殻への本手法の適用性を再検討をする意味で、以下に円錐殻と双曲殻の数値結果を示す。

c-1) 円錐殻

図3-23(a)に示す一端固定、他端自由の円錐殻の固有振動数を図3-24に示す。図は内部選点数 $M=11$ による1, 2次固有振動数を、有限要素解¹¹⁾および実験値³⁸⁾との比較で示したが、本計算値は、1次($m=1$)は有限要素解、実験値にほぼ一致し、2次($m=2$)は実験値より高めの値を示すが有限要素解とは十分よく合致している。

c-2) 双曲殻

図3-23(b)に示す一端固定、他端自由の双曲殻の解析結果を表3-26と図3-25に示す。表3-26は、内部選点数 M を9, 10, 11, 12と変化した場合の本計算値(周波数、 $f(\text{Hz})$)をHolzer法⁵⁾、差分法¹⁵⁾および有限要素法¹¹⁾による近似解とともに示したものである。本計算値は、正負のガウス曲率をもつ双曲殻の曲面形状のため、内部選点数 M の変化に対する解の収束性はこれまでのものより劣るが、 $M=10, 11$ で一定値と判断される。なお、現時点では厳密解が得られていないので、直接的に精度を検討することはできないが、既往の解とは一部を除きほぼ1%以内の誤差で解が求まっている。図3-25は、波数 $n=1$ と最小固有振動数を与える $n=5$ なる場合の変形モードを、経線方向モード次数 $m=1, 2, 3$ について示したものである。結果は比較的少ない内部選点数($M=11$)にもかかわらず、 $n=1, m=3$ の変形モード W が固定端近傍でピーク値をとること、 $n=5, m=3$ の変形モード W が節点を持たないなど、主曲率の符号が異なる曲面形状の影響と思われる特徴的なモードをとらえている。

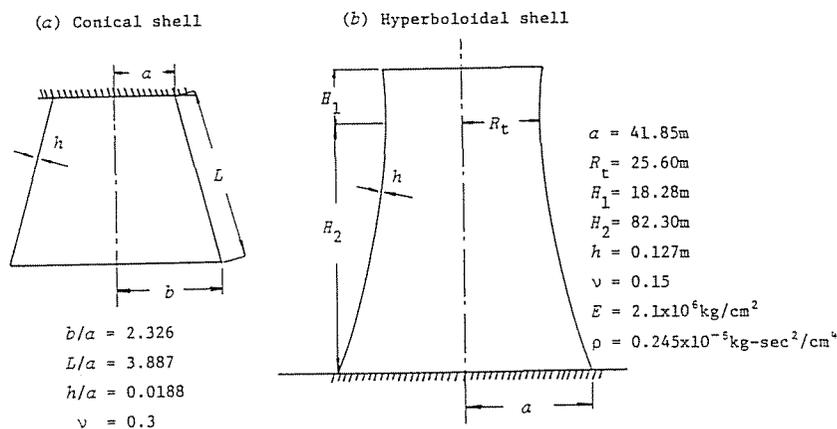


図3-23 任意形状の回転殻 (a)円錐殻, (b)双曲殻

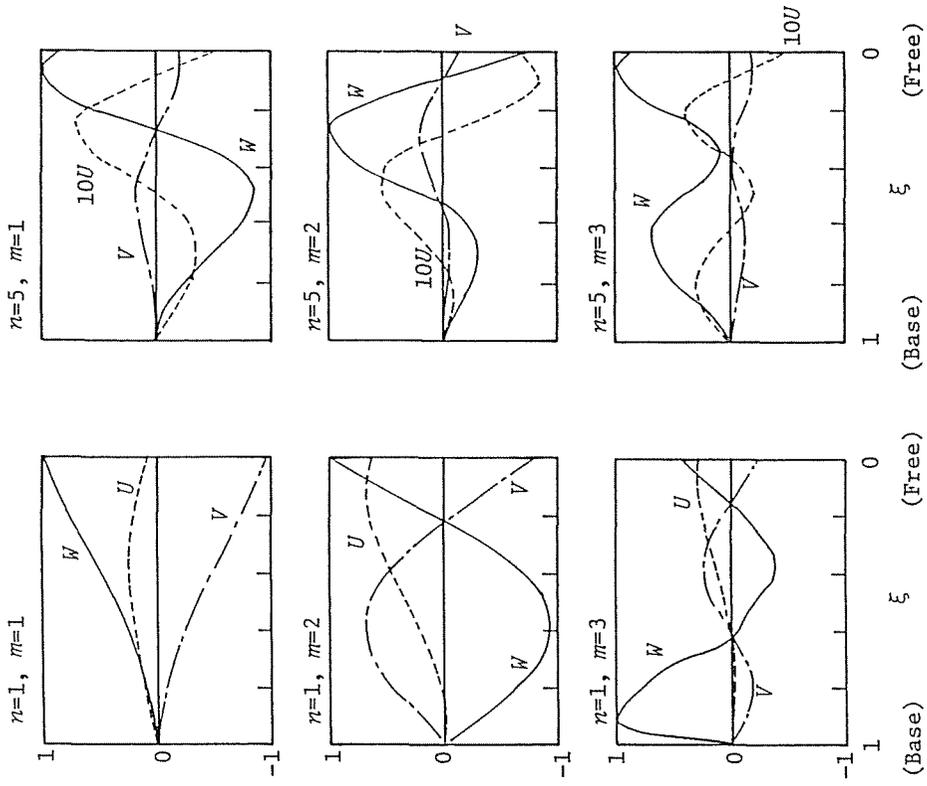


図 3-25 双曲殻の固有振動モード ($M=11$)

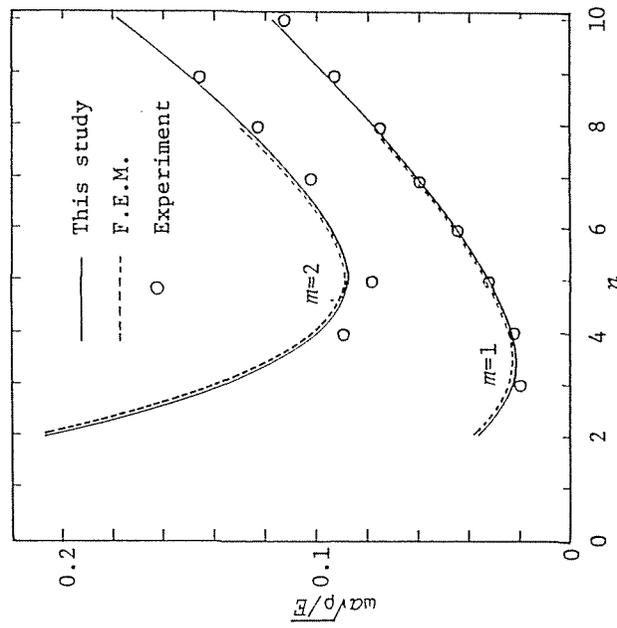


図 3-24 円錐殻の固有振動数 Ω ($M=11$)

表 3-26 双曲殻の振動数 f (Hz)

n	m	This study				Holzer method	F.D.M.	F.E.M.
		$M=9$	$M=10$	$M=11$	$M=12$			
0	1	7.7668	7.7653	7.7653	7.7653	7.7494	8.1500	7.7583
	2	11.3937	11.3031	11.2790	11.3242	11.4166	11.3799	11.4817
	3	12.4130	12.0995	11.8765	11.7333	11.9022	11.8257	12.0747
1	1	3.3089	3.3086	3.3085	3.3086	3.2884	3.3345	3.2910
	2	6.8006	6.8014	6.8013	6.8012	6.7405	6.8816	6.8176
	3	10.4975	10.4971	10.4986	10.5007	10.5207	10.5316	10.6666
2	1	1.7773	1.7771	1.7769	1.7770	1.7654	1.7848	1.7662
	2	3.6987	3.7012	3.7009	3.7006	3.6931	3.7234	3.6960
	3	6.9628	6.9598	6.9609	6.9607	6.9562	6.9553	7.0058
3	1	1.3833	1.3829	1.3825	1.3825	1.3749	1.3929	
	2	2.0013	2.0045	2.0040	2.0037	1.9904	2.0150	
	3	4.3459	4.3439	4.3464	4.3460	4.3254	4.3353	
4	1	1.1842	1.1862	1.1857	1.1855	1.1808	1.2003	1.1820
	2	1.4565	1.4572	1.4565	1.4563	1.4475	1.4579	1.4491
	3	2.7845	2.7846	2.7877	2.7871	2.7777	2.7762	2.7866
5	1	1.0346	1.0380	1.0370	1.0361	1.0348	1.0441	1.0354
	2	1.4361	1.4357	1.4357	1.4354	1.4293	1.4417	1.4345
	3	2.0628	2.0641	2.0665	2.0658	2.0559	2.0553	2.0640
6	1	1.1504	1.1520	1.1494	1.1484	1.1467	1.1544	
	2	1.3244	1.3279	1.3311	1.3302	1.3231	1.3335	
	3	2.0295	2.0243	2.0238	2.0227	2.0141	2.0152	
7	1	1.3004	1.3015	1.3024	1.3023	1.3014	1.3055	
	2	1.5170	1.5184	1.5188	1.5162	1.5133	1.5189	
	3	1.9516	1.9281	1.9272	1.9288	1.9217	1.9200	
8	1	1.4787	1.4734	1.4757	1.4751			
	2	1.8193	1.8106	1.8039	1.8048			
	3	1.9972	2.0075	2.0105	2.0118			

(2) 複数の殻からなる場合

数個の殻から構成される回転殻に対する適用結果を以下に示す。本手法のもつ融通性は、複数の殻からなる場合に対しても単一の殻に対する定式化手法を基本として拡張する形で展開が可能な点にある。

さて、ここでの問題の性質を明確にするため、具体的な構造形式として貯蔵用サイロなどに建設される図3-26に示す円筒殻-球殻の接続系を解析の対象に選んだ。解析にはL-選点を用い、円筒殻下端の条件は完全固定 ($U = V = W = \phi_x (=W') = 0$) とした。

各殻要素にM個の選点を配置すれば、ここでの問題は次元数 $6M$ の固有値問題となる。参考のために、 $M = 9$ と $M = 11$ なる場合の選点の配置状況を、後に解析する円筒殻-半球殻の接続系について示せば図3-27となる。図に示すように、選点は円筒殻の固定端、接続部および球殻の頂点近傍に密に配着された、固有値問題を含めた境界値問題を解く際に有効な分布状態を示している。

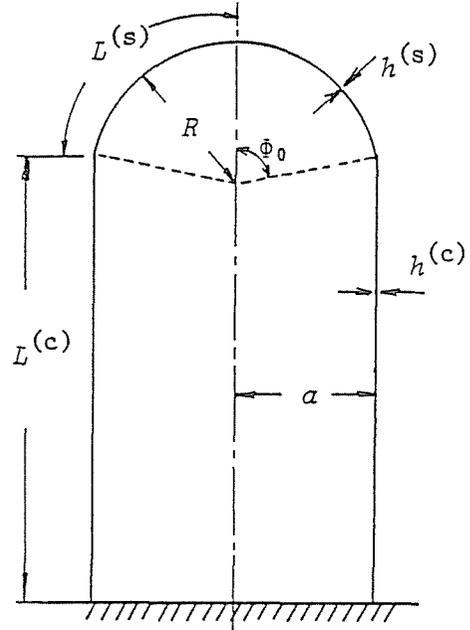


図3-26 複数の殻からなる回転殻
(円筒殻-球殻系)

解析に用いた諸元は、一定な殻厚 $h = h^{(c)}$
 $= h^{(s)}$ 、半開角 $\phi_0 = 90^\circ$ 、殻厚と円筒殻の半径との比 $h^{(c)}/a = 0.01$ 、円筒殻の高さと半径との比 $L^{(c)}/a = 1$ 、ポアソン比 ν が 0.3 である。

さて、内部選点数Mの解の精度および収束状況に及ぼす影響をみたのが表3-27である。表3-27(a)には、波数 $n = 0 \sim 4$ に対する基本固有振動数 ($m = 1$) を直線要素を用いた有限要素解および差分解の結果³⁹⁾ とともに示し、表3-27(b)には経線方向モード次数 $m = 2 \sim 5$ の固有振動数を示した。本解析法は、一定値への収束もきわめて速く、また収束値は既往の解とよく一致している。有限要素解は124要素によるもので、その未知数の数は本解析法の7倍である。また、殻中央面の形状の近似度を向上させた曲線要素も同一の問題に適用されているが⁴⁰⁾、その未知数の数は本解析法の2倍である。このように、本解析法は有限要素法などによる近似解法と比較して、未知数を著しく減じることができ、高精度な解を決定することができる。

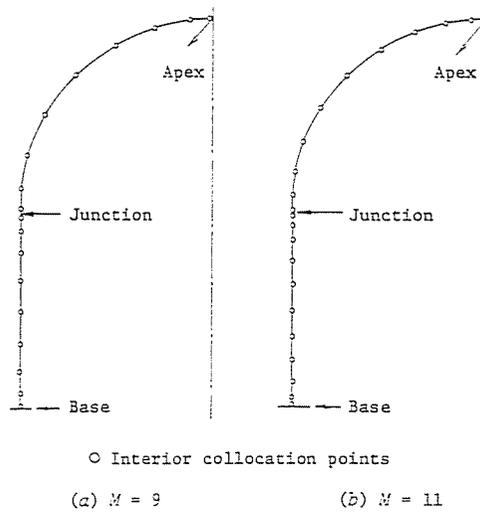


図3-27 円筒殻-半球殻の接続系に対する
選点の配置状況($M=9, 11$)

表3-27 円筒殻-半球殻の接続系に対する固有振動数 Ω の収束性
(a) 経線方向モード次数 $m = 1$, (b) $m = 2 \sim 5$

(a) $m = 1$

n	F.D.M.	F.E.M.	This study			
			$M=9$	$M=10$	$M=11$	$M=12$
0	0.64682	0.64682	0.64664	0.64664	0.64664	0.64664
1	0.29641	0.29650	0.29629	0.29629	0.29629	0.29629
2	0.50963	0.50910	0.50910	0.50910	0.50910	0.50910
3	0.41061	0.41061	0.41062	0.41062	0.41062	0.41062
4	0.34369	0.34369	0.34374	0.34374	0.34374	0.34374

(b) $m = 2 \sim 5$

n	m	This study			
		$M=9$	$M=10$	$M=11$	$M=12$
0	2	0.92289	0.92289	0.92289	0.92289
	3	0.98076	0.98077	0.98077	0.98077
	4	1.00581	1.00591	1.00590	1.00591
	5	1.02976	1.02997	1.02996	1.02996
1	2	0.78722	0.78722	0.78722	0.78721
	3	0.86635	0.86636	0.86635	0.86636
	4	0.96626	0.96626	0.96626	0.96625
2	2	0.84153	0.84153	0.84153	0.84152
	3	0.91468	0.91467	0.91468	0.91462
	4	0.97238	0.97238	0.97238	0.97240
	5	1.00953	1.00966	1.00966	1.00968
3	2	0.77107	0.77107	0.77107	0.77107
	3	0.94299	0.94299	0.94299	0.94299
	4	0.97666	0.97666	0.97666	0.97666
4	2	1.01899	1.01890	1.01891	1.01891
	3	0.69415	0.69416	0.69416	0.69416
	4	0.93768	0.93768	0.93768	0.93768
5	2	0.98503	0.98503	0.98504	0.98504
	3	1.04363	1.04354	1.04354	1.04354
	4	0.98504	0.98504	0.98504	0.98504

(3) 回転殻の数値例より得られた本解析法の特徴

(1), (2)では、回転殻の固有振動問題を内部選点法に基づき解析した。回転殻の数値例より得られた本手法の特徴は、次のようなものである。

- 1) Timoshenko梁に対する数値結果と同様に、回転殻においてもL-選点に基づく結果が、C-選点に基づく結果に比べ一般に好結果を生んでいる。
- 2) 解の全領域に選点法を適用する場合、数値解との比較においてほぼ1%以内の誤差で、固有振動数が求まる経線方向モード次数 m は、 $m = \lfloor M/2 \rfloor$ 個である (M :内部選点数、 $\lfloor \cdot \rfloor$: Gaussの記号)。なお、 $m = \lfloor M/2 \rfloor$ の関係式は、Timoshenko梁においても成立している。
- 3) 固有振動モード間の直交性は、十分な精度で成立している。
- 4) 本手法は、不伸長振動、既往研究において解の欠落がみられる球殻、および異なる形状の殻が組合さった問題に対する数値例より明らかなように、極めて直接的な解析手法である。
- 5) 本手法は、解析に必要な全自由度数は比較的少ない(ここでの例では、最大で約70である)。したがって、計算機の記憶容量や演算時間などが従来手法に比較して大幅に削減できる。

III 矩形Mindlin板

Kirchhoff-Love の仮定に基づく古典平板理論は、板厚とスパンとの比が大きくなると、解析結果の精度が低下してくる。この弱点を改善するための平板理論の修正の試みは、多くの研究者によってなされ現在に至っており、動的な問題にあっては、古典平板理論にせん断変形と回転慣性の効果を導入したMindlin理論⁴¹⁾もその一つである。この理論は、かなり高次の振動数範囲に対しても適用できるものであり、この理論を基調とした研究報告は多数行なわれている。

さて、Mindlin理論に基づく矩形板の固有振動問題は、一般に解析解を得ることが困難であり、幾つかの近似解法による解析が試みられている。例えば、Greimannら⁴²⁾ およびHinton^{43, 44)}の有限要素法、Daweら^{45, 46)} およびBensonら⁴⁷⁾の有限帯板法、Daweら⁴⁸⁾のRayleigh-Ritz法 および著者ら²³⁾の選点法がある。以上の多くの研究は、等厚の矩形板に関するものであり、変厚板に関する研究は著者らを除き見当たらないようである。変厚矩形板の動的基礎方程式は、任意関数として与えられる板剛度および板厚を係数とする変数係数の微立微分方程式となるため、その解析解を求めることは等厚な場合に対するとき以上に困難であり、変厚矩形板の解法に関しては、まだ検討の余地が残されているものと考えられる。

以上の観点から、ここでは、一方向に厚さが線形に変化する矩形板を選点法に基づいて直接的に解析できる解法を提示し、併せてこの種の矩形板の振動特性に関する基礎的データを示す。なおここで提示する手法は、相対する2辺が単純支持という制約を受けるが、厚さが変化する方向

の2辺の支持条件は、固定、単純支持、自由のいずれかを問わないものであり、また板厚の変化が緩やかである限り、その変化は特定の関数に限定されることなく拡張適用が可能である。

以下、3-9では板厚が一方向に直線変化するMindlin 矩形板の基礎方程式を示し、3-10ではMindlin 矩形板の固有振動問題を内部選点固有方程式の立場から記述し、3-11では本解析法を等厚板および変厚板に適用した数値結果を示し、最後にここでの数値例より得られた結果をまとめて示した。

3-9 板厚が一方向に直線変化する矩形板の基礎方程式

図3-28に示すように、板の中央面内に座標系 (x, y, z) を設定し、板厚が y 方向に直線変化し、大きさ $a \times b$ の矩形板を解析対象にする。

Mindlin理論⁴⁾に従えば、中央面からの距離 z における x, y, z 軸方向の変位 U, V, W は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} U &= -z \Phi_x(x, y, t) \\ V &= -z \Phi_y(x, y, t) \\ W &= W(x, y, t) \end{aligned} \right\}$$

(3-142)

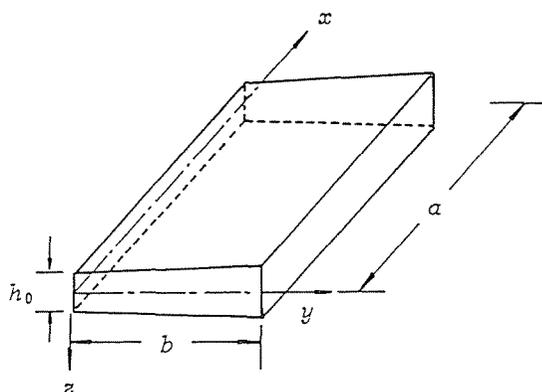


図3-28 矩形 Mindlin 板

ここに、 t は時間を表わし、 Φ_x と Φ_y はそれぞれ、 xz と yz 平面における曲げのみによる回転角を表わす。

せん断力を Q_x, Q_y 、曲げねじりモーメントを M_{xy} 、曲げモーメントを M_x, M_y と記せば、矩形板の固有振動問題に対する運動方程式は、次の連立偏微分方程式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + \frac{1}{12} \rho h^3(y) \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y + \frac{1}{12} \rho h^3(y) \frac{\partial^2 \Phi_y}{\partial t^2} &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \rho h(y) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-143)$$

ここに、 ρ は密度であり、 $h(y)$ は次式で表わされる板厚である。

$$\left. \begin{aligned} h(y) &= h_0 \left(1 + \alpha \frac{y}{b} \right) \\ \alpha &= \frac{h_1 - h_0}{h_0} \end{aligned} \right\} \quad (3-144)$$

ただし、 α はテーパ比を表わし、 h_0 と h_1 はそれぞれ $y=0$ と $y=b$ における板厚である。曲げモーメント、曲げねじりモーメントおよびせん断力と変位関数 W, ϕ_x, ϕ_y の関係は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D(y) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right), \quad M_y = -D(y) \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \\ M_{xy} &= -\frac{1-\nu}{2} D(y) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ Q_x &= \kappa G h(y) \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \phi_x \right), \quad Q_y = \kappa G h(y) \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \phi_y \right) \end{aligned} \right\} \quad (3-145)$$

ここに、 ν, G および κ は、それぞれポアソン比、せん断弾性係数およびせん断補正係数であり、 $D(y)$ は次式で表わされる板剛度である。

$$D(y) = \frac{E h^3(y)}{12(1-\nu^2)} \quad (3-146)$$

ただし、 E は弾性係数である。

さて、 $x=0$ と $x=a$ の辺で単純支持され、他の辺が任意の支持条件とするときの変位関数は、調和振動の前提のもとで、次のようなLévy型で仮定できる。

$$\left\{ \begin{array}{l} W \\ \phi_x \\ \phi_y \end{array} \right\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{ll} h_0 w(\xi) & \sin m\pi x/a \\ \phi_x(\xi) & \cos m\pi x/a \\ \phi_y(\xi) & \sin m\pi x/a \end{array} \right\} e^{i\omega t} \quad (3-147)$$

ここに、 m ： x 方向の半波数、 ω ：固有円振動数、 ξ は y 方向の無次元化座標である。

$$\xi = y/b, \quad \xi = [0, 1] \quad (3-148)$$

式(3-145)、(3-147)を用いれば、運動方程式(3-143)は変位関数 w, ϕ_x, ϕ_y に関する次の連立常微分方程式へと変換される。

$$\left. \begin{aligned} C_1 \phi_x'' + C_2 \phi_x' + C_3 \phi_x + C_4 \phi_y' + C_5 \phi_y + C_6 w - \Omega^2 \phi_x &= 0 \\ C_7 \phi_x' + C_8 \phi_x + C_9 \phi_y'' + C_{10} \phi_y' + C_{11} \phi_y + C_{12} w' - \Omega^2 \phi_y &= 0 \\ C_{13} \phi_x + C_{14} \phi_y' + C_{15} \phi_y + C_{16} w'' + C_{17} w' + C_{18} w - \Omega^2 w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-149)$$

ここに、 $()' = d()/d\xi$ であり、 Ω^2 は次に示す固有振動数パラメータ

$$\Omega^2 = 2(1+\nu) \rho a^2 \omega^2 / E \quad (3-150)$$

であり、係数 $C_1 \sim C_{18}$ は次のようなものである。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\beta^2, \quad C_2 = -3\alpha\beta^2/f(\xi), \quad C_3 = 12\kappa\gamma^2/f^2(\xi) + 2m^2\pi^2(1-\nu) \\ C_4 &= -m\pi\beta(1+\nu)/(1-\nu), \quad C_5 = -3\alpha\beta m\pi/f(\xi) \\ C_6 &= -12\kappa\gamma m\pi/f^2(\xi), \quad C_7 = -C_4 \\ C_8 &= 6\nu\alpha\beta m\pi/\{f(\xi)(1-\nu)\}, \quad C_9 = -2\beta^2/(1-\nu) \\ C_{10} &= -6\alpha\beta^2/\{f(\xi)(1-\nu)\}, \quad C_{11} = m^2\pi^2 + 12\kappa\gamma^2/f^2(\xi) \\ C_{12} &= -12\kappa\alpha\beta/f^2(\xi), \quad C_{13} = -\kappa\gamma m\pi, \quad C_{14} = \kappa\beta\gamma \\ C_{15} &= \kappa\alpha\beta\gamma/f(\xi), \quad C_{16} = -\kappa\beta^2 \\ C_{17} &= -\kappa\alpha\beta^2/f(\xi), \quad C_{18} = \kappa m^2\pi^2 \end{aligned} \right\} \quad (3-151 a)$$

ただし、

$$\beta = a/b, \quad \gamma = a/h_0, \quad f(\xi) = 1 + \alpha\xi \quad (3-151 b)$$

である。

$y = 0$ ($\xi = 0$) および $y = b$ ($\xi = 1$) の辺で指定される同次境界条件は、次式によって与えられる。固定、自由、単純支持をそれぞれ、C、F、S と略記すると、

$$\left. \begin{aligned} C : W = \phi_x = \phi_y = 0 \\ F : M_y = Q_y = M_{xy} = 0 \\ S : W = \phi_x = M_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-152)$$

となる。後の展開上、 M_x 、 M_{xy} および Q_y を変位関数 w 、 ϕ_x 、 ϕ_y で表わしておく。式(3-145)、(3-147)より、

$$\left. \begin{aligned} M_y = 0 : \beta\phi_y' - \nu m\pi\phi_x = 0 \\ M_{xy} = 0 : \beta\phi_x' + m\pi\phi_y = 0 \\ Q_y = 0 : \beta w' - \gamma\phi_y = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-153)$$

3-10 内部選点固有方程式

解の全領域に対して選点法を適用するものとすれば、変位関数 w 、 ϕ_x および ϕ_y は、それぞれ領域 $[0, 1]$ 内部に M 個の自由度を持たせ、満足すべき境界の条件の個数を考慮に入れて、次のように仮定する。

$$(w, \phi_x, \phi_y) = \sum_{i=1}^{M+2} (d_{i-1}, f_{i-1}, e_{i-1}) \xi^{i-1} \quad (3-154)$$

ここで、 d_{i-1} 、 f_{i-1} 、 e_{i-1} : 未知定数。

さて、基礎方程式 (3-149)、(3-153) 中の ξ に関する導関数は、いずれの変位関数に対して 1 階、2 階である。したがって、端点 ($\xi_0 = 0$ 、 $\xi_{M+1} = 1$) と内部選点 ξ_j ($j = 1 \sim M$) における関数値を結びつける関係式は、これまでと同様に次のように与えられる。変位関数 w 、 ϕ_x および ϕ_y を代表して Z と記せば、

$$\{Z^{(n)}\} = [A^{(n)}] \{Z\}, \quad (n = 1, 2) \quad (3-155a)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \{Z\}^T &= (Z(\xi_0), Z(\xi_1), \dots, Z(\xi_{M+1})) \\ \{Z^{(n)}\}^T &= \left(\frac{d^n Z}{d\xi^n}(\xi_0), \frac{d^n Z}{d\xi^n}(\xi_1), \dots, \frac{d^n Z}{d\xi^n}(\xi_{M+1}) \right) \end{aligned} \right\} \quad (3-155b)$$

Mindlin 板の固有振動問題を記述するのに必要な条件式は、式 (3-154) より明らかなように、 $3M + 6$ 個である。その内 $3M$ 個の条件式は、運動方程式 (3-149) の内部選点における残差条件より、残り 6 個の条件式は、 $\xi = 0$ と $\xi = 1$ で指定される境界条件より得られる。

$3M$ 個の条件式は、既に述べた Timoshenko 梁および回転殻に対する場合と同様な手順によって得られ、それらをこれまでと同様に内部選点と端点における未知量に分離し、マトリックス表示すれば次のようになる。

$$[K_I] \{\delta_I\} + [K_B] \{\delta_B\} - \Omega^2 \{\delta_I\} = \{0\} \quad (3-156)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \{\delta_I\}^T &= (\phi_x(\xi_1), \dots, \phi_x(\xi_M), \phi_y(\xi_1), \dots, \phi_y(\xi_M), \\ &\quad w(\xi_1), \dots, w(\xi_M))_{1 \times 3M} \\ \{\delta_B\}^T &= (\phi_x(\xi_0), \phi_x(\xi_{M+1}), \phi_y(\xi_0), \phi_y(\xi_{M+1}), w(\xi_0), w(\xi_{M+1}))_{1 \times 6} \end{aligned} \right\} \quad (3-157)$$

であり、 $(3M \times 3M)$ 次のマトリックス $[K_I]$ と $(3M \times 6)$ 次のマトリックス $[K_B]$ は次のようなものである。

$$[K_I] = \begin{bmatrix} [K_{xx}] & [K_{xy}] & [K_{xw}] \\ [K_{yx}] & [K_{yy}] & [K_{yw}] \\ [K_{wx}] & [K_{wy}] & [K_{ww}] \end{bmatrix}, \quad [K_B] = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{xx}] & [\bar{K}_{xy}] & [\bar{K}_{xw}] \\ [\bar{K}_{yx}] & [\bar{K}_{yy}] & [\bar{K}_{yw}] \\ [\bar{K}_{wx}] & [\bar{K}_{wy}] & [\bar{K}_{ww}] \end{bmatrix} \quad (3-158)$$

ただし、部分マトリックスの成分は次のようである。

$[K_I]$ について：

$$\left. \begin{aligned} K_{xx}(i, j) &= C_1(\xi_i)A^{(2)}(i+1, j+1) + C_2(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + C_3(\xi_i)\delta_{ij} \\ K_{xy}(i, j) &= C_4(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + C_5(\xi_i)\delta_{ij} \\ K_{xw}(i, j) &= C_6(\xi_i)\delta_{ij} \\ K_{yx}(i, j) &= C_7(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + C_8(\xi_i)\delta_{ij} \\ K_{yy}(i, j) &= C_9(\xi_i)A^{(2)}(i+1, j+1) + C_{10}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + C_{11}(\xi_i)\delta_{ij} \\ K_{yw}(i, j) &= C_{12}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) \\ K_{wx}(i, j) &= C_{13}(\xi_i)\delta_{ij} \\ K_{wy}(i, j) &= C_{14}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + C_{15}(\xi_i)\delta_{ij} \\ K_{ww}(i, j) &= C_{16}(\xi_i)A^{(2)}(i+1, j+1) + C_{17}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + C_{18}(\xi_i)\delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (3-159a)$$

ここで、 $i, j = 1 \sim M$ 、 δ_{ij} ：Kronecker のデルタ。

$[K_B]$ について：

部分マトリックスは、式(3-159a)で $j+1$ を ℓ に置き換え、さらに δ_{ij} を含む項を削除することにより得られる。例えば、

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{xx}(j, j) &= C_1(\xi_i)A^{(2)}(i+1, \ell) + C_2(\xi_i)A^{(1)}(i+1, \ell) \\ \bar{K}_{xy}(i, j) &= C_4(\xi_i)A^{(1)}(i+1, \ell) \\ \bar{K}_{xw}(i, j) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-159b)$$

ここで、 $i = 1 \sim M$ 、 $i = 1, 2$ であり、 ℓ は次の約束に従うものとする。

$$\ell \begin{cases} = 1 & ; j = 1 \\ = M+2 & ; j = 2 \end{cases}$$

さて、境界条件を定義するのに必要な諸量を変形量と力学量に分けて以下に整理しておく。

変形量 (w, ϕ_x, ϕ_y) :

$$\left. \begin{aligned} w &= 0 ; w(\xi_k) = 0 \\ \phi_x &= 0 ; \phi_x(\xi_k) = 0 \\ \phi_y &= 0 ; \phi_y(\xi_k) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-160 a)$$

力学量 (M_y, M_{xy}, Q_y) : 式 (3-153) と式 (3-155 a) より

$$\left. \begin{aligned} M_y &= 0 ; \beta \sum_{j=1}^{M+2} A^{(1)}(k+1, j) \phi_y(\xi_{j-1}) - \nu m \pi \phi_x(\xi_k) = 0 \\ M_{xy} &= 0 ; \beta \sum_{j=1}^{M+2} A^{(1)}(k+1, j) \phi_x(\xi_{j-1}) + m \pi \phi_y(\xi_k) = 0 \\ Q_y &= 0 ; \beta \sum_{j=1}^{M+2} A^{(1)}(k+1, j) w(\xi_{j-1}) - r \phi_y(\xi_k) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-160 b)$$

ただし、式 (3-160) 中の k は、境界条件が $\xi = 0$ で規定されるときには $k = 0$ 、 $\xi = 1$ で規定されるときには $k = M + 1$ をとるものとする。

境界条件より定まる 6 個の条件式を、式 (3-156) と同様に、内部選点と端点に関する未知量に分離し、以下のように表示する。

$$[S_I] \{\delta_I\} + [S_B] \{\delta_B\} = \{0\} \quad (3-161)$$

ここで、 $[S_I]$ と $[S_B]$ は規定される境界条件に応じて式 (3-160) を用いて作成される、それぞれ $(6 \times 3M)$ および (6×6) 次のマトリックスである。

式 (3-156)、(3-161) より $\{\delta_B\}$ を消去すれば、Mindlin 板の固有振動問題は次の形に定式化できる。

$$[K] \{\delta_I\} - \mathcal{Q}^2 \{\delta_I\} = \{0\} \quad (3-162)$$

ここで、 $(3M \times 3M)$ 次のマトリックス $[K]$ は次式で与えられる。

$$[K] = [K_I] - [K_B] [S_B]^{-1} [S_I] \quad (3-163)$$

3-11 数値計算例

数値例は、ポアソン比 ν が0.3、せん断補正係数 k が $\pi^2/12$ の場合を取り扱った。以下に示す図表においては、境界条件は例えばSCSFと表示し、 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $x=a$ および $y=b$ の辺の順序でそれぞれ単純支持、固定、単純支持および自由を表わす。また、 m と n はそれぞれ x および y の半波数を表わし、固有振動数は等厚板および変厚板に対して、それぞれ次の固有振動数パラメータを用いて整理している。

$$\text{等厚板： } \Omega = \omega \sqrt{2(1+\nu) \rho a^2 / E}$$

$$\text{変厚板： } \lambda = \omega a^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$$

(1) 等厚板

本解析法による数値解の収束性および精度の検討を行うため、まず等厚板を解析し、既往の研究結果との比較を行う。

表3-28には条件SSSSとSF SFの場合について、内部選点数 M を8から13まで変化させ、板厚比 a/h_0 が10の正方形板の低次5つの固有振動数の収束状況を示した。参考のため、条件SSSSには厳密解も併記した。いずれの条件においても、本解析法に基づく数値解は、内部選点数 M の増加と共に、一様に収束することが示されている。さらに、条件SSSSの結果から判断できるように、 $[M/2]$ 次($[]$: Gaussの記号)までの解は、正確(相対誤差で1%以内)に求まっている。この精度と内部選点数の関係は、既にTimoshenko梁および回転殻に対する数値例においても見出されたものであり、要素分割を施さないで解の全領域に選点法を適用し解析する際の本手法の基本的特性の一つである。なお条件SF SFの結果は、現時点で比較しうる解が存在しないので正確な評価はできないが、内部選点数 $M=13$ に基づく結果を収束値とみなせば、解の精度は前述の条件SSSSの場合と同様である。

表3-29は、板厚が厚い場合($a/h_0=10$)および薄い場合($a/h_0=100$)について、種々の境界条件における低次5つの固有振動数($M=11$ による)を既往の近似解法(有限帯板法⁴⁵⁾、Rayleigh-Ritz法⁴⁸⁾)の結果と比較したものである。これによると、本計算値は有限帯板法の結果によい一致を示すこと、厳密解に対して上限値を与えるRayleigh-Ritz法の結果より低目の値であることがわかる。なお、本解析法とRayleigh-Ritz法との解の相違は、条件SCSFの場合に大きいのが、これはRayleigh-Ritz法による場合、仮定した振動モードが自由の条件を近似的にしか満たしていないためと考えられる。

(2) 変厚板

厚さが変化するMindlin板の解析は見当たらないようである。それゆえ、まず本解析値の内部選点数への依存性を明らかにすると共に、古典理論による解との比較を通して本解析法の精度を

検討し、次に厚さが直線変化するMindlin板の振動特性を条件SSSSとSCSCの二つの場合について示す。

本解析法から求められる固有振動数の収束の様子を示すために、板厚比 a/h_0 が10でテーパ比 α が0.6、1.0の条件SSSSの正方形板の振動数を、内部選点数 M を8から13まで変化させ求めた。表3-30に低次5つの固有振動数 λ を示した。これによると、本計算値は内部選点数の増加と共に、一様に収束すること、さらに収束特性は等厚板の結果(表3-28)にはほぼ同等であり、運動方程式が定数あるいは変数係数かの影響がほとんど無いことがわかる。このことから、本例で示された程度の板厚変化を有する変厚板は、同一の内部選点数で、等厚板と同程度の精度で解析できるものと判断される。

Mindlin理論に基づく変厚板の解析が見当たらないが、古典理論(薄板理論)による場合には、例えばPulmanoら⁴⁹⁾による有限帯板法による解析があり、Appelら⁵⁰⁾による基本固有振動数に対する上、下界値の研究がある。以下に、これらの古典理論による結果を用いて、解析値の精度を検討する。

図3-29は板厚比 a/h_0 に対する基本固有振動数の値の傾向を知るために、条件SSSS、テーパ比 $\alpha=0.6$ 、アスペクト比 $b/a=1.0, 0.5$ の場合について、本解析値($M=11$ による)とAppelらの上、下界値を図示したものである。図より明らかなように、本解析値は a/h_0 を増すにつれて、Appelらの上、下界値に漸近し、ほぼ $a/h_0 \geq 100$ においては、上、下界値の間に位置している。なお $a/h_0=100$ という値は、古典理論の適用限界として一般によく知られている値である。

表3-31は、本解析法による高次の振動数の精度をみるため、テーパ比 $\alpha=1.0, 0.6$ で条件SSSSの正方形板を解析し、Pulmanoらの有限帯板法による解と比較したものである。本解析法による場合には、 $M=11$ を用い、せん断変形と回転慣性の影響を十分に無視できる薄板を取り扱うことにし、板厚比 $a/h_0=100$ とした。表は低次4つの固有振動数を比較したが、本解析法と有限帯板法による解には大きな差は生じていない。なお表中()内の値は、本解析値と有限帯板法による解との比であり、ほぼ1である。

以上(1)の等厚板およびここでの変厚板に関する数値結果からわかるように、低次5つの固有振動数は、内部選点数 M は10ないし11で十分正確に求められる。以下の正方Mindlin板の振動特性の把握には $M=11$ を用いた。

図3-30(a)および(b)は、それぞれ条件SSSSおよびSCSCの正方形板の低次5つの固有振動数 λ ($\omega a^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$)に与えるテーパ比 α の影響を図示したものである。各図で $a/h_0=100$ (薄い場合)の結果は実線、 $a/h_0=10$ のそれは点線で示した。これらの図から、 $\lambda-\alpha$ 関係はほぼ直線近似で表わされること、 α を変化させた場合の固有振動数 λ の変化率は、高次振動数および a/h_0 の値が大きいく程、大きいことが観察される。

図3-31(a)および(b)は、それぞれ条件SSSSおよびSCSCの正方形板の低次5つの固有振動数 λ に与える板厚比 a/h_0 の影響をみたものである。各図でテーパ比 $\alpha = 0.6$ の結果は実線、 $\alpha = 1.0$ の結果は点線で示した。これによると、 a/h_0 の値の小さな領域では、 λ は a/h_0 の増加と共に大きくなり、 a/h_0 が50を越える程度を境にして一定値へと近づくことがわかる。なおこの結果と図3-29の結果より判断すれば、古典板理論は、100以上の板厚比 a/h_0 をもつ変厚板に比較的正確に適用されうるものと考えられる。

図3-32は、テーパ比 $\alpha = 1$ の正方形板について、Mindlin理論による固有振動数 λ と古典理論によるそれ λ_0 の比 λ/λ_0 の h_0/a に対する変化の様子を、 h_0/a の範囲 $0 < h_0/a \leq 0.2$ ($a/h_0 \geq 5$ に相当)について示したものである。これによると、せん断変形と回転慣性の固有振動数に与える影響は、 h_0/a が小さい領域では高次の振動数に、 h_0/a が大きい領域ではすべての次数の振動数に現われている。さらに、せん断変形と回転慣性の影響は、予想されるように固定支持の辺を含む条件SCSCのときに著しい。

(3) Mindlin板に対する本解析法の特長および変厚Mindlin板の振動特性

(1)と(2)では、対向2辺が単純支持され、それに直角方向に厚さが線形に変化するMindlin板の固有振動問題を、内部選点固有方程式に基づき解析し、本計算値の収束性および精度を検討すると共に、テーパ比 α と板厚比 a/h_0 をパラメータとして数値計算を行った。その結果、次のことが明らかになった。

- 1) 本解析法による数値解は一律な収束性をもつこと、また比較的少ない内部選点数による解析でも実用上十分な精度の解が得られることが確認できた。与えられた単純支持方向の波数に対しては、低次5つの固有振動数は等厚板、変厚板によらず、内部選点数11程度で正確に求められる。
- 2) 固有振動数 λ ($= \omega a^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0}$) とテーパ比 α の間には、振動次数によらずほぼ線形関係が成立する。
- 3) ここで例示した数値例から判断すれば、古典板理論は、100以上の板厚比 a/h_0 をもつ変厚板に比較的正確に適用されうる。

表 3-28 条件 SSSS と SFSF の正方等厚板
($a/h_0=10$) の固有振動数 Ω の収束性

Mode m n		Interior collocation points, M					Exact
		8	9	10	11	12	
Boundary condition, SSSS							
1	1	0.930	0.930	0.930	0.930	0.930	0.930
	2	2.218	2.218	2.218	2.218	2.218	2.218
	3	4.144	4.144	4.144	4.144	4.144	4.144
	4	6.515	6.527	6.508	6.508	6.508	6.508
	5	10.206	9.180	9.221	9.152	9.152	9.152
2	1	2.218	2.218	2.218	2.218	2.218	2.218
	2	3.402	3.402	3.402	3.402	3.402	3.402
	3	5.200	5.197	5.197	5.197	5.197	5.197
	4	7.429	7.449	7.431	7.431	7.431	7.431
	5	10.948	9.965	10.023	9.958	9.961	9.959
3	1	4.144	4.144	4.144	4.144	4.144	4.144
	2	5.197	5.197	5.197	5.197	5.197	5.197
	3	6.823	6.821	6.821	6.821	6.821	6.821
	4	8.864	8.890	8.875	8.875	8.875	8.875
	5	12.136	11.218	11.295	11.236	11.239	11.237
Boundary condition, SFSF							
1	1	0.4605	0.4605	0.4606	0.4606	0.4606	0.4606
	2	0.7502	0.7505	0.7506	0.7506	0.7506	0.7506
	3	1.650	1.656	1.651	1.651	1.651	1.651
	4	3.226	3.227	3.227	3.227	3.227	3.227
	5	5.388	5.361	5.361	5.361	5.361	5.361
2	1	1.772	1.773	1.773	1.773	1.773	1.773
	2	2.086	2.086	2.086	2.086	2.086	2.086
	3	3.027	3.029	3.029	3.029	3.029	3.029
	4	4.508	4.512	4.513	4.513	4.513	4.513
	5	6.511	6.480	6.482	6.483	6.483	6.483
3	1	3.734	3.735	3.735	3.735	3.735	3.735
	2	4.014	4.015	4.016	4.016	4.016	4.016
	3	4.918	4.921	4.922	4.922	4.922	4.922
	4	6.309	6.314	6.316	6.316	6.316	6.316
	5	8.159	8.124	8.129	8.130	8.130	8.130

表 3-29 種々の境界条件の正方等厚板 ($a/h_0=10, 100$) の固有振動数 Ω (既近似解法との比較, $M=11$)

Boundary condition	Mode number	Solution procedure		
		This study	Finite strip	Rayleigh-Ritz
Thick plate, $a/r_0=10$				
SCSC	1	1.300	1.300	1.302
	2	2.394	2.394	2.398
	3	2.884	2.885	2.888
	4	3.839	3.839	3.852
	5	4.231	4.232	4.237
SCSS	1	1.092	1.092	1.092
	2	2.296	2.296	2.298
	3	2.542	2.542	2.543
	4	3.611	3.611	3.616
	5	4.184	4.184	4.187
SCSF	1	0.598	0.598	0.603
	2	1.483	1.483	1.495
	3	1.884	1.884	1.900
	4	2.720	2.720	2.744
	5	3.057	3.057	3.073
Thin plate, $a/r_0=100$				
SCSC	1	0.1411	0.1411	0.1411
	2	0.2668	0.2668	0.2668
	3	0.3376	0.3376	0.3377
	4	0.4604	0.4604	0.4608
	5	0.4977	0.4977	0.4979
SCSS	1	0.1153	0.1153	0.1153
	2	0.2519	0.2519	0.2521
	3	0.2858	0.2858	0.2858
	4	0.4195	0.4195	0.4199
	5	0.4883	0.4883	0.4889
SCSF	1	0.0616	0.0617	0.0622
	2	0.1606	0.1611	0.1612
	3	0.2030	0.2033	0.2045
	4	0.3061	0.3070	0.3075
	5	0.3518	0.3526	0.3526

表 3-30 条件 SSSS の正方変厚板 ($a/h_0=10, \alpha=0.6, 1.0$) の固有振動数 λ の収束性

Mode $m \ n$		Interior collocation points, M					
		8	9	10	11	12	13
Taper ratio, $\alpha=0.6$							
1	1	24.077	24.077	24.077	24.077	24.077	24.077
	2	55.869	55.869	55.869	55.869	55.869	55.869
	3	101.322	101.301	101.301	101.301	101.301	101.301
	4	155.016	154.975	154.770	154.749	154.749	154.749
	5	230.782	213.055	213.526	212.645	212.620	212.620
2	1	55.695	55.695	55.695	55.695	55.695	55.695
	2	84.181	84.181	84.181	84.181	84.181	84.181
	3	125.443	125.443	125.443	125.443	125.443	125.443
	4	175.366	175.346	175.202	175.182	175.182	175.182
	5	246.644	230.146	230.802	230.024	230.003	230.003
3	1	100.503	100.503	100.503	100.503	100.503	100.503
	2	125.751	125.751	125.751	125.751	125.751	125.751
	3	161.881	161.902	161.902	161.902	161.902	161.902
	4	206.886	206.845	206.763	206.742	206.742	206.742
	5	271.770	257.198	257.957	257.362	257.342	257.342
Taper ratio, $\alpha=1.0$							
1	1	27.118	27.118	27.118	27.118	27.118	27.118
	2	61.737	61.737	61.737	61.737	61.737	61.737
	3	109.869	109.869	109.869	109.869	109.869	109.869
	4	165.550	165.365	165.283	165.263	165.263	165.263
	5	240.025	224.552	224.880	224.347	224.285	224.285
2	1	61.382	61.382	61.382	61.382	61.382	61.382
	2	92.011	92.011	92.011	92.011	92.011	92.011
	3	135.075	135.096	135.075	135.075	135.075	135.075
	4	186.515	186.269	186.249	186.228	186.228	186.228
	5	255.948	242.033	242.381	241.971	241.931	241.931
3	1	108.334	108.334	108.334	108.334	108.334	108.334
	2	135.649	135.649	135.649	135.649	135.649	135.649
	3	172.743	172.764	172.764	172.764	172.764	172.764
	4	218.813	218.404	218.444	218.424	218.424	218.424
	5	281.053	269.597	269.823	269.597	269.536	269.536

表 3-31 Mindlin 理論 (本解析法) と古典板理論により算定された条件 SSSS の正方変厚板 ($a/h_0=100, \alpha=0.6, 1.0$) の固有振動数 λ の比較

Mode $m \ n$		Plate taper ratio, $\alpha=0.6$		Plate taper ratio, $\alpha=1.0$	
		Classical theory	This study $M=11, \alpha/h_0=100$	Classical theory	This study $M=11, \alpha/h_0=100$
1	1	25.498	25.482(0.999)	29.209	29.184(0.999)
	2	63.556	63.446(0.998)	72.554	72.388(0.998)
	3	127.015	126.478(0.996)	144.726	143.951(0.995)
	4	216.325	214.378(0.991)	246.327	243.609(0.989)
2	1	63.216	63.122(0.999)	71.753	71.616(0.998)
	2	101.872	101.612(0.997)	116.531	116.132(0.997)
	3	165.239	164.457(0.995)	188.527	187.363(0.994)
	4	254.448	252.154(0.991)	289.981	286.693(0.989)
3	1	124.797	124.441(0.997)	139.737	139.244(0.996)
	2	165.932	165.258(0.996)	190.111	189.083(0.995)
	3	229.153	227.781(0.994)	261.994	259.910(0.992)
	4	318.159	315.084(0.990)	363.095	358.565(0.988)

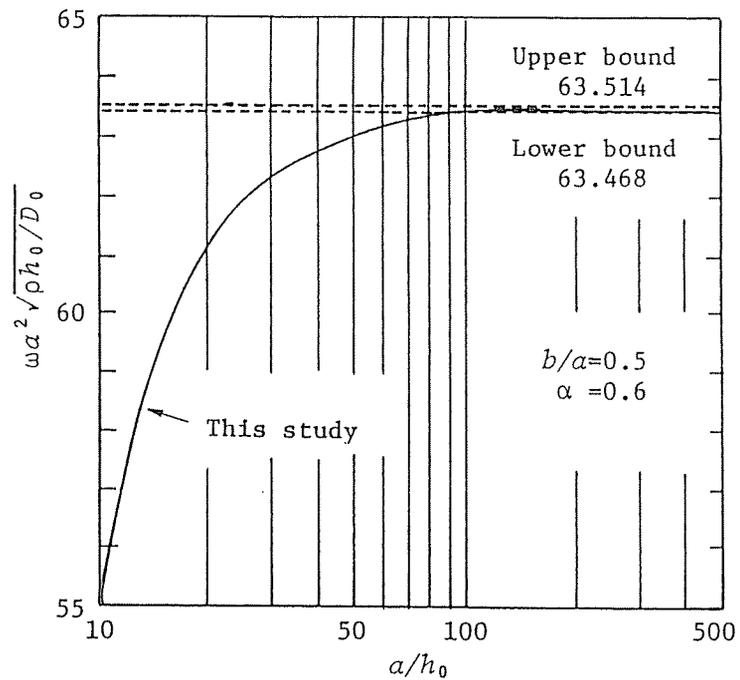
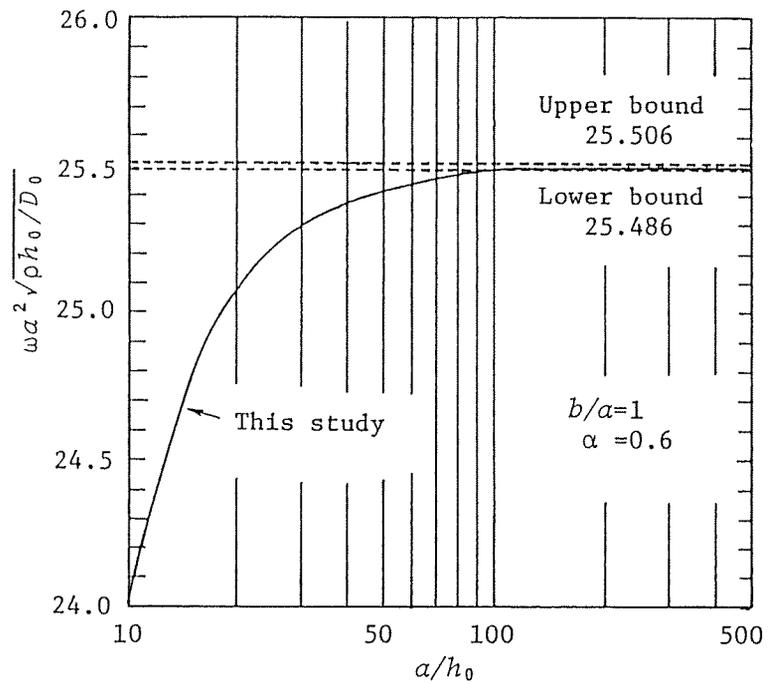


図 3-29 条件 SSSS の変厚板 ($\alpha=0.6$, $b/a=1.0, 0.5$) の基本固有振動数 λ と板厚比 a/h_0 の関係

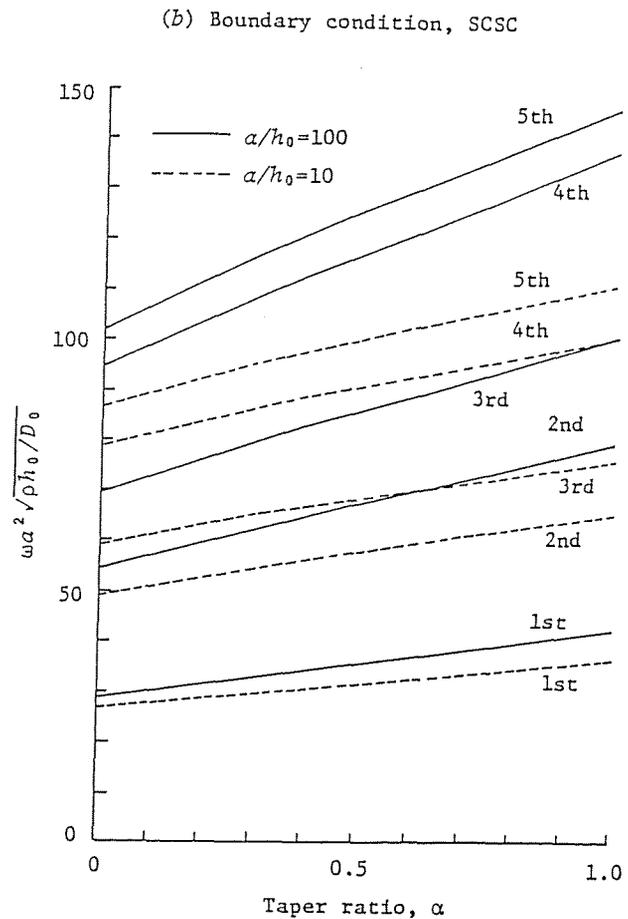
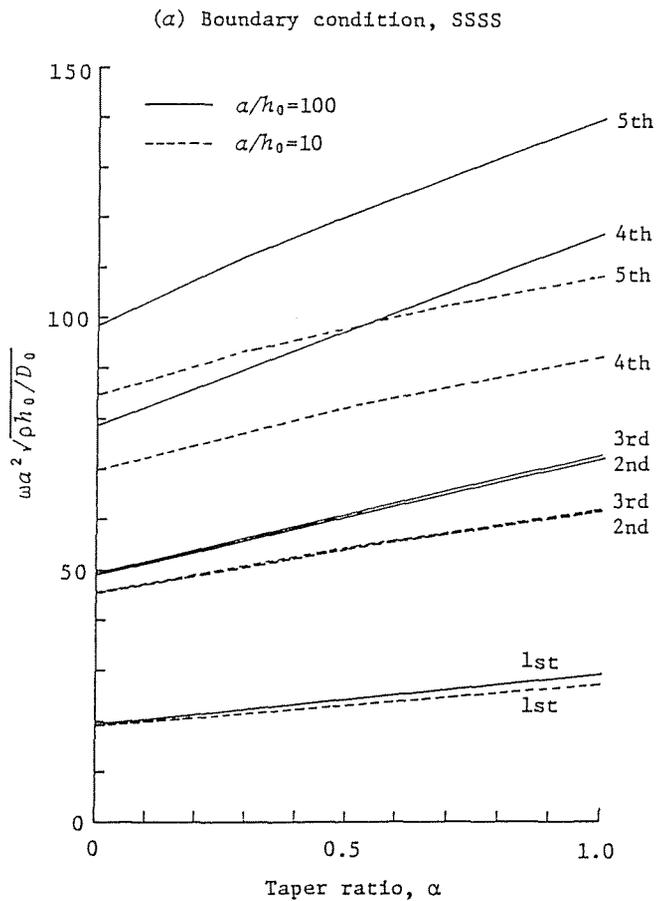


図 3-30 正方形板の固有振動数 λ に与えるテーパ比 α の影響 ($M=11$)
 (a) 条件 SSSS, (b) 条件 SCSC

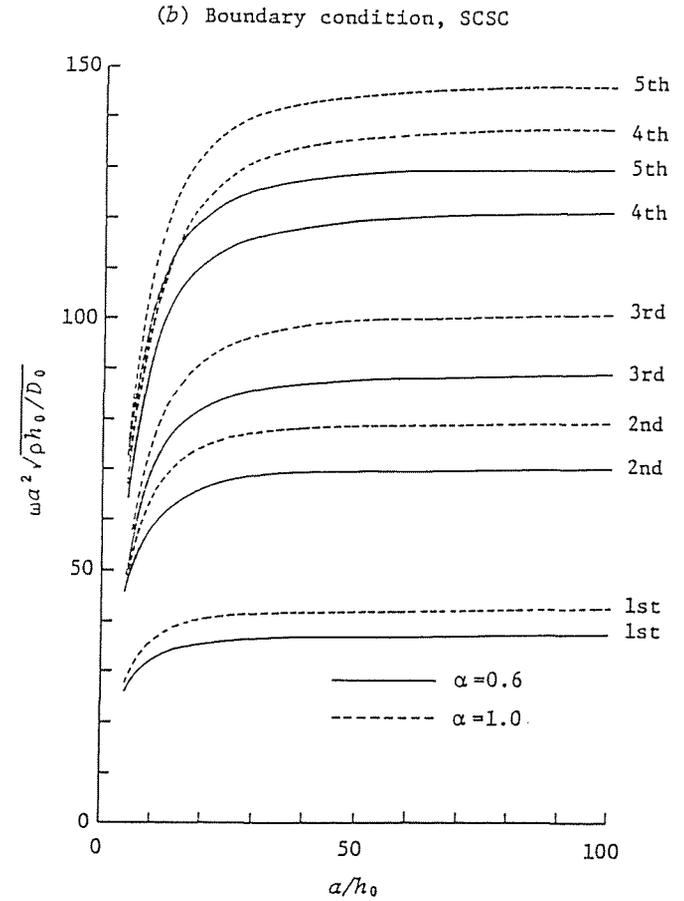
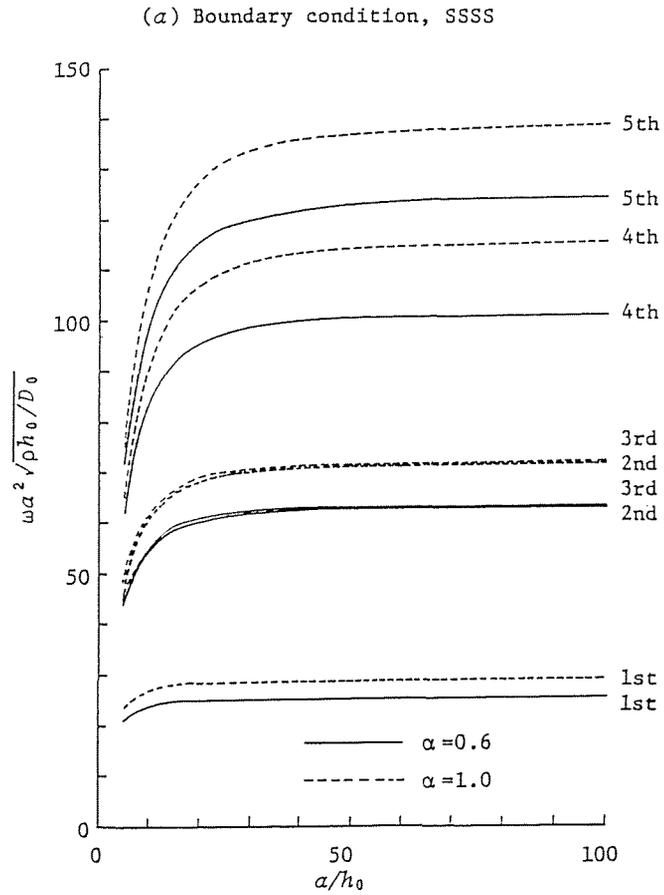


図 3-31 正方形板の固有振動数 λ に与える板厚比 a/h_0 の影響 ($M=11$)
 (a) 条件 SSSS, (b) 条件 SCSC

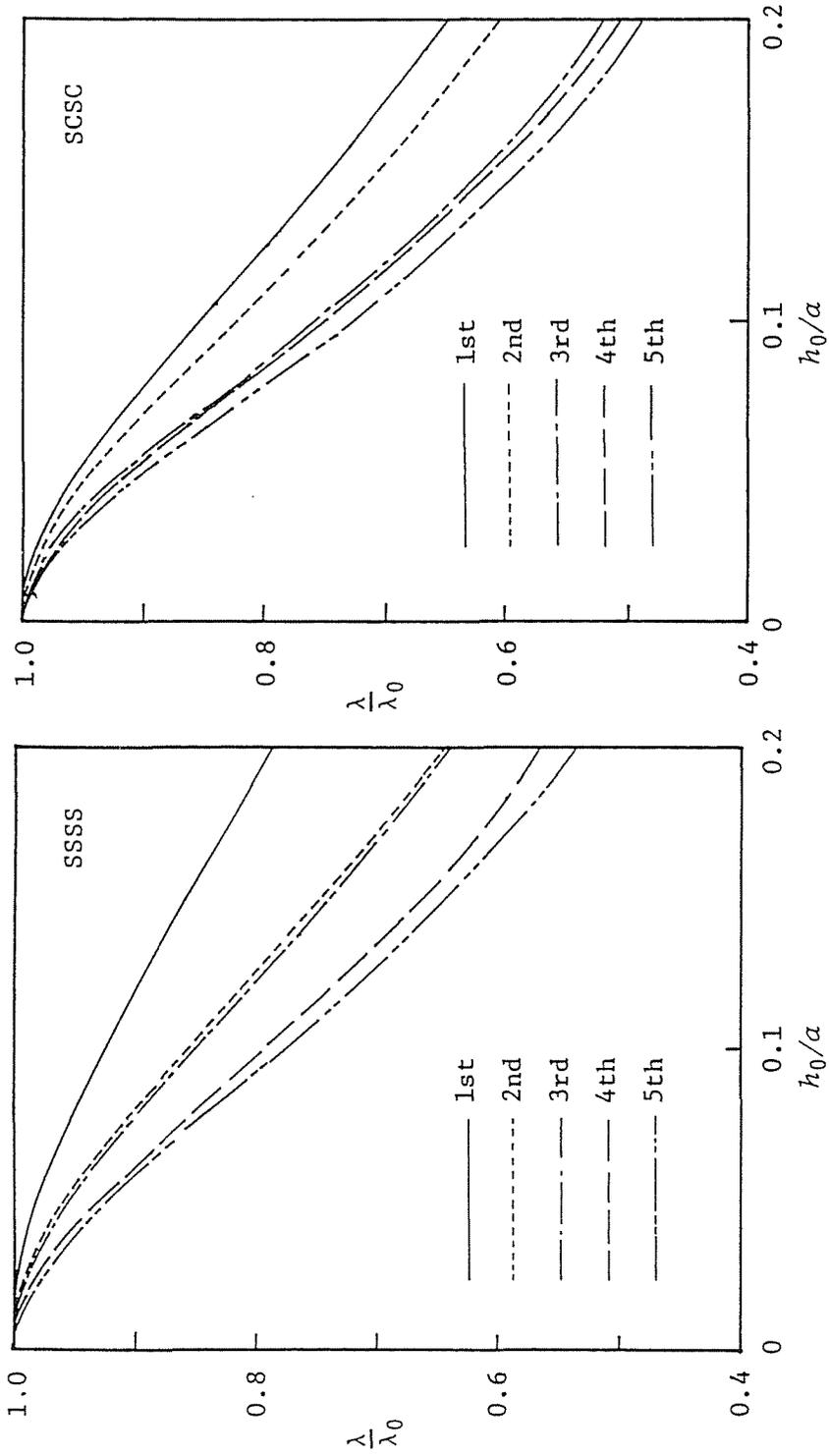


図3-32 固有振動数の比 λ/λ_0 (= Mindlin 理論 / 古典板理論) の h_0/a に対する変化

3-12 結 論

これまで、梁、板および回転殻の固有振動問題のうち、二点境界値問題としてとらえられる場合を対象として、固有振動を算定するための簡便な手法を提示し、それを用いて数値解析を行ない手法の妥当性を検証した。本手法の特徴を列挙すれば次のようである。

定式化について：

- 1) 選点法の適用の結果得られる固有方程式を、内部選点における未知量を固有ベクトルとする内部選点固有方程式および端点（境界点、要素分割点）における未知量を固有ベクトルとする端点固有方程式の二つの形で提示した。前者は、一般固有値問題の形であり、後者は固有値が固有マトリックスの中に入り込んだ形である。
- 2) 1)の二つの形の固有方程式の出現は、微分方程式とその境界条件が与えられさえすれば、解析が一定の手順にしたがって統一的行なえるように、試行関数に微分方程式も境界条件も満足しないものを採用したためであり、その結果得られた内部選点固有方程式および端点固有方程式はそれぞれ、内部法および境界法の一種であると考えられる。

適用性について：

- 1) 考察している問題が二点境界値問題に帰着されれば、任意の境界条件に適用可能である。これは固有方程式が、試行関数中の未定係数を内部選点における微分方程式の残差条件と端点における境界条件（および接続条件）を満足するように、未定係数間の一次従属関係より定めたからである。
- 2) 1)と同様にモデル化できれば、不均質な材料特性および厚さなどの形状が不連続な場合にも適用が容易である。これは定式過程に要素分割を導入したためであり、均質要素ごと、等厚要素ごとに選点法を適用し、隣接要素との共通な分割点での接続条件を満たすように、解を決定できるからである。

数値解析上の特性について：

- 1) 選点に shifted Legendre 多項式の零点を採用した結果が、shifted Chebyshev 多項式の零点に基づいた結果に比べ一般に好結果を生んでいる。
- 2) 固有振動数が既往の解との比較においてはほぼ 1% 以内の相対誤差で求まるのは、要素数 $N = 1$ （要素分割が行なわれていない）、内部選点数を M （shifted Legendre 多項式の零点を採用）とすれば、微分方程式の階数、元数に無関係に低次 $\lceil M/2 \rceil$ 個（ $\lceil \cdot \rceil$: Gauss の記号）までである。また Timoshenko 梁の数値結果は、 N 要素分割に対し、低次 $\lceil MN/2 \rceil$ 個の固有振動数が相当精度よく求まることを示唆している。
- 3) 本手法により得られる固有振動モード間の直交性は、十分な精度で成立している。

- 4) Timoshenko梁の数値結果は、固有振動問題をせん断変形と回転慣性の考慮されたいわゆる修正理論に基づき定式化すれば、薄肉梁（板、殻）も、厚肉梁（板、殻）と同程度の精度で解析が可能なことを示している。
- 5) 端点固有方程式による場合は、固有振動数の見落しの危険性がある。しかし、低次の解に限れば、この危険性は要素分割数を増すことと、解のステップ幅の設定に注意すれば回避できる。

付 録

式（3-83）の係数 $a_1 \sim a_{29}$ および式（3-88）の係数 $b_1 \sim b_{26}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -\frac{b}{\alpha^2} (1 + k r_1^2), \quad a_2 = -\frac{b\gamma}{\alpha} \{ 1 - k r_1^2 (5 - 6d) \} \\
 a_3 &= b \left[(1 + k r_1^2) \left(\frac{1}{r_1^2} - r_2^2 + \nu r_1 r_2 \right) + \frac{3k r_1^2}{r_1^2} (1-d) \{ (5 - 6r_1^2 r_2^2) d \right. \\
 &\quad \left. - 3(1 - r_1^2 r_2^2) \} \right] + \frac{n^2}{2\nu_1 r_1^2} (1 + k r_1^2) \\
 a_4 &= -\frac{b n}{\alpha r} (k r_1 r_2 + 2\nu_1), \quad a_5 = -\frac{b n r'}{2\alpha} \{ \nu - 2k r_1 (\nu_5 r_1 - 2r_2) \} \\
 a_6 &= \frac{b k r_1}{\alpha^3}, \quad a_7 = \frac{b k \gamma r_1}{\alpha^2} \\
 a_8 &= \frac{b}{\alpha} \{ r_1 + \nu r_2 + k r_1 \left(\frac{1 + n^2}{r_1^2} - r_2^2 + \nu r_1 r_2 \right) \} \\
 a_9 &= b \gamma (2r_1 + r_2 - 3r_1 d + 2k n^2 \frac{r_1}{r_2^2}) \\
 a_{10} &= \frac{n b}{\alpha \gamma} \left(\frac{\nu_1}{2} + k r_1 r_2 \right), \quad a_{11} = \frac{n b \gamma}{2 r} (\nu_5 - 2k r_1 r_2 \nu_1 + 6k r_1^2) \\
 a_{12} &= \frac{b \nu_3}{\alpha^2} \left(\frac{1}{2} + k r_2^2 \right), \quad a_{13} = -\frac{b \gamma}{\alpha} \nu_3 \left(\frac{1}{2} + k r_1 r_2 \right) \\
 a_{14} &= -\frac{b \nu_3}{2} \left\{ r_1 r_2 - \frac{1}{r_1^2} + r_2^2 - 2k \frac{r_1 r_2}{r_1^2} (1 - 2r_1^2 r_2^2) \right\} + \frac{b n^2}{r_1^2} (1 + k r_2^2) \\
 a_{15} &= -\frac{n b k r_2}{\alpha^2 r}, \quad a_{16} = -\frac{n b k \gamma r_2}{\alpha r} \\
 a_{17} &= \frac{n b}{r} \{ r_1 \nu + r_2 + k r_2 \left(\frac{n^2}{r_1^2} - \nu_3 r_1 r_2 \right) \} \\
 a_{18} &= -\frac{b k r_1}{\alpha^3}, \quad a_{19} = \frac{b k \gamma r_1}{\alpha^2} (7 - 9d) \\
 a_{20} &= \frac{b}{\alpha} \left[r_1 + \nu r_2 + k r_1 \left[r_1 r_2 \{ \nu_1 - 9(1-d) \} - \frac{1 - r_1^2 r_2^2}{r_1^2} \{ (1-d) \times \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. (24 - 25d) - 1 \} \right] \right] - b k \nu \frac{n^2 r_1}{\alpha r^2}
 \end{aligned}
 \tag{A-1}$$

(A-2)

$$\begin{aligned}
a_{21} &= b\gamma \left[\nu r_1 + r_2 - k r_1 \left\{ \nu r_1 r_2 (6 - 7d) - \frac{1}{r^2} (32 - 168d + 240d^2 - 105d^3) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + r_2^2 (32 - 202d + 333d^2 - 162d^3) \right\} \right] + \frac{bk n^2 \gamma r_1}{r^2} \{ 1 - 3\nu_4 (1 - d) \} \\
a_{22} &= -bk\nu \frac{n r_2}{5\alpha^2 r}, \quad a_{23} = -\frac{bk r}{\alpha r} (2r_1 - 3r_2) \\
a_{24} &= nb \left\{ \frac{\nu r_1 + r_2}{r} + \frac{k}{r^3} (n^2 r_2 + 3r_1 \nu_1 - 3\nu r_1 d - 4r_2) - \frac{k r_2^2}{r} (2\nu_2 r_1 \right. \\
&\quad \left. - 4r_2 - 4\nu r_1 d) \right\}, \quad a_{25} = \frac{bk}{\alpha^4} \\
a_{26} &= \frac{2kb\gamma}{\alpha^3}, \quad a_{27} = \frac{bk}{\alpha^2} (\nu_1 r_1 r_2 - r_2^2 + \frac{1 + 2n^2}{r^2}) \\
a_{28} &= \frac{bk\gamma}{\alpha} \left[r_1 r_2 \{ 2 + \nu (3 - 4d) \} - r_2^2 + \frac{1 + 2n^2}{r^2} \right] \\
a_{29} &= b \{ r_1^2 + r_2^2 + 2\nu r_1 r_2 + \frac{k n^2}{r^2} (\frac{n^2 - 4}{r^2} - \nu_5 r_1 r_2 + 4r_2^2) \}
\end{aligned} \tag{A-3}$$

$$b_1 = \frac{b}{\alpha}, \quad b_2 = b\nu\gamma, \quad b_3 = \frac{b\nu n}{r}, \quad b_4 = b(r_1 + \nu r_2) \tag{A-4}$$

$$\begin{aligned}
b_5 &= -\frac{bn\nu_3}{2r} (1 + 2kr_1 r_2), \quad b_6 = \frac{b\nu_3}{2\alpha} (1 + 2kr_2^2) \\
b_7 &= -\frac{b\gamma\nu_3}{2} (1 + 2kr_2^2), \quad b_8 = -\frac{bkn r_2}{\alpha r}, \quad b_9 = \frac{bkn\gamma r_2}{r}
\end{aligned} \tag{A-5}$$

$$\begin{aligned}
b_{10} &= \frac{bk r_1}{\alpha^2}, \quad b_{11} = \frac{bk\gamma r_1}{\alpha} (-5 + 6d) \\
b_{12} &= kb r_1 \left[\frac{8 - 24d - 2n^2 \nu_3}{r^2} - r_2^2 \{ 8 + d(\nu - 27) \} - 18r_1^2 + 15\frac{\rho^2}{r^2} \right] \\
b_{13} &= \frac{kbn r_2 \nu_4}{\alpha r}, \quad b_{14} = kb\gamma n (\nu r_1 - \nu_5 r_2) \\
b_{15} &= -\frac{kb}{\alpha^3}, \quad b_{16} = -\frac{\gamma kb}{\alpha^2}
\end{aligned} \tag{A-6}$$

$$\begin{aligned}
b_{17} &= \frac{kb}{\alpha r^2} \{ 1 + \nu_4 n^2 - r_2 r^2 (r_2 - \nu r_1) \}, \quad b_{18} = -\frac{kb n^2 \gamma \nu_5}{r^2} \\
b_{19} &= \frac{kb r_1}{\alpha}, \quad b_{20} = kb\gamma r_1 (3d - \nu_5), \quad b_{21} = \frac{kbn r_2}{r} \\
b_{22} &= -\frac{kb}{\alpha^2}, \quad b_{23} = -\frac{kb\nu\gamma}{\alpha}, \quad b_{24} = \frac{kb\nu n^2}{r^2}
\end{aligned} \tag{A-7}$$

$$b_{25} = r_1, \quad b_{26} = -\frac{1}{\alpha} \tag{A-8}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{1}{1-\nu^2}, \quad k = \frac{\delta^2}{12}, \quad \delta = \frac{h}{a}, \quad d = \frac{r_1}{r_2} \\ \nu_1 &= 1 + \nu, \quad \nu_2 = 3 + \nu, \quad \nu_3 = 1 - \nu \\ \nu_4 &= 2 - \nu, \quad \nu_5 = 3 - \nu \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-9})$$

第 3 章 参 考 文 献

- 1) Warburton, G.B. : Vibration of thin cylindrical shells, J. Mech. Eng. Sci., Vol.7, No.4, pp.399-407, 1965.
- 2) Warburton, G.B. and Higgs, J. : Natural frequencies of thin cantilever cylindrical shells, J. Sound Vib., Vol.11, pp.335-338, 1970.
- 3) Kalnins, A. : Effect of bending on vibrations of spherical shells, J. Acoust. Soc. Am., Vol.36, pp.74-81, 1964.
- 4) Kunieda, H. : Solutions of free vibrations of spherical shells, Part 3 Natural frequencies and modes in axi- and anti-symmetric state, Trans. of A.I.J., No.325, pp.57-64, 1983.
- 5) Carter, R.L. et al. : Free vibrations of hyperboloidal shells of revolution, Proc. of ASCE, Vol.95, No. EM5, pp.1033-1052, 1969.
- 6) Goldberg, J.E. et al. : On the calculation of the axisymmetric modes and frequencies of conical shells, J. Acoust. Soc. Am., Vol.36, pp.738-742, 1960.
- 7) Tottenham, H. and Shimizu, K. : Analysis of the free vibration of cantilever cylindrical thin elastic shells by the matrix progression method, Int. J. Mech. Sci., Vol.14, pp.293-310, 1972.
- 8) Zarghamee, M.S. and Robinson, A.R. : A numerical method for analysis of free vibration of spherical shells, AIAA Journal, Vol.5, pp.1256-1261, 1967.
- 9) Navaranta, D.R. : Natural vibrations of deep spherical shells, AIAA Journal, Vol.4, pp.2056-2058, 1966.
- 10) Webster, J.J. : Free vibrations of shells of revolution using finite elements, Int. J. Mech. Sci., Vol.9, pp.559-570, 1967.
- 11) Sen, S.K. and Gould, P.L. : Free vibration of shells of revolution using FEM, Proc. of ASCE, Vol.100, No. EM2, pp.283-303, 1972.
- 12) Delpak, R. and Hague, W.M. : An experimental and theoretical investigation of the frequencies and mode shapes of axisymmetric shell models, J. Sound Vib., Vol.72, pp.235-249, 1980.
- 13) Tabarrok, B. and Gass, N. : Vibration of cylindrical shells by hybrid finite element method, AIAA Journal, Vol.10, pp.1553-1554, 1972.
- 14) Altman, W. et al. : Vibration of thin cylindrical shells based on a mixed finite element formulation, Comput. Struct., Vol.8, pp.217-221, 1978.
- 15) Hashish, M.G. and Abu-Sitta, S.H. : Free vibration on hyperbolic cooling towers, Proc. of ASCE, Vol.97, No. EM2, pp.253-269, 1971.
- 16) De Souza, V.C.M. and Groll, J.G.A. : An energy analysis of the free vibrations of isotropical shells, J. Sound Vib., Vol.73, pp.379-404, 1980.
- 17) Cohen, G.A. : Computer analysis of asymmetric free vibrations of ring-stiffened orthotropic shells of revolution, AIAA Journal, Vol.3, pp.2305-2312, 1965.
- 18) Weingarten, V.I. and Gelman, P. : Free vibration of cantilevered conical shells, Proc. of ASCE, Vol.93, No. EM6, pp.127-138, 1967.

- 19) Stoneking, J.E. and Boresi, A.P. : A theory for free vibration of orthotropic shells of revolution, Nucl. Engng. and Des., Vol.14, pp.271-285, 1970.
- 20) 三上隆, 芳村仁 : 選点法による回転殻の固有振動数の解析, 土木学会論文報告集, 第335号, pp.69-78, 1983.
Mikami, T. and Yoshimura, J. : Free vibration of shells of revolution by the collocation method, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.30, pp.323-334, Univ. of Tokyo Press, 1982.
- 21) Mikami, T. and Yoshimura, J. : Free vibration analysis of cylindrical shells with spherical cap by the collocation method, 北海道大学工学部研究報告, pp.1-9, 1985.
- 22) Mikami, T. and Yoshimura, J. : On some eigenvalue problems of beams and columns by the collocation method, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.29, pp.307-318, Univ. of Tokyo Press, 1981.
- 23) Mikami, T. and Yoshimura, J. : Application of the collocation method to vibration analysis of rectangular Mindlin plate, Comput. Struct., Vol.18, pp.425-431, 1984.
- 24) 三上隆, 芳村仁 : 選点法による固有値問題の解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第10巻, pp.10-15, 1986.
- 25) Timoshenko, S.P. : On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, Phil. Mag., Vol.41, pp.744-746, 1921.
- 26) 戸川隼人 : マトリックスの数値計算, オーム社, 1971.
- 27) Thomas, D.L., Wilson, J.M. and Wilson, R.R. : Timoshenko beam finite elements, J. Sound Vib., Vol.31, pp.315-330, 1973.
- 28) Tessler, A. and Dong, S.B. : On a hierarchy of conforming Timoshenko beam elements, Comput. Struct., Vol.14, pp.335-344, 1981.
- 29) Dong, S.B. and Wolf, J.A. : Effect of transverse shear deformation on vibrations, of planar structures composed of beam-type elements, J. Acoust. Soc. Am., Vol.53, pp.120-127, 1973.
- 30) Huges, T.J.R., Taylor, R.L. and Kanoknukulchal, W. : A simple and efficient finite element for plate bending, Int. J. Num. Mech. Engng., Vol.11, pp.1529-1543, 1977.
- 31) Novozhilov, V.V. : The Theory of Thin Shells, P. Noordhoff, 1959.
- 32) Forsberg, K. : Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells, AIAA Journal, Vol.2, pp.2150-2157, 1964.
- 33) Greebaum, K. : Comments "Numerical analysis of unsymmetrical bending of shells of revolution" AIAA Journal, Vol.2, pp.590-591, 1964.
- 34) Love, A.E.H. : The Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., Cambridge Univ. Press, 1959.
- 35) Hwang, C. : Some experiments on the vibration of a hemispherical shell, J. Appl. Mech., Vol.33, pp.817-824, 1966.
- 36) Ross, E.W., Jr. : Natural frequencies and mode shapes for axisymmetric vibration of deep spherical shell, J. Appl. Mech., Vol.32, pp.553-561, 1965.

- 37) Kalnins, A. : Free nonsymmetric vibrations of shallow spherical shells, Proc. Fourth U.S. Nat. Cong. Appl. Mech., pp.225-233, 1962.
- 38) Weingarten, V.I. : Free vibrations of conical shells, Proc. of ASCE, Vol.91, No. EM4, pp.69-87, 1965.
- 39) Galletly, G.D. and Mistry, J. : Free vibrations of cylindrical shells with various end closures, Nucl. Engng. and Des., Vol.30, pp.249-269, 1974.
- 40) FELJÓO, R.A. et al. : A curvilinear finite element for shells of revolution, Int. J. Num. Mech. Engng., Vol.16, pp.19-33, 1980.
- 41) Mindlin, R.D. : Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plate, J. Appl. Mech., Vol.18, pp.31-38, 1951.
- 42) Greimann, L.F. and Lynn, P.P. : Finite element analysis of plate bending with transverse shear deformation, Nucl. Engng. and Des., Vol.14, pp.223-230, 1970.
- 43) Rock, T.A. and Hinton, H. : Free vibration and transient response of thick and thin plates using the finite element method, Earthquake Engng. Struct. Dyn., Vol.3, pp.57-63, 1974.
- 44) Hinton, E. and Bicanic, N. : A comparison of Lagrangian and Serendipity Mindlin plate elements for free vibration analysis, Comput. Struct., Vol.10, pp.483-493, 1979.
- 45) Dawe, D.J. : Finite strip models for vibration of Mindlin plates, J. Sound Vib., Vol.59, pp.441-452, 1978.
- 46) Roufaeil, O.L. and Dawe, D.J. : Vibration analysis of rectangular Mindlin plates by the finite strip method, Comput. Struct., Vol.12, pp.833-842, 1980.
- 47) Benson, P.R. and Hinton, E. : A thick finite strip solution for static, free vibration and stability problems, Int. J. Num. Mech. Engng., Vol.10, pp.665-678, 1976.
- 48) Dawe, D.J. and Roufaeil, O.L. : Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates, J. Sound Vib., Vol.69, pp.345-359, 1980.
- 49) Pulmano, V.A. and Gupta, R.K. : Vibration of tapered plates by finite strip method, Proc. of ASCE, Vol.102, No. EM3, pp.553-559, 1976.
- 50) Apple, F.C. and Byers, N.R. : Fundamental frequency of simply supported rectangular plates with linearly varying thickness, J. Appl. Mech., Vol.31, pp.163-168, 1965.

第 4 章 柱・梁の非保存的弾性安定問題

4-1 概 説

構造物の弾性安定解析では、荷重はほとんど重力によるものであるから、これまで取り扱われてきた問題がほとんど保存系であった。最近、高層建築や海洋構造物のように、風や水などの流体の影響を受ける構造物が施工される機会が多くなったが、これらの流体から受ける力は構造物の変形に伴ってその作用方向の変化するものが多く（一般に、このような荷重は接線力、従動力または追従力と呼ばれる）、非保存系に相当するものがほとんどである。それゆえ、構造物が大型化、軽量化、柔軟化の傾向を示すようになった今日では、非保存力が作用する構造物の弾性安定解析が一段と重要となろう。

接線力を受ける弾性体の安定問題は、動的安定解析によらなければならない。すなわち、接線力を受け微小な振動をしている系の変位の時間経過状態により、安定、不安定の別を判定しようとするもので、この方法はBeck¹⁾、Leipholz²⁾、Bolotin³⁾その他多くの研究者に採用されてきた。具体的には、時間と位置に関する偏微分方程式を、位置変数に関する常微分方程式に変換して解を求めることになるが、変数分離後の方程式は、一般に非自己随伴演算子で記述されることになり、弾性体の非保存的問題は、数学的には系の固有値を求める非自己随伴境界値問題として定式化されることになる。

非自己随伴型の微分方程式で表わされる非保存的弾性安定問題は特別な場合を除いて^{1, 4)}、解析的に解を求めることは非常に難しく、数値的な近似解を求める方法に頼らざるをえない。例えばLeipholz^{5, 6)}、Hauger^{7, 8)}らによるGalerkin法、杉山ら⁹⁾による差分法、Irieら¹⁰⁾による伝達マトリックス法、Barsoum¹¹⁾およびKikuchi¹²⁾などによる有限要素法がある。これらの近似手法は、保存系の自己随伴境界値問題の解法として開発され、そして発展してきたものであり、保存系の問題への適用に当ってはその使用は十分な注意を払う必要がある。

さて、選点法による非保存系の解析は著者とYoshimura¹³⁾の研究を除いて見当たらないようである。選点法も上述の近似解法と同様に、保存系を前提に開発されたものであり、これを無造作に応用することに注意しなければならない。本章は、このような視点から、選点法の非保存的弾性安定問題への適用性について、柱・梁を例に取り検討したものである。具体的にはBernoulli-Euler理論に基づいて、準接線および接線方向力、等分布および直線分布接線力を担う種々の境界条件の柱・梁の解析を通して、本手法の適用可能性や数値解析上の特性を検討する。

以下4-2では、基礎方程式を示し、4-3においては3章と同様な手順を踏み、解の全領域に選点法を適用し、非保存的弾性安定問題を内部選点固有方程式で表わす。4-4においては、数値計算を扱い、既往の近似解法による結果との比較を行う。4-5においては、本章で得られた結論をまとめて示している。

4-2 基礎方程式

接線力を受ける柱・梁の弾性安定問題として、図4-1に示す三種類の非保存系モデルを考える。図4-1(a)は集中力 P が自由端において、接線角の γ ($0 \leq \gamma \leq 1$) 倍の角度に保たれながら作用するモデルで、 $\gamma = 0$ のときはEulerの問題に対応し、 $\gamma = 1$ のときはBeckの問題¹⁾ となる(本章では γ が $0 \leq \gamma \leq 1$ であるときも含めて、この荷重モデルをBeckの問題と呼ぶ)。図4-1(b)は一様分布接線方向力を受ける場合(Leipholzの問題^{5, 6)} と呼ぶ)であり、図4-1(c)は直線分布接線方向力を受ける場合(Haugerの問題⁷⁾) である。

接線力を受け、微小に振動している断面一定な柱・梁の運動方程式は次式で与えられる²⁾。

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + F(x) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (4-1)$$

ここで、 W : 横方向変位、 EI : 曲げ剛性、 ρ : 密度、 A : 断面積であり、 $F(x)$ は上述の荷重タイプに対応して次のようなものである。

$$\left. \begin{array}{l} \text{Beckの問題} \quad : \quad F(x) = P \\ \text{Leipholzの問題} \quad : \quad F(x) = q(L-x) \\ \text{Haugerの問題} \quad : \quad F(x) = q_0(L-x)^2/2 \end{array} \right\} \quad (4-2)$$

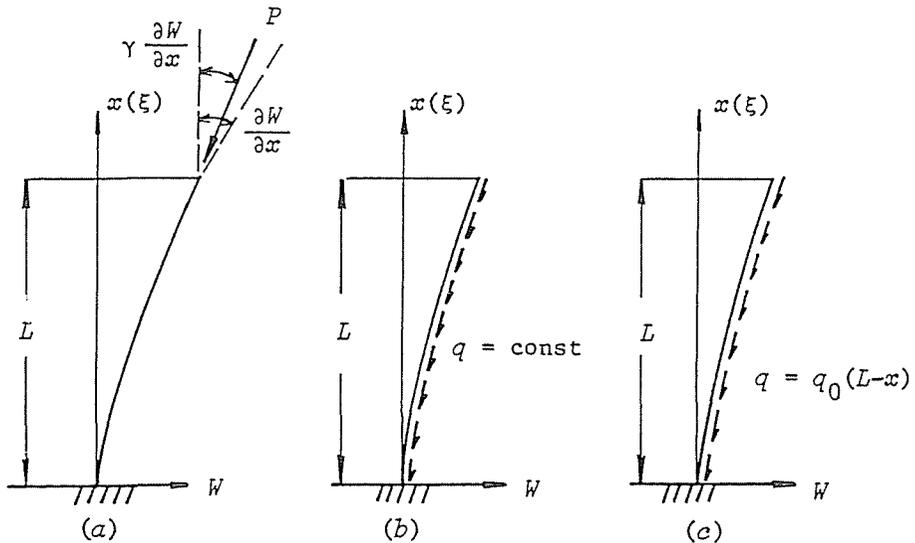


図4-1 解析に用いた非保存系荷重モデル

ここで、 L ：柱・梁の全長。柱・梁の端末で規定される境界条件は次式で与えられる。

$$\text{固定 (Clamped) : } W = \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (4-3a)$$

$$\text{単純支持 (Hinged) : } W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0 \quad (4-3b)$$

$$\text{自由 (Free) : } \left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad EI \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} = P(r-1) \frac{\partial W}{\partial x} \quad [\text{Beck の問題}] \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^5 W}{\partial x^5} = 0 \quad [\text{Beck 以外の問題}] \end{aligned} \right\} (4-3c)$$

横方向変位 W は、固有振動数 ω で調和振動を行っている定常状態を考えれば、次のように表わされる。

$$W(x, t) = Lw(x) e^{i\omega t} \quad (4-4)$$

さらに、次式で定義される無次元化座標と演算子

$$\xi = x/L, \quad ()' = d()/d\xi \quad (4-5)$$

を導入すれば、運動方程式 (4-1) と境界条件式 (4-3) は、以下のようになる。

$$w'''' + \eta f(\xi) w'' - \Omega^2 w = 0 \quad (4-6)$$

ここで、 Ω^2 は次式で定義される固有振動数パラメータ

$$\Omega^2 = \frac{\rho AL^4}{EI} \omega^2 \quad (4-7)$$

であり、荷重パラメータ η および荷重モデルに依存する関数 $f(\xi)$ は以下の通りである。

$$\left. \begin{aligned} \text{Beck の問題} & : \eta = \frac{PL^2}{EI}, \quad f(\xi) = 1 \\ \text{Leipholz の問題} & : \eta = \frac{qL^3}{EI}, \quad f(\xi) = 1 - \xi \\ \text{Hauger の問題} & : \eta = \frac{q_0 L^4}{EI}, \quad f(\xi) = \frac{(1 - \xi)^2}{2} \end{aligned} \right\} (4-8)$$

境界条件式は、次のようになる。

$$\text{固定 (C) : } w = w' = 0 \quad (4-9a)$$

$$\text{単純支持 (H) : } w = w'' = 0 \quad (4-9b)$$

$$\text{自由 (F) : } \left. \begin{aligned} w'' = 0, \quad w''' = \eta(r-1)w' \quad [\text{Beck の問題}] \\ w'' = w''' = 0 \quad [\text{Beck 以外の問題}] \end{aligned} \right\} (4-9c)$$

4-3 内部選点固有方程式および臨界荷重の算定

非保存的弾性安定問題に選点法を適用すれば、考察している問題は固有値問題に変換され、それらは三章で述べた内部選点固有方程式または端点固有方程式の形で表わされる。しかしながら、非保存的弾性安定問題は最終的には、一般に複素固有値を求める問題に帰着するため、端点固有方程式による場合には複素行列式の値が零に対応する複素固有値を試行錯誤的に見出す必要がある。それゆえ、実固有値および複素固有値に対して一般の固有値解析プログラムを利用できる内部選点固有方程式の形で考察している問題を表わすのが有効と思われる。

さて、解の全領域に選点法を適用すれば、内部選点固有方程式は次のように得られる。

式(4-6)を解くために、横変位 w は領域内部で M 個の自由度を持たせ、満足すべき境界条件の個数を考慮に入れて $M+4$ 項で近似する。

$$w = \sum_{i=1}^{M+4} e_{i-1} \xi^{i-1} \quad (4-10)$$

ここに e は未知係数である。なお式(2-26)より、 w の端点 ($\xi_0 = 0, \xi_{M+1} = 1$) と内部選点 ξ_j ($j=1 \sim M$) における 1~4 階微分係数は次のように表わされる。

$$\{w^{(n)}\} = [A^{(n)}] \{w\} + [B^{(n)}] \{e\} \quad (n=1 \sim 4) \quad (4-11)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \{w\}^T &= (w(\xi_0), w(\xi_1), \dots, w(\xi_M), w(\xi_{M+1})) \\ \{e\}^T &= (e_{M+2}, e_{M+3}) \\ \{w^{(n)}\}^T &= \left(\frac{d^n w}{d\xi^n}(\xi_0), \frac{d^n w}{d\xi^n}(\xi_1), \dots, \frac{d^n w}{d\xi^n}(\xi_M), \frac{d^n w}{d\xi^n}(\xi_{M+1}) \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-12)$$

柱・梁の非保存的安定問題を記述するのに要する条件式は、 $M+4$ 個である。このうち M 個の条件式は運動方程式(4-6)の内部選点における残差の条件より、他の 4 個の条件式は境界条件式(4-9)より定まる。

M 個の条件式は、運動方程式中の微分階数に留意し式(4-11)を用い、その結果を内部選点に関する未知量 $\{\delta_I\}$ とその他の $\{\delta_B\}$ に分けてマトリックス表示すれば次式となる。

$$[K_I] \{\delta_I\} + [K_B] \{\delta_B\} - \rho^2 \{\delta_I\} = \{0\} \quad (4-13)$$

ここに、 M 次および 4 次のベクトル $\{\delta_I\}$ 、 $\{\delta_B\}$ は

$$\left. \begin{aligned} \{\delta_I\}^T &= (w(\xi_1), w(\xi_2), \dots, w(\xi_M)) \\ \{\delta_B\}^T &= (w(\xi_0), w(\xi_{M+1}), e_{M+2}, e_{M+3}) \end{aligned} \right\} \quad (4-14)$$

であり、 $(M \times M)$ 次のマトリックス $[K_I]$ と $(M \times 4)$ 次のマトリックス $[K_B]$ は次のような成分を持つ。

$[K_I]$ について：

$$K_I(i, j) = A^{(4)}(i+1, j+1) + \eta f(\xi_i) A^{(2)}(i+1, j+1) \quad (4-15)$$

ただし、 $i, j = 1 \sim M$ 、 $A^{(n)}(i+1, j+1)$ は $[A^{(n)}]$ の第 $i+1$ 行、第 $j+1$ 列の要素を表わす。

$[K_B]$ について：

$$\left. \begin{aligned} K_B(i, j) &= A^{(4)}(i+1, \ell) + \eta f(\xi_i) A^{(2)}(i+1, \ell) \\ K_B(i, j+2) &= B^{(4)}(i+1, j) + \eta f(\xi_i) B^{(2)}(i+1, j) \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

ただし、 $i = 1 \sim M$ 、 $j = 1, 2$ であり、添字 ℓ は次の約束に従うものとする。

$$\ell = 1 \quad (j = 1), \quad \ell = M+2 \quad (j = 2)$$

なお、 $[K_I]$ および $[K_B]$ は、式 (4-15)、(4-16) より明らかなように、荷重パラメータ η の関数でもある。

境界条件より得られる 4 個の条件式は、式 (4-13) に類似な形で次のように表わされる。

$$[S_I] \{\delta_I\} + [S_B] \{\delta_B\} = \{0\} \quad (4-17)$$

$(4 \times M)$ 次のマトリックス $[S_I]$ と (4×4) 次のマトリックス $[S_B]$ は、端点 $\xi_0 = 0$ ($x=0$) と $\xi_{M+1} = 1$ ($x=L$) で規定される境界条件に応じて作成されるものであり、以下にこれらのマトリックスを組み立てるのに必要な関係式を列挙しておく。式 (4-9) と式 (4-11) より

$$\left. \begin{aligned} w = 0 : w(\xi_{\ell-1}) &= 0 \\ \frac{d^n w}{d\xi^n} = 0 \quad (n = 1 \sim 3) : \sum_{j=1}^{M+2} A^{(n)}(\ell, j) w(\xi_{j-1}) + \sum_{k=1}^2 B^{(n)}(\ell, k) e_{M+1+k} &= 0 \\ \frac{d^3 w}{d\xi^3} - \eta(r-1) \frac{dw}{d\xi} = 0 : \sum_{j=1}^{M+2} \{A^{(3)}(\ell, j) - \eta(r-1)A^{(1)}(\ell, j)\} w(\xi_{j-1}) \\ &+ \sum_{k=1}^2 \{B^{(3)}(\ell, k) - \eta(r-1)B^{(1)}(\ell, k)\} e_{M+1+k} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

ただし、添字 ℓ は次の約束に従うものとする。

$$\ell \begin{cases} = 1 & ; \xi_0 = 0 \text{ で規定されるとき} \\ = M+2 & ; \xi_{M+1} = 0 \text{ で規定されるとき} \end{cases}$$

以上に得られた $M + 4$ 個の条件式より、系の安定、不安定を判定する問題は、次のような固有値問題を解くことに帰着にする。式(4-13)と式(4-17)より $\{\delta_B\}$ を消去すれば、内部選点における未知量 $\{\delta_I\}$ を固有ベクトルとする形の固有値問題が得られる。

$$[K(\eta)] \{\delta_I\} - \Omega^2 \{\delta_I\} = \{0\} \quad (4-19)$$

ここに、 $[K(\eta)]$ は荷重パラメータ η に依存する $(M \times M)$ 次のマトリックスである。

$$[K(\eta)] = [K_I] - [K_B] [S_B]^{-1} [S_I] \quad (4-20)$$

したがって、 $\{\delta_I\} \neq 0$ なる解を有するための必要十分条件は、次式が成立することである。

$$\det |[K(\eta)] - \Omega^2 [I]| = 0 \quad (4-21)$$

ただし $[I]$ は $(M \times M)$ 次の単位マトリックス。式(4-21)より明らかなように、接線力を受ける弾性系の安定問題は、式(4-19)に非自明な解が存在するための荷重パラメータ η と固有振動数パラメータ Ω^2 からなる固有値の組 (η, Ω^2) を見出す問題に変換された。

さて、系の安定、不安定の判定は、ある与えられた荷重パラメータ η に対して式(4-19)を満たす M 個の固有値 Ω^2 を求めることによってなされる。すなわち、ある荷重パラメータに対して得られた M 個の固有値 Ω^2 のすべてが正値であれば、 ω^2 と Ω^2 の関係式(4-7)より明らかなように、式(4-4)で表わされる系の運動は周期的となり安定である。一方 Ω^2 の一つでも負値あるいは複素根をとれば、系の運動は時間の経過とともに変位振幅が増大し不安定となる。それゆえ、系に不安定を引き起こす最小臨界荷重は固有値 Ω^2 が正の実根のみをもつ状態から負の実根あるいは複素根をもつ状態に変化する荷重パラメータ η の値を算定することにより求められる。

4-4 数値計算例

これまでに提示した手法を、具体的な問題に適用し、本手法の非保存的弾性安定問題への適用可能性および数値解析上の特性を検討する。前節の終りで述べたように臨界荷重の決定は、荷重パラメータ η と固有振動数パラメータ Ω^2 の組 (η, Ω^2) の挙動の追跡によってなされるが、この追跡は η と Ω^2 の関係を $\eta - \Omega^2$ 平面上に図示することに相当し、 $\eta - \Omega^2$ 曲線は固有値曲線と呼ばれる。Leipholz¹⁴⁾ は、図4-2に示すように固有値曲線を三種類のタイプ、すなわち系の振動形状が第一次振動モードが支配的である Divergence タイプ、第一次振動モードと第二次振動モードが組合さった Hybrid タイプおよび Flutter タイプに分類している。この分類の確認は、本手法の適用性、有効性を検討する上にも重要であり、本節におけるいま一つの目的とする。以下、選点には shifted Legendre 多項式の零点を用いることにする。

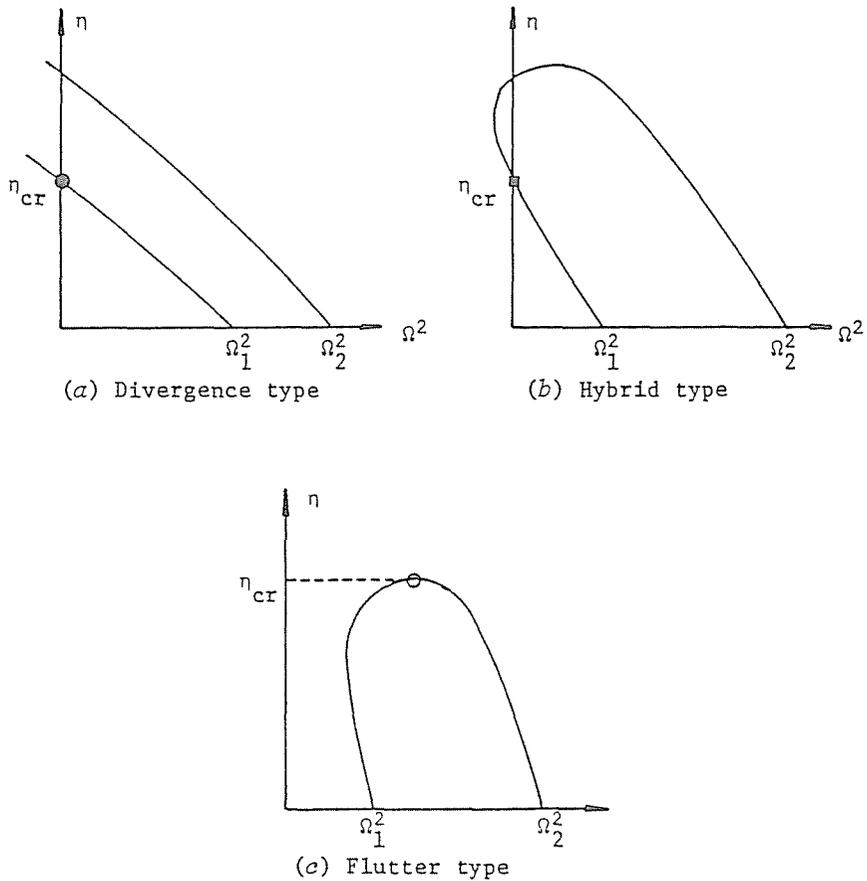


図4-2 固有値曲線とその分類

(1) 準接線および接線集中力を受ける片持梁 (Beck の問題)

Beck の問題 ($\gamma = 1$) に対する本解析法による臨界荷重を、Beck の厳密解¹⁾と差分法による解⁹⁾との比較で表 4-1 に示す。本結果は、内部選点数 $M = 4$ では誤差が 2 % 程度であり、 $M \geq 5$ ではほぼ厳密解に一致している。また差分法と比較して、次元数の少ない固有値問題を取り扱うことで良好な解が得られている。非保存系の問題は、往々にして非対称なマトリックスを扱わなければならないので、固有値を精度よくしかも手際よく求めるためにも、自由度の少ないマトリックスを扱えばよい本解析手法は、この種の問題の解法として有望と思われる。

表 4-1 Beck の問題 ($\gamma = 1$) の臨界荷重, $\eta = PL^2/EL$

Beck's solution		20.05
This study	$M = 4$	20.43
	$M = 5$	20.02
	$M = 6$	20.052
	$M \geq 7$	20.050
F.D.M.	$K = 10$	19.89
	$K = 50$	20.04
	$K = 100$	20.07

F.D.M.: Finite difference method
 K : Number of division points

表4-2は、Beckの問題 ($\gamma = 1$) に対し $M = 11$ として求めた固有値曲線の解 (荷重パラメータに対する低次二つの固有振動数) を厳密解と比べたものである。厳密解の固有振動数方程式は次のようである¹⁾。

$$\eta^{*2} + 2Q^* + \eta^* \sqrt{Q^*} \sin r_1 \cdot \sin h r_2 + 2Q^* \cos r_1 \cdot \cos h r_2 = 0 \quad (a)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \eta^* &= \frac{PL^2}{\pi^2 EI}, \quad Q^* = \frac{\rho AL^4 \omega^2}{\pi^4 EI} \\ r_1 &= \pi^2 \left[\sqrt{Q^* + \eta^{*2}/4} + \frac{\eta^*}{2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad r_2 = \pi^2 \left[\sqrt{Q^* + \eta^{*2}/4} - \frac{\eta^*}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} (b)$$

表より理解できるように、本解析法により得られた固有値は厳密解と完全に一致している。この一致は、前章で得られた結論「内部選点数を M にとれば、 $[M/2]$ 次以下の固有値に対しては十分な精度で得られる」から判断して当然の帰結であろう。

表4-3は、準接線荷重の作用角度を特性づけるパラメータ γ を $0 \leq \gamma \leq 1$ の範囲で連続的に変化させたときの、 $M=11$ による臨界荷重を厳密解¹⁾、有限要素解²⁾ と比較したものである。これによると、本解析結果は γ の値によらず満足できるものである。この問題に静的解析法を適用すれば、臨界荷重に対する次の座屈特性方程式が得られる¹⁾。

$$\cos kL = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \quad \left(k^2 = \frac{P}{EI} \right) \quad (c)$$

表4-2 Beckの問題 ($\gamma=1$) の固有振動数 Q^2/π^4 ($M=11$)

$\frac{PL^2}{\pi^2 EI}$	Ω_1^2/π^4		Ω_2^2/π^4	
	This study	Exact solution	This study	Exact solution
0	0.1269	0.1269	4.9843	4.9843
0.5	0.1817	0.1817	4.2965	4.2965
1.0	0.2719	0.2719	3.5667	3.5667
1.5	0.4411	0.4411	2.7499	2.7499
2.0	0.9917	0.9917	1.5417	1.5417
2.01	1.0328	1.0328	1.4873	1.4873
2.02	1.0870	1.0870	1.4198	1.4198
2.03	1.1852	1.1852	1.3083	1.3083

表 4-3 準接線および接線荷重を受ける片持梁(Beckの問題)の
 臨界荷重, $\eta = PL^2/EI$ ($M=11$)

γ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
This study $M = 11$	2.4674	2.8295	3.3250	4.0550	5.2920	9.869
F.E.M. $K = 10$	2.4674	2.830	3.325	4.055	5.293	9.872
Exact solution	2.4674	2.830	3.325	4.055	5.293	

γ	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
This study $M = 11$	16.258	16.787	17.589	18.668	20.05
F.E.M. $K = 10$	16.27	16.80	17.60	18.68	20.07
Exact solution					20.05

F.E.M. : Finite element method
 K : Number of elements

この特性方程式(c)が解を持つのは $0 \leq \gamma \leq 0.5$ のときであり、 γ のこの範囲では静的解析法と動的解析法による臨界荷重は同一のものとなる。この点を考慮すれば、本解析法による固有値曲線は $0 \leq \gamma \leq 0.5$ で図 4-2(a)と(b)に類似なものが、一方動的解析が要求される $\gamma > 0.5$ では図 4-2(c)に類似なものが得られるはずである。これを確認するために、図 4-3 に一連の固有値曲線 ($M=11$) を示した。図から明らかなように、 $0 \leq \gamma < 0.5$ で Divergence タイプの、 $\gamma = 0.5$ で Hybrid タイプの、そして $\gamma > 0.5$ で Flutter タイプの固有値曲線が得られている。

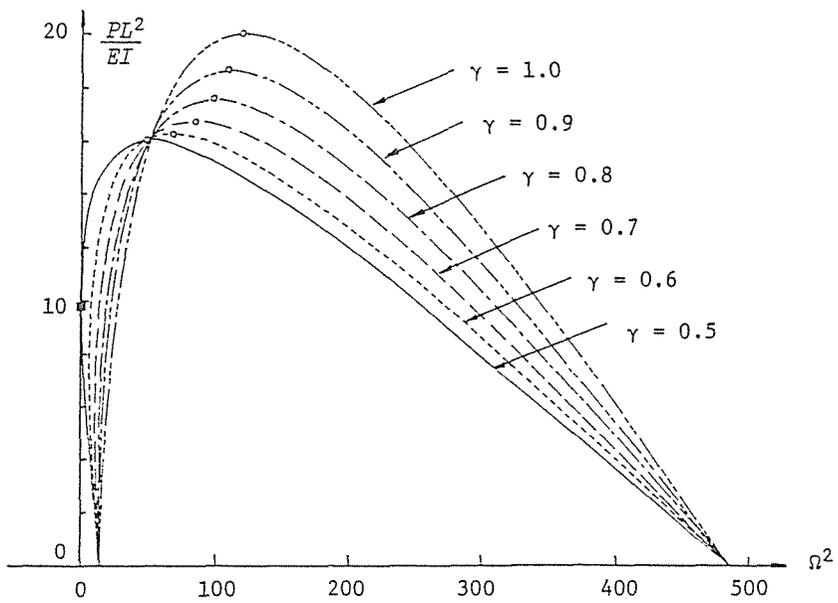
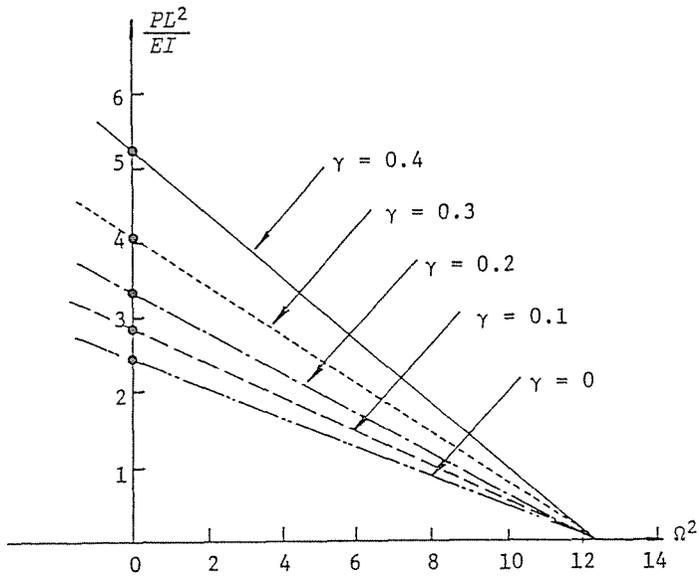


図4-3 準接線および接線荷重を受ける片持梁 (Beckの問題) の固有値曲線 ($M=11$)

(2) 一様分布接線荷重を受ける梁 (Leipholz の問題)

一様分布接線荷重 q を受ける異なった境界条件の梁を解析する。境界条件としては、固定-自由 (C-F)、固定-単純支持 (C-H)、両端単純支持 (H-H) および両端固定 (C-C) の場合を扱った。図 4-4 は、内部選点数 $M = 3 \sim 12$ に対する臨界荷重の収束状況を示したもので、○印は解が Flutter タイプで、●印と■印はそれぞれ、Divergence および Hybrid タイプで解が決定されたことを示す。参考のために、各種境界条件における固有値曲線を図 4-5 に示す。本解析法の解の収束状況は、解の決定される固有値曲線によって異なり (境界条件に依存)、Divergence タイプで解が得られる条件 (H-H) の場合が他のタイプで解が得られる場合より収束は早い。これは、Divergence で解が定まる場合は系の振動波形が第一次モードが支配的であるのに対し、Flutter と Hybrid のタイプで解が定まる場合は振動波形が第一次モードと第二次モードが組合さったものとなるため、低次の近似 (少ない内部選点数) の影響が現われたためである (表 4-4)。したがって、Flutter および Hybrid タイプで解が予想されるときは、二つの振動モードからなる振動波形を十分に表現しうる高次の近似を用いる必要がある。なおこの問題に対してある程度の精度 (1%以内の差) で解を求めるには $M = 6$ で十分である。

表 4-4 に本解析法により得られた臨界荷重を示した。表には比較のために、Galerkin 法の解^{3,7)} と差分法の解⁹⁾ も併記してあり、本解法の結果が既往の解とよく一致することがわかる。

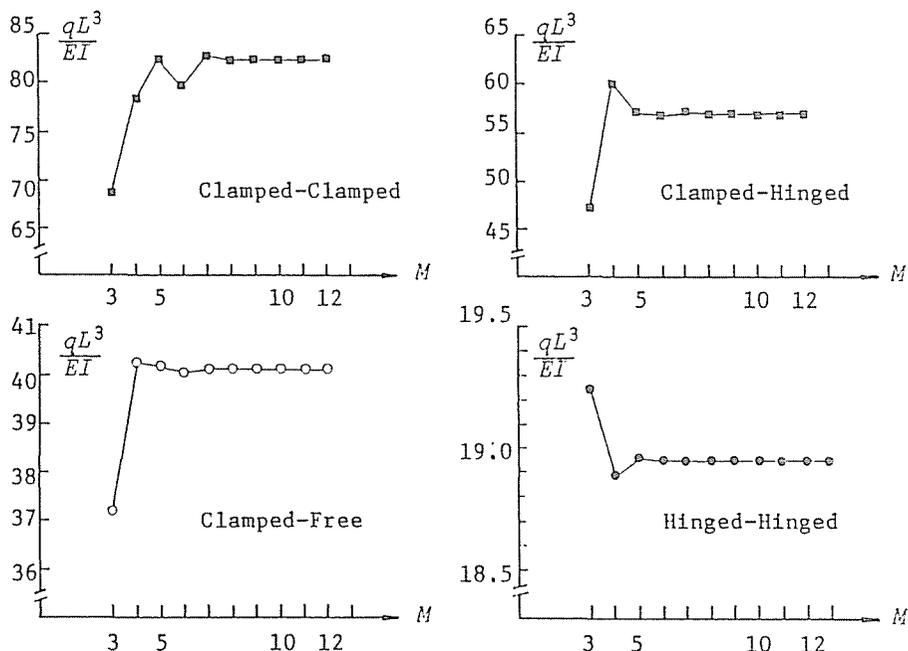


図 4-4 一様分布接線荷重を受ける梁 (Leipholz の問題) の臨界荷重の収束性

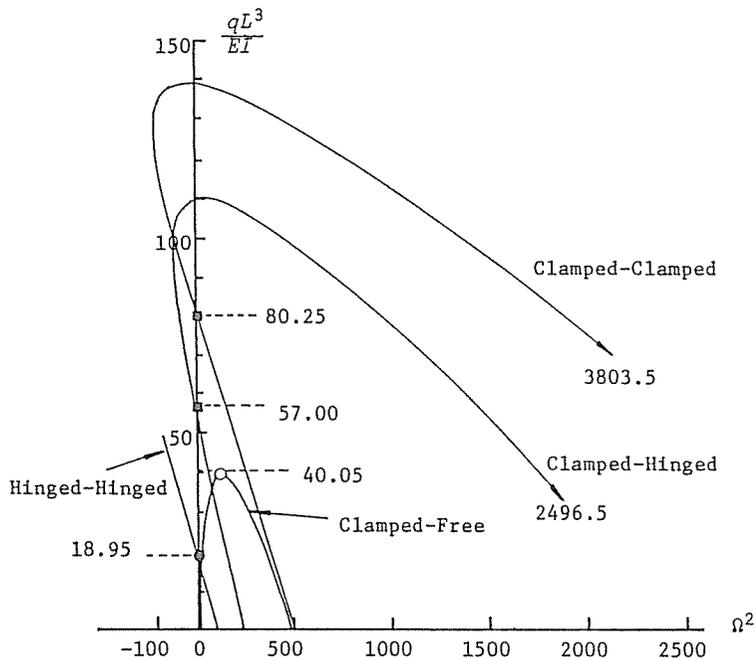


図 4-5 一様分布接線荷重を受ける梁(Leipholz の問題)の固有値曲線($M=11$)

表 4-4 一様分布接線荷重を受ける梁 (Leipholz の問題)の臨界荷重, $\eta=qL^3/EI$

Boundary condition	This study				F.D.M.		Galerkin method	
	$M = 5$	$M = 6$	$M = 7$	$M \geq 8$	$K = 50$	$K = 100$	$N = 2$	$N = 4$
C-C	82.36	79.81	80.29	80.25	80.09	80.22		81.37
C-H	57.05	56.94	57.01	57.00	56.92	56.99		57.95
C-F	40.17	40.03	40.05	40.05	40.03	40.05	40.7	
H-H	18.96	18.95	18.95	18.95	18.95	18.95	18.96	

C: Clamped, H: Hinged, F: Free
 F.D.M.: Finite difference method
 K : Number of division points
 N : Number of trial functions

(3) 直線分布接線荷重を受ける梁 (Hauger の問題)

(2)と同じ境界条件に対する解析結果を示す。図4-6は、本解析法による臨界荷重の収束の様子を示したもので、図中の○、●印の意味するところは図4-4と同じである。収束状況は一様分布接線荷重を受ける問題に類似であり、いずれの境界条件に対しても、内部選点数 $M=6, 7$ 程度で一定値が得られている。参考のために、各種境界条件に対する固有値曲線 ($M=11$) を図4-7に示す。本解析法による臨界荷重の算定において注意すべき点は、内部選点数 M の値が小さければ条件 (C-C)、(C-H) に見られるように、真の臨界荷重の性質と異なる解を決定する危険性がある点である (図4-6)。この欠点は内部選点数 M を増加させることによって自動的に解消されるが、選点法を非保存的弾性安定問題に適用する際の留意すべき点と思われる。なお同様な欠点が他の近似解法 (Galerkin法) にもみられることを付記しておく (表4-5)。

表4-5は、本解析値と差分法の解⁹⁾および Galerkin法の解^{7,8)}の数値的比較を示したものである。現段階では、厳密解がないので直接的な精度の検討はできないが、本解析法によっても十分に臨界荷重の算定が可能と考えられる。

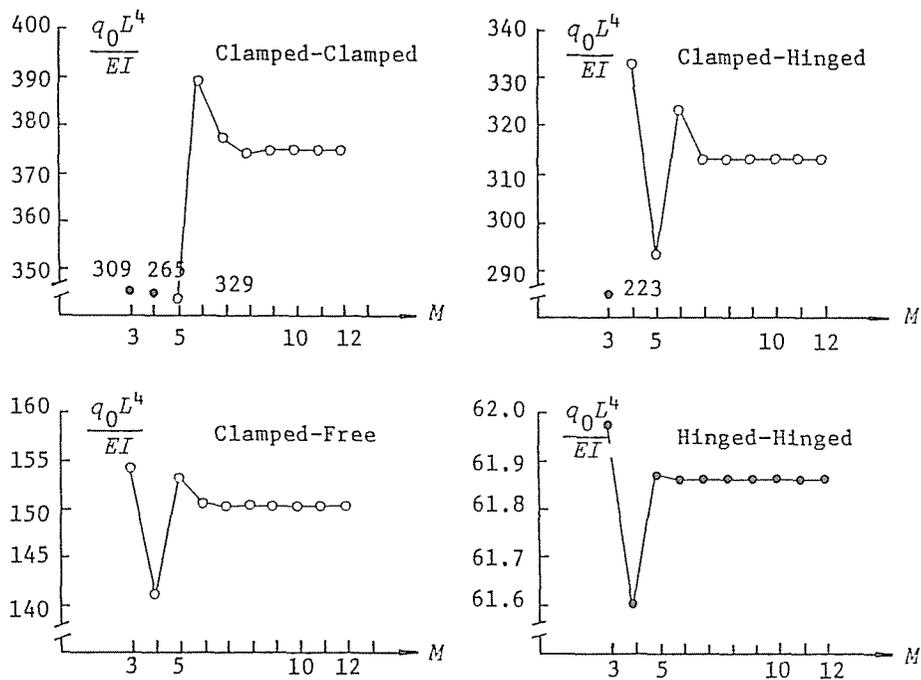


図4-6 直線分布接線荷重を受ける梁 (Hauger の問題) の臨界荷重の収束性

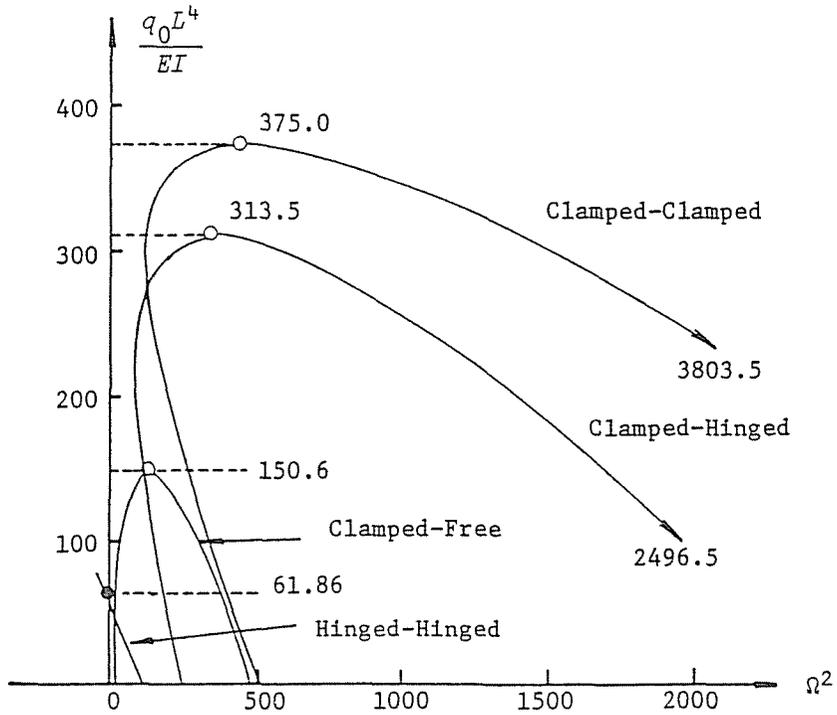


図4-7 直線分布接線荷重を受ける梁 (Hauger の問題) の固有値曲線 ($M=11$)

表4-5 直線分布接線荷重を受ける梁 (Hauger の問題) の臨界荷重, $\eta = q_0 L^4 / EI$

Boundary condition	This study				F.D.M.		Galerkin method	
	$M = 6$	$M = 7$	$M = 8$	$M \geq 9$	$K = 50$	$K = 100$	$N = 2$	$N = 4$
C-C	389.1	377.4	374.0	375.0	374.2	375.0	328.0 [●]	376.0
C-H	323.6	313.1	313.2	313.5	312.8	313.3	402.3 [●]	314.5
C-F	150.6	150.5	150.6	150.6	150.4	150.6	158.2	
H-H	61.86	61.86	61.86	61.86	61.84	61.86	62.28	

C: Clamped, H: Hinged, F: Free
 F.D.M.: Finite difference method
 K : Number of division points
 N : Number of trial functions
 ● : Divergence type

4-5 結 論

選点法を用いた非保存的弾性安定問題の一解析法として、内部選点固有方程式に帰着させ解析する手法を述べ、その適用可能性と数値解析上の特性を柱・梁の2、3の数値例より検討したものである。その結果つぎの点が明らかになった。

- 1) 非自己随伴形の境界値問題として定義される非保存的安定問題を内部選点固有方程式の形で記述し、その固有値を見出す問題へと変換した。
- 2) 本解析法による解は、既往研究結果とよい一致を示し、比較的少ない内部選点数 ($M \geq 7$) でも実用上十分な精度の解が得られることを確認した。また本章で扱った問題に限れば、有限要素法や差分法などの従来近似手法と比べて、比較的次元数の少ない固有値問題を扱えばよい。
- 3) ただし、低次の近似 (少ない内部選点数) で離散化すれば、真の解 (臨界荷重、固有値曲線) の性質と異なる解を見出す可能性もある。この欠点は、内部選点数を増せば自然に取り除かれるが、選点法を適用する際の留意事項である。

第 4 章 参 考 文 献

- 1) Beck, M. : Die Knicklast des eingespannten, tangential gedrückten Stabes, Z. angew. Math. Phys., Vol.3, pp.225-228, 1952.
- 2) Leipholz, H. : Stability Theory, Academic Press, 1970.
- 3) Bolotin, V.V. : Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergamon Press, 1963.
- 4) Leipholz, H. and Madan, Om.P. : On the solution of the stability problem of elastic rods subjected to uniformly distributed, tangential follower forces, Ing.- Arch., Vol.44, pp.347-357, 1975.
- 5) Leipholz, H. : Anwendung des Galerkinschen Verfahrens auf nichtkonservative Stabilitätsprobleme des elastischen Stabes, Z. angew. Math. Phys., Vol.13, pp.359-372, 1962.
- 6) Leipholz, H. : Die Knicklast des einseitig eingespannten Stabes mit gleichmässig verteilter, tangentialer Läragsbelastung, Z. angew. Math. Phys., Vol.13, pp.581-589, 1962.
- 7) Hauger, W. : Die Knicklasten elastischer Stäbe unter gleichmäßig verteilten und linear veränderlichen, tangentialen Druckkräften, Ing.- Arch., Vol.35, pp.221-229, 1966.
- 8) Hauger, W. : Untersuchung zur Genauigkeit des Galerkinschen Verfahrens anhand exakter Knicklasten elastischer Stäbe unter nichtkonservativer Belastung, Der Stahlbau, Vol.47, pp.169-174, 1978.
- 9) 杉山吉彦・片山忠一・関谷壮 : 差分法による柱の非保存的不安定問題の解析, 日本機械学会論文集, 37巻, 295号, pp.455-461, 1971.
- 10) Irie, T., Yamada, G. and Takahashi, K. : Vibration and stability of a non-uniform Timoshenko beam subjected to a follower force, J. Sound Vib., Vol.70, pp.503-512, 1980.
- 11) Barsoum, R. : Finite element method applied to the problem of stability of a nonconservative system, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.3, pp.63-87, 1971.
- 12) Kikuchi, F. : A finite element method for non-self-adjoint problems, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.6, pp.39-54, 1973.
- 13) Mikami, T. and Yoshimura, J. : On some eigenvalue problems of beams and columns by the collocation method, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.29, Univ. of Tokyo Press, pp.307-318, 1981.
- 14) Leipholz, H. : Aspects of dynamic stability of structures, Proc. ASCE, Vol.101, No.EM2, pp.109-124, 1975.
- 15) Leipholz, H. : Über die Befreiung der Ansatzfunktionen des Ritzschen und Galerkinschen Verfahrens von den Randbedingungen, Ing.- Arch., Vol.36, pp.251-261, 1967.
- 16) König, H. : Die Knickkraft beim einseitig eingespannten Stab unter nicht-richtungstreuer Kraftwirkung, Der Stahlbau, Vol.29, pp.150-154, 1960.

第 5 章 回転殻の構造振動問題

5-1 概 説

構造物に作用する外力は、多かれ少なかれ動的である。それゆえ、構造設計においては、動的問題の解析が要求される場合がしばしばある。

動的問題は、構造振動問題と波動伝播問題に大きく分類され、前者は構造の全体的な振動を扱うもので、低次の振動モードに支配されるのが特徴であり、後者は局所的な波の伝播を追跡するもので、低次のみならず高次の振動モードに影響を受けるのが特徴である。本章は前者の構造振動問題を取り扱っている。

動的問題の支配方程式は、未知量を時間および空間座標の関数とする偏微分方程式の形で与えられるのが普通である。構造物の挙動を知るためには、与えられた境界条件や初期条件のもとで支配方程式を解くことが要求されるが、対象とする構造物の形状などが少し複雑になれば、支配方程式をまともに解くことは不可能になる。それゆえ、動的問題の解析は、まず何らかの近似手法を適用して空間を離散化し、その結果得られる時間依存の連立常微分方程式を時間方向に積分するという二段階から構成されるのが一般的である。本章は、空間領域の離散化手法に焦点をあてたものであり、具体的な構造要素としては回転殻を対象とし、時間方向の積分には直接積分法の採用を前提とした、空間領域に対する選点法の適用可能性およびその精度の確認を行ったものである。

動的問題、静的問題を問わず空間領域の離散化手法としてもっとも一般的なものに、対象とした領域を有限個の点とか要素に分割する、いわゆる領域型解法と呼ばれる差分法や有限要素法があり、いずれも回転殻の問題に広く活用されている。例えば差分法による場合には、Budiansky と Radkowski¹⁾、Johnson と Greif²⁾の研究、そして Smith³⁾などの研究がある。このうち前二者は、変位と曲げモーメントを独立な未知量とする2階常微分方程式に通常の差分公式を適用したものであり、後者は面外変位については4階、面内変位については2階の微分方程式に高階差分の適用を試みたものである。一方有限要素法は、数多くの研究がなされ、平面シェル要素、曲面シェル要素、軸対称要素など多種多様な要素が開発されている⁴⁾。そのうち一次的構造にモデル化し解析する軸対称要素に限れば、Grafton らの円錐台要素による初期の研究⁵⁾、Percy らによる円錐台要素の非軸対称荷重への拡張⁶⁾、Gould らによる要素内変位関数の次数増加による精度向上⁷⁾、Jones らおよび Stricklin らによる曲線要素を用いて曲面形状の近似度を向上させる研究^{8,9)}そして Elias による混合法の定式化による研究¹⁰⁾などが挙げられる。

前記の二つの手法は、解法の簡明さ、任意境界条件への広い適用性などの利点がある一方、解の高精度化のための要素細分割や格子点数の増加の必要性、およびそれに伴う大次元行列演算の必要性など問題点も多い。特に時間依存の問題において、時間に関する方程式の係数行列が大次元となる場合には、係数行列の固有値が広い範囲に分布することになり、これに起因して時間領域の積分が不安定となったり、安定に解くためには計算時間が長くなるなどの問題点も生じる。なお有限要

素法では、記憶容量の縮小および計算時間の短縮を計るため、自由度の低減がなされるが、自由度の低減は直接、精度に関係することが多く、注意を要する。さらに変位のみを独立な未知量として扱う場合には、要素細分割および格子点の増加を行っても、たわみに関する高次の導関数から求められる曲げモーメントおよびせん断力などの力学的諸量の精度は、たわみのそれに比べて不十分な場合が多い。この問題点は有限要素法や差分法に限らず、領域型解法の共通の問題であり、今日なお改善のための努力が続けられている。

さて選点法は、選点の選択によっては未知数の個数の減少という利点、および定式化の容易さという固有の長所があり、これらを生かすことにより、差分法や有限要素法などの従来の近似手法以上の結果を期待することも可能と思われるが、構造振動問題の解析に用いた研究は少なく、著者らの研究以外に見当たらないようである^{11,20)}。

選点法と類似の概念に基づいた手法 (Partition 法、Subdomain collocation 法とよばれる) が、回転殻の静的応力解析^{12,13)}に適用されている。しかし、この手法は領域分割の仕方に大きく依存するもので、場の大域的性質で規定される固有値問題を除き、局所的な応力・変形挙動の把握を必要とする問題への適用は得策とは思えない。

本章は、前記の近似解法の問題点に考慮を払い、選点法の薄肉回転殻の構造振動問題への適用可能性の検討を行ったものである。定式化の基本的な流れは、これまでのそれを踏襲するが、ここでは、仮定した未知関数の高階微分の影響が力学的諸量に現われることを考慮して、階数引下げられた支配方程式の採用および殻の経線方向に沿う要素分割により解の精度向上を計った。また選点法のもっている定式過程の簡明さが、方程式の階数引下げや要素分割によって失われないように留意し、数値計算がきわめて平易かつ機械的になるように配慮した。

以下、2節ではNovozhilovの線形殻理論¹⁴⁾に基づき、変位と経線方向曲げモーメントを従属変数とする、階数の引下げられた位意形状の回転殻の支配方程式を導く。3節は、空間領域に選点法を適用し時間に関する常微分方程式を導く過程を略述する。4節では数値計算例を取り扱い、前半では静的負荷問題を解析し、選点法を局所的性質が重要となる問題に適用する際の離散化の方法を検討し、後半では構造振動問題を時間方向には直接積分法を用いて解析し、本解析法の有効性を実証する。5節は、結論である。

5-2 階数低下された回転殻の基礎方程式

回転殻の運動方程式は、円周方向にFourier級数展開により経線方向座標と時間に関する偏微分方程式として得られる。以下にNovozhilovの線形殻理論¹⁴⁾に基づき、変位と経線方向曲げモーメントを独立な未知量とした階数低下された基礎式を導く過程を略述する。殻は、等方等質な様な

厚さとした。なお、本節で用いる殻理論および記号などは、回転殻の自由振動問題を扱った第3章6節に同様であるので、ここでは展開上必要なことのみを記すことにする。

図3-12に示したように、 x 軸方向、 θ 軸方向および z 軸方向の変位を、それぞれ U 、 V および W と記し、合応力および合モーメント成分をそれぞれ、 $(N_x, N_\theta, N_{x\theta}, N_{\theta x})$ および $(M_x, M_\theta, M_{x\theta}, M_{\theta x})$ で表わす。新たに (x, θ, z) 軸方向に作用する単位面積当りの荷重成分を (P_x, P_θ, P_z) で表わすことにする。

回転殻の運動方程式は、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (RN_x) + R_1 \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} - R_1 N_\theta \cos \varphi + \frac{1}{R_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} (RM_x) + R_1 \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - R_1 M_\theta \cos \varphi \right\} \\ + RR_1 P_x = \rho h RR_1 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5-1a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (RN_{x\theta}) + R_1 \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + R_1 N_{\theta x} \cos \varphi + \frac{1}{R} \left\{ R_1 \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (RM_{x\theta}) + R_1 M_{\theta x} \cos \varphi \right\} \\ + RR_1 P_\theta = \rho h RR_1 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5-1b)$$

$$\begin{aligned} -R_1 N_\theta \sin \varphi - RN_x + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ R_1 \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (RM_{x\theta}) + R_1 M_{\theta x} \cos \varphi \right\} \\ + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} (RM_x) + \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - M_\theta \cos \varphi \right\} - RR_1 P_z = \rho h RR_1 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5-1c)$$

ここに、 φ ：経角、 R ：回転曲面の半径、 R_1, R_2 ：主曲率半径、 ρ ：単位体積当りの質量、 t ：時間、 h ：殻の厚さであり、断面力（合応力、合モーメント）-ひずみ関係式およびひずみ-変位関係式は、それぞれ式(3-68)および式(3-69)で与えられている。

式(5-1)は、変位成分のみを従属変数とする形で表わせば、位置に関する最高4階の微分方程式となるが、新たに経線方向曲げモーメントを独立な変数として導入することにより、位置に関して2階の階数低下の微分方程式へと変換される。階数低下の準備として、式(3-68d)と式(3-68e)より次式を求めておく。

$$M_\theta = \nu M_x + D(1 - \nu^2) \chi_\theta \quad (5-2)$$

ここで、 $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ 、 E ：弾性係数、 ν ：ポアソン比であり、 χ_θ は式(3-69e)で与えられる曲率である。

変位 (U, V, W), 合応力 (N_x, N_θ, N_{xθ}(=N_{θx})), 合モーメント (M_x, M_θ, M_{xθ}(=M_{θx})), および荷重 (P_x, P_θ, P_z) を、それぞれ (u, v, w), (n_x, n_θ, n_{xθ}(=n_{θx})), (m_x, m_θ, m_{xθ}(=m_{θx})), および (p_x, p_θ, p_z) を係数とする形で円周方向に Fourier 級数展開する。基準応力を σ, 基準長さを a, 円周方向波数を n と記せば、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} &= \frac{\sigma a^2}{Eh} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} U^{(n)} \cos n\theta \\ V^{(n)} \sin n\theta \\ W^{(n)} \cos n\theta \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \end{Bmatrix} = \sigma a \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} n_x^{(n)} \cos n\theta \\ n_\theta^{(n)} \cos n\theta \\ n_{x\theta}^{(n)} \sin n\theta \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} &= \sigma a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} m_x^{(n)} \cos n\theta \\ m_\theta^{(n)} \cos n\theta \\ m_{x\theta}^{(n)} \sin n\theta \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} P_x \\ P_\theta \\ P_z \end{Bmatrix} = \sigma \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} p_x^{(n)} \cos n\theta \\ p_\theta^{(n)} \sin n\theta \\ p_z^{(n)} \cos n\theta \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} (5-3)$$

以下では簡単のため、Fourier 係数の添字(n)は省略する。さらに、後の展開のために χ_θ を係数 $\bar{\chi}_\theta$ とする形で Fourier 級数展開する。

$$\chi_\theta = \frac{\sigma}{Ea} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\chi}_\theta \cos n\theta \quad (5-4)$$

変位成分 (u, v, w) および経線方向曲げモーメント (m_x) を従属変数とする 2階 4元連立偏微分方程式は、次のように得られる。なおこの過程で、空間の独立変数 φ の新たな変数 ξ (= x/l, l: 経線の長さ) への変換を、3-7に習い行うものとする。まず式(5-1)に、式(5-2)~式(5-4)を代入し、Fourier 係数 u, v, w, n_x, n_θ, n_{xθ}, m_x, m_{xθ}, $\bar{\chi}_\theta$ を変数とする方程式を導く。次にこれらの方程式において、n_x, n_θ, n_{xθ}, m_{xθ} と $\bar{\chi}_\theta$ を断面力-ひずみ関係式、ひずみ-変位関係式を用いて変位成分で表わせば、式(5-1)は次のように表示される。

$$\begin{aligned} a_1 u'' + a_2 u' + a_3 u + a_4 v' + a_5 v + a_6 w' + a_7 w + a_8 m_x' \\ + a_9 m_x = -p_x + \ddot{u} \end{aligned} \quad (5-5a)$$

$$\begin{aligned} a_{10} u' + a_{11} u + a_{12} v'' + a_{13} v' + a_{14} v + a_{15} w'' + a_{16} w' + a_{17} w \\ + a_{18} m_x = -p_\theta + \ddot{v} \end{aligned} \quad (5-5b)$$

$$\begin{aligned} a_{19} u' + a_{20} u + a_{21} v'' + a_{22} v' + a_{23} v + a_{24} w'' + a_{25} w' + a_{26} w \\ + a_{27} m_x'' + a_{28} m_x' + a_{29} m_x = p_z + \ddot{w} \end{aligned} \quad (5-5c)$$

第4番目の方程式は、経線方向曲げモーメントの定義式(3-68d)より求められる。定義式の曲率 χ_x と χ_θ を変位成分で表わせば、次式となる。

$$a_{30} U' + a_{31} U + a_{32} V + a_{33} W'' + a_{34} W' + a_{35} W + a_{36} M_x = 0 \quad (5-5d)$$

式(5-5)において、微分演算子、無次元化された空間と時間の変数 ξ と τ は、

$$\left. \begin{aligned} (\prime = \partial(\) / \partial \xi, \quad (\prime = \partial(\) / \partial \tau \\ \xi = x / \ell, \quad \tau = (t / a) \sqrt{E / \rho} \end{aligned} \right\} \quad (5-6)$$

であり、 ξ は区間 $[0, 1]$ で定義される経線方向座標である。さらに、式(5-5)中の $a_1 \sim a_{36}$ は、殻の形状パラメータ(式(3-73))、円周方向波数 n およびポアソン比 ν で表わされる係数であり、その詳細は本章の付録に示す。

境界条件および後述する殻の分割点で成立する接続条件は、次の四組の適当な組合せによって構成される。

$$\left. \begin{aligned} U \text{ または } N_x, \quad V \text{ または } S_x \theta \\ W \text{ または } T_x, \quad \phi_x \text{ または } M_x \end{aligned} \right\} \quad (5-7a)$$

あるいは、Fourier 係数で表示すれば、

$$\left. \begin{aligned} u \text{ または } n_x, \quad V \text{ または } \bar{S}_x \theta \\ W \text{ または } t_x, \quad \phi_x \text{ または } m_x \end{aligned} \right\} \quad (5-7b)$$

となる。式(5-7a)で、 T_x と $S_x \theta$ は式(3-85)で定義される、それぞれ等価せん断力と等価接線力、および ϕ_x は式(3-79a)で定義される $x(\xi)$ 軸方向の回転角であり、それぞれ t_x , $\bar{S}_x \theta$ および ϕ_x を係数として Fourier 級数表示すれば以下となる。

$$\left\{ \begin{aligned} T_x \\ S_x \theta \\ \phi_x \end{aligned} \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} \sigma a t_x \cos n \theta \\ \sigma a \bar{S}_x \theta \sin n \theta \\ (\sigma a / Eh) \phi_x \cos n \theta \end{aligned} \right\} \quad (5-8)$$

ここで、後の定式化において必要な N_x , $S_x \theta$, T_x および ϕ_x の各 Fourier 係数の内容を示しておく。

$$\left. \begin{aligned} n_x &= b_1 U' + b_2 U + b_3 V + b_4 W \\ \bar{S}_x \theta &= b_5 U + b_6 V' + b_7 V + b_8 W' + b_9 W \\ t_x &= b_{10} U + b_{11} V' + b_{12} V + b_{13} W' + b_{14} W \\ &\quad + b_{15} m_x' + b_{16} m_x \\ \phi_x &= b_{17} U + b_{18} W' \end{aligned} \right\} \quad (5-9a \sim d)$$

なお、係数 $b_1 \sim b_{18}$ は本章の付録に示す。

5-3 選点法による空間領域の離散化

図5-1に示すように、回転殻を経線に沿ってN個の要素に分割する。(k)番目の要素を(k)要素と名付け、境界条件が指定される点を1, N+1, 分割点を2, 3, ..., Nと番号付けをする。各要素の経線の長さを $\ell^{(k)}$ ($k=1 \sim N$) と表わし、要素は $0 \leq \xi \leq 1$ の領域で定義されたとする。以下、(k)要素に関する諸量は肩添字(k)を付して表わすことにする。

各要素の未知関数を、要素内部にM個の自由度を持たせ、満足すべき境界条件や接続条件の個数を考慮に入れて、次のように近似する。

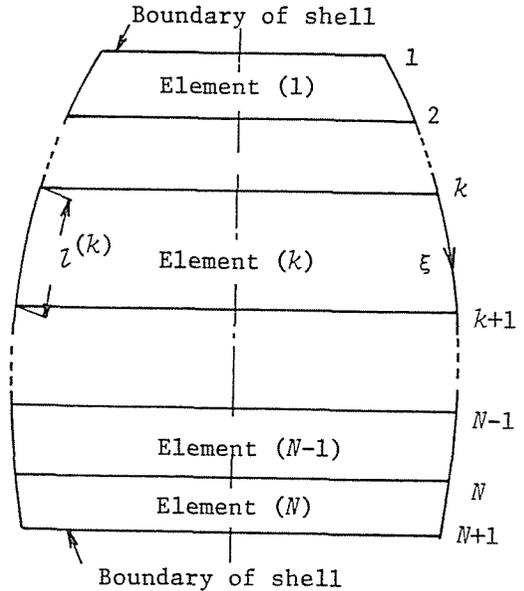


図5-1 N個の要素からなる回転殻

$$(u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}, m_x^{(k)})$$

$$= \sum_{i=1}^{M+2} \{d_{i-1}^{(k)}(\tau), e_{i-1}^{(k)}(\tau), f_{i-1}^{(k)}(\tau), g_{i-1}^{(k)}(\tau)\} \xi^{i-1}$$

(5-10)

ここで、未定パラメータ $d_{i-1}^{(k)}$, $e_{i-1}^{(k)}$, $f_{i-1}^{(k)}$, $g_{i-1}^{(k)}$ は時間の関数である。

さて、式(5-10)そのものを用いて問題を定式化すれば、何ら物理的意味をもたない時間依存の係数を求める問題に帰着するが、本章では関数の値、すなわち内部選点 ξ_j ($i=1 \sim M$) および端点 $\xi_0=0$, $\xi_{M+1}=1$ における時刻 τ での値を定める問題へと変換する。この変換は、時刻 τ での ξ に関する1, 2次微分係数と、時刻 τ での内部選点と端点における関数値を結びつける次式を用いてなされる。未知関数 $u^{(k)}$, $v^{(k)}$, $w^{(k)}$, $m_x^{(k)}$ を代表して $Z^{(k)}$ と記せば、

$$\left. \begin{aligned} \{Z^{(k)}\}_\tau &= [A \langle 1 \rangle] \{Z^{(k)}\}_\tau \\ \{Z^{(k)}\}_\tau &= [A \langle 2 \rangle] \{Z^{(k)}\}_\tau \end{aligned} \right\} \quad (5-11 a, b)$$

ここで、 $(M+2)$ 次のベクトルは、

$$\left. \begin{aligned} \{ Z^{(k)} \}_\tau^T &= (Z^{(k)}(\xi_0)_\tau, Z^{(k)}(\xi_1)_\tau, \dots, Z^{(k)}(\xi_{M+1})_\tau) \\ \{ Z'^{(k)} \}_\tau^T &= (Z'^{(k)}(\xi_0)_\tau, Z'^{(k)}(\xi_1)_\tau, \dots, Z'^{(k)}(\xi_{M+1})_\tau) \\ \{ Z^{(k)} \}_\tau^T &= (Z^{(k)}(\xi_0)_\tau, Z^{(k)}(\xi_1)_\tau, \dots, Z^{(k)}(\xi_{M+1})_\tau) \end{aligned} \right\} \quad (5-12)$$

と表わされ、 $(M+2) \times (M+2)$ 次のマトリックス $[A^{(1)}]$ と $[A^{(2)}]$ は、式(2-27a)で与えられる。

なお、今後は簡単のために添字 τ は省略され、式(5-12)のベクトルは内部選点と端点に分離され次のように記される。例えば、 $\{ Z^{(k)} \}$ については次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \{ Z_I^{(k)} \}^T &= (Z^{(k)}(\xi_1), Z^{(k)}(\xi_2), \dots, Z^{(k)}(\xi_M)) \\ \{ Z_B^{(k)} \}^T &= (Z^{(k)}(\xi_0), Z^{(k)}(\xi_{M+1})) \end{aligned} \right\} \quad (5-13)$$

ここに、添字 I は内部選点を、添字 B は端点を表わすものとする。

未知関数に含まれる未知数の個数は、式(5-10)より明らかのように、1個の要素では $4(M+2)$ 、 N 個の要素では $4(M+2)N$ となる。この空間を離散化するのに必要とする $4(M+2)N$ 個の条件式は、次の(1)、(2)および(3)で与えられる。

(1) $4MN$ 個の条件式

$4MN$ 個の条件式は、方程式(5-5)の時刻 τ での内部選点における残差の条件より定められる。

いま、 (k) 要素について考えてみる。 (k) 要素の未知関数を式(5-5)に代入すれば、時間変数 τ と空間変数 ξ を関数とする残差 $R_i^{(k)}(\xi, \tau)$ ($i=1 \sim 4$ であり、式(5-5a~d)に対応する) が定義できる。したがって、空間に対する $4M$ 個の条件式は、空間変数 ξ に対して Dirac のデルタ関数を用いて、

$$\int_0^1 R_i^{(k)}(\xi, \tau) \delta(\xi - \xi_j) d\xi = R_i^{(k)}(\xi_j, \tau) = 0 \quad (5-14)$$

と表現される。ここに、 $i=1 \sim 4$ 、 $j=1 \sim M$ 。

式(5-14)は、式(5-5)に現われる ξ に関する微分の階数に留意し、式(5-11)のマトリックス $[A^{(1)}]$ と $[A^{(2)}]$ を用いて、時間に関するマトリックス常微分方程式の系で、

$$[K_I^{(k)}] \{ \delta_I^{(k)} \} + [K_B^{(k)}] \{ \delta_B^{(k)} \} = \{ P_I^{(k)} \} + [M_I^{(k)}] \{ \dot{\delta}_I^{(k)} \} \quad (5-15)$$

と表わされる。ここに、添字 I, B はそれぞれ、内部選点、端点に関するマトリックス、ベクトルを表わす。4M 次のベクトル $\{\delta_I^{(k)}\}$, $\{\ddot{\delta}_I^{(k)}\}$ と 8 次のベクトル $\{\delta_B^{(k)}\}$ の内容は、

$$\left. \begin{aligned} \{\delta_I^{(k)}\}^T &= (\{u_I^{(k)}\}^T, \{v_I^{(k)}\}^T, \{w_I^{(k)}\}^T, \{m_{xI}^{(k)}\}^T) \\ \{\delta_B^{(k)}\}^T &= (\{u_B^{(k)}\}^T, \{v_B^{(k)}\}^T, \{w_B^{(k)}\}^T, \{m_{xB}^{(k)}\}^T) \\ \{\ddot{\delta}_I^{(k)}\}^T &= (\{\ddot{u}_I^{(k)}\}^T, \{\ddot{v}_I^{(k)}\}^T, \{\ddot{w}_I^{(k)}\}^T, \{\ddot{m}_{xI}^{(k)}\}^T) \end{aligned} \right\} \quad (5-16)$$

ただし、部分ベクトル $\{u_I^{(k)}\}$, $\{u_B^{(k)}\}$ などの具体的内容の表示法は、式(5-13)のそれに従うものとする。また荷重ベクトル $\{P_I^{(k)}\}$ は、次のようなものである。

$$\{P_I^{(k)}\}^T = (\{P_x^{(k)}\}^T, \{P_\theta^{(k)}\}^T, \{P_z^{(k)}\}^T, \{0\}^T) \quad (5-17)$$

ここで、 $\{0\}$ は M 次の零ベクトルであり、他の M 次のベクトルは、次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \{P_x^{(k)}\}^T &= (-P_x^{(k)}(\xi_1), -P_x^{(k)}(\xi_2), \dots, -P_x^{(k)}(\xi_M)) \\ \{P_\theta^{(k)}\}^T &= (-P_\theta^{(k)}(\xi_1), -P_\theta^{(k)}(\xi_2), \dots, -P_\theta^{(k)}(\xi_M)) \\ \{P_z^{(k)}\}^T &= (P_z^{(k)}(\xi_1), P_z^{(k)}(\xi_2), \dots, P_z^{(k)}(\xi_M)) \end{aligned} \right\} \quad (5-18)$$

さらに、 $[M_I^{(k)}]$ は、 $(4M \times 4M)$ 次の次式で与えられる対角マトリックス

$$[M_I^{(k)}] = \text{diag} \left[\overbrace{1, 1, \dots, 1}^{3M}, \overbrace{0, 0, \dots, 0}^M \right] \quad (5-19)$$

であり、 $(4M \times 4M)$ 次のマトリックス $[K_I^{(k)}]$ と $(4M \times 8)$ 次のマトリックス $[K_B^{(k)}]$ は、次のようになる。

$[K_I^{(k)}]$ について：

$$[K_I^{(k)}] = \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uv}] & [K_{uw}] & [K_{um}] \\ [K_{vu}] & [K_{vv}] & [K_{vw}] & [K_{vm}] \\ [K_{wu}] & [K_{wv}] & [K_{ww}] & [K_{wm}] \\ [K_{mu}] & [K_{mv}] & [K_{mw}] & [K_{mm}] \end{bmatrix} \quad (5-20)$$

ただし、 $(M \times M)$ 次の部分マトリックスの具体的内容は以下のとおりである。

$$\begin{aligned}
 K_{uu}(i, j) &= a_1(\xi_i)A^{(2)}(i+1, j+1) + a_2(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) \\
 &\quad + a_3(\xi_i)\delta_{ij} \\
 K_{uv}(i, j) &= a_4(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + a_5(\xi_i)\delta_{ij} \\
 K_{uw}(i, j) &= a_6(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + a_7(\xi_i)\delta_{ij} \\
 K_{um}(i, j) &= a_8(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + a_9(\xi_i)\delta_{ij} \\
 K_{vu}(i, j) &= a_{10}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{11}(\xi_i)\delta_{ij} \\
 K_{vv}(i, j) &= a_{12}(\xi_i)A^{(2)}(i+1, j+1) + a_{13}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) \\
 &\quad + a_{14}(\xi_i)\delta_{ij} \\
 K_{vw}(i, j) &= a_{15}(\xi_i)A^{(2)}(i+1, j+1) + a_{16}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) \\
 &\quad + a_{17}(\xi_i)\delta_{ij} \\
 K_{vm}(i, j) &= a_{18}(\xi_i)\delta_{ij} \\
 K_{wu}(i, j) &= a_{19}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{20}(\xi_i)\delta_{ij} \\
 K_{wv}(i, j) &= a_{21}(\xi_i)A^{(2)}(i+1, j+1) + a_{22}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) \\
 &\quad + a_{23}(\xi_i)\delta_{ij} \\
 K_{ww}(i, j) &= a_{24}(\xi_i)A^{(2)}(i+1, j+1) + a_{25}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) \\
 &\quad + a_{26}(\xi_i)\delta_{ij} \\
 K_{wm}(i, j) &= a_{27}(\xi_i)A^{(2)}(i+1, j+1) + a_{28}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) \\
 &\quad + a_{29}(\xi_i)\delta_{ij} \\
 K_{mu}(i, j) &= a_{30}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{31}(\xi_i)\delta_{ij} \\
 K_{mv}(i, j) &= a_{32}(\xi_i)\delta_{ij} \\
 K_{mw}(i, j) &= a_{33}(\xi_i)A^{(2)}(i+1, j+1) + a_{34}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) \\
 &\quad + a_{35}(\xi_i)\delta_{ij} \\
 K_{mm}(i, j) &= a_{36}(\xi_i)\delta_{ij}
 \end{aligned}
 \tag{5-21}$$

ここに、 $i, j = 1 \sim M$, δ_{ij} は Kronecker のデルタであり、 $A^{(k)}(i+1, j+1)$ はマトリックス $[A^{(k)}]$ の第 $i+1$ 行、第 $i+1$ 列の成分を意味する。

$[K_B^{(k)}]$ について：

$[K_B^{(k)}]$ を構成する $(M \times 2)$ 次の部分マトリックスを、 $[K_I^{(k)}]$ の部分マトリックスを表わすのに用いた記号にバー(—)を付して $[\bar{K}_{op}]$ ($o, p = u, v, w, m$) と表わすことにすれば、 $[\bar{K}_{op}]$ の各成分は、式 (5-21) において $A^{(2)}(i+1, j+1)$ と $A^{(1)}(i+1, j+1)$ をそれぞれ、 $A^{(2)}(i+1, \ell)$ および $A^{(1)}(i+1, \ell)$ に置き換え、さらに Kronecker のデルタを含む項を

取り除くことにより得られる。例えば、 $[\bar{K}_{up}]$ ($p = u, v, w, m$) の成分は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{uu}(i, j) &= a_1(\xi_i)A^{(2)}(i+1, \ell) + a_2(\xi_i)A^{(1)}(i+1, \ell) \\ \bar{K}_{uv}(i, j) &= a_4(\xi_i)A^{(1)}(i+1, \ell) \\ \bar{K}_{uw}(i, j) &= a_6(\xi_i)A^{(1)}(i+1, \ell) \\ \bar{K}_{um}(i, j) &= a_8(\xi_i)A^{(1)}(i+1, \ell) \end{aligned} \right\} \quad (5-22)$$

ここに、 $i = 1 \sim M$, $j = 1, 2$ であり、 ℓ は次の約束に従うものとする。

$$\ell \begin{cases} = 1 & ; \quad j = 1 \\ = M+2 & ; \quad j = 2 \end{cases}$$

全要素 (N 要素) に対する $4MN$ 個の条件式は、式 (5-15) を用いて

$$[K_I] \{ \delta_I \} + [K_B] \{ \delta_B \} = \{ P_I \} + [M_I] \{ \ddot{\delta}_I \} \quad (5-23)$$

とマトリックス方程式にまとめられる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} [K_I] &= \left[[K_I^{(1)}], [K_I^{(2)}], \dots, [K_I^{(N)}] \right]_{(4MN \times 4MN)} \\ [K_B] &= \left[[K_B^{(1)}], [K_B^{(2)}], \dots, [K_B^{(N)}] \right]_{(4MN \times 8N)} \\ [M_I] &= \left[[M_I^{(1)}], [M_I^{(2)}], \dots, [M_I^{(N)}] \right]_{(4MN \times 4MN)} \end{aligned} \right\} \quad (5-24)$$

であり、記号 $\left[[X^{(i)}] \right]$ ($i = 1 \sim N$) はマトリックス $[X^{(i)}]$ が対角マトリックス的に構成されることを意味する。さらに、

$$\left. \begin{aligned} \{ \delta_I \}^T &= \left(\{ \delta_I^{(1)} \}^T, \{ \delta_I^{(2)} \}^T, \dots, \{ \delta_I^{(N)} \}^T \right)_{1 \times 4MN} \\ \{ \delta_B \}^T &= \left(\{ \delta_B^{(1)} \}^T, \{ \delta_B^{(2)} \}^T, \dots, \{ \delta_B^{(N)} \}^T \right)_{1 \times 8N} \\ \{ \ddot{\delta}_I \}^T &= \left(\{ \ddot{\delta}_I^{(1)} \}^T, \{ \ddot{\delta}_I^{(2)} \}^T, \dots, \{ \ddot{\delta}_I^{(N)} \}^T \right)_{1 \times 4MN} \\ \{ P_I \}^T &= \left(\{ P_I^{(1)} \}^T, \{ P_I^{(2)} \}^T, \dots, \{ P_I^{(N)} \}^T \right)_{1 \times 4MN} \end{aligned} \right\} \quad (5-25)$$

(2) 8 個の条件式

ここでの 8 個の条件式と次の(3)で与えられる $8(N-1)$ 個の条件式は、殻の端末で規定される境界条件と分割点で成立する接続条件式で与えられる。これらの条件は、変形量 (u, v, w, ϕ_x) と力学量 ($n_x, \bar{S}_x \theta, t_x, m_x$) の組合せで与えられるものであり、一般的な形で以下に整理しておく。

変形量 (u, v, w, ϕ_x) について:

(k)要素の端点 $\xi_0 = 0, \xi_{M+1} = 1$ における変形量を次式で表わす。

$$\{X^{(k)}\}_{\xi=\xi_\ell}^T = (u^{(k)}(\xi_\ell), v^{(k)}(\xi_\ell), w^{(k)}(\xi_\ell), \phi_x^{(k)}(\xi_\ell)) \quad (5-26)$$

ここに、 ℓ は $\ell = 0$ または $\ell = M+1$ である。上式を内部選点における未知量 $\{\delta_I^{(k)}\}$ および端点における未知量 $\{\delta_B^{(k)}\}$ に分けてマトリックス表示すれば、次式となる (回転角 ϕ_x については、式 (5-9d) と式 (5-11a) を用いる)。

$$\{X^{(k)}\}_{\xi=\xi_\ell} = [G_I^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} \{\delta_I^{(k)}\} + [G_B^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} \{\delta_B^{(k)}\} \quad (5-27)$$

ここに、 $\ell = 0, M+1$, $(4 \times 4M)$ 次のマトリックス $[G_I^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell}$ と (4×8) 次のマトリックス $[G_B^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell}$ の具体的内容は以下のようになる。

$$[G_I^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [G_w] & [0] \end{bmatrix} \quad (5-28)$$

ここで、 $[Z]$ はその成分が Z_1, Z_2, \dots, Z_M である行マトリックスを表わし、 $[0]$ は成分が零の行マトリックス、 $[G_w]$ は次の成分から成る行マトリックスである。

$$G_{wi} = b_{18}(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1) \quad (5-29)$$

ただし、 $\ell = 0, M+1, i = 1 \sim M$ 。さらに、

$$[G_B^{(k)}]_{\xi=\xi_0} = \begin{bmatrix} 1 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 & \vdots \\ b_{17}(\xi_0) & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & b_{18}(\xi_0)A^{(1)}(1,1) & \vdots & b_{18}(\xi_0)A^{(1)}(1M+2) & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & & & & & & & & \vdots \end{bmatrix} \quad (5-30a)$$

$$\begin{aligned}
[G_B]_{\xi=\xi_{M+1}} = & \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 1 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & b_{17}(\xi_{M+1}) & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & b_{18}(\xi_{M+1})A^{(1)}(M+2,1) & \vdots \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots \\ b_{18}(\xi_{M+1})A^{(1)}(M+2, M+2) & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots \end{bmatrix} \quad (5-30b)
\end{aligned}$$

力学量 $(n_x, \bar{S}_{x\theta}, t_x, m_x)$ について：

(k)要素の端点 $\xi_0 = 0, \xi_{M+1} = 1$ における力学量を次式で表わす。

$$\{F^{(k)}\}_{\xi=\xi_\ell}^T = (n_x(\xi_\ell), \bar{S}_{x\theta}(\xi_\ell), t_x(\xi_\ell), m_x(\xi_\ell)) \quad (5-31)$$

ここに、 $\ell = 0, M+1$ 。上式は式(5-9a~c)と式(5-11a)を用い、式(5-27)に類似な表示法で書き表わせば、次のようにマトリックス表示される。

$$\{F^{(k)}\}_{\xi=\xi_\ell} = [Q_I^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} \{d_I^{(k)}\} + [Q_B^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} \{d_B^{(k)}\} \quad (5-32)$$

ただし、 $(4 \times 4M)$ および (4×8) 次のマトリックス $[Q_I^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell}$ および $[Q_B^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell}$ の具体的内容は、以下のとおりである。

$$[Q_I^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} = \begin{bmatrix} [Q_u] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [Q_v^1] & [Q_w^1] & [0] \\ [0] & [Q_v^2] & [Q_w^2] & [Q_m] \\ [0] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix}, \quad (\ell=0, M+1)$$

(5-33)

ここで、成分が零の行マトリックス $[0]$ 以外の各行マトリックスの成分は次のようなものである。

$$\left. \begin{aligned}
 Q_u i &= b_1(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1) \\
 Q_v^1 i &= b_6(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1) \\
 Q_w^1 i &= b_8(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1) \\
 Q_v^2 i &= b_{11}(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1) \\
 Q_w^2 i &= b_{13}(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1) \\
 Q_m i &= b_{15}(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1)
 \end{aligned} \right\} \quad (5-34)$$

ただし、 $\ell = 1, M+1, i = 1 \sim M$ 。さらに、

$$[Q_B^{(k)}]_{\xi=\xi_0} = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 b_1(\xi_0)\alpha + b_2(\xi_0) & b_1(\xi_0)\beta & & b_3(\xi_0) & & & & 0 \\
 & b_5(\xi_0) & & 0 & & b_6(\xi_0)\alpha + b_7(\xi_0) & & b_6(\xi_0)\beta \\
 & b_{10}(\xi_0) & & 0 & & b_{11}(\xi_0)\alpha + b_{12}(\xi_0) & & b_{11}(\xi_0)\beta \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & b_4(\xi_0) & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & b_8(\xi_0)\alpha + b_9(\xi_0) & & b_8(\xi_0)\beta & & 0 & & 0 \\
 & b_{13}(\xi_0)\alpha + b_{14}(\xi_0) & & b_{13}(\xi_0)\beta & & b_{15}(\xi_0)\alpha + b_{16}(\xi_0) & & b_{15}(\xi_0)\beta \\
 & 0 & & 0 & & 1 & & 0
 \end{array} \right] \quad (5-35a)$$

ただし、 $\alpha = A^{(1)}(1, 1)$ 、 $\beta = A^{(1)}(1, M+2)$ 。また、

$$[Q_B^{(k)}]_{\xi=\xi_{M+1}} = \left[\begin{array}{cccc|cccc}
 b_1(\xi_{M+1})\alpha & b_1(\xi_{M+1})\beta + b_2(\xi_{M+1}) & & 0 & & & & 0 \\
 & 0 & & b_5(\xi_{M+1}) & & b_6(\xi_{M+1})\alpha & & 0 \\
 & 0 & & b_{10}(\xi_{M+1}) & & b_{11}(\xi_{M+1})\alpha & & 0 \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & b_3(\xi_{M+1}) & & 0 & & b_4(\xi_{M+1}) & & 0 \\
 & b_6(\xi_{M+1})\beta + b_7(\xi_{M+1}) & & b_8(\xi_{M+1})\alpha & & b_8(\xi_{M+1})\beta + b_9(\xi_{M+1}) & & 0 \\
 & b_{11}(\xi_{M+1})\beta + b_{12}(\xi_{M+1}) & & b_{13}(\xi_{M+1})\alpha & & b_{13}(\xi_{M+1})\beta + b_{14}(\xi_{M+1}) & & 0 \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & 0 & & 0 & & & & 0 \\
 & 0 & & 0 & & & & 0 \\
 & b_{15}(\xi_{M+1})\alpha & & b_{15}(\xi_{M+1})\beta + b_{16}(\xi_{M+1}) & & & & 0 \\
 & 0 & & 1 & & & & 0
 \end{array} \right] \quad (5-35b)$$

ただし、 $\alpha = A^{(1)}(M+2, 1)$ 、 $\beta = A^{(1)}(M+2, M+2)$ 。

さて、殻は(I)要素の境界点1と(N)要素の境界点N+1でそれぞれ、四つの条件が規定される。それらは、式(5-7)に示した四組の対の適当な組合せによって構成される。ここでは、それらが便宜上、同次境界条件で与えられるとして、次のように表わしておく。

(I)要素の境界点1 ($\xi = \xi_0$)で:

$$[S_I^{(I)}]_{\xi=\xi_0} \{ \partial_I^{(I)} \} + [S_B^{(I)}]_{\xi=\xi_0} \{ \partial_B^{(I)} \} = \{ 0 \} \quad (5-36a)$$

(N)要素の境界点N+1 ($\xi = \xi_{M+1}$)で:

$$[S_I^{(N)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \{ \partial_I^{(N)} \} + [S_B^{(N)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \{ \partial_B^{(N)} \} = \{ 0 \} \quad (5-36b)$$

式(5-36)において、 $[S_I^{(I)}]_{\xi=\xi_0}$ と $[S_I^{(N)}]_{\xi=\xi_{M+1}}$ は $(4 \times 4M)$ 次、 $[S_B^{(I)}]_{\xi=\xi_0}$ と $[S_B^{(N)}]_{\xi=\xi_{M+1}}$ は (4×8) 次のマトリックスであり、それらの内容は、規定された境界条件に応じて、式(5-27)、(5-32)で定義したマトリックス(あるいはその一部)を用いて表わされる。

(3) $8(N-1)$ 個の条件式

この条件式は、分割点 i ($= 2 \sim N$)で成立する接続条件で与えられる。分割点で成立する条件は次のようである。

変形量について:

$$\left. \begin{aligned} u^{(i-1)}(\xi_{M+1}) &= u^{(i)}(\xi_0), \quad v^{(i-1)}(\xi_{M+1}) = v^{(i)}(\xi_0) \\ w^{(i-1)}(\xi_{M+1}) &= w^{(i)}(\xi_0), \quad \phi_x^{(i-1)}(\xi_{M+1}) = \phi_x^{(i)}(\xi_0) \end{aligned} \right\} \quad (5-37a)$$

ここに、 $i = 2 \sim N$ 。あるいは、式(5-26)を用いて、

$$\{ X^{(i-1)} \}_{\xi=\xi_{M+1}} = \{ X^{(i)} \}_{\xi=\xi_0} \quad (5-37b)$$

力学量について:

$$\left. \begin{aligned} n_x^{(i-1)}(\xi_{M+1}) &= n_x^{(i)}(\xi_0), \quad \bar{S}_x \theta^{(i-1)}(\xi_{M+1}) = \bar{S}_x \theta^{(i)}(\xi_0) \\ t_x^{(i-1)}(\xi_{M+1}) &= t_x^{(i)}(\xi_0), \quad m_x^{(i-1)}(\xi_{M+1}) = m_x^{(i)}(\xi_0) \end{aligned} \right\} \quad (5-38a)$$

ここに、 $i = 2 \sim N$ 。あるいは、式(5-31)を用いて、

$$\{ F^{(i-1)} \}_{\xi=\xi_{M+1}} = \{ F^{(i)} \}_{\xi=\xi_0} \quad (5-38b)$$

ここで、変形量については式(5-27)、力学量については式(5-32)を用いて、接続条件をマトリックス表示すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & [S_I^{(i-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \{ \partial_I^{(i-1)} \} + [S_B^{(i-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \{ \partial_B^{(i-1)} \} + \\ & [S_I^{(i)}]_{\xi=\xi_0} \{ \partial_I^{(i)} \} + [S_B^{(i)}]_{\xi=\xi_0} \{ \partial_B^{(i)} \} = \{ 0 \} \end{aligned} \quad (5-39)$$

なお、 $[S_B]$ は上式で添字 I を B に置き換えたものである。

さて、式(5-23)と(5-41)を結合すると、時刻 τ におけるマトリックス方程式は、次のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} [K_I] & \vdots & [K_B] \\ \dots & \dots & \dots \\ [S_I] & \vdots & [S_B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_I\} \\ \dots \\ \{\delta_B\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_I\} \\ \dots \\ \{0\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [M_I] & \vdots & [0] \\ \dots & \dots & \dots \\ [0] & \vdots & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{\delta}_I\} \\ \dots \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5-43)$$

もし、 $[S_B]$ が非特異ならば、上式の下半分は次のように整理させる。

$$\{\delta_B\} = -[S_B]^{-1}[S_I]\{\delta_I\} \quad (5-44)$$

式(5-44)を式(5-43)の上半分に代入すれば、内部選点における未知量 $\{\delta_I\}$ に関する次のマトリックス方程式が得られる。

$$[K]\{\delta_I\} = \{P_I\} + [M_I]\{\ddot{\delta}_I\} \quad (5-45)$$

ここに、 $[K]$ は(4MN×4MN)次の縮約された形のマトリックスである。

$$[K] = [K_I] - [K_B][S_B]^{-1}[S_I] \quad (5-46)$$

$[S_B]$ の特異性は、経線方向曲げモーメントを支配方程式の中に従属変数として導入したためであり、この場合は式(5-43)に基づき、計算を進める必要がある(例えば、後述する軸対称荷重を受ける球殻の問題がこの場合に相当する)。

式(5-43)、(5-45)は、殻の端末の境界条件が同次型で規定された場合であり、もし非同次ならば一部次のように変更される。すなわち、あらかじめ規定された変形量、力学量の値をベクトル $\{f\}$ ($\{\delta_B\}$ の大きさと一致させるため8N次とする)と記せば、式(5-43)の下半分の右辺第1項の零ベクトルが $\{f\}$ に、式(5-45)の荷重ベクトル $\{P_I\}$ が $\{P_I\} - [K_B] \times [S_B]^{-1}\{f\}$ に置き換わる。

以上、空間領域に選点法を適用した構造振動問題は、式(5-43)または式(5-45)の時間依存のマトリックス方程式へ帰着された。あとは与えられた初期条件のもとに、解けばよいことになる。なお、静的負荷問題では、式(5-43)、(5-45)の時間微分の項を取り除けばよい。

5-4 数値計算例

動的応答解析の精度は、空間領域に対する離散化の程度と時間領域に対する離散化の程度の双方に依存することになる。ここでは、まず、静的負荷問題を取り上げて選点法の空間領域の離散化手法としての適用性、有効性を議論し、次いで構造振動問題を取り上げ、時間方向には直接積分法を用いた数値計算例により、本解析法の妥当性を検討する。計算は、円筒殻と球殻の基本的な形状のものを対象とし、選点には shifted Legendre 多項式の零点を用いる。

(1) 静的負荷問題

選点法の回転殻の空間領域への適用性および数値解析上の特性は、既に自由振動問題において検討したが、それは大域的な性質で支配される問題に対してであり、局所的な性質が重要となる問題に対しても同様な検討が必要と思われる。それゆえ、以下では次の点に留意し数値計算を行う。

- ①境界近傍および集中荷重点近傍の応力集中を適確に把握できるかの検討。
- ②局所的な性質が重要となる応力・変形を求める問題に対する実用的な要素分割数および内部選点数の決め方。
- ③空間領域の離散化精度の判定方法としての平均二乗残差の応用およびその有効性の検討。

a) 液圧を受ける円筒殻

一要素当たりの内部選点数 M を決めるため、図 5-2 に示すような形状・寸法をもち、比重 r の液圧を受ける円筒殻を要素数 $N = 1$ (要素分割が行なわれていないことを意味する) で解析する。

選点数 $M = 7, 8, 9, 10, 11$ に対する変位 W と曲げモーメント M_x の分布状況を、Timoshenko 解¹⁵⁾ との比較で図 5-2 に示す。本計算値は、いずれの選点数によっても解析解によく一致し、グラフ上に差を表わすことができないので、 $M = 11$ の場合について、数値を比較した(表 5-1)。図表から明らかなように、本手法による曲げモーメントの精度は、たれみの精度と同程度で得られている。このように本手法が比較的少ない自由度数 ($3M$) で好結果を生む背景は、一つには曲げモーメント M_x も従属変数とする階数低下された支配方程式に選点法を適用したこと、いま一つには境界点近くに密に配置される選点の分布状況によるものと思われる。

以後の計算はすべて $M = 11$ を用いることにする。もちろん、荷重状態や殻の形状によっては、これが不十分な場合もあると思われるが、そのときは要素分割数を増すことにより対処できる。

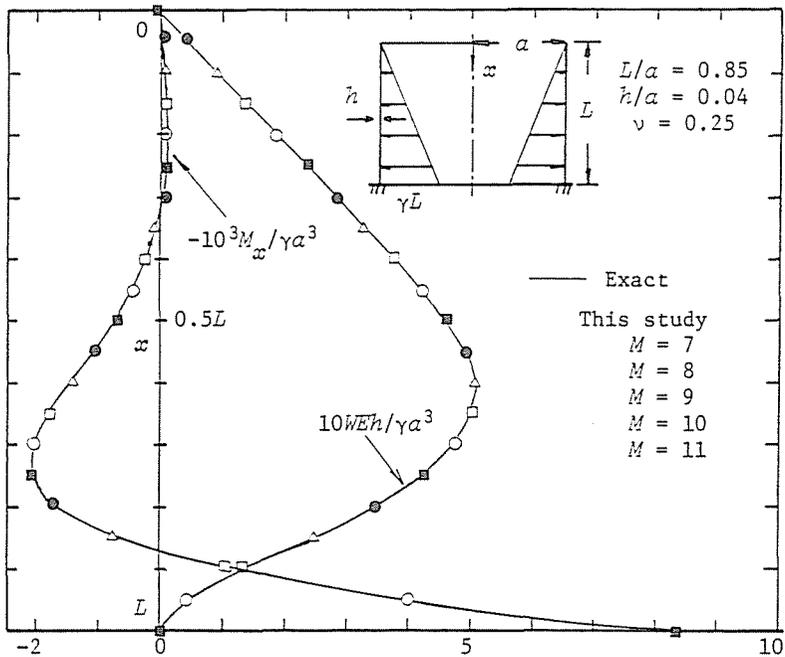


図5-2 液圧を受ける円筒殻の解析
(種々の内部選点数Mによる解析)

表5-1 液圧を受ける円筒殻の解析
(本計算値と厳密解の比較, M = 11)

$\xi (=x/L)$	$10EhW/\gamma a^3$		$10^3 M_x / \gamma a^3$	
	Exact	This study (M=11)	Exact	This study (M=11)
0.00	-0.0984	-0.0984	0.0	0.0
0.10	0.8507	0.8507	-0.0237	-0.0237
0.20	1.8118	1.8118	-0.0462	-0.0462
0.30	2.7930	2.7930	0.0135	0.0135
0.40	3.7598	3.7598	0.2481	0.2481
0.50	4.5897	4.5897	0.7348	0.7348
0.60	5.0363	5.0363	1.4442	1.4442
0.70	4.7519	4.7519	2.0635	2.0635
0.80	3.4569	3.4569	1.7549	1.7549
0.90	1.3736	1.3736	1.0203	1.0203
1.00	0.0	0.0	8.2944	8.2944

b) 半径方向に単位線荷重が作用する円筒殻

図5-3に示すような形状・寸法をもち、一端固定、他端自由で自由端には周方向一様の半径方向集中荷重が作用している円筒殻を解析する。これは、Graftonら⁵⁾が有限要素法(円錐台要素)により、自由端から1 inch以内を、5, 10, 20要素分割し解析したものと同一例題である。ここでは、20分割の結果を比較のために用いる。

図5-3に、内部選点数Mと要素分割数Nの組合せ(M, N)に対して、(11, 1)と(11, 2)の二つにより得られた本手法の変位と曲げモーメントを、シェル理論値およびGraftonらの解と比較して示した。本解析法の結果は、いずれもシェル理論値と完全に一致している。

Graftonらは、自由端から1 inch以内を20要素分割して、ほぼ理論値に一致(最大たわみ、モーメントの誤差3%)することを示しているが、このときの自由度数は、本解析法(M, N) = (11, 1)のそのほぼ2倍である。

この例題が示すように、本解析法は比較的少ない自由度数で応力集中に対して追従性のよい解が得られている。この理由は(a)の数値例と同様であり、この例題においては、特に境界点近傍に密に採られた選点の配置が好結果を生む大きな要因と考えられる。

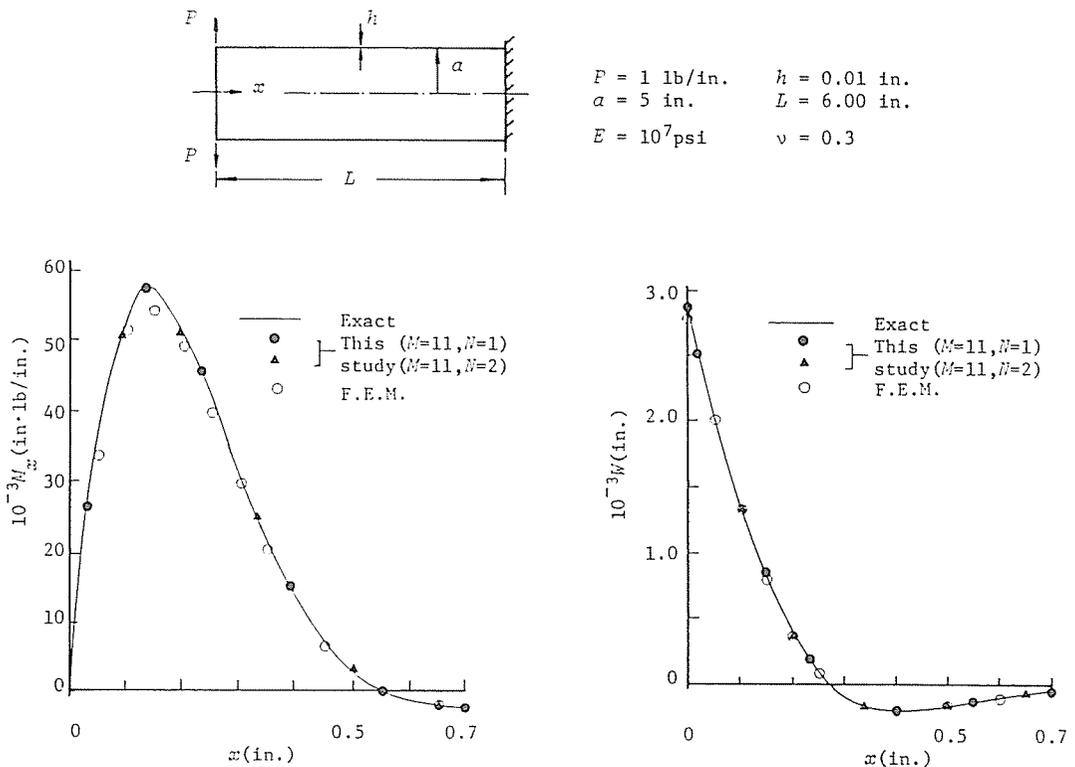


図5-3 半径方向に単位線荷重を受ける円筒殻の解析
(本計算値と有限要素解の比較)

c) 一様な外圧を受ける球殻

曲線を母線とする回転殻に一様あるいは連続的に変化する分布荷重が作用する場合、境界近傍を除いては膜応力状態が成立し、曲げ応力の存在しない領域が生じるのが普通である。このような負荷状態のシェルに対する本解析法の有効性を確認するために、図5-4に示すような一様で軸対称な外圧を受ける端部固定の球殻を、要素数 $N = 1, 2$ ($M = 11$) の場合について解析する。なお、頂点で課せられる条件は次のようである。

$$u^{(1)} = w^{(1)} = m_x^{(1)} = 0 \quad (5-47)$$

図5-4は、曲げモーメント M_x の分布状況を示したものである。これによると、 $N = 1$ では固定端から離れた領域においては波を打つ現象がみられるものの、固定端近傍の急激な変化は十分にとらえている。一方 $N = 2$ では、波を打つ現象もなく、ほぼ完全に膜応力状態が達成されている。図には参考のために、円錐台要素による結果⁹⁾も示したが、全領域に曲げ応力が発生している。円錐台要素の欠点を解消するために、曲線を母線とする要素(曲線要素)の開発^{8, 9)}が行われているが、特異点となる頂点の取り扱い方も含めて、その定式化過程は相当に複雑なものとなろう。本解析法によれば、内部選点および端点における、曲率半径、厚さなどの幾何学的諸量や荷重強度を用いて、直接的に解析できる。

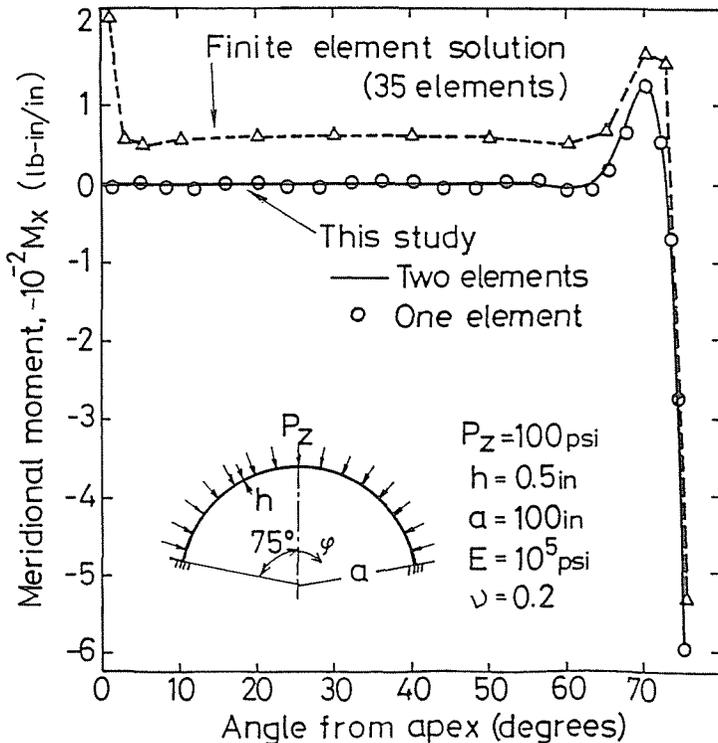


図5-4 一様な外圧を受ける球殻の解析

以上の三つの数値例によって、本解析法は、一要素内の選点数Mを11に固定し、要素分割数を増加させることにより、境界および荷重点近傍の応力集中を適確に把握できることを示した。しかし、要素分割の基準は個々の問題によって異なるものと思われるので、次に、要素分割数を決める際の判断基準に、平均二乗残差が目安になることを数値例で示す。

d) 風荷重を受ける円筒殻

図5-5に示すような片持ち型式の円筒殻に、風荷重が作用する場合の解析を行う。風荷重は高さ方向には一定とし、円周方向には次の分布形¹⁶⁾を用いた。

$$P_z = \sigma \sum_{n=1}^6 p_z^{(n)} \cos n\theta = \sigma (-0.387 + 0.338 \cos \theta + 0.533 \cos 2\theta + 0.471 \cos 3\theta + 0.166 \cos 4\theta - 0.066 \cos 5\theta - 0.055 \cos 6\theta) \quad (5-48)$$

計算に用いた殻の諸元は、 $L/a=3$ 、 $h/a=0.005$ および $\nu=0.3$ である。この問題に対しては、Gopalacharyulu と Johns¹⁶⁾ が Donnell の殻理論に基づき理論解を求めており、ここでは比較のために Donnell 理論に基づく支配方程式を採用した。要素分割は図5-5に示すように、1要素 (Model No. 1, 以下No. 1と記す)、2要素 (No. 2)、3要素 (No. 3、4) および4要素 (No. 5) の五つの場合を考えた。

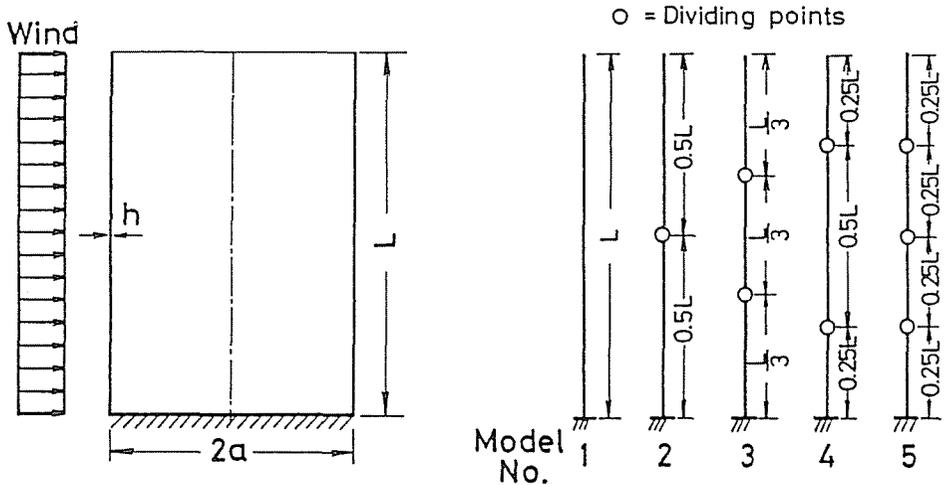


図5-5 風荷重を受ける円筒殻とその要素分割

結果 (W , N_x , M_x および T_x) をシェル理論値の比較で表 5-2 に示す。1 要素 (No 1) の結果に着目すれば、変位 W と合応力 N_x は十分な精度で求まっているが、曲げモーメント M_x および等価せん断力 T_x はかなりの誤差が生じていることがわかる。しかし、要素分割数 N を増せば、 M_x と T_x は変位と同程度の精度で求まっている。特に、No 4 ($N=3$, 境界近傍を細分割) と No 5 ($N=4$, 等分割) の結果は、全領域で精度のよい解が得られた。この点を含めて、以下に要素分割数および分割パターンの解の精度に及ぼす影響を、平均二乗残差 (M.S.R.) の面から検討する。

M.S.R. は次式で求められる。

$$M.S.R. = \sqrt{\sum_{j=1}^N \theta^{(j)} \int_0^1 R_i^{(j)2}(\xi) d\xi} \quad (5-49)$$

ここに $R_i^{(j)}$ ($i=1 \sim 4$) は、Donnell に基づく場合の式 (5-5a~d) に対応する (j) 要素の残差である。計算は前述の分割パターン No 1~No 5 に、新たに No 6 ($N=2$, 固定端より 1:2 で分割) と No 7 ($N=3$, 1:1:2 で分割) を加え、式 (5-48) の Fourier 係数 $p_z^{(n)}$ を 1 と置き、波数 $n=0, 1, \dots, 8$ に対して行った。

図 5-6 に、式 (5-49) における $i=1$ (式 (5-5a)) と $i=3$ (式 (5-5c)) の M.S.R. を示す。図の縦軸は No 2~No 7 と No 1 の平均二乗残差の比である。図より以下の点がかかる。

- 1) 要素分割数の増加および境界近傍の細分割は M.S.R. を減少させる。
- 2) M.S.R. は波数 n にも依存し、一般には n の増加と共に大きくなる傾向がある。

なお、七つの分割方法のうち、No 4 のが適切と思われる。この分割パターンの M.S.R. は、No 5 のそれとほぼ同じ値をとり、かつ波数 n に依存しないものとなっている。この点は、先程の表 5-2 の結果にも反映されている。

図 5-7 に、高さ と半径の比 $L/a = 2, 3, 4, 5$ に対して計算した、固定端の曲げモーメント M_x と等価せん断力 T_x の周方向分布を示す。 L/a によらず理論値とよく一致している。要素分割数は 3 である。

表 5-2 風荷重を受ける円筒殻の解析
(本計算値と厳密解の比較, $M=11$)

Height above base	Exact	Model No.				
		1	2	3	4	5
(a) Normal displacement, $-WEh/\sigma a^2$						
0.00L	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.05L	19.845	18.437	20.191	19.853	19.859	19.859
0.10L	33.354	35.285	32.968	33.329	33.354	33.354
0.40L	188.369	187.339	188.502	188.369	188.367	188.369
0.50L	258.999	258.386	259.033	258.999	258.999	258.999
0.70L	413.152	412.263	413.218	413.185	413.175	413.181
0.90L	572.152	571.495	572.232	572.136	572.180	572.153
1.00L	652.576	652.211	652.571	652.579	652.514	652.576
(b) Meridional stress resultant, $N_x/\sigma a$						
0.00L	31.972	31.953	31.974	31.971	31.972	31.972
0.05L	29.079	28.903	29.109	29.085	29.080	29.080
0.10L	26.165	26.236	26.123	26.166	26.163	26.163
0.40L	11.730	11.950	11.689	11.730	11.730	11.730
0.50L	8.143	7.849	8.142	8.143	8.143	8.143
0.70L	2.917	2.932	2.918	2.916	2.917	2.917
0.90L	0.326	0.325	0.325	0.326	0.326	0.326
1.00L	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
(c) Meridional bending moment, $M_x/\sigma a^2$						
0.00L	0.0200	0.0241	0.0200	0.0200	0.0200	0.0200
0.05L	-0.0012	-0.0027	-0.0017	-0.0011	-0.0012	-0.0012
0.10L	0.0038	0.0004	0.0003	0.0025	0.0039	0.0039
0.40L	-0.0007	-0.0022	-0.0007	-0.0007	-0.0007	-0.0007
0.50L	-0.0011	-0.0012	-0.0011	-0.0011	-0.0011	-0.0011
0.70L	-0.0021	-0.0035	-0.0022	-0.0021	-0.0021	-0.0021
0.90L	-0.0032	-0.0042	-0.0031	-0.0032	-0.0032	-0.0032
1.00L	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
(d) Effective shear force, $T_x/\sigma a$						
0.00L	-0.6470	-0.8292	-0.6386	-0.6467	-0.6470	-0.6470
0.05L	0.0335	0.0760	0.0356	0.0370	0.0334	0.0334
0.10L	-0.0040	-0.0132	-0.0076	-0.0044	-0.0038	-0.0038
0.40L	-0.0070	-0.0180	-0.0074	-0.0070	-0.0070	-0.0070
0.50L	-0.0081	-0.0065	-0.0080	-0.0081	-0.0081	-0.0081
0.70L	-0.0091	-0.0082	-0.0099	-0.0082	-0.0091	-0.0091
0.90L	-0.0095	-0.0141	-0.0086	-0.0095	-0.0095	-0.0095
1.00L	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

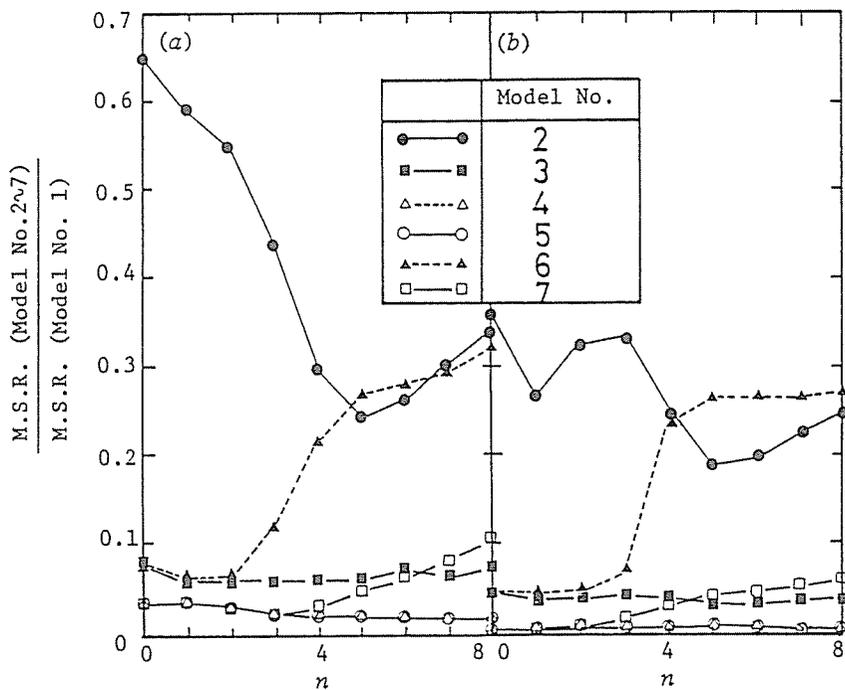


図5-6 平均二乗残差(a)式(5-5a), (b)式(5-5c)

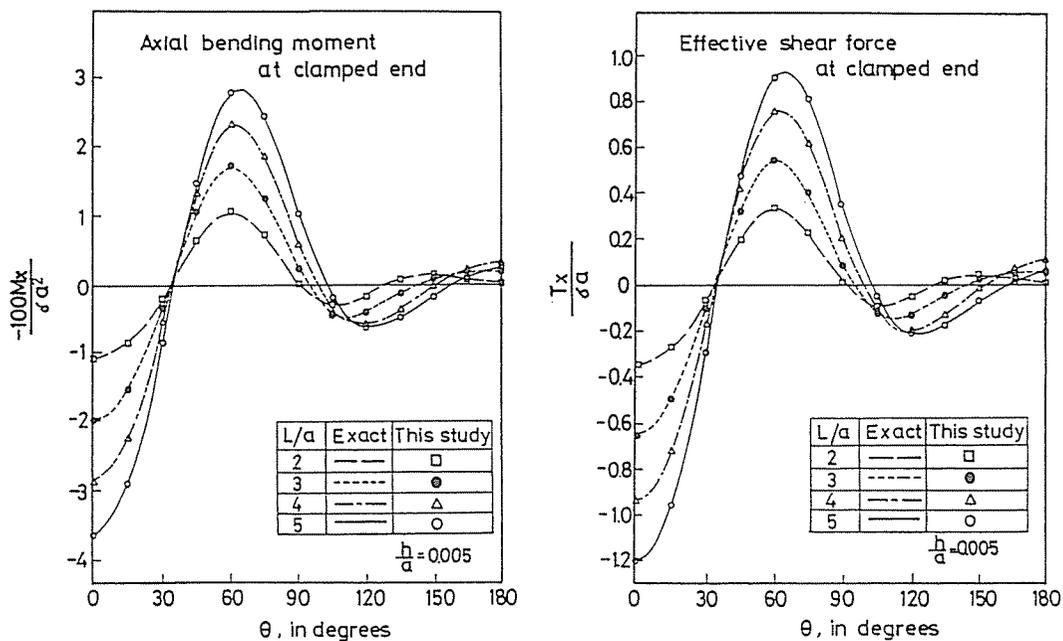


図5-7 固定端における曲げモーメント M_x と等価せん断力 T_x の周方向分布 (種々の L/a に対する本計算値と厳密解の比較)

(2) 構造振動問題

これまで、静的負荷の解析を通して、選点法によって空間を離散化する際の一応の判断基準を示した。ここでは、(1)の成果を踏まえて空間を近似し、時間依存のマトリクス常微分方程式(5-43)または(5-45)に、既往の直接積分法を適用して回転殻の時間応答を解析する。

直接積分法は、周知のように、解を必要とする時間範囲を小さな時間間隔の集合として分割し、初期状態から時間間隔ごとに step-by-step に解を求めていく方法で、各固有振動の一自由度の問題として論ずることができるモード解析法とは異なり、形の上では、各固有振動の考察している系の振動への寄与は現われないが、各ステップはすべて固有振動に分解して考えることができる。したがって、3章で結論された自由振動問題の解の精度より判断すれば、内部選点数 M と要素分割数 N で空間を離散化すれば少なくとも $[MN/2]$ 次($[]$: Gauss の記号)までの固有振動成分は、応答に正しく反映されることが期待できる。

以下に示す数値例は、 $M=11$ を用い、初期条件はすべて零とした。

a) 球殻

図5-8に示すような、一様に軸対称分布する外圧がステップ関数状に作用する端部固定の球殻を解析する。この問題は、KleinとSylvesterが¹⁷⁾が円錐台要素(42要素、約130自由度)により解析したのと同じ問題である。本解析法は、 $N=2$ (等分割、約70自由度)で空間を近似し、直接積分法には文献17)と同じく、Chanら¹⁸⁾の無条件安定なスキームを採用する。時間刻み幅 Δt は、Kleinらと同様な $\Delta t=0.1 \times 10^{-4} \text{ s}$ ($=T_0/54$, T_0 : 1次固有周期)と、応答に与える影響を調べるために、 $\Delta t=0.15 \times 10^{-4} \text{ s}$ ($=T_0/36$), $\Delta t=0.05 \times 10^{-4} \text{ s}$ ($=T_0/108$)とした。

表5-3は、時間刻み幅をパラメータにとり、頂点のたわみ W 、固定端の合応力 N_x と曲げモーメント M_x の最大応答値を整理したものである。表には参考のために、 $N=1$ で $\Delta t=0.1 \times 10^{-4} \text{ s}$ による結果も併記してある。これより、 $N=2$ では、応答値にわずかに差異がみられる程度であり、 $N=1$ では曲げモーメントに影響を与えるものの工学的には十分な精度で解が得られるいることがわかる。

図5-9(a), (b)に、頂点のたわみ W と固定端の合応力 N_x の時間応答を示す。図5-9(c)は、固定端の曲げモーメント M_x の時間応答を示したものである。図が示すように、いずれの時間刻み幅によっても時間応答には有意な差はなく、本解析法によっても時間応答の追跡が可能と思われる。

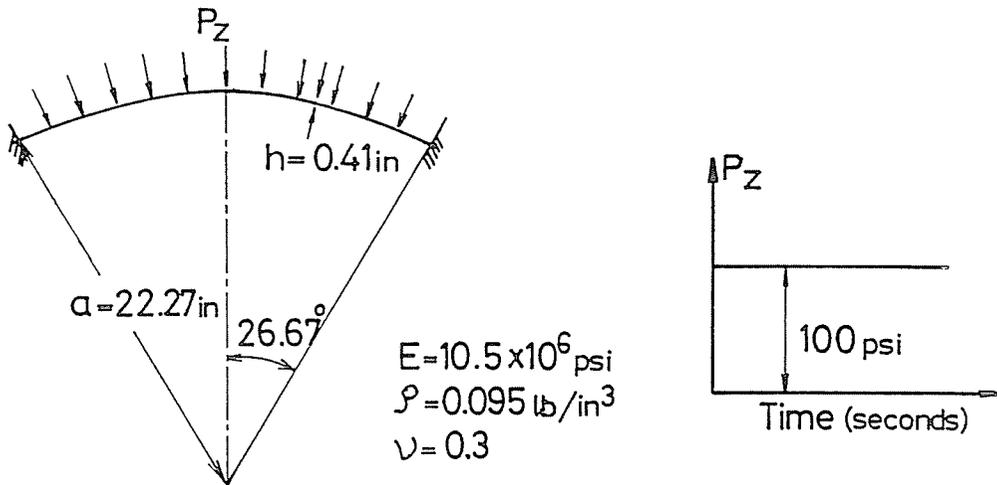


図 5-8 一様な動的外力を受ける球殻，形状と寸法

表 5-3 時間刻み幅 Δt の最大応答値に与える影響

N	2	1	2	2
Δt	0.05×10^{-4}	0.1×10^{-4}		0.15×10^{-4}
$WEh/p_z a^2$ at pole	-0.01485	-0.01508	-0.01505	-0.01485
$N_x/p_z a$ at base	-0.7669	-0.7608	-0.7621	-0.7641
$10M_x/p_z a^2$ at base	0.04527	0.04918	0.04642	0.04917

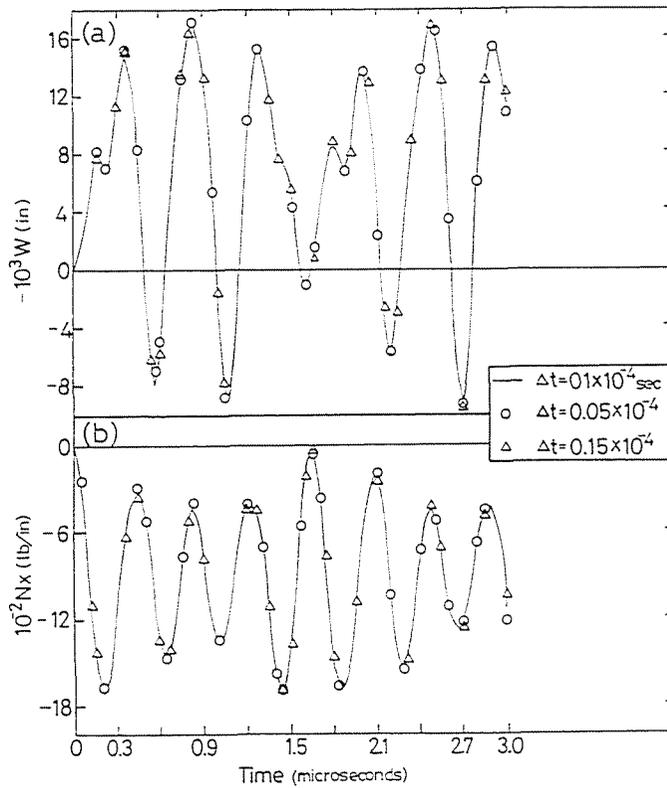


図 5-9 球殻の $\theta = 0$ における時間応答 (a) 頂点のたわみ W , (b) 固定端の合応力 N_x

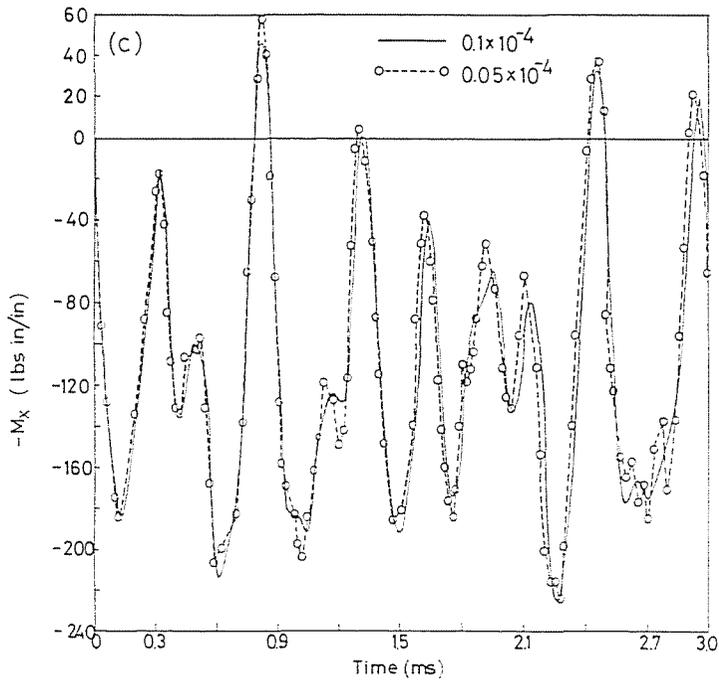


図 5-9 球殻の $\theta = 0$ における時間応答 (c) 固定端の曲げモーメント M_x

b) 円筒殻

解析モデルは、Johnson と Grief²⁾ が空間に対して差分法 (F.D.M.) を適用した片持ち円筒殻である。荷重は円周方向に 3 項 (波数 $n = 0, 1, 2$) の Fourier 級数に展開され、その時間および殻の高さ方向の分布を殻の諸元とともに図 5-10 に示す。数値積分法には、文献 2) と同じく無条件安定なスキームの Houbolt 法¹⁹⁾ を用い、時間刻み幅は $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$ s とした。

自由端のたわみ W と固定端の曲げモーメント M_x の時間履歴を差分法 (F.D.M.) との比較で図 5-11 に示す。結果はどれもよい一致を示しており、本解析法によっても十分に精度よく時間応答の解析が可能と思われる。なお、空間の近似は、本解析法は 3 要素分割 ($N = 3$) で、差分法は曲げモーメントの収束性から差分点数 140 とした。ちなみに、本法の未知数の数は差分法のそれに比べ、 $1/4$ 程度に減少している。また、本法の波数 $n = 0, 1, 2$ に対する計算時間は約 130 秒である (使用機種は HITAC M-200H)。この時間は差分法のその $1/3$ 程度に短縮されている。

以上、球殻と円筒殻という基本的な形状の殻についてのみ計算を行ったが、ここでの目的である選点法の構造振動問題への適用の可能性および精度の確認は、静的負荷問題を含めた各種の数値計算例により達成されたものと考えられる。

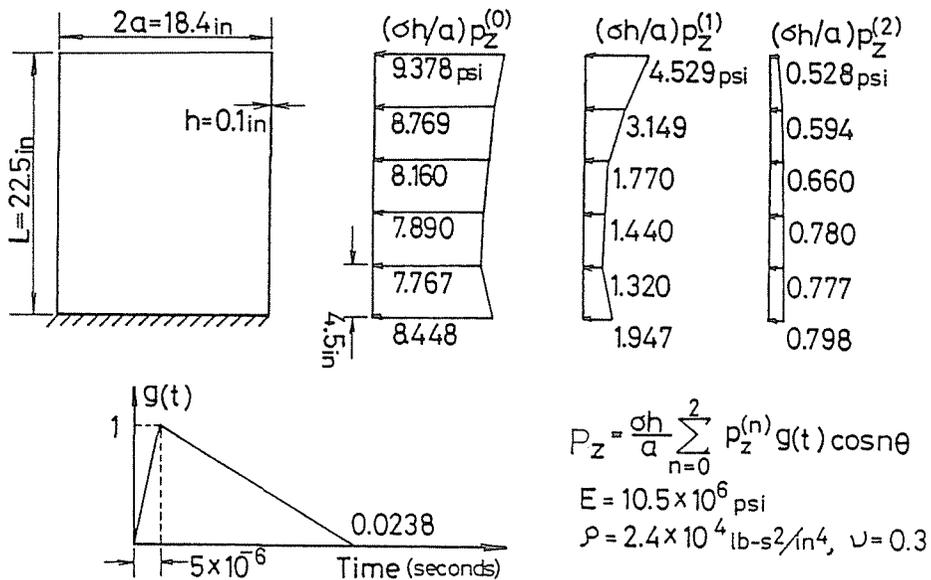


図 5-10 動的外力を受ける円筒殻、形状と寸法

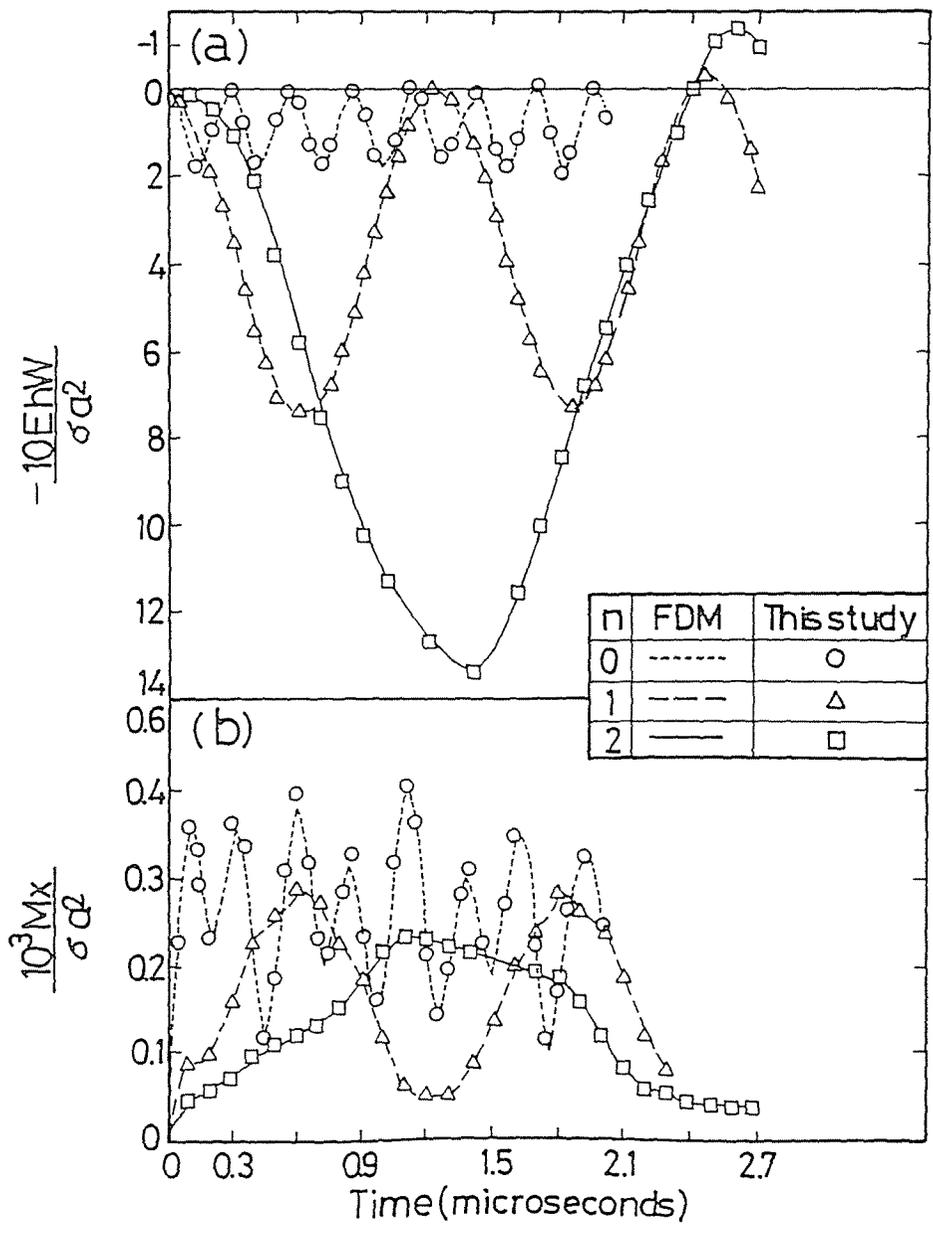


図5-11 円筒殻の $\theta = 0$ における時間応答(a) 頂点のたわみ W ,
 (b) 固定端の曲げモーメント M_x

5-5 結 論

回転殻の構造振動問題に対して、空間的には選点法を、時間的には直接積分法を用いて解析する離散化手法を提示した。さらに、空間領域の離散化基準を定めるために行った静的負荷の問題を含む各種の数値計算例より、次のような結論が得られた。

- 1) 面外変位については4階の微分が現われる古典殻理論で問題を記述する場合、選点法を変位と曲げモーメントの双方を独立な未知量とする支配方程式に適用することにより、曲げモーメントやせん断力などの力学的諸量は、たわみと同程度の精度で求められる。
- 2) 空間領域の離散化は、一要素内には内部選点数 $M = 11$ を採用し、要求される精度に呼応して要素分割数を増すのが一つの目安となる。内部選点数を固定すれば、要素分割数および分割パターンは離散化の精度を支配する重要な因子となる。それゆえ、要素の分割は十分に配慮して行う必要があり、平均二乗残差の併用などは、より信頼性の高い解を得るための情報を提供してくれる。
- 3) 本解析法は、数値計算がきわめて平易かつ機械的に行え、従来の領域型解法に属する近似解析手法に比べて、比較的少ない自由度により、実用上十分な精度の解が得られる。

付 録

係数 $a_1 \sim a_{36}$ および $b_1 \sim b_{18}$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= \frac{b}{\alpha^2}, & a_2 &= \gamma a_1 \\
 a_3 &= -b \left(\nu r_1 r_2 + \frac{r^2}{\alpha^2} + \frac{\nu_4 n^2}{2r} \right) - k r_1^2 \left(\frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{n^2}{\nu_1 r^2} \right) \\
 a_4 &= \frac{n(0.5 + k r_1 r_2)}{\nu_1 \alpha r}, & a_5 &= -\gamma n \left(\frac{b \nu_6}{2} + \frac{k r_1 r_2 \nu_2}{\nu_1} \right) \frac{1}{\alpha r} \\
 a_6 &= (r_1 + \nu r_2) \frac{b}{\alpha} + \left(\frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{n^2}{\nu_1 r^2} \right) \frac{k r_1}{\alpha} \\
 a_7 &= \left\{ r_1' + \gamma(r_1 - r_2) \right\} \frac{b}{\alpha} - \frac{k \gamma n^2 r_1 \nu_2}{\nu_1 \alpha r^2} \\
 a_8 &= \frac{r_1}{\alpha}, & a_9 &= \frac{\nu_4 \gamma r_1}{\alpha}
 \end{aligned} \right\} \quad (A-1)$$

$$\begin{aligned}
a_{10} &= -a_4, & a_{11} &= \left\{ \frac{b\gamma\nu_6}{2} + k(r'_1 r'_2 + \gamma r_1 r_2 \nu_2) \frac{1}{\nu_1} \right\} \frac{n}{\alpha r} \\
a_{12} &= \left(\frac{1}{2} + k r_2^2 \right) \frac{1}{\nu_1 \alpha^2}, & a_{13} &= \left(\frac{1}{2} + k r_1 r_2 \right) \frac{\gamma}{\nu_1 \alpha^2} \\
a_{14} &= -(b + k r_2^2) \frac{n^2}{r^2} + (r_1 r_2 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}) \frac{1}{2\nu_1} - \left(\frac{\gamma^2}{\alpha^2} - r_2^2 \right) \frac{k r_1 r_2}{\nu_1} \\
a_{15} &= \frac{k n r_2}{\nu_1 r \alpha^2}, & a_{16} &= \nu_1 \gamma a_{15}, \\
a_{17} &= -(\nu r_1 + r_2) \frac{b n}{r} + \left(\frac{r_1 r_2}{\nu_1} - \frac{n^2}{r^2} \right) \frac{k n r_2}{r}, & a_{18} &= -\frac{\nu n r_2}{r}
\end{aligned} \tag{A-2}$$

$$\begin{aligned}
a_{19} &= -(r_1 + \nu r_2) \frac{b}{\alpha} - k r_1 \left(\frac{\gamma^2}{\alpha^3} + \frac{2n^2}{\alpha \nu_1 r^2} \right) \\
a_{20} &= -(r_1 + \nu r_2) \frac{b\gamma}{\alpha} - k r'_1 \left(\frac{\gamma^2}{\alpha^3} + \frac{2n^2}{\alpha \nu_1 r^2} \right) - \frac{k\gamma r_1}{\alpha} \left(2r_1 r_2 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} - \frac{n^2}{r^2} \right) \\
a_{21} &= 2 a_{15}, & a_{22} &= -\frac{k n \gamma}{\nu_1 \alpha^2 r} (\nu_3 r_2 - 2 r_1) \\
a_{23} &= -\frac{b n}{r} (\nu r_1 + r_2) - \frac{k n^3 r_2}{r^3} - \frac{k n}{\nu_1 r} \left\{ \frac{\gamma^2}{\alpha^2} (\nu_3 r_1 - 2 \nu_2 r_2) - r_1 r_2^2 \nu_3 \right\} \\
a_{24} &= \frac{k}{\alpha^2} \left(\frac{\gamma^2}{\alpha^2} + \frac{2n^2}{\nu_1 r^2} \right), & a_{25} &= -\frac{k\gamma}{\alpha^2} \left(\frac{2n^2}{\nu_1 r^2} + 2 r_1 r_2 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \right) \\
a_{26} &= -b(r_1^2 + r_2^2 + 2\nu r_1 r_2) - \frac{k n^4}{r^4} + \frac{k n^2}{\nu_1 r^2} \left(\nu_3 r_1 r_2 + \frac{2r^2 \nu_2}{\alpha^2} \right) \\
a_{27} &= \frac{1}{\alpha^2}, & a_{28} &= \frac{\gamma \nu_5}{\alpha^2}, & a_{29} &= -\frac{\nu n^2}{r^2} - \nu_4 r_1 r_2
\end{aligned} \tag{A-3}$$

$$\begin{aligned}
a_{30} &= \frac{b k r_1}{\alpha}, & a_{31} &= \frac{b k}{\alpha} (r'_1 + \nu \gamma r_1), & a_{32} &= \frac{b k r_1}{\alpha} \\
a_{33} &= -\frac{b k}{\alpha^2}, & a_{34} &= \gamma \nu a_{33}, & a_{35} &= -\frac{b k \nu n^2}{r^2}, & a_{36} &= -1
\end{aligned} \tag{A-4}$$

$$b_1 = \frac{b}{\alpha}, \quad b_2 = \frac{b\gamma\nu}{\alpha}, \quad b_3 = \frac{b n \nu}{r}, \quad b_4 = b(r_1 + \nu r_2) \tag{A-5}$$

$$\left. \begin{aligned} b_5 &= -\frac{n}{2\nu_1 r} (1+2kr_1 r_2), \quad b_6 = \frac{1+2r_2^2}{2\nu_1 \alpha}, \quad b_7 = -\gamma b_6 \\ b_8 &= \frac{knr_2}{\alpha\nu_1 r}, \quad b_9 = -\frac{kn\gamma r_2}{\alpha\nu_1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-6})$$

$$\left. \begin{aligned} b_{10} &= -kr_1 \left(\frac{r^2}{\alpha^2} + \frac{2n^2}{\nu_1 r^2} \right), \quad b_{11} = \frac{2nkr^2}{\alpha\nu_1 r}, \quad b_{12} = \frac{\gamma\nu_3 b_{11}}{2} \\ b_{13} &= k \left(\frac{r^2}{\alpha^3} + \frac{2n^2}{\alpha\nu_1 r^2} \right), \quad b_{14} = -\frac{k\nu_3 \gamma n^2}{\alpha\nu_1 r^2}, \quad b_{15} = \frac{1}{\alpha} \\ b_{16} &= \frac{\gamma\nu_4}{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-7})$$

$$b_{17} = r_1, \quad h_{18} = -\frac{1}{\alpha} \quad (\text{A-8})$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{1}{1-\nu^2}, \quad k = \frac{1}{12} \delta^2, \quad \delta = \frac{h}{a} \\ \nu_1 &= 1 + \nu, \quad \nu_2 = 2 + \nu, \quad \nu_3 = 3 + \nu \\ \nu_4 &= 1 - \nu, \quad \nu_5 = 2 - \nu, \quad \nu_6 = 3 - \nu \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-9})$$

第 5 章 参 考 文 献

- 1) Bundiansky, B. and Radkowski, P.P. : Numerical analysis of unsymmetrical bending of shells of revolution, *AIAA Journal*, Vol.1, No.8, pp.1833-1842, 1963.
- 2) Johnson, D.E. and Greif, R. : Dynamic response of a cylindrical shell : Two numerical methods, *AIAA Journal*, Vol.4, No.3, pp.486-494, 1966.
- 3) Smith, T.A. : Explicit high-order finite difference analysis of rotationally symmetric shell, *AIAA Journal*, Vol.18, No.3, pp.309-317, 1980.
- 4) 有限要素法ハンドブック I 基礎編, 鷲津久一郎, 宮本博 他共編, 培風館, 1981.
- 5) Grafton, P.E. and Strome, D.R. : Analysis of axisymmetrical shells by the direct stiffness method, *AIAA Journal*, Vol.1, No.10, pp.2342-2347, 1963.
- 6) Percy, J.H. et al. : Application of matrix displacement method to linear elastic analysis of shells of revolution, *AIAA Journal*, Vol.3, No.11, pp.2138-2145, 1965.
- 7) Sen, S.K. and Gould, P.L. : Criteria for finite element discretization of shells of revolution, *Int. J. Num. Mech. Engng*, Vol.6, pp.265-274, 1973.
- 8) Jones, R.E. and Strome, D.A. : Direct stiffness method analysis of shells of revolution utilizing curved element, *AIAA Journal*, Vol.4, No.9, pp.1519-1525, 1966.
- 9) Stricklin, J.A., Navaratna, D.R. and Pian, T.H.H. : Improvements on the analysis of shells of revolution by the matrix displacement method, *AIAA Journal*, Vol.4, No.11, pp.2069-2072, 1966.
- 10) Elias, Z.M. : Mixed finite element method for axisymmetric shells, *Int. J. Num. Mech. Engng.*, Vol.4, pp.261-277, 1972.
- 11) 三上隆 : 空間領域に選点法を用いた回転殻の静的および動的問題の解析, 土木学会論文報告集, 第341号, pp.69-78, 1984.
- 12) Langhaar, H.L. and Chu, S.C. : Piecewise polynomials and the partition method for ordinary differential equations, *Development in Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.8, Pergamon Press, pp.553-564, 1970.
- 13) Sharma, S.K. and Boresi, A.P. : Finite element weighted residual method : Axisymmetric shells, *Proc. of ASCE*, Vol.104, No.EM4, pp.895-909, 1978.
- 14) Novozhilov, V.V. : *The Theory of Thin Shells*, P. Noordhoff, 1959.
- 15) Timoshenko, S.P. and Woinowsky-Krieger, S. : *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., McGraw-Hill, 1959.
- 16) Gopalacharyulu, S. and Johns, D.J. : Cantilever cylindrical shells under assumed wind pressures, *Proc. of ASCE*, Vol.99, No.EM5, pp.943-956, 1973.
- 17) Klein, S. and Sylvester, R.J. : The linear dynamic analysis of shells of revolution by the matrix displacement method, *Proc. of the 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, AFFDL-TR-66-80, Wright Patterson AFB, Ohio, Oct., pp.299-328, 1965.
- 18) Chan, S.P. et al. : Transient analysis of forced vibrations of complex structural-mechanical systems, *J.R. Aeronaut. Soc.*, Vol.66, pp.457-460, 1962.

- 19) Houbolt, J.C. : A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, *J. Aeronaut. Sci.*, Vol.17, pp.540-550, 1950.
- 20) Mikami, T. and Yoshimura, J. : Collocation method for static and dynamic analysis of shells of revolution, *Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido University*, Vol.17, No.4, pp.318-328, 1985.

第 6 章 回転殻の応力波伝播問題

6-1 概 説

一般に、衝撃負荷の問題は、静的負荷の問題および構造振動問題と次の点で大きく異なる。すなわち、弾性体中の応力波伝播を考慮する必要がある点である。静的負荷問題や構造振動問題では、瞬時に応力、変形、歪エネルギーは構造全体に分布されるが、衝撃負荷の問題では歪エネルギーを蓄える範囲は応力波の伝播速度によって限られ、急激に負荷された場合、小さな領域内の少ない歪エネルギーでも構造物を破壊するに十分足る応力に達することもあるだろう。

さらに、構造物が巨大化すれば、以下のような理由により応力波の伝播を考慮する必要があるだろう。例えば、高さが l (m) の塔状構造の下端に動的な荷重が作用する場合を考えよう。このとき入力力が速度 V (m / s) で伝播すると仮定すれば、時間 l / V (s) で上端に達し、そこで反射し $2 l / V$ (s) 後に下端に戻る。この時点で、入力は今構造の形状を把握して構造形状に適合した応答が開始され、それ以後の応答は構造振動問題としてとらえることができる。しかし $2 l / V$ (s) 以前の時間帯の応答状態は、応力波の伝播を考慮する必要のある時間帯であり、構造物が大型化すれば、この時間領域における入力の増加率を評価する必要があるだろう。

さて、梁、板および回転殻などの応力波伝播問題の解析に用いられる理論は、概略二つに分類できる。一つは Bernoulli-Euler の梁理論、Kirchhoff の平板理論、Kirchhoff-Love の仮定に立脚する殻理論のいわゆる古典理論である。いま一つの理論は、せん断変形と回転慣性を考慮した Timoshenko 理論¹⁾ を出発点とする、Mindlin の平板理論²⁾、Mirsky と Herrmann³⁾ および Naghdi と Cooper⁴⁾ などの殻理論、いわゆる修正理論である。

両理論の大きな相違点は、応力波の伝播特性を特徴づけるパラメータ（伝播速度）を正しく含んでいるか否かである。すなわち、梁についていえば、Bernoulli-Euler 理論のもとでは、衝撃力の一部が瞬間的に梁の至るところまで伝達されてしまい、波頭を持たない変則的な解が得られるのに対し、Timoshenko 理論のもとでは、梁を伝わる応力波は縦波（曲げ波）とせん断波の二つのパラメータで特徴づけられ、これら二つの波の重ね合わさった形で梁の挙動が表現される。梁の解析におけるせん断変形と回転慣性の重要性は、無限梁に対する Goland ら⁵⁾ の実験的・理論的研究、半無限梁に対する Boley ら⁶⁾ および Sagartz ら⁷⁾ の解析的研究などに見出すことができる。

波の伝播速度がパラメータとして含む応力波伝播問題の支配方程式は、空間変数と時間変数からなる偏微分方程式（双曲型方程式、波動方程式）の形で記述される。応力波の伝播の様子を知るためには、与えられた境界条件と初期条件のもとで支配方程式を解くことが必要であり、様々な手法による解析が試みられている。ラプラス変換に基づく方法^{6~8)}、特性曲線法^{9,10)}、ノーマル・モード法（Normal mode method）あるいはモード重ね合わせ法（Mode superposition method）と呼ばれる方法^{11~13)}、差分法¹⁴⁾ および有限要素法^{15,16)} などがある。

ラプラス変換法は、その適用可能性は支配方程式の複雑さに大きく依存し、もし適用可能だとしても、ラプラス逆変換の計算に多大な労力を必要とする。ノーマル・モード法もその適用性は支配方程式および境界条件に大きく制限を受け、特に波頭およびその近傍における解の算出は、多くのモード次数の考慮を要求する。

差分法および有限要素法などの領域型解法の場合、前述の解法に比べ適用性に関する制約は緩和されるものの、要求される解の精度によっては、多くの要素分割数および格子点数を必要とし、問題の性質上、構造振動問題に対するとき以上の大次元なマトリックス演算を余儀無くされる。さらに有限要素法では、せん断変形を考慮したために厚さと他の次元の寸法の比が小さくなれば、数値的不安定現象、いわゆる剛性の過大評価によるロッキング (Shear locking) 現象が生じることが知られている¹⁷⁾。また差分法も有限要素法も、時間に関する微分項を差分近似によって離散化すれば、離散化された後の式 (代数方程式) は、空間と時間の離散量で規定される離散系に固有の速さに関連するパラメータを含んでいる。もし、離散系に固有の速さが応力波の変化の過程を特徴づける速さよりも小さければ、離散系は応力波の変化過程を正しく追跡できなくなる。この離散系に固有の速さの存在が、応力波伝播問題に対する数値的解析手法の適用をより困難なものにしている。

さて、選点法による応力波伝播の解析は、著者と芳村^{18, 19, 27)}の研究以外に見当たらない。本章では、せん断変形および回転慣性を考慮した修正殻理論²⁰⁾に基づき、任意形状回転殻の応力波伝播問題の解析に用いられる新たな合理的計算手法を、空間的には選点法、時間的には陽解法、および空間的には選点法、時間的には陰解法の組合せに対応して、二種提示する。

前章までに示せた選点法の利点である定式化の容易さ、未知数の数の減少、および解の高精度化を生かせれば、応力波伝播問題に対しても、従来の近似計算手法以上の結果を期待することができる。しかし離散化に当たっては、考察する系の高次振動数成分の考慮および離散系に固有の速さに関連して、固有振動問題や構造振動問題に対する以上の自由度数が要求される。さらに、離散化後の連立一次方程式はマトリックス表示した場合、一般に非対称のため計算効率の低下、消去過程で発生する数値誤差の成長などが予想される。それゆえ本章では、上述の欠点を克服するために、次のような解析アルゴリズムを構成した。

選点法と陽解法の組合せに対しては、比較的次数の低いマトリックス演算から構成されるアルゴリズムが必然的に得られた。この理由は、選点法を適用して得られる時間依存の2階の連立常微分方程式を表示する際に、記述の一般化に配慮を加えたからである。一方、選点法と陰解法の組合せに対しては、有限要素法で知られている部分構造法 (Substructuring)²¹⁾に類似な手法を導入することにより、大次元のマトリックス演算を回避できるアルゴリズムが構成された。

以下、2節では、せん断変形と回転慣性を考慮した任意形状の回転殻の支配方程式を示し、3節では選点法を適用して空間を離散化し、その結果得られる時間に関する2階の連立常微分方程式を示す。4節では、時間方向の積分に陰解法 (Houbolt法²²⁾を採用) および陽解法 (中心差分法を

採用)に基づく解析アルゴリズムを示し、後者による場合は、時間刻み幅の限界と選点法によって定式化された固有振動問題の関連性について記述する。5節は数値計算例である。前半では、棒の縦衝撃問題と梁の横衝撃問題を扱い、理論解との比較を通して本手法の妥当性を検討する。特に波動方程式は、空間的に不連続な解をもつにもかかわらず、選点法は他の近似解析手法と同様に、空間的にはある程度の連続性を前提として定式化するため、①応力波の波頭のなまり、②過渡的に過大な波高、③波頭の後方の数値上の振動、という数値解析上の固有の問題点を抱えており、その程度を把握する。後半の数値計算例では、まず円筒殻を取り上げ、棒と梁の問題と同様な観点から結果を整理し、次に任意形状の回転殻への一適用例として、双曲殻の解析例を示す。6節は結論である。

6-2 修正殻理論に基づく回転殻の基礎方程式

図6-1に示すように、経線、円周方向座標を (x, θ) 、法線方向座標 z を垂直外向きに定める。座標 (x, θ, z) に対応する変位成分を (U, V, W) 、 (x, θ) 軸に垂直な断面の回転角成分を (ϕ_x, ϕ_θ) とする。荷重、合応力および合モーメント成分を (P_x, P_θ, P_z) 、 $(N_x, N_\theta, N_{x\theta}, N_{\theta x}, Q_x, Q_\theta)$ および $(M_x, M_\theta, M_{x\theta}, M_{\theta x})$ で表示する(これらの定義は、3-6および5-2と同様である)。時間を t 、弾性係数を E 、せん断弾性係数を G 、ポアソン比を ν 、単位体積当りの質量を ρ 、厚さを h と表わす。

ここで、3-6および5-2と同様に、次式で定義される経線方向座標と時間の無次元量 (ξ, τ)

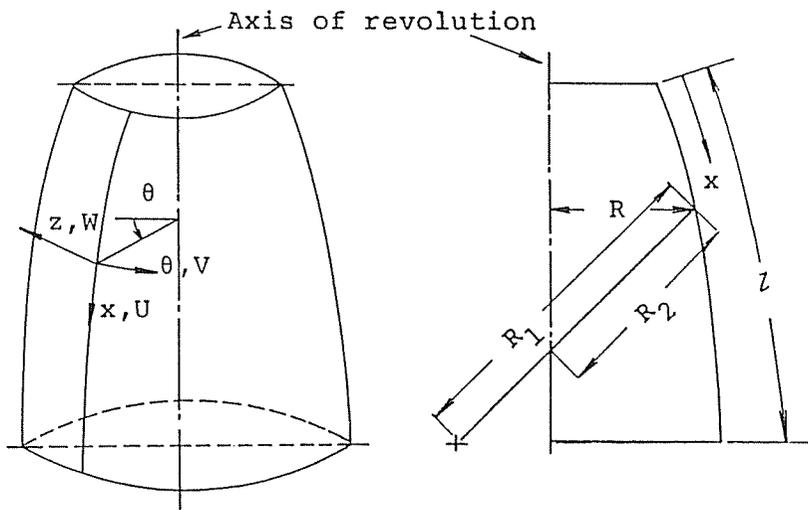


図6-1 回転殻

τ), 演算子 $()'$, $()^*$ および $()^\circ$ および殻の形状パラメータ $(\alpha, \delta, r, r_1, r_2)$ を導入する。

$$\xi = X/\ell, \quad \tau = C_1 t/a \quad (6-1)$$

ただし、 ℓ : 経線の長さ, a : 代表長さ, C_1 は次のように表わされる縦波の速度である。

$$C_1^2 = E/\rho(1-\nu^2) \quad (6-2)$$

演算子:

$$\left. \begin{aligned} ()' &= \partial()/\partial \xi, & ()^* &= \partial()/\partial \theta \\ ()^\circ &= \partial()/\partial \tau, \end{aligned} \right\} \quad (6-3)$$

形状パラメータ:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \ell/a, & \delta &= h/a, & r &= R/a \\ r_1 &= a/R_1, & r_2 &= a/R_2 \end{aligned} \right\} \quad (6-4)$$

ただし、 R : 殻の半径, R_1, R_2 : 主曲率半径(図6-1)であり、無次元化曲率 r_1, r_2 と無次元化半径 r の間には、式(3-74)~(3-76)より明らかかなように、次の関係式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} r_1 r_2 &= -\frac{r'+r^2}{\alpha^2} = -\frac{r''}{r\alpha^2} \\ r_2' &= r(r_1 - r_2) \\ r_2 &= \frac{\sqrt{1-r''/\alpha^2}}{r} \end{aligned} \right\} \quad (6-5)$$

ただし、 $r = r'/r$ 。

変形を微小、殻を等方等質な一様な厚さとすれば、 z 軸方向のせん断変形と回転慣性を考慮した運動方程式は、次のように表わされる²⁰⁾。

$$\begin{aligned} \frac{N_x'}{\alpha} + \frac{r}{\alpha} (N_x - N_\theta) + \frac{N_{\theta x}^*}{r} + r_1 Q_x + a P_x \\ = \rho h C_1^2 \left(\frac{m_1}{a} \ddot{U} + m_2 \ddot{\phi}_x \right) \end{aligned} \quad (6-6a)$$

$$\begin{aligned} \frac{N_{x\theta}'}{\alpha} + \frac{r}{\alpha} (N_{x\theta} + N_{\theta x}) + \frac{N_\theta^*}{r} + r_2 Q_\theta + a P_\theta \\ = \rho h C_1^2 \left(\frac{m_3}{a} \ddot{V} + m_4 \ddot{\phi}_\theta \right) \end{aligned} \quad (6-6b)$$

$$\frac{Q_x'}{\alpha} + \frac{r}{\alpha} Q_x + \frac{Q_\theta^*}{r} - r_1 N_x - r_2 N_\theta - a P_z = \rho h C_1^2 \frac{m_5}{a} \ddot{W} \quad (6-6c)$$

$$\frac{M_x'}{\alpha} + \frac{r}{\alpha} (M_x - M_\theta) + \frac{M_{\theta x}^*}{r} - aQ_x = \rho h C_1^2 (m_6 \ddot{U} + a m_7 \ddot{\phi}_x) \quad (6-6d)$$

$$\frac{M_{x\theta}'}{\alpha} + \frac{r}{\alpha} (M_{x\theta} + M_{\theta x}) + \frac{M_\theta^*}{r} - aQ_\theta = \rho h C_1^2 (m_8 \ddot{V} + a m_9 \ddot{\phi}_\theta) \quad (6-6e)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} m_1 = m_3 = m_5 = 1 + r_1 r_2 \delta^2 / 12 \\ m_2 = m_4 = m_6 = m_8 = \delta^2 (r_1 + r_2) / 12 \\ m_7 = m_9 = \delta^2 / 12 \end{aligned} \right\} \quad (6-7)$$

合応力，合モーメント成分は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= K \{ \xi_x + \nu \xi_\theta + \delta^2 (r_1 - r_2) (r_1 \xi_x - a \chi_x) / 12 \} \\ N_{x\theta} &= Gh \{ \beta_x + \beta_\theta + \delta^2 (r_1 - r_2) (r_1 \beta_x - a \bar{\beta}_x) / 12 \} \\ Q_x &= \kappa Gh \{ 1 + \delta^2 (r_1 - r_2) r_1 / 12 \} \mu_x \\ M_x &= D \{ \chi_x + \nu \chi_\theta - (r_1 - r_2) \xi_x / a \} \\ M_{x\theta} &= Gh^3 \{ \bar{\beta}_x + \bar{\beta}_\theta - (r_1 - r_2) \beta_x / a \} / 12 \end{aligned} \right\} \quad (6-8)$$

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= K \{ \xi_\theta + \nu \xi_x - \delta^2 (r_1 - r_2) (r_2 \xi_\theta - a \chi_\theta) / 12 \} \\ N_{\theta x} &= Gh \{ \beta_x + \beta_\theta - \delta^2 (r_1 - r_2) (r_2 \beta_\theta - a \bar{\beta}_\theta) / 12 \} \\ Q_\theta &= \kappa Gh \{ 1 - \delta^2 (r_1 - r_2) r_2 / 12 \} \mu_\theta \\ M_\theta &= D \{ \chi_\theta + \nu \chi_x + (r_1 - r_2) \xi_\theta / a \} \\ M_{\theta x} &= Gh^3 \{ \bar{\beta}_x + \bar{\beta}_\theta + (r_1 - r_2) \beta_\theta / a \} / 12 \end{aligned} \right\} \quad (6-9)$$

ただし、 $K = Eh / (1 - \nu^2)$ ， $D = Eh^3 / 12 (1 - \nu^2)$ ， $G = E / 2 (1 + \nu)$ ， κ ：せん断補正係数であり、ひずみ，曲率などと変位，回転角の関係式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \xi_x &= U' / \alpha + r_1 W / a, \quad \xi_\theta = (V^* + r'U / \alpha + r r_2 W) / a r \\ \chi_x &= \phi'_x / \alpha, \quad \chi_\theta = (\phi_\theta^* + r' \phi_x / \alpha) / a r \\ \beta_x &= V' / \alpha, \quad \beta_\theta = (U^* - r' \phi_\theta / \alpha) / a r \\ \bar{\beta}_x &= \phi'_\theta / \alpha, \quad \bar{\beta}_\theta = (\phi_x^* - r' \phi_\theta / \alpha) / a r \\ \mu_x &= W' / \alpha - r_1 U / a + \phi_x \\ \mu_\theta &= (W^* - r r_2 V) / a r + \phi_\theta \end{aligned} \right\} \quad (6-10)$$

さて、位置に関しては θ のみを変数とするために、変位 ($U, V, W, \phi_x, \phi_\theta$) と荷重 (P_x, P_θ, P_z) を、 ($u, v, w, \phi_x, \phi_\theta$) と (p_x, p_θ, p_z) を係数とする形で、合応力 ($N_x, N_\theta, N_{x\theta}, N_{\theta x}, Q_x, Q_\theta$) と合モーメント ($M_x, M_\theta, M_{x\theta}, M_{\theta x}$) を、 ($n_x, n_\theta, n_{x\theta}, n_{\theta x}, \bar{Q}_x, \bar{Q}_\theta$) と ($m_x, m_\theta, m_{x\theta}, m_{\theta x}$) を係数とする形で円周方向に Fourier 級数展開する。

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} &= \frac{\sigma a^2}{Eh^2} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} u^{(n)} \cos n\theta \\ v^{(n)} \sin n\theta \\ w^{(n)} \cos n\theta \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_\theta \end{Bmatrix} = \frac{\sigma a}{Eh} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} \phi_x^{(n)} \cos n\theta \\ \phi_\theta^{(n)} \sin n\theta \end{Bmatrix} \\ \\ \begin{Bmatrix} P_x \\ P_\theta \\ P_z \end{Bmatrix} &= \sigma \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} p_x^{(n)} \cos n\theta \\ p_\theta^{(n)} \sin n\theta \\ p_z^{(n)} \cos n\theta \end{Bmatrix}, \\ \\ \begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ N_{\theta x} \\ Q_x \\ Q_\theta \end{Bmatrix} &= \sigma a \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} n_x^{(n)} \cos n\theta \\ n_\theta^{(n)} \cos n\theta \\ n_{x\theta}^{(n)} \sin n\theta \\ n_{\theta x}^{(n)} \sin n\theta \\ \bar{Q}_x^{(n)} \cos n\theta \\ \bar{Q}_\theta^{(n)} \sin n\theta \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \\ M_{\theta x} \end{Bmatrix} = \sigma a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} m_x^{(n)} \cos n\theta \\ m_\theta^{(n)} \cos n\theta \\ m_{x\theta}^{(n)} \sin n\theta \\ m_{\theta x}^{(n)} \sin n\theta \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\}$$

(6-11)

ただし、 σ : 基準応力、 n : 円周方向波数、なお以下では、簡単のために Fourier 係数の添字(n) は省略される。

式(6-6)に式(6-11)を代入し Fourier 係数で表わした後、合応力および合モーメント成分を式(6-8)~(6-10)を用いて変位成分表示すれば、運動方程式(6-6)は U, V, W, ϕ_x および ϕ_θ に関する 2 階 5 元連立偏微分方程式として次のように表わされる。

$$\begin{aligned} a_1 U'' + a_2 U' + a_3 U + a_4 V' + a_5 V + a_6 W' + a_7 W + a_8 \phi_x'' + a_9 \phi_x' \\ + a_{10} \phi_x + a_{11} \phi_\theta = -(1-\nu^2) P_x + m_1 \ddot{U} + m_2 \ddot{\phi}_x \end{aligned} \quad (6-12a)$$

$$\begin{aligned} a_{12} U' + a_{13} U + a_{14} V' + a_{15} V + a_{16} W + a_{17} W + a_{18} \phi_x + a_{19} \phi_\theta'' \\ + a_{20} \phi_\theta' + a_{21} \phi_\theta = -(1-\nu^2) P_\theta + m_3 \ddot{V} + m_4 \ddot{\phi}_\theta \end{aligned} \quad (6-12b)$$

$$\begin{aligned} a_{22} U' + a_{23} U + a_{24} V + a_{25} W'' + a_{26} W' + a_{27} W + a_{28} \phi_x' + a_{29} \phi_x \\ + a_{30} \phi_\theta = (1-\nu^2) P_z + m_5 \ddot{W} \end{aligned} \quad (6-12c)$$

$$\begin{aligned}
& a_{31}U'' + a_{32}U' + a_{33}U + a_{34}V + a_{35}W' + a_{36}W + a_{37}\phi_X'' + a_{38}\phi_X' + a_{39}\phi_X \\
& + a_{40}\phi_\theta' + a_{41}\phi_\theta = m_6\ddot{U} + m_7\ddot{\phi}_X \quad (6-12d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_{42}U + a_{43}V' + a_{44}V + a_{45}W + a_{46}W' + a_{47}\phi_X' + a_{48}\phi_X + a_{49}\phi_\theta'' \\
& + a_{50}\phi_\theta' + a_{51}\phi_\theta = m_8\ddot{V} + m_9\ddot{\phi}_\theta \quad (6-12e)
\end{aligned}$$

ただし、 $a_1 \sim a_{51}$ は殻パラメータ (式 (6-4))、ポアソン比 ν および円周方向波数 n で表わされる係数で、その定義式は付録に示す。また $m_1 \sim m_9$ は、式 (6-7) で定義された慣性項に関する係数である。

殻の末端で規定される境界条件および殻の分割点で成立する接続条件は、次の五組の適当な組合せによって構成される。

$$\left. \begin{aligned}
U & \text{ または } N_X, & V & \text{ または } N_{X\theta} \\
W & \text{ または } Q_X, & \phi_X & \text{ または } M_X \\
\phi_\theta & \text{ または } M_{X\theta},
\end{aligned} \right\} \quad (6-13a)$$

あるいは、Fourier 係数で表示すれば

$$\left. \begin{aligned}
u & \text{ または } n_X, & v & \text{ または } n_{X\theta} \\
w & \text{ または } \bar{Q}_X, & \phi_X & \text{ または } m_X \\
\phi_\theta & \text{ または } m_{X\theta},
\end{aligned} \right\} \quad (6-13b)$$

となる。後の定式化において必要な力学量 ($n_X, n_{X\theta}, \bar{Q}_X, m_X, m_{X\theta}$) を、式 (6-8) と式 (6-10) を用いて変形量 ($U, V, W, \phi_X, \phi_\theta$) で表わせれば、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
n_X & = b_1U' + b_2U + b_3V + b_4W + b_5\phi_X' \\
n_{X\theta} & = b_6U + b_7V' + b_8V + b_9\phi_\theta' \\
\bar{Q}_X & = b_{10}U + b_{11}W' + b_{12}\phi_X \\
m_{X\theta} & = b_{13}U' + b_{14}W + b_{15}\phi_X' + b_{16}\phi_X + b_{17}\phi_\theta \\
m_{X\theta} & = b_{18}V' + b_{19}\phi_X + b_{20}\phi_\theta' + b_{21}\phi_\theta
\end{aligned} \right\} \quad (6-14)$$

なお係数 $b_1 \sim b_{21}$ は付録に示す。

6-3 選点法による空間領域の離散化

構造振動問題に対する離散化手順と同様に、図6-2(a)に示すように回転殻を経線に沿ってN個の要素に分割し、k番目の要素を(k)要素と呼び、境界条件が指定される両端を1, N+1, 分割点を2, 3, ..., Nと番号付けをする。各要素(経線の長さ $l^{(k)}$)で成立する基礎式の位置に関する独立変数 ξ は $0 \leq \xi \leq 1$ で定義されるものとする。

選点法による空間領域の近似過程はこれまでに従って行われるが、以下で必要となる事項(①~③)を参照の便宜のために整理しておく。

① 内部選点と端点： 図6-2(b)に示すように各要素の経線に沿って $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_M < \xi_{M+1} = 1$ のM+2個の点を配置する。 ξ_j ($j=1 \sim M$)を内部選点、 $\xi_0=0$ および $\xi_{M+1}=1$ を端点と呼ぶ。

② 行列 $[A^{(1)}]$ と $[A^{(2)}]$ ： 各要素において、未知関数(変位成分)の時刻 τ での位置関数 ξ に関する1, 2階微分を、時刻 τ での内部選点と端点における関数値(変位の値)に結びつける(M+2)次の正方マトリックスである。具体的な内容は式(2-27a)で与えられる。(k)要素の変位成分 $(u^{(k)}, v^{(k)}, w^{(k)}, \phi_x^{(k)}, \phi_\theta^{(k)})$ の一つを $Z^{(k)}$ と表わすことにすれば、次のような関係式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \{Z'^{(k)}\}_\tau &= [A^{(1)}] \{Z^{(k)}\}_\tau \\ \{Z''^{(k)}\}_\tau &= [A^{(2)}] \{Z^{(k)}\}_\tau \end{aligned} \right\} \quad (6-15)$$

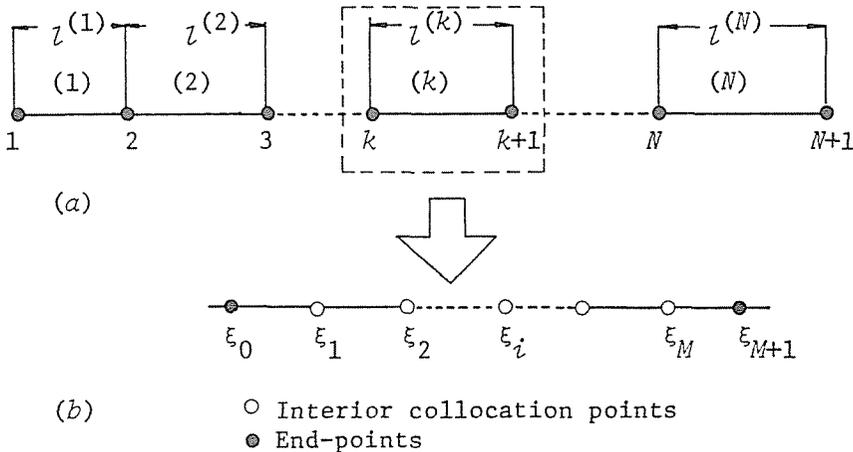


図6-2 経線に沿ったN要素分割と内部選点、端点の配置状況

ここで、肩添字(k)は(k)要素に関する諸量を意味し、(M+2)次のベクトル、例えば{Z(k)}は次のようなものである。

$$\{Z(k)\}_\tau^T = (Z^{(k)}(\xi_0)_\tau, Z^{(k)}(\xi_1)_\tau, \dots, Z^{(k)}(\xi_M)_\tau, Z^{(k)}(\xi_{M+1})_\tau) \quad (6-16)$$

なお今後は、簡単のために添字τは省略する。

- ③ {Z_I^(k)}と{Z_B^(k)}：式(6-16)は内部選点と端点に関する両方の成分を含んでいる。以下では、内部選点に関する部分と端点に関する部分に分離し、次のように表示する。

$$\left. \begin{aligned} \{Z_I^{(k)}\}^T &= (Z^{(k)}(\xi_1), Z^{(k)}(\xi_2), \dots, Z^{(k)}(\xi_M)) \\ \{Z_B^{(k)}\}^T &= (Z^{(k)}(\xi_0), Z^{(k)}(\xi_{M+1})) \end{aligned} \right\} \quad (6-17)$$

ここで、添字I、Bはそれぞれ、内部選点、端点に関するベクトルを表わす。内部選点と端点に分離する表示法は、後に示すように、選点法によって離散化された時間依存の方程式に対し、陽と陰な積分公式を適用して構成される解析アルゴリズムが、比較的小さな次元の行列演算によって組み立てられることを可能にしている。

さて、要素分割数をNとすれば、未知量の数は5(M+2)Nとなる。5(M+2)N個の未知数に対して、5MN個の条件は運動方程式の残差条件より得られ、残りの10N個の条件は、10個の境界条件と、10(N-1)個の分割点における接続条件によって与えられる。

(1) 5MN個の条件

この条件は、時刻τで成立する運動方程式(6-12)の内部選点における残差の条件より定められる。式(6-12)に対応し、位置ξと時間τの関数として表わされる(k)要素の残差をR_i^(k)(ξ, τ), (i=1~5)と記せば、(k)要素より得られる5M個の条件は次のように表現される。

$$\int_0^1 R_i^{(k)}(\xi, \tau) \delta(\xi - \xi_j) d\xi = R_i^{(k)}(\xi_j, \tau) = 0 \quad (6-18)$$

ただし、i=1~5, j=1~M。

式(6-18)は、式(6-12)に現われる位置ξに関する微分の階数に対応するマトリックス[A<1>], [A<2>] (式(6-15))を用いて、次の時間依存のマトリックス常微分方程式へと変換される。

$$[K_I^{(k)}] \{ \dot{\delta}_I^{(k)} \} + [K_B^{(k)}] \{ \dot{\delta}_B^{(k)} \} = \{ P_I^{(k)} \} + [M_I^{(k)}] \{ \ddot{\delta}_I^{(k)} \} \quad (6-19)$$

ここで、添字 I と B はそれぞれ、内部選点と端点に関するマトリックス、ベクトルを表わす。
 5 M 次のベクトル $\{\delta_I^{(k)}\}$ 、 $\{\ddot{\delta}_I^{(k)}\}$ および 10 次のベクトル $\{\delta_B^{(k)}\}$ の内容は以下となる。

$$\left. \begin{aligned} \{\delta_I^{(k)}\}^T &= (\{u_I^{(k)}\}^T, \{v_I^{(k)}\}^T, \{w_I^{(k)}\}^T, \{\phi_{xI}^{(k)}\}^T, \{\phi_{\theta I}^{(k)}\}^T) \\ \{\ddot{\delta}_I^{(k)}\}^T &= (\{\ddot{u}_I^{(k)}\}^T, \{\ddot{v}_I^{(k)}\}^T, \{\ddot{w}_I^{(k)}\}^T, \{\ddot{\phi}_{xI}^{(k)}\}^T, \{\ddot{\phi}_{\theta I}^{(k)}\}^T) \\ \{\delta_B^{(k)}\}^T &= (\{u_B^{(k)}\}^T, \{v_B^{(k)}\}^T, \{w_B^{(k)}\}^T, \{\phi_{xB}^{(k)}\}^T, \{\phi_{\theta B}^{(k)}\}^T) \end{aligned} \right\} \quad (6-20)$$

ただし、部分ベクトル $\{u_I^{(k)}\}$ 、 $\{u_B^{(k)}\}$ などの具体的内容は、式(6-17)に従う。5 M 次の荷重ベクトルは、次のようなものである。

$$\begin{aligned} \{P_I^{(k)}\}^T &= ((1-\nu^2)\{P_x^{(k)}\}^T, (1-\nu^2)\{P_{\theta}^{(k)}\}^T, (1-\nu^2)\{P_z^{(k)}\}^T, \\ &\quad \{0\}^T, \{0\}^T) \end{aligned} \quad (6-21)$$

ただし、 $\{0\}$ は M 次の零ベクトルであり、残りの M 次のベクトルは次のようである。

$$\left. \begin{aligned} \{P_x^{(k)}\}^T &= (-P_x^{(k)}(\xi_1), -P_x^{(k)}(\xi_2), \dots, -P_x^{(k)}(\xi_M)) \\ \{P_{\theta}^{(k)}\}^T &= (-P_{\theta}^{(k)}(\xi_1), -P_{\theta}^{(k)}(\xi_2), \dots, -P_{\theta}^{(k)}(\xi_M)) \\ \{P_z^{(k)}\}^T &= (P_z^{(k)}(\xi_1), P_z^{(k)}(\xi_2), \dots, P_z^{(k)}(\xi_M)) \end{aligned} \right\} \quad (6-22)$$

さらに、(5 M × 5 M) 次のマトリックス $[M_I^{(k)}]$ 、 $[K_I^{(k)}]$ と (5 M × 10) 次のマトリックス $[K_B^{(k)}]$ は、以下のように与えられる。

$[M_I^{(k)}]$ について：

$$[M_I^{(k)}] = \begin{bmatrix} [M_{uu}] [0] [0] [M_{ux}] [0] \\ [0] [M_{vv}] [0] [0] [M_{v\theta}] \\ [0] [0] [M_{ww}] [0] [0] \\ [M_{xu}] [0] [0] [M_{xx}] [0] \\ [0] [M_{\theta v}] [0] [0] [M_{\theta\theta}] \end{bmatrix} \quad (6-23)$$

ここで、零マトリックスを除く ($M \times M$) 次の部分マトリックスの要素は、次のようになる。
式 (6-7), (6-12) より

$$\left. \begin{aligned} [M_{uu}] &= [M_{vv}] = [M_{ww}] = \text{diag} [m_1(\xi_1), m_1(\xi_2), \dots, m_1(\xi_M)] \\ [M_{ux}] &= [M_{v\theta}] = [M_{xu}] = [M_{\theta v}] = \text{diag} [m_2(\xi_1), m_2(\xi_2), \dots, m_2(\xi_M)] \\ [M_{xx}] &= [M_{\theta\theta}] = \text{diag} [m_7(\xi_1), m_7(\xi_2), \dots, m_7(\xi_M)] \end{aligned} \right\} \quad (6-24)$$

$[K_I^{(k)}]$ について:

$$[K_I^{(k)}] = \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uv}] & [K_{uw}] & [K_{ux}] & [K_{u\theta}] \\ [K_{vu}] & [K_{vv}] & [K_{vw}] & [K_{vx}] & [K_{v\theta}] \\ [K_{wu}] & [K_{wv}] & [K_{ww}] & [K_{wx}] & [K_{w\theta}] \\ [K_{xu}] & [K_{xv}] & [K_{xw}] & [K_{xx}] & [K_{x\theta}] \\ [K_{\theta u}] & [K_{\theta v}] & [K_{\theta w}] & [K_{\theta x}] & [K_{\theta\theta}] \end{bmatrix} \quad (6-25)$$

ここで、($M \times M$) 次の部分マトリックスの要素は、以下のとおりである。式 (6-12), (6-15) より、

$$\left. \begin{aligned} K_{uu}(i, j) &= a_1(\xi_i) A^{(2)}(i+1, j+1) + a_2(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_3(\xi_i) \delta_{ij} \\ K_{uv}(i, j) &= a_4(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_5(\xi_i) \delta_{ij} \\ K_{uw}(i, j) &= a_6(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_7(\xi_i) \delta_{ij} \\ K_{ux}(i, j) &= a_8(\xi_i) A^{(2)}(i+1, j+1) + a_9(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{10}(\xi_i) \delta_{ij} \\ K_{u\theta}(i, j) &= a_{11}(\xi_i) \delta_{ij} \\ K_{vu}(i, j) &= a_{12}(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{13}(\xi_i) \delta_{ij} \\ K_{vv}(i, j) &= a_{14}(\xi_i) A^{(2)}(i+1, j+1) + a_{15}(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{16}(\xi_i) \delta_{ij} \\ K_{vw}(i, j) &= a_{17}(\xi_i) \delta_{ij} \\ K_{vx}(i, j) &= a_{18}(\xi_i) \delta_{ij} \\ K_{v\theta}(i, j) &= a_{19}(\xi_i) A^{(2)}(i+1, j+1) + a_{20}(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{21}(\xi_i) \delta_{ij} \\ K_{wu}(i, j) &= a_{22}(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{23}(\xi_i) \delta_{ij} \\ K_{ww}(i, j) &= a_{24}(\xi_i) \delta_{ij} \\ K_{wx}(i, j) &= a_{25}(\xi_i) A^{(2)}(i+1, j+1) + a_{26}(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{27}(\xi_i) \delta_{ij} \\ K_{wx}(i, j) &= a_{28}(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{29}(\xi_i) \delta_{ij} \\ K_{w\theta}(i, j) &= a_{30}(\xi_i) \delta_{ij} \\ K_{xu}(i, j) &= a_{31}(\xi_i) A^{(2)}(i+1, j+1) + a_{32}(\xi_i) A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{33}(\xi_i) \delta_{ij} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
K_{xv}(i, j) &= a_{34}(\xi_i)\delta_{ij} \\
K_{xw}(i, j) &= a_{35}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{36}(\xi_i)\delta_{ij} \\
K_{xx}(i, j) &= a_{37}(\xi_i)A^{(2)}(i+1, j+1) + a_{38}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{39}(\xi_i)\delta_{ij} \\
K_{x\theta}(i, j) &= a_{40}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{41}(\xi_i)\delta_{ij} \\
K_{\theta u}(i, j) &= a_{42}(\xi_i)\delta_{ij} \\
K_{\theta v}(i, j) &= a_{43}(\xi_i)A^{(2)}(i+1, j+1) + a_{44}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{45}(\xi_i)\delta_{ij} \\
K_{\theta w}(i, j) &= a_{46}(\xi_i)\delta_{ij} \\
K_{\theta x}(i, j) &= a_{47}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{48}(\xi_i)\delta_{ij} \\
K_{\theta\theta}(i, j) &= a_{49}(\xi_i)A^{(2)}(i+1, j+1) + a_{50}(\xi_i)A^{(1)}(i+1, j+1) + a_{51}(\xi_i)\delta_{ij}
\end{aligned}
\tag{6-26}$$

ここに、 $i, j = 1 \sim M$, δ_{ij} は Kronecker のデルタであり、 $A^{(k)}(i+1, j+1)$ はマトリックス $[A^{(k)}]$ の第 $i+1$ 行、第 $j+1$ 列の要素を表わす。

$[K_B^{(k)}]$ について：

$$[K_B^{(k)}] = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{uu}] [\bar{K}_{uv}] [\bar{K}_{uw}] [\bar{K}_{ux}] [\bar{K}_{u\theta}] \\ [\bar{K}_{vu}] [\bar{K}_{vv}] [\bar{K}_{vw}] [\bar{K}_{vx}] [\bar{K}_{v\theta}] \\ [\bar{K}_{wu}] [\bar{K}_{wv}] [\bar{K}_{ww}] [\bar{K}_{wx}] [\bar{K}_{w\theta}] \\ [\bar{K}_{xu}] [\bar{K}_{xv}] [\bar{K}_{xw}] [\bar{K}_{xx}] [\bar{K}_{x\theta}] \\ [\bar{K}_{\theta u}] [\bar{K}_{\theta v}] [\bar{K}_{\theta w}] [\bar{K}_{\theta x}] [\bar{K}_{\theta\theta}] \end{bmatrix}
\tag{6-27}$$

ここで、 $(M \times 2)$ 次の部分マトリックス $[\bar{K}_{op}]$ ($o, p = u, v, w, x, \theta$) の要素は、式 (6-26) で $A^{(2)}(i+1, j+1)$ を $A^{(2)}(i+1, \ell)$ に、 $A^{(1)}(i+1, j+1)$ を $A^{(1)}(i+1, \ell)$ に書き直し、 δ_{ij} を含む項を取り除くことで得られる。一例として、 $[\bar{K}_{up}]$ ($p = u, v, w, x, \theta$) の要素は次のように書き表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
\bar{K}_{uu}(i, j) &= a_1(\xi_i)A^{(2)}(i+1, \ell) + a_2(\xi_i)A^{(1)}(i+1, \ell) \\
\bar{K}_{uv}(i, j) &= a_4(\xi_i)A^{(1)}(i+1, \ell) \\
\bar{K}_{uw}(i, j) &= a_6(\xi_i)A^{(1)}(i+1, \ell) \\
\bar{K}_{ux}(i, j) &= a_8(\xi_i)A^{(2)}(i+1, \ell) + a_9(\xi_i)A^{(1)}(i+1, \ell) \\
\bar{K}_{u\theta}(i, j) &= 0
\end{aligned} \right\}
\tag{6-28}$$

ただし、 $i = 1 \sim M$ 、 $i = 1, 2$ 、 ℓ は次の約束に従う。

$$\ell \begin{cases} = 1 & ; \quad j = 1 \\ = M+2 & ; \quad j = 2 \end{cases}$$

以上より、全要素に対する $5MN$ 個の条件は、式(6-19)で $k = 1 \sim N$ とすることにより求められる。

(2) $10N$ 個の条件

$10N$ 個の条件は、境界条件と分割点における接続条件によって定められる。これらは、式(6-13b)の変形量 ($u, v, w, \phi_x, \phi_\theta$)と力学量 ($n_x, n_{x\theta}, \bar{Q}_x, m_x, m_{x\theta}$)の組合せで与えられるもので、一般的な形で整理しておく。

変形量について：

(k)要素の端点 $\xi_0 = 0$ 、 $\xi_{M+1} = 1$ における変形量を次式で表わす。

$$\{X^{(k)}\}_{\xi=\xi_\ell}^T = (u^{(k)}(\xi_\ell), v^{(k)}(\xi_\ell), w^{(k)}(\xi_\ell), \phi_x^{(k)}(\xi_\ell), \phi_\theta^{(k)}(\xi_\ell)) \quad (6-29)$$

ここに、 $\ell = 0, M+1$ 。上式を内部選点の成分と端点の成分に区別し、マトリックス表示すると次式を得る。

$$\{X^{(k)}\}_{\xi=\xi_\ell} = [G_I^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} \{\delta_I^{(k)}\} + [G_B^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} \{\delta_B^{(k)}\} \quad (6-30)$$

ここで、添字 $\xi=\xi_\ell$ は、端点 ξ_ℓ ($\ell=0, M+1$)に関するベクトル、マトリックスを意味する。 $(5 \times 5M)$ 次および (5×10) 次のマトリックス $[G_I^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell}$ および $[G_B^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell}$ の内容は次のようなものである。

$$[G_I^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} = [0] \quad (6-31)$$

$$[G_B^{(k)}]_{\xi=\xi_0} = \begin{matrix} & \{u_B^{(k)}\}^T & \{v_B^{(k)}\}^T & \{w_B^{(k)}\}^T & \{\phi_{x_B}^{(k)}\}^T & \{\phi_{\theta_B}^{(k)}\}^T \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(6-32a)

$$[G_B^{(k)}]_{\xi=\xi_{M+1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6-32b)$$

力学量について：

(k)要素の端点における力学量を次式で表わす。

$$\{F^{(k)}\}_{\xi=\xi_\ell}^T = (n_x(\xi_\ell), n_{x\theta}(\xi_\ell), \bar{Q}_x(\xi_\ell), m_x(\xi_\ell), m_{x\theta}(\xi_\ell)) \quad (6-33)$$

ここに $\ell = 0, M+1$ 。上式を、式(6-14)と式(6-15)を用い、内部選点と端点の成分に分離しマトリックス表示すると次のようになる。

$$\{F^{(k)}\}_{\xi=\xi_\ell} = [Q_I^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} \{ \delta_I^{(k)} \} + [Q_B^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} \{ \delta_B^{(k)} \} \quad (6-34)$$

ここに、 $\ell = 0, M+1$ であり、 $(5 \times 5M)$ 次のマトリックス $[Q_I^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell}$ と (5×10) 次のマトリックス $[Q_B^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell}$ の内容は、以下のとおりである。

$$[Q_I^{(k)}]_{\xi=\xi_\ell} = \begin{bmatrix} [Q_u^1] & [0] & [0] & [Q_x^1] & [0] \\ [0] & [Q_v^1] & [0] & [0] & [Q_\theta^1] \\ [0] & [0] & [Q_w] & [0] & [0] \\ [Q_u^2] & [0] & [0] & [Q_x^2] & [0] \\ [0] & [Q_v^2] & [0] & [0] & [Q_\theta^2] \end{bmatrix} \quad (6-35)$$

ここで $[Z]$ はその成分が Z_1, Z_2, \dots, Z_M の行マトリックスを表わし、 $[0]$ は零マトリックスを意味し、他の行マトリックスの成分は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} Q_u^1 i &= b_1(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1), & Q_x^1 i &= b_5(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1) \\ Q_v^1 i &= b_7(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1), & Q_\theta^1 i &= b_9(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1) \\ Q_w i &= b_{11}(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1), \\ Q_u^2 i &= b_{13}(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1), & Q_x^2 i &= b_{15}(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1) \\ Q_v^2 i &= b_{18}(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1), & Q_\theta^2 i &= b_{20}(\xi_\ell) A^{(1)}(\ell+1, i+1) \end{aligned} \right\} \quad (6-36)$$

ただし、 $\ell = 0, M+1, i = 1 \sim M$ 。さらに、

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} Q \\ B \end{array} \right]^{(k)}_{\xi=\xi_0} = & \left[\begin{array}{cccc} b_1(\xi_0) \alpha + b_2(\xi_0) & b_1(\xi_0) \beta & b_3(\xi_0) & 0 \\ b_6(\xi_0) & 0 & b_7(\xi_0) \alpha + b_8(\xi_0) & b_7(\xi_0) \beta \\ b_{10}(\xi_0) & 0 & 0 & 0 \\ b_{13}(\xi_0) \alpha & b_{13}(\xi_0) \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{18}(\xi_0) \alpha & b_{18}(\xi_0) \beta \\ b_4(\xi_0) & 0 & b_5(\xi_0) \alpha & b_5(\xi_0) \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_9(\xi_0) \alpha \\ b_{11}(\xi_0) \alpha & b_{11}(\xi_0) \beta & b_{12}(\xi_0) & 0 & 0 \\ b_{14}(\xi_0) & 0 & b_{15}(\xi_0) \alpha + b_{16}(\xi_0) & b_{15}(\xi_0) \beta & b_{17}(\xi_0) \\ 0 & 0 & b_{19}(\xi_0) & 0 & b_{20}(\xi_0) \alpha + b_{21}(\xi_0) \\ 0 & & & & \\ b_9(\xi_0) \beta & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ b_{20}(\xi_0) \beta & & & & \end{array} \right] \quad (6-37 a)
 \end{aligned}$$

ただし、 $\alpha = A^{(1)}(1, 1)$ 、 $\beta = A^{(1)}(1, M+2)$ 。また、

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} Q \\ B \end{array} \right]^{(k)}_{\xi=\xi_{M+1}} = & \left[\begin{array}{ccc} b_1(\xi_{M+1}) \alpha & b_1(\xi_{M+1}) \beta + b_2(\xi_{M+1}) & 0 \\ 0 & b_6(\xi_{M+1}) & b_7(\xi_{M+1}) \alpha \\ 0 & b_{10}(\xi_{M+1}) & 0 \\ b_{13}(\xi_{M+1}) \alpha & b_{13}(\xi_{M+1}) \beta & 0 \\ 0 & 0 & b_{18}(\xi_{M+1}) \alpha \\ b_3(\xi_{M+1}) & 0 & b_4(\xi_{M+1}) & b_5(\xi_{M+1}) \alpha \\ b_7(\xi_{M+1}) \beta + b_8(\xi_{M+1}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{11}(\xi_{M+1}) \alpha & b_{11}(\xi_{M+1}) \beta & 0 \\ 0 & 0 & b_{14}(\xi_{M+1}) & b_{15}(\xi_{M+1}) \alpha \\ b_{18}(\xi_{M+1}) \beta & 0 & 0 & 0 \\ b_5(\xi_{M+1}) \beta & 0 & 0 & \\ 0 & b_9(\xi_{M+1}) \alpha & b_9(\xi_{M+1}) \beta & \\ b_{12}(\xi_{M+1}) & 0 & 0 & \\ b_{15}(\xi_{M+1}) \beta + b_{16}(\xi_{M+1}) & 0 & b_{17}(\xi_{M+1}) & \\ b_{19}(\xi_{M+1}) & b_{20}(\xi_{M+1}) \alpha & b_{20}(\xi_{M+1}) \beta + b_{21}(\xi_{M+1}) & \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

ただし、 $\alpha = A^{(1)}(M+2, 1)$ 、 $\beta = A^{(1)}(M+2, M+2)$ 。

さて、10個の境界条件と、 $10(N-1)$ 個の分割点で成立する接続条件は以下のように整理される。まず10個の条件は、(1)要素の境界点1 ($\xi = \xi_0$) および(N)要素の境界点 $N+1$ ($\xi = \xi_{M+1}$) で指定されるそれぞれ五つの条件より定められる。それらは、式(6-13)に示した五組の対の適当な組合せによって表わされるもので、便宜上次のように表わしておく。

(1)要素の境界点1 ($\xi = \xi_0$) で：

$$[S_I^{(1)}]_{\xi=\xi_0} \{ \delta_I^{(1)} \} + [S_B^{(1)}]_{\xi=\xi_0} \{ \delta_B^{(1)} \} = \{ g^{(1)} \} \quad (6-38a)$$

(N)要素の境界点 $N+1$ ($\xi = \xi_{M+1}$) で：

$$[S_I^{(N)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \{ \delta_I^{(N)} \} + [S_B^{(N)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \{ \delta_B^{(N)} \} = \{ g^{(N)} \} \quad (6-38b)$$

ここで、 $[S_I^{(1)}]_{\xi=\xi_0}$ と $[S_I^{(N)}]_{\xi=\xi_{M+1}}$ は $(5 \times 5M)$ 次、 $[S_B^{(1)}]_{\xi=\xi_0}$ と $[S_B^{(N)}]_{\xi=\xi_{M+1}}$ は (5×10) 次のマトリックスである。各マトリックスは、指定された境界条件に応じて、式(6-30)と式(6-34)で定義したマトリックス(あるいは一部)を用いて作成される。なお、 $\{ g^{(1)} \}$ と $\{ g^{(N)} \}$ は、境界点であらかじめ規定された変形量と力学量の値を成分とする5次のベクトルである。

一方、分割点 ($i = 2 \sim N$) で成立する $10(N-1)$ 個の接続条件は、式(6-29)、(6-33)より次のように表わされる。

$$\{ X^{(i-1)} \}_{\xi=\xi_{M+1}} = \{ X^{(i)} \}_{\xi=\xi_0} \quad (i=2 \sim N) \quad (6-39a)$$

$$\{ F^{(i-1)} \}_{\xi=\xi_{M+1}} = \{ F^{(i)} \}_{\xi=\xi_0} \quad (6-39b)$$

式(6-39a)に対しては式(6-30)、式(6-39b)に対しては式(6-34)を用いて、式(6-39)は一つのマトリックス方程式にまとめられる。

$$[S_I^{(i-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \{ \delta_I^{(i-1)} \} + [S_B^{(i-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \{ \delta_B^{(i-1)} \} + [S_I^{(i)}]_{\xi=\xi_0} \{ \delta_I^{(i)} \} + [S_B^{(i)}]_{\xi=\xi_0} \{ \delta_B^{(i)} \} = \{ 0 \} \quad (6-40)$$

ここに $i = 2 \sim N$, 各マトリックスは次のようなものである。

$$\begin{aligned}
 [S_I^{(i-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} &= \begin{bmatrix} [G_I^{(i-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \\ \dots \\ [Q_I^{(i-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \end{bmatrix}, & [S_B^{(i-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} &= \begin{bmatrix} [G_B^{(i-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \\ \dots \\ [Q_B^{(i-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \end{bmatrix} \\
 & (10 \times 5M) & & (10 \times 10) \\
 [S_I^{(i)}]_{\xi=\xi_0} &= \begin{bmatrix} -[G_I^{(i)}]_{\xi=\xi_0} \\ \dots \\ -[Q_I^{(i)}]_{\xi=\xi_0} \end{bmatrix}, & [S_B^{(i)}]_{\xi=\xi_0} &= \begin{bmatrix} -[G_B^{(i)}]_{\xi=\xi_0} \\ \dots \\ -[Q_B^{(i)}]_{\xi=\xi_0} \end{bmatrix} \\
 & (10 \times 5M) & & (10 \times 10)
 \end{aligned}$$

(6-41)

6-4 時間領域の離散化と解析アルゴリズム

応力波伝播問題における時間領域の離散化は、構造振動問題と同様に、おもにモード解析法（モード重ね合わせ法）と直接積分法の二つの系統の方法の使用が可能である。モード解析法は、固有振動問題の解析で得られる振動モードを重ね合わせて応答を求める方法であり、高次のモードまでも必要とする応力波伝播問題に対しては効率的な手法とは言い難い。一方、直接積分法は、小さな時間間隔ごとに step-by-step に解を求めていく方法であり、どのような問題にも形式的には適用可能であり、汎用性の点では特に優れた手法である。本節では、上述の点を考慮して直接積分法による時間領域の離散化を試みる。

直接積分法は、条件安定な陽解法 (Explicit scheme) と無条件安定な陰解法 (Implicit scheme) に大別され、どのスキームを用いるかは、計算対象の特性、要求される解の精度および計算効率などを総合的・相対的に判断して決めることになる。しかし、応力波伝播問題の離散化された式は、時間と空間の離散量で規定される離散系に固有の速さに関連するパラメータを含み、時間刻み幅は後述する Courant - Friedrichs - Lewy 条件 (以下 C-F-L 条件と記す) を満たすことが要求され、積分スキームの選択の基準は、陰解法が一般的に用いられる構造振動問題ほど明確でない。

それゆえ、本節では、陽解法として代表的に中心差分法を、陰解法として代表的に Houbolt 法²²⁾を選び、双方と選点法の組合せによる解析アルゴリズムを提示する。その際、対象とする問題の特性上、未知数の数の増加は避けられないので、小行列の演算が主体的になるように解析アルゴリズム

ムの構成に配慮を加える。以下、初期条件は零として議論を進める。

(1) 選点法と陰解法の組合せに対する解析アルゴリズム

陰解法による場合には、変位型有限要素法でよく用いられる部分構造法²¹⁾に類似な手法を導入することにより、最終的には解くべき方程式は比較的小さな係数行列へと変換できる。すなわち、N個の要素に分割された構造系において、その一つ一つを部分構造とみなし、部分構造の内部選点での変位を要素両端にとられた端点の変位で表わし、最終的にはすべての端点上の変位のみで動的平衡条件を表わすことになる。

さて、式(6-19)にHoubolt法を適用すれば、時刻 $\tau = \tau_0 + j\Delta\tau$ (τ_0 : スタート時刻, $\Delta\tau$: 時間刻み幅, j : 時間ステップ)で成立する次式を得る。

$$[\alpha_I^{(k)}] \{ \delta_I^{(k)} \}_j + [\alpha_B^{(k)}] \{ \delta_B^{(k)} \}_j = \{ Q_I^{(k)} \}_j \quad (k = 1 \sim N) \quad (6-42)$$

ここで、

$j = 1$ のとき:

$$\left. \begin{aligned} [\alpha_I^{(k)}] &= [K_I^{(k)}] - 6 [M_I^{(k)}] / \Delta\tau^2 \\ [\alpha_B^{(k)}] &= [K_B^{(k)}] \\ \{ Q_I^{(k)} \}_1 &= 2 \{ P_I^{(k)} \}_1 + \{ P_I^{(k)} \}_0 \end{aligned} \right\} \quad (6-43 a)$$

$j = 2$ のとき:

$$\left. \begin{aligned} [\alpha_I^{(k)}] &= [K_I^{(k)}] - 2 [M_I^{(k)}] / \Delta\tau^2 \\ [\alpha_B^{(k)}] &= [K_B^{(k)}] \\ \{ Q_I^{(k)} \}_2 &= \{ P_I^{(k)} \}_2 + \{ P_I^{(k)} \}_0 - 4 [M_I^{(k)}] \{ \delta_I^{(k)} \}_1 / \Delta\tau^2 \end{aligned} \right\} \quad (6-43 b)$$

$j \geq 3$ のとき:

$$\left. \begin{aligned} [\alpha_I^{(k)}] &= [K_I^{(k)}] - 2 [M_I^{(k)}] / \Delta\tau^2 \\ [\alpha_B^{(k)}] &= [K_B^{(k)}] \\ \{ Q_I^{(k)} \}_j &= \{ P_I^{(k)} \}_j - [M_I^{(k)}] (5 \{ \delta_I^{(k)} \}_{j-1} - 4 \{ \delta_I^{(k)} \}_{j-2} \\ &\quad + \{ \delta_I^{(k)} \}_{j-3}) / \Delta\tau^2 \end{aligned} \right\} \quad (6-43 c)$$

式(6-42)を $\{\delta_I^{(k)}\}_j$ について解くと次式が得られる。

$$\{\delta_I^{(k)}\}_j = [\alpha_I^{(k)}]^{-1} (\{q_I^{(k)}\}_j - [\alpha_B^{(k)}] \{\delta_B^{(k)}\}_j) \quad (6-44)$$

上式を、添字(k)に留意して、式(6-38)、(6-40)に代入すれば、端点における変形量を未知ベクトルとする次式を得る。

$$[\alpha_B] \{\delta_B\}_j = \{\bar{q}_B\}_j \quad (6-45)$$

ここに、 $\{\delta_B\}_j$ は式(6-20)の第3式を成分とする10N次のベクトルである。

$$\{\delta_B\}_j^T = (\{\delta_B^{(1)}\}_j^T, \{\delta_B^{(2)}\}_j^T, \dots, \{\delta_B^{(N)}\}_j^T) \quad (6-46)$$

さらに、大きさが内部選点数Mに依存しない10N×10N次のマトリックス $[\alpha_B]$ と大きさ10N次のベクトル $\{\bar{q}_B\}_j$ は、

$$[\alpha_B] = \begin{bmatrix} [\beta_1^{(1)}] \\ [\beta_2^{(1)}] [\beta_2^{(2)}] \\ \vdots \\ [\beta_N^{(N-1)}] [\beta_N^{(N)}] \\ [\beta_{N+1}^{(N)}] \end{bmatrix} \quad (6-47)$$

$$\{\bar{q}_B\}_j^T = (\{\bar{q}_1\}_j^T, \{\bar{q}_2\}_j^T, \dots, \{\bar{q}_N\}_j^T, \{\bar{q}_{N+1}\}_j^T) \quad (6-48)$$

と表わされる。ここに、

$$\left. \begin{aligned} [\beta_i^{(i)}] &= [S_B^{(i)}]_{\xi=\xi_0} - [S_I^{(i)}]_{\xi=\xi_0} [\alpha_I^{(i)}]^{-1} [\alpha_B^{(i)}] \quad (i=1 \sim N) \\ [\beta_i^{(i-1)}] &= [S_B^{(i-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} - [S_I^{(i-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} [\alpha_I^{(i-1)}]^{-1} \times \\ &\quad [\alpha_B^{(i-1)}] \quad (i=2 \sim N+1) \end{aligned} \right\} \quad (6-49a)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \{\bar{q}_1\}_j &= \{q^{(1)}\}_j - [S_I^{(1)}]_{\xi=\xi_0} [\alpha_I^{(1)}]^{-1} \{q_I^{(1)}\}_j \\
 \{\bar{q}_i\}_j &= -[S_I^{(i-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} [\alpha_I^{(i-1)}]^{-1} \{q_I^{(i-1)}\}_j \\
 &\quad - [S_I^{(i)}]_{\xi=\xi_0} [\alpha_I^{(i)}]^{-1} \{q_I^{(i)}\}_j \quad (i=2 \sim N) \\
 \{\bar{q}_{N+1}\}_j &= \{q^{(N)}\}_j - [S_I^{(N)}]_{\xi=\xi_{M+1}} [\alpha_I^{(N)}]^{-1} \{q_I^{(N)}\}_j
 \end{aligned} \right\} \quad (6-49b)$$

以上の計算過程を要約すると、端点における変位 $\{\delta_B\}_j$ は、構造全体のマトリックスに比べて次数の低い $[\alpha_B]$ (3章で定義した端点マトリックスに相当) の逆変換を含む式(6-45)より得られ、内部選点における変位 $\{\delta_I^{(k)}\}_j$ は、式(6-44)より、各要素について独立に計算が行われることになる。

(2) 選点法と陽解法の組合せに対する解析アルゴリズム

陽解法には、中心差分法を用いるが、スタート時に特別な扱いが必要なので、厳密には時間スラップ $j \geq 2$ で中心差分法を用いたことになる。

a) $j = 1$ ($\tau = \tau_0 + \Delta\tau$) のとき

$\tau = \tau_0$ の速度を中心差分、 $\tau = \tau_0 + \Delta\tau$ の加速度を後退差分で表わした後、初期条件(ここでは零と仮定)を考慮すれば、 $j = 1$ での加速度は $\{\ddot{\delta}_I^{(k)}\}_1 = 2\{\delta_I^{(k)}\}_1 / \Delta\tau^2$ となる。したがって、式(6-19)は次のようになる。

$$[\alpha_I^{(k)}] \{\delta_I^{(k)}\}_1 + [\alpha_B^{(k)}] \{\delta_B^{(k)}\}_1 = \{q_I^{(k)}\}_1 \quad (k=1 \sim N) \quad (6-50)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 [\alpha_I^{(k)}] &= [K_I^{(k)}] - 2[M_I^{(k)}] / \Delta\tau^2 \\
 [\alpha_B^{(k)}] &= [K_B^{(k)}] \\
 \{q_I^{(k)}\} &= \{P_I^{(k)}\}_0
 \end{aligned} \right\} \quad (6-51)$$

式(6-50)は式(6-42)と同形なので、(1)で述べたアルゴリズムによりすべての未知量が求められる。

b) $j \geq 2$ ($\tau = \tau_0 + j\Delta\tau$) のとき

加速度を中心差分で表わすと、式(6-19)は

$$\begin{aligned}
 [M_I^{(k)}] \{\delta_I^{(k)}\}_j / \Delta\tau^2 &= ([K_I^{(k)}] + 2[M_I^{(k)}] / \Delta\tau^2) \{\delta_I^{(k)}\}_{j-1} + [K_B^{(k)}] \times \\
 &\quad \{\delta_B^{(k)}\}_{j-1} - \{P_I^{(k)}\}_{j-1} - [M_I^{(k)}] \{\delta_I^{(k)}\}_{j-2} / \Delta\tau^2
 \end{aligned} \quad (6-52)$$

ただし、 $k = 1 \sim N$ 。上式の右辺は既知なので、各要素の内部選点の変位 $\{\delta_I^{(k)}\}_j$ は独立に解かれる。

次に、式(6-52)より求められた $\{\delta_I^{(k)}\}_j$ を式(6-38)、(6-40)に代入すれば、端点に関する変形量 $\{\delta_B^{(k)}\}_j$ を未知ベクトルとする式(6-45)の形に整理できる。ただし、式(6-45)のマトリックス $[\alpha_B]$ とベクトル $\{\bar{q}_B\}_j$ を構成する部分マトリックス(式(6-47))と部分ベクトル(式(6-48))は、次のように修正される。

$$\left. \begin{aligned} [\rho_i^{(i)}] &= [S_B^{(i)}]_{\xi=\xi_0} \quad (i=1 \sim N) \\ [\rho_i^{(i-1)}] &= [S_B^{(i-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \quad (i=2 \sim N+1) \end{aligned} \right\} \quad (6-53a)$$

$$\left. \begin{aligned} \{\bar{q}_1\}_j &= \{q^{(1)}\}_j - [S_I^{(1)}]_{\xi=\xi_0} \{\delta_I^{(1)}\}_j \\ \{\bar{q}_i\}_j &= -[S_I^{(i-1)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \{\delta_I^{(i-1)}\}_j - [S_I^{(i)}]_{\xi=\xi_0} \{\delta_I^{(i)}\}_j \\ &\quad (i=2 \sim N) \\ \{\bar{q}_{N+1}\}_j &= \{q^{(N)}\}_j - [S_I^{(N)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \{\delta_I^{(N)}\}_j \end{aligned} \right\} \quad (6-53b)$$

$j \geq 2$ での計算手順は、まず各要素の内部選点における未知量を式(6-52)より要素ごとに求め、次に構造全体の端点における未知量を定めることになる。この計算手順は、陰公式におけるそれと逆である。

(3) 時間刻み幅の設定

時間間隔は、陽および陰解法とも、空間内に配置される内部選点と端点の一連の点の最小間隔 Δx を縦波(速度 $C_1 = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$) が伝播するのに要する時間 Δt を基準に次のように設定する。

$$\Delta t = k \Delta x / C_1 \quad (6-54)$$

上式は、時間と空間の双方に差分スキームを用いたときの C-F-L 条件に相当し、 k は $0 < k \leq 1$ を満たすように定められる Courant 数である。いま、空間を N 個の要素に分割し、各要素に M 個の内部選点を配置すれば、無次元化された時間刻み幅 $\Delta \tau$ は、式(6-54)より

$$\Delta \tau = k S_{\min} \xi_{\min} \quad (6-55)$$

と表わされる。ここに、 S_{\min} および ξ_{\min} はそれぞれ、要素の経線の長さ $\ell^{(i)} (= S^{(i)} a$, $a =$ 代表長さ) および各要素に配置される内部選点 ξ_j ($j=1 \sim M$) と端点 $\xi_0=0$, $\xi_{M+1}=1$ から、次のように定まる。

$$\left. \begin{aligned} S_{\min} &= \min (S^{(i)}) & (i = 1 \sim N) \\ \xi_{\min} &= \min | \xi_{j+1} - \xi_j | & (j = 0, 1 \sim M) \end{aligned} \right\} \quad (6-56)$$

なお、選点に shifted Legendre 多項式の零点を採用すれば、 ξ_{\min} は次式で定まる。

$$\xi_{\min} = \xi_1 - \xi_0 (= \xi_{M+1} - \xi_M) \quad (6-57)$$

参考のために、表 6-1 に数種の内部選点数 M に対する ξ_{\min} の値を示す。

さて、直接時間積分法に差分スキームの陽的解法を用いれば、スキームの安定条件として次式の成立が要求される²³⁾。

$$\Delta \tau \leq \min (2 / \lambda_{\max}^{(k)}) \quad (k = 1 \sim N) \quad (6-58)$$

ここに、 $\lambda_{\max}^{(k)}$ は、 (k) 要素の無次元化された固有振動数 $\lambda (= \omega a / c_1$, ω : 固有円振動数) の最大値を表わす。ただし、空間領域を選点法の適用により離散化する本解析法の場合、 $\lambda_{\max}^{(k)}$ は (k) 要素の両端が完全固定されたときの固有振動数である。完全固定の条件が関与するのは、空間に対して用いた選点法の特性に由来する他の離散化手法にみられない特徴であり、以下で明らかにする。

(k) 要素が調和振動を行っている定常な状態を考え、式(6-19)で $\{ \partial_I^{(k)} \} \propto e^{i\omega a \tau / c_1}$, $\{ \partial_B^{(k)} \} \propto e^{i\omega a \tau / c_1}$ および $\{ P_I^{(k)} \} = \{ 0 \}$ とすれば、次式を得る。

$$[K_I^{(k)}] \{ \partial_I^{(k)} \} + [K_B^{(k)}] \{ \partial_B^{(k)} \} + \lambda^2 [M_I^{(k)}] \{ \partial_I^{(k)} \} = \{ 0 \} \quad (6-59)$$

さらに、 (k) 要素の両端が完全固定の条件に対しては、式(6-30)より次式が得られる。

$$[r_I^{(k)}] \{ \partial_I^{(k)} \} + [r_B^{(k)}] \{ \partial_B^{(k)} \} = \{ 0 \} \quad (6-60)$$

表 6-1 内部選点数 M の各値に対する ξ_{\min}

M	ξ_{\min}	M	ξ_{\min}
5	0.0469	9	0.0159
6	0.0338	10	0.0130
7	0.0254	11	0.0109
8	0.0199	12	0.0092

ただし、

$$[\gamma_I^{(k)}] = \begin{bmatrix} [G_I^{(k)}]_{\xi=\xi_0} \\ \dots \\ [G_I^{(k)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \end{bmatrix}, [\gamma_B^{(k)}] = \begin{bmatrix} [G_B^{(k)}]_{\xi=\xi_0} \\ \dots \\ [G_B^{(k)}]_{\xi=\xi_{M+1}} \end{bmatrix} \quad (6-61)$$

(10×5M) (10×10)

式(6-31), (6-32)を参照すれば, $[\gamma_I^{(k)}] = [0]$, $\det |[\gamma_B^{(k)}]| \neq 0$ であり、したがって式(6-60)より $\{\partial_B^{(k)}\} = \{0\}$ となる。 $\{\partial_B^{(k)}\} = \{0\}$ を考慮すれば、式(6-59)は次の形の固有値問題に帰着される。

$$([\mathbf{M}_I^{(k)}]^{-1} [\mathbf{K}_I^{(k)}] + \lambda^2 [\mathbf{I}]) \{\partial_I^{(k)}\} = \{0\} \quad (6-62)$$

一方、時間方向に差分スキームを適用しその結果得られた式(6-52)に、 $\{\partial_I^{(k)}\}_{j=\mu} \{\partial_I^{(k)}\}_{j-1}$ ($\mu: |\mu| \leq 1$ を満たすパラメータ)を代入し、外乱項に相当する右辺の第2, 3項目を無視すれば次式となる。

$$([\mathbf{M}_I^{(k)}]^{-1} [\mathbf{K}_I^{(k)}] - (\mu - 2 + 1/\mu) [\mathbf{I}]/\Delta\tau^2) \{\partial_I^{(k)}\}_{j-1} = \{0\} \quad (6-63)$$

式(6-62), (6-63)を比較すれば、次式が成立するとき同等の固有値問題となる。

$$\lambda^2 = -(\mu - 2 + 1/\mu) / \Delta\tau^2 \quad (6-64)$$

差分スキームによる計算が安定であるためには、 $|\mu| \leq 1$ でなければならない。このためには式(6-58)が成立しなければならない。

図6-3は、円筒殻を例に取り上げて内部選点数 $M = 11$ (shifted Legendre 多項式の零点を選点に採用), ポアソン比 $\nu = 0.3$ の場合について、式(6-62)より求められた最大固有振動数に基づき算定された時間刻み幅 $\Delta\tau (= 2/\lambda_{\max})$ を、殻厚パラメータ (h/a) および要素長パラメータ (ℓ/a) に対して整理したものである。これによると、 h/a と ℓ/a が小さくなるとともに、安定な解を得るために必要な時間刻み幅の値は小さくなっている。したがってこの場合には、少なくとも計算効率の面で、時間方向の積分に差分スキームを用いることは好ましくない。なお図6-3は、円周方向波数 $n = 1$ について作成したものであるが、 $n \leq 20$ について計算した範囲では、 $\Delta\tau$ はほぼ図6-3で近似できることが確認できた。図6-3の妥当性については後程、数値例で検証する。

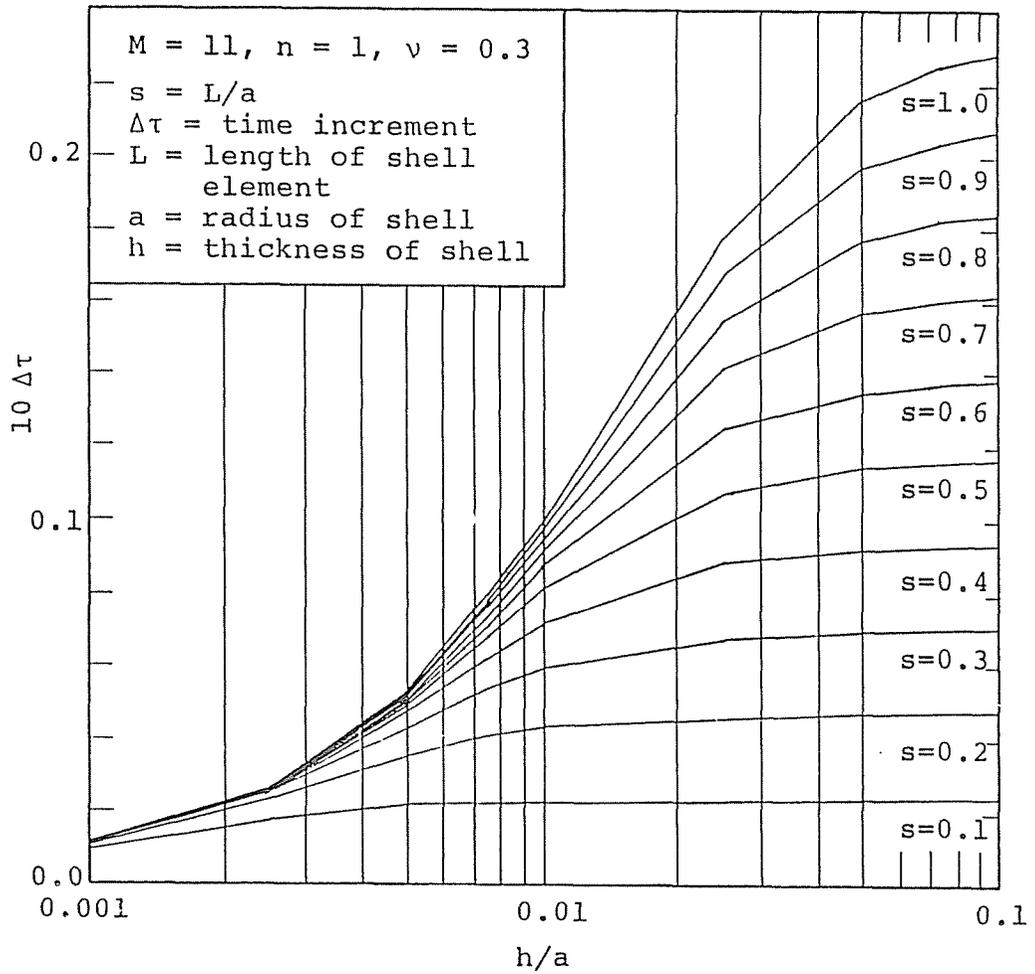


図 6-3 式(6-62)に基づいて算定された円筒殻の時間刻み幅 $\Delta\tau$

6-5 数値計算例

本節では、これまでに述べてきた本解析法を具体的な問題に適用し、手法の適用性、有効性の検討を行う。前半では棒と梁の衝撃問題という基本的な問題を取り扱い、後半では円筒殻と双曲殻という二つの回転殻の応力波伝播の問題を解析する。

(1) 棒の縦衝撃問題と梁の横衝撃問題

a) 棒の縦衝撃問題

一端が固定され、他端に一定の軸方向力 P がステップ関数状に働く場合の弾性棒の問題を考える(図6-4)。軸方向変位 $u(x, t)$ の運動方程式と初期条件、境界条件はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6-65a)$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (6-65b)$$

$$\left. \begin{aligned} EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= P(t) \\ u(0, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-65c)$$

ここで、 EA : 棒の伸び剛性、 $C_1 = \sqrt{E/\rho}$: 縦波の速度。

後の比較のために、着目点 $x = 0.8L$ (以下Point 1と称する)、 $x = 0.6L$ (Point 2)および $x = 0.4L$ (Point 3)の軸方向力の理論解を図6-5に示しておく。横軸は無次元時間 $\tau (= C_1 t/L)$ である。

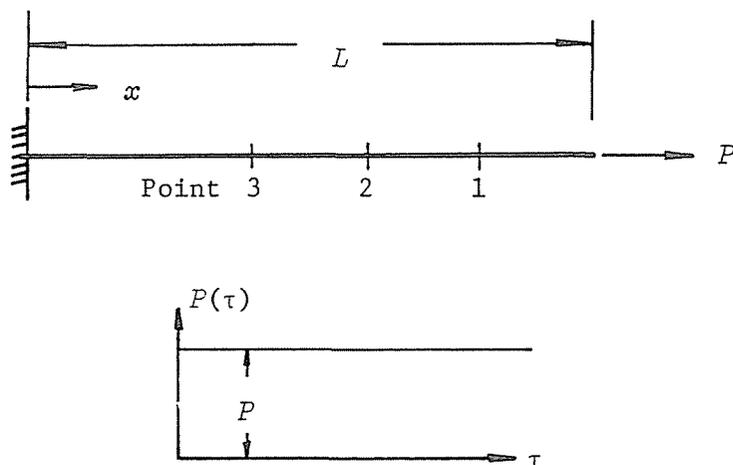


図6-4 棒の縦衝撃問題

要素分割数 $N = 5$ (等分割) および時間積分スキームに Houbolt 法を用いた軸方向力の本解析結果を図 6-6 および図 6-7 に示す。図 6-6 は時刻幅 $\Delta \tau = 0.5 \times 10^{-2}$ として、内部選点数 M の解に及ぼす影響をみたものであり、図 6-7 は $M = 11$ とし $\Delta \tau$ の解に及ぼす影響をみたものである。図には、Courant 数 k も明記したが、意図的に C-F-L 条件を満足しない場合も解析している。以下、得られた数値解について、理論解 (図 6-5) と比較しつつ考察を加える。

数値解は、空間と時間の双方に適切な離散化をすれば、理論解によく追従していることがわかるが、数値解の一般的傾向として、縦波の着目点への到達時刻における軸方向力の形状に、①緩やかな立ち上がり (なまり)、②過大な波高 (オーバーシュート)、③波頭の後方の高次振動成分による振動現象が認められる。その主要な原因は、初期値が一定の伝播速度で空間内を伝播していく問題を有限の自由度で解析したことにより応力波に見かけ上の分散が現われたため、言い換えれば、離散化にともない固有振動数に誤差が生じたためである。

上述の数値的現象は、空間領域を何らかの近似手法で離散化する際の共通の問題点であるが、本解析法による場合は内部選点数 M および時刻幅 $\Delta \tau$ の取り方によって幾分改善されている。すなわち、内部選点数 M の増加は、解の立ち上がり幅を小さくし、波頭の後方の微小振動の振幅を減少させる効果があり (図 6-6)、小さな時刻幅 $\Delta \tau$ の採用は、解の立ち上がり幅や過大な波高を減少させる働きをしている (図 6-7)。

以上の考察から明らかなように、波頭位置が縦波の伝播速度によって一義的に決定される問題については、空間と時間に対する離散化を適切に行えば、本手法によっても妥当な解が得られることが確認できた。

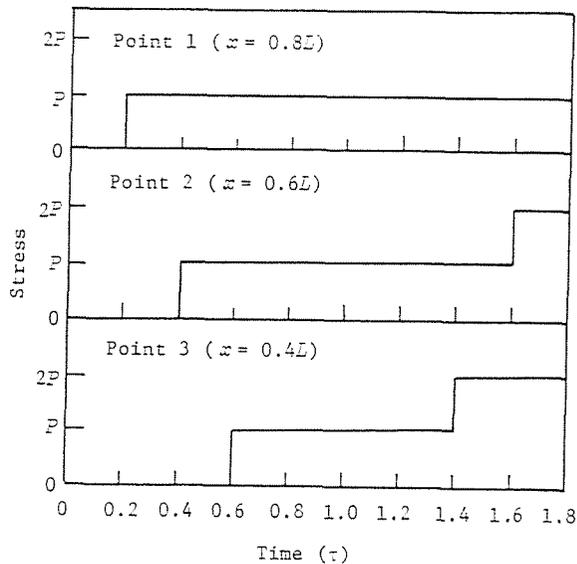


図 6-5 棒の縦衝撃問題の理論解

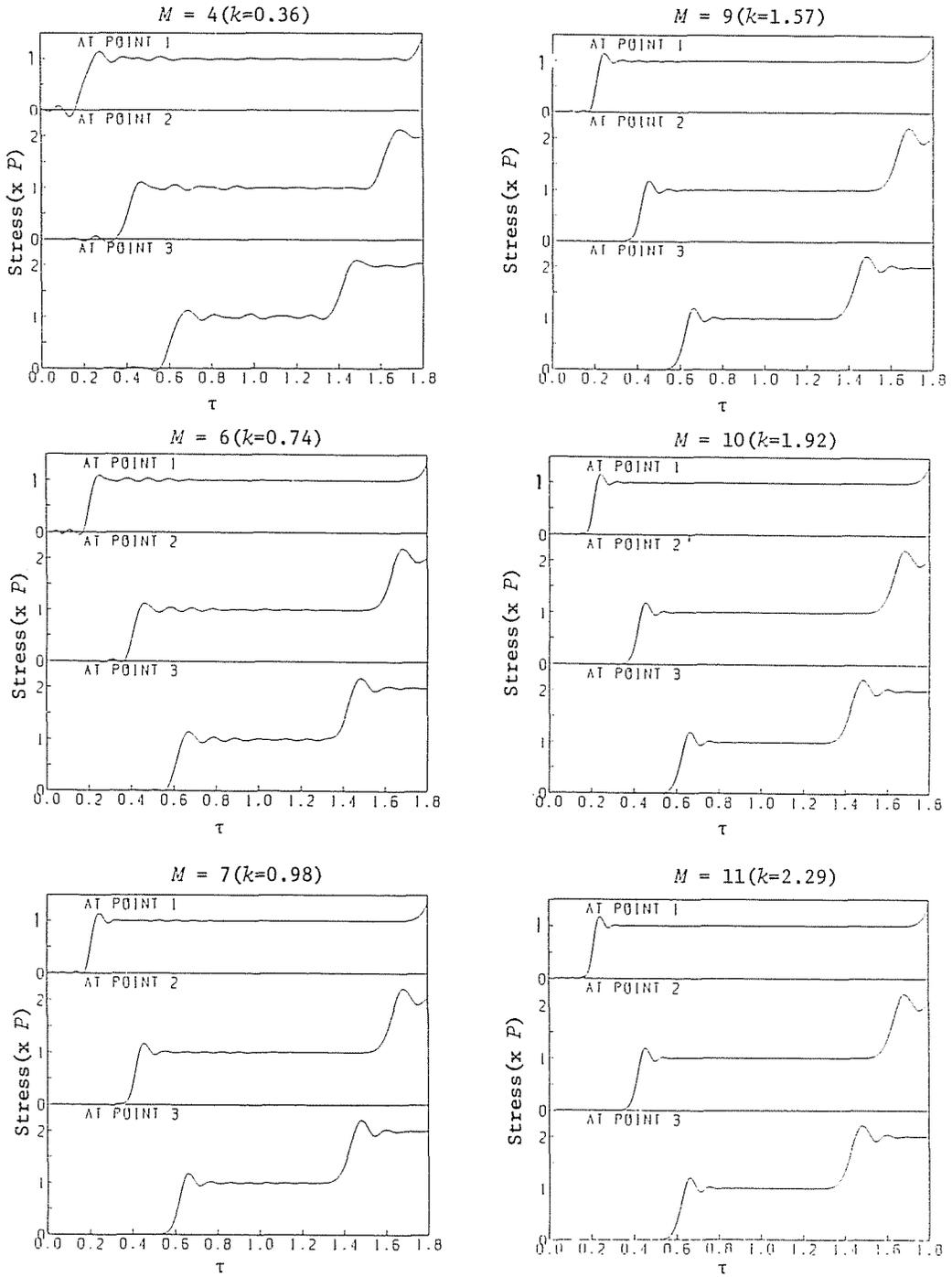


図 6-6 本計算値(軸方向力)に及ぼす内部選点数 M の影響, $\Delta\tau = 0.5 \times 10^{-2}$

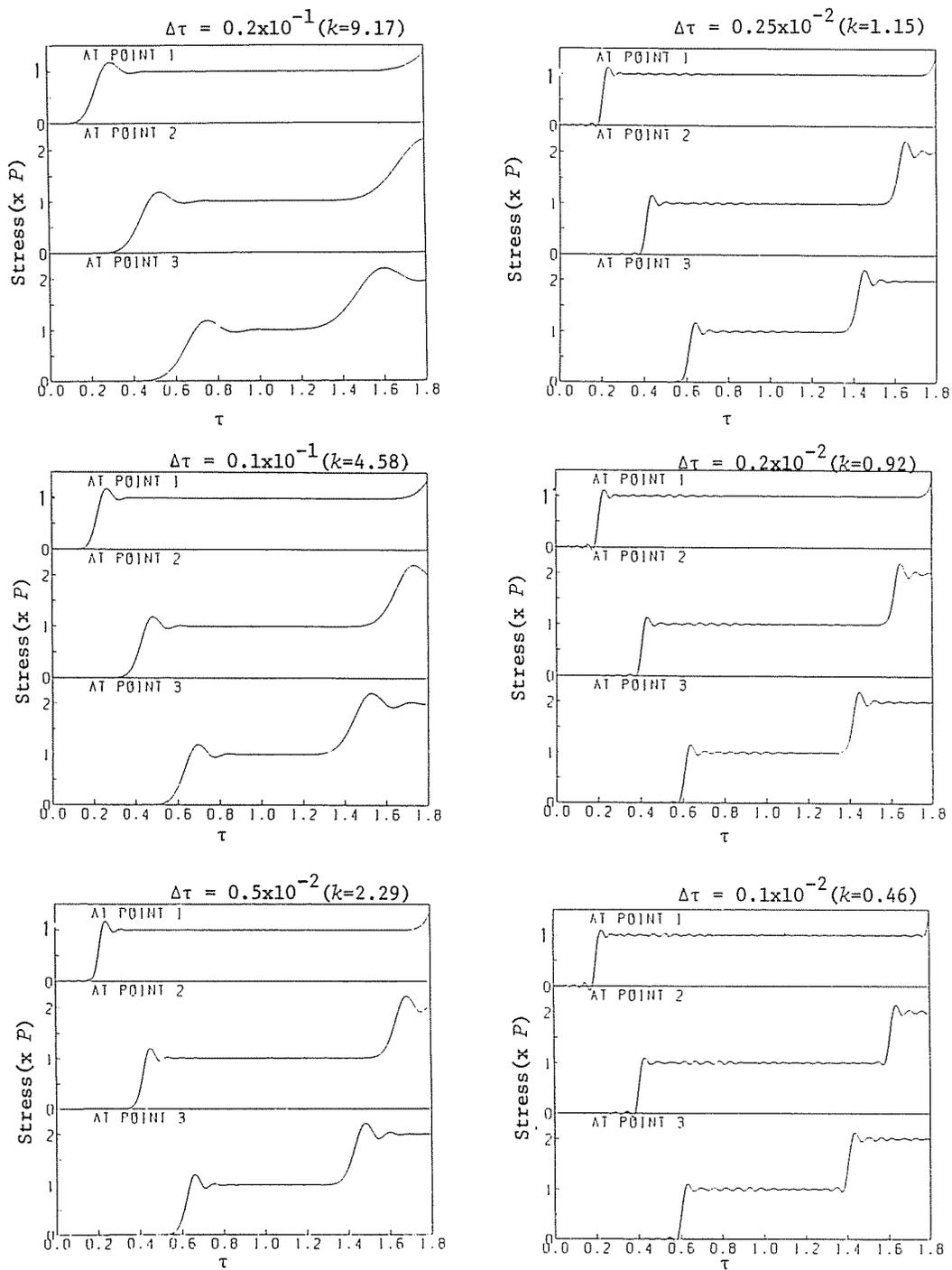


図6-7 本計算値(軸方向力)に及ぼす時間刻み幅 $\Delta\tau$ の影響, $M = 11$

b) Timoshenko 梁の横衝撃問題

ここでは、媒質固有の分散効果のために、応力波が伝播に伴いその波形を変化する問題を解析する。数値例は、両端が単純支持された Timoshenko 梁のスパン中央にステップ関数状の集中荷重とモーメント荷重が作用する場合を考える（図 6-8）。梁は平均半径 a 、厚さ h の中空円断面とし、計算に用いた諸元は次のとおりである。

$$L/a = 4, \quad h/a = 0.1, \quad \nu (\text{ポアソン比}) = 0.3, \quad \kappa (\text{せん断補正係数}) = \pi^2/12$$

なお、Timoshenko 梁の運動方程式などについては 3-2 を参照されたい。

対称条件よりスパンの半分を解析対象にする。空間領域の離散化は、内部選点数 $M=11$ と要素分割数 $N=5$ （等分割）で行い、時間方向の積分には Houbolt 法を用い、時間刻み幅は $\Delta \tau = 4 \times 10^{-3}$ とした。なお Courant 数 k は 0.92 である。

図 6-9 は、本解析の解の信頼性を検証するため、集中荷重が作用する場合の着目点 $x=0.1L$ の曲げモーメント M_x と $x=0$ のせん断力 Q_x の時間応答を、ノーマル・モード法の結果（奇数項のみ 91 項の総和）と比較したものである。なお図には参考のために、時間積分スキームに Newmark β 法（ $\beta=1/4, 1/6$ ）による結果も併記した。図で実線はモード解、 X, Y および Z 印の結果は本解析法の結果である。図 6-10 はモーメント荷重を受ける場合について、ノーマル・モード解（偶数項のみ 91 項の総和）と比較したものである。これらの図から明らかのように、応答値に有限な不連続性が生じない応答、すなわち集中荷重載荷のモーメント応答とモーメント荷重載荷のせん断力応答は、ほぼ完全にモード解に一致している。一方、有限な不連続性を生じる応答は、その値についての定量的な議論はここではできないが（これについては後述）、発生時刻およびその時刻を除いた時間帯の応答はモード解により対応を示している。

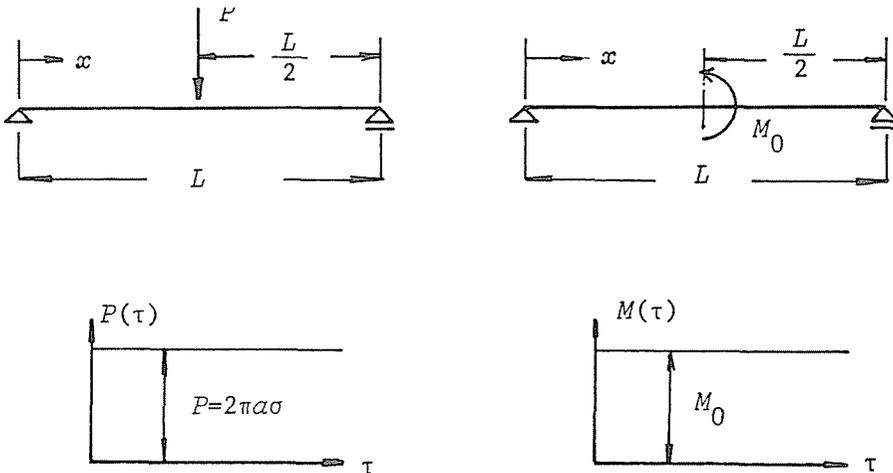


図 6-8 梁の横衝撃問題

集中荷重を受ける場合に対し、着目点 x を幾つか変化させた結果を図 6-11 に示す。図には荷重点から伝走した縦波（速度 $C_1 = \sqrt{E/\rho}$ ）およびせん断波（速度 $C_2 = \sqrt{G/\rho}$ ）の着目点への最初の到達時刻をそれぞれ、▽および▼印で示した。これによると、応答は縦波の到達とともに立ち上がり、曲げモーメント応答ではせん断波の到達時刻で時間微分に関する不連続性が現われ、せん断力応答では同じく応答値の有限な不連続性が現われるなど、応力波の伝播の現象をほぼ正確に表わしている。せん断力応答には、先の一次元弾性棒の例と同様に空間領域の離散化誤差に起因する不連続解の緩かな立ち上がり、波頭後方の振動現象がみられるが、図 6-9(b)を参照すれば明らかなように、高次振動を平均化するとモード解によく一致し、有限な不連続性が生じる時刻の応答値もほぼ妥当なものである。

図 6-12 は、モーメント荷重を受ける場合の結果である。各応答は、縦波の到達後に立ち上がり、不連続性の伝播の様子も妥当な結果である。例えば $x = 0.1 L$ におけるモーメントは、縦波の到達と伴に急激に立ち上がり、その後の不連続性は縦波の到達時刻 $\tau = 2.4, 5.6, 6.4, 9.6, 10.4, \dots$ に対応するなど縦波の伝播と梁の支点における反射現象の様子を正確に表わしている。

ここでの数値結果が示すように、本解析法は二つの波が同時に伝播し、応力波の分散性が生じる問題に対しても良好な結果を与えている。

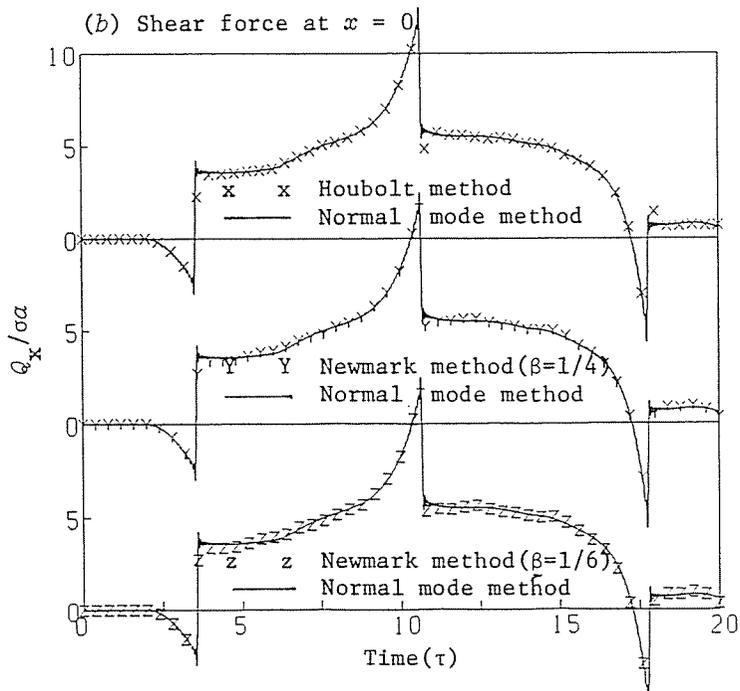
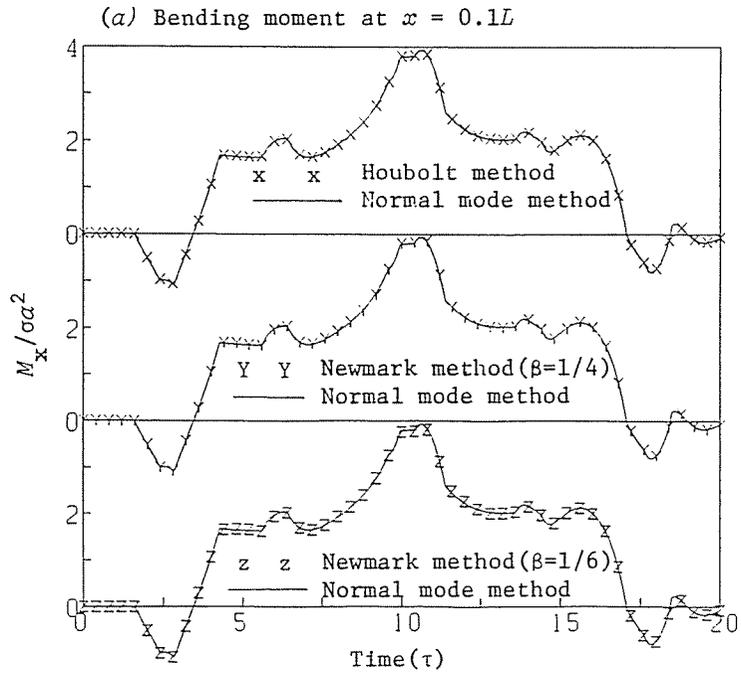


図 6-9 本解析法とノーマル・モード法による解の比較
(集中荷重 P が作用する場合)

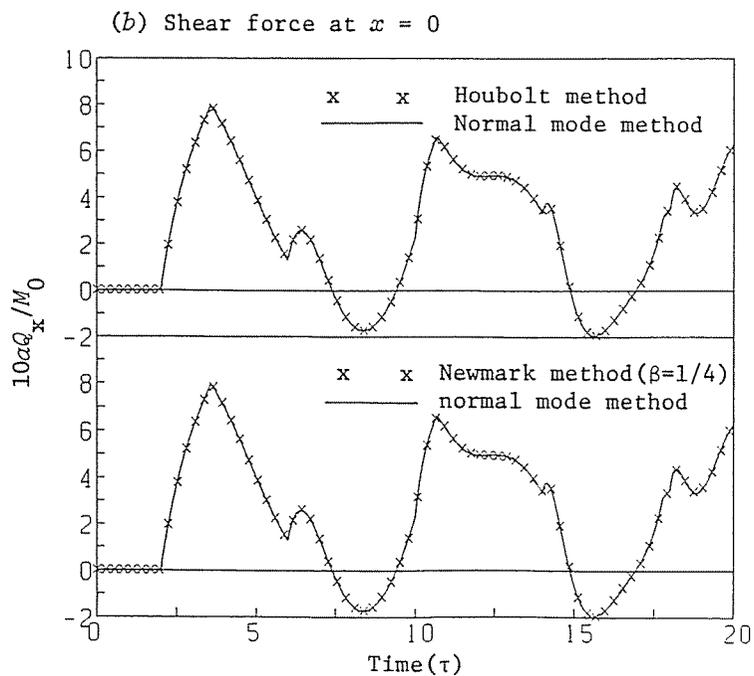
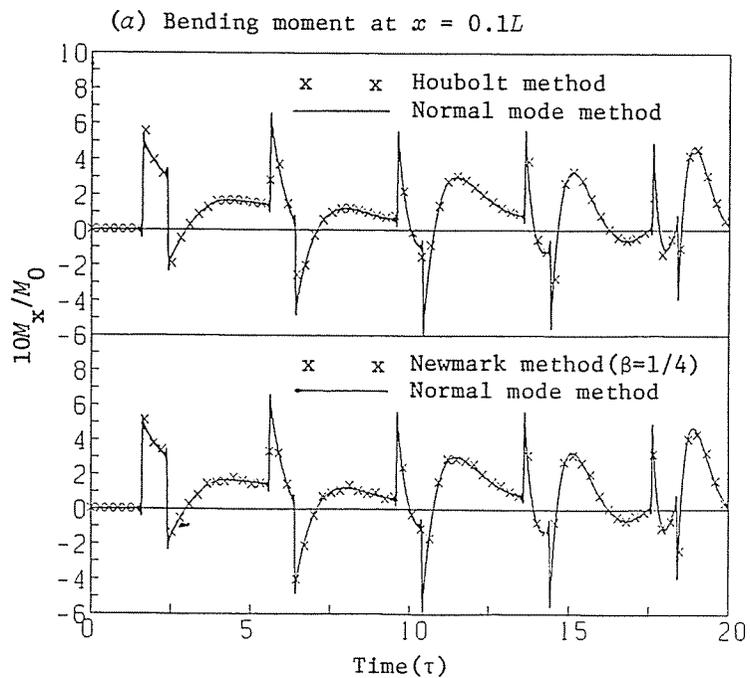
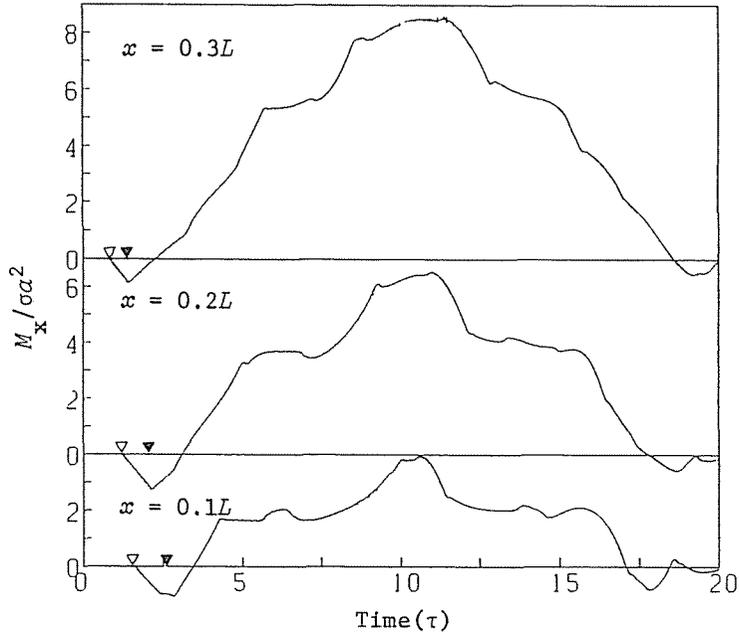


図6-10 本解析法とノーマル・モード法による解の比較
 (モーメント荷重 M_0 が作用する場合)

(a) Bending moment



(b) Shear force

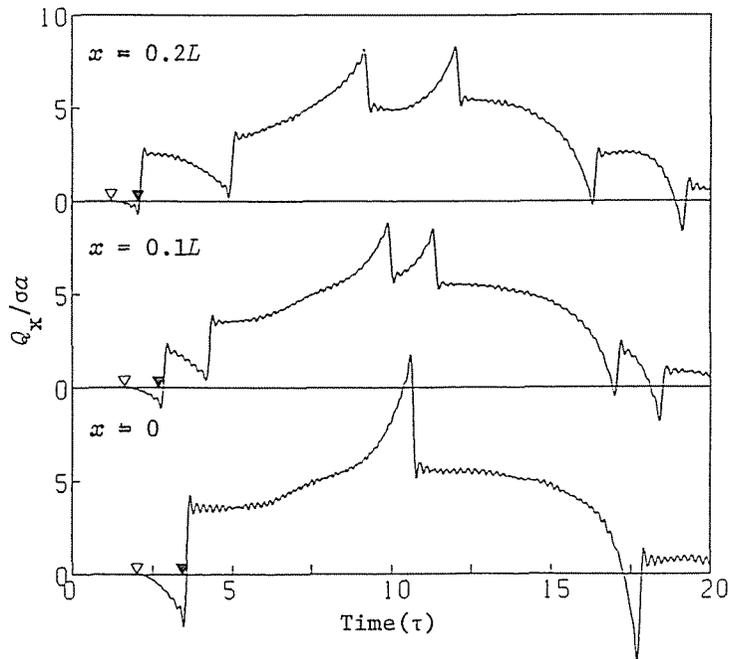


図6-11 着目点の各値におけるモーメント，せん断力の時間応答（集中荷重Pが作用する場合）

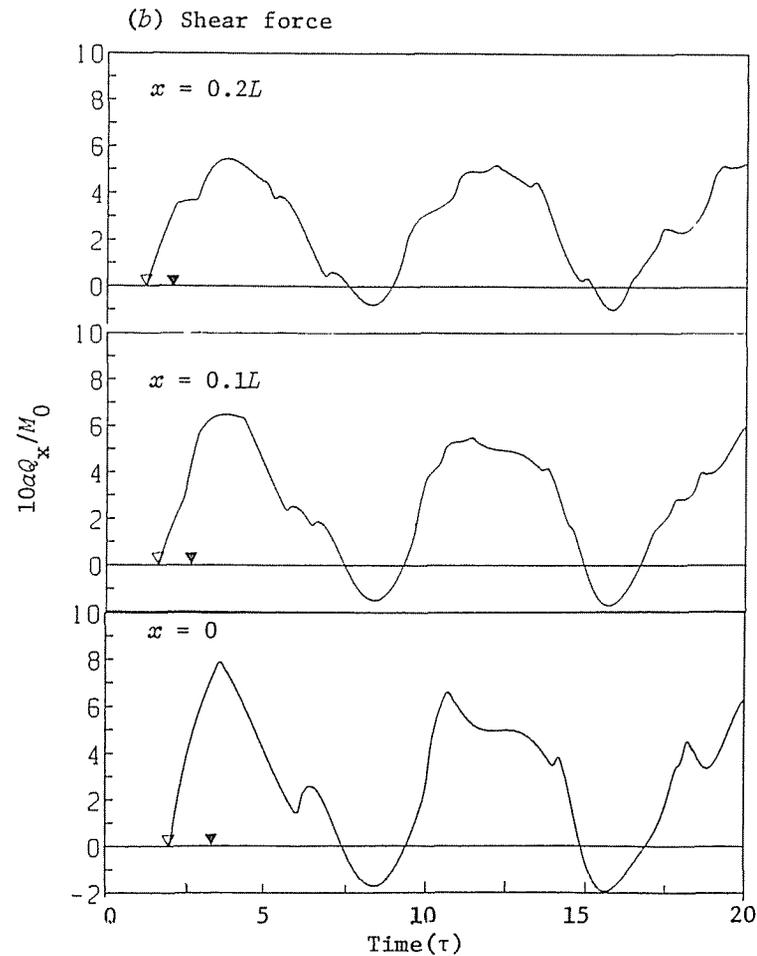
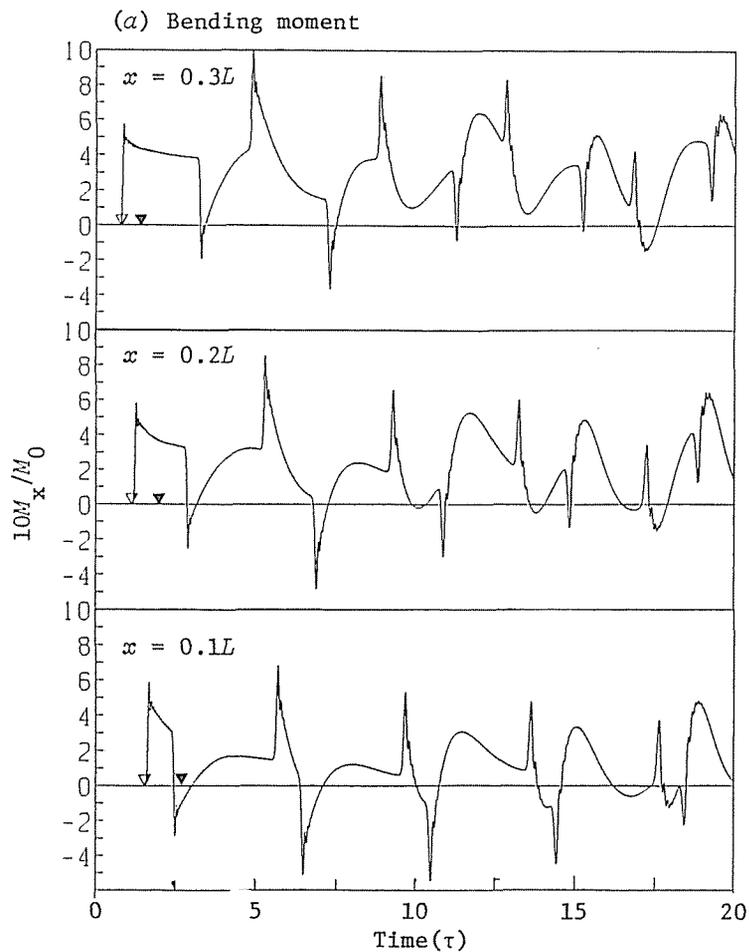


図6-12 着目点の各値におけるモーメント，せん断力の時間応答
(モーメント荷重 M_0 が作用する場合)

(2) 回転殻の応力波伝播問題

ここでは、まず円筒殻を解析し、ノーマル・モード法による結果との比較により本解析法の精度を確認し、次いで任意形状回転殻への一適用例として双曲殻を解析する。

a) 円筒殻

解析に用いた円筒殻は両端が単純支持され、スパン中央において円周方向に波数 n の余弦分布する法線方向荷重 $P_z = \sigma \cos n \theta$ がス
 テップ関数状に作用する場合である(図6-13)。単純支持条件としては次式を用いた。

$$V = W = \phi_\theta = N_x = M_x = 0$$

なお、せん断補正係数 κ は $\frac{\pi^2}{12}$ とし、問題の対称性から全体の $\frac{1}{2}$ 部分を解析する。

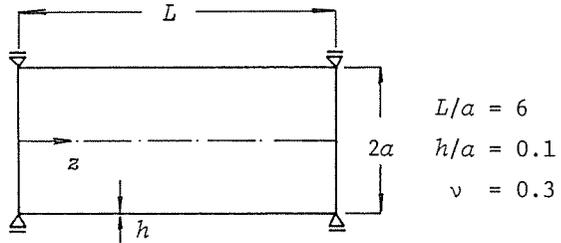


図6-13 円筒殻、形状と寸法

回転殻の空間と時間に対する離

散量(内部選点数 M , 要素分割数 N , 時間刻み幅 $\Delta \tau$)の解に与える影響を検討するため、表6-2に示すような五つの離散化モデル(以下Case 1~Case 5と記す)による、波数 $n = 1$ の荷重に対する解析結果を図6-14~図6-16に示す。これらの図において、X印およびZ印を付した実線はそれぞれ、時間積分スキームにHoubolt法および中心差分法を用いた本解析結果であり、実線のみのは比較のために用いたノーマル・モード法による結果(奇数項のみ128個の総和)である。さらに、 P_1 および S_1 はそれぞれ、荷重点から伝播してきた縦波(速度 $C_1 = \sqrt{E/\rho(1-\nu^2)}$) およびせん断波(速度 $C_2 = \sqrt{G/\rho}$) の着目点への最初の到達を表わし、 S_2 は荷重点から伝播してきたせん断波が支点で反射され、着目点への最初の到達を表わしている。

着目点 z (支点からの距離) = $0.1L$, $0.3L$ における法線方向変位の時間応答を図6-14に、合応力 N_x のそれを図6-15に示す。得られた数値解は、離散化モデルおよび数値積分スキームによらずモード解に完全に一致している。

図6-16(a)および(b)にそれぞれ、着目点 $z = 0.1L$ および $z = 0.3L$ における曲げモーメント M_x の時間応答を示す。これによると、 M_x の時間応答には離散化モデルと用いた時間積分スキームの相違の影響が、各Caseともモード解の波形に高次の振動が重畳された波形となって現われているが、高次振動を平均化すればモード解の波形にほぼ一致している。内部選点数 M が小さい場合(Case 1と2)は、せん断波の到達前後(S_1, S_2)において波形の乱れが認められるが、 M を増せばこの乱れは減少する傾向にあり、また高次振動の周期も振幅も M を増せば小さくなる傾向にある。さて、空間の離散化度が同一の場合(Case 1と2, Case 3

と4)、小さな時間刻み幅による解とそれによる解には差異がない。このことは、前述の高次振動や乱れが空間領域の離散化に伴う誤差であることを示唆している。なお各Case中で、特にHoubolt法によるCase5の結果は、高次振動の発生もなく、またせん断波の伝播を正確に表わしている。

以上の結果、特に曲げモーメントの時間応答より判断すれば、選点法による空間領域の近似の仕方は、一要素内には比較的大きな内部選点数($M=11$)をとり、要求される精度に応じて分割数 N を増すのが適切であろう。

本解析法によれば、任意の荷重状態は円周方向に任意の波数 n からなるFourier級数に展開される。図6-17に、任意波数 n の荷重に対する本解析法の精度をみるため、波数 $n=2, 5, 10$ に対して、Case5の離散化条件とHoubolt法によって求めた着目点 $z=0.1L, 0.3L$ の合応力 N_x と曲げモーメント M_x の時間応答を示した。これによると、 N_x はモード解にほとんど一致し、 M_x には高次振動がみられるものの、高次振動を平均化すればモード解をよく近似していることがわかる。

さて、応力波伝播の問題で時間積分スキームに条件安定なスキームを用いれば、安定な解を得るためにはC-F-L条件とスキームに起因する条件を満たす必要がある。特に後者の条件は、前に述べたように選点法と中心差分法の組合せの場合は式(6-62)より得られる最大固有振動数で決まる。また、円筒殻に対しては、式(6-62)に基づいた安定な解を得るための限界時間刻み幅 $\Delta\tau$ をグラフ化した(図6-3)。以下では、式(6-62)および図6-3の妥当性を数値例で持って明らかにする。図6-18は、上の目的のために行った数値結果である。

図は、波数 $n=1$ の荷重の場合について、次に記す二つの諸元(Model AとBを記す)および式(6-62)より定めた時間刻み幅 $\Delta\tau_1$ を含む三つのそれに対するスパン中央($z=0.5L$)のたわみ W の時間応答を示したものである。

Model A : $L/a = 6, h/a = 0.1, M = 11, N = 5, \Delta\tau_1 = 0.014, \Delta\tau_2 = 0.013,$
 $\Delta\tau_3 = 0.010$

Model B : $L/a = 6, h/a = 0.05, M = 11, N = 5, \Delta\tau_1 = 0.051, \Delta\tau_2 = 0.053,$
 $\Delta\tau_3 = 0.025$

表6-2 円筒殻の解析に用いた離散化条件

Case No.	M	N	$\Delta\tau$	k	No. of D.O.F.
1	5	10	0.01	0.71	350
2	5	10	0.005	0.36	350
3	11	5	0.005	0.76	325
4	11	5	0.0025	0.38	325
5	11	10	0.0025	0.76	650

図から明らかなように、 $\Delta\tau_1$ に対する結果は微小な高次モードの増大のために応答初期で不安定（発散）となるのに対し、他の $\Delta\tau$ による応答は安定な解を示している。このように、要素の両端が完全固定という条件の基で導かれた式（6-62）は、条件安定スキームを用いる際の時間刻み幅の算定に有効に利用される。

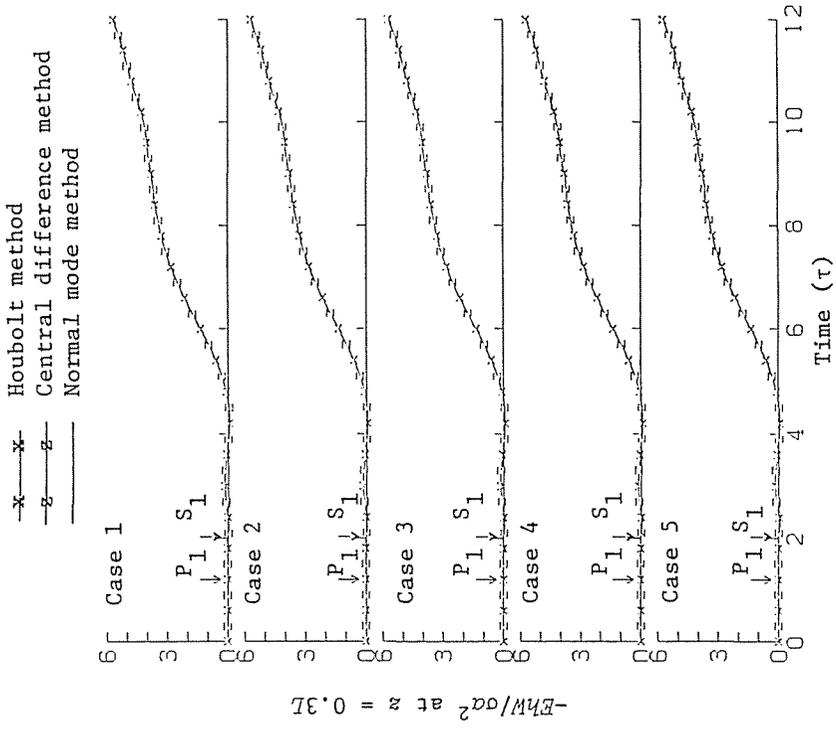
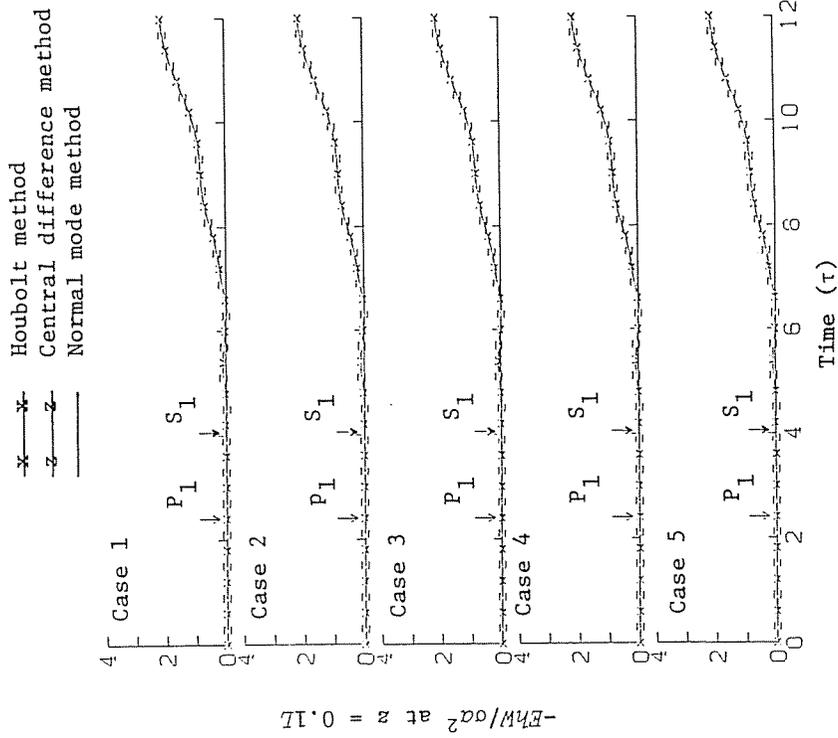


図 6-14 着目点 z の各値におけるたわみ W の時間応答 (円筒殻, $\theta = 0$)

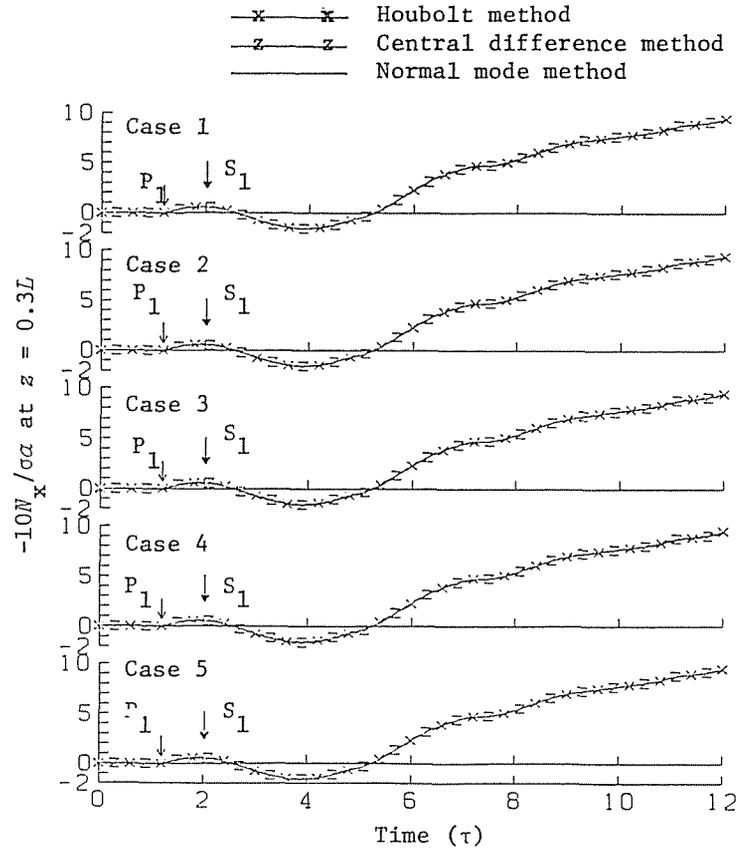
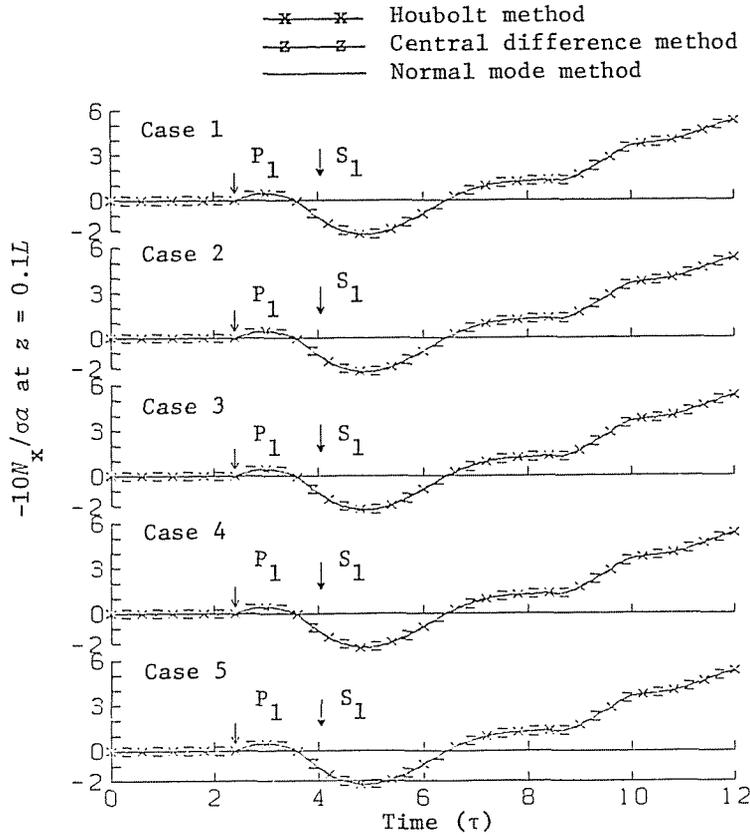


図6-15 着目点 z の各値における合応力 N_x の時間応答 (円筒殻, $\theta = 0$)

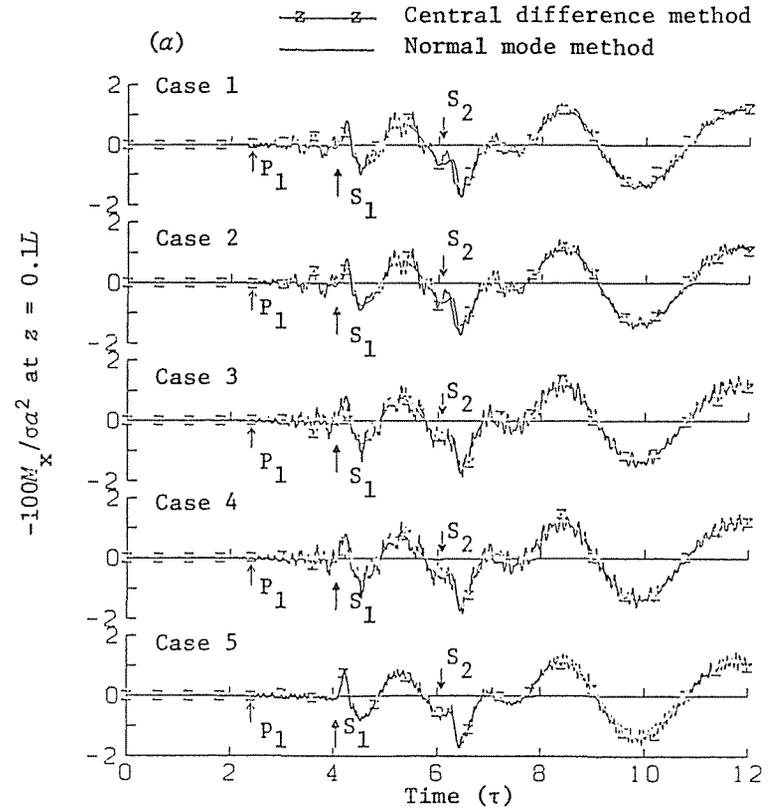
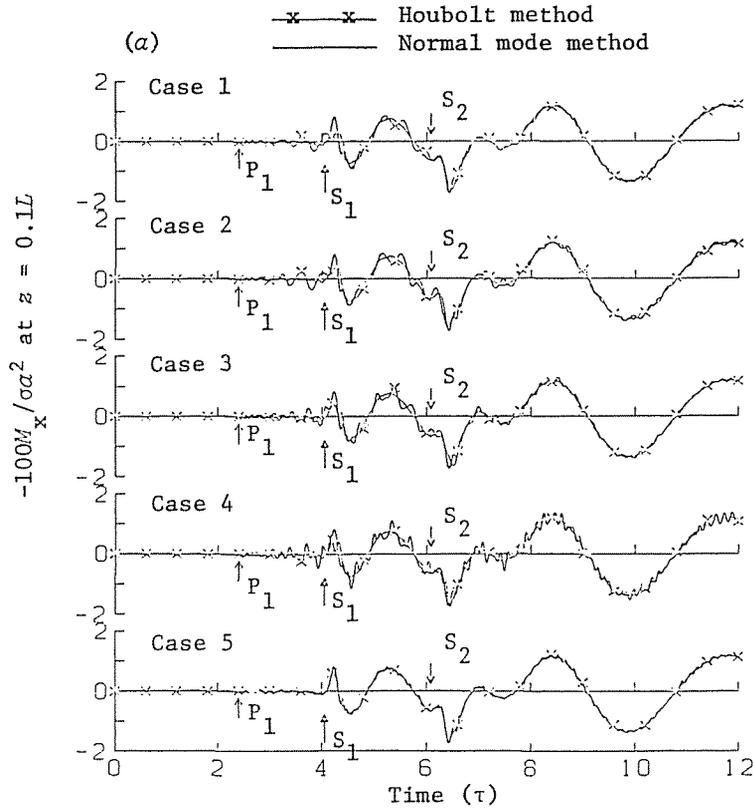


図6-16(a) 着目点 $z = 0.1L$ における曲げモーメント M_x の時間応答 (円筒殻, $\theta = 0$)

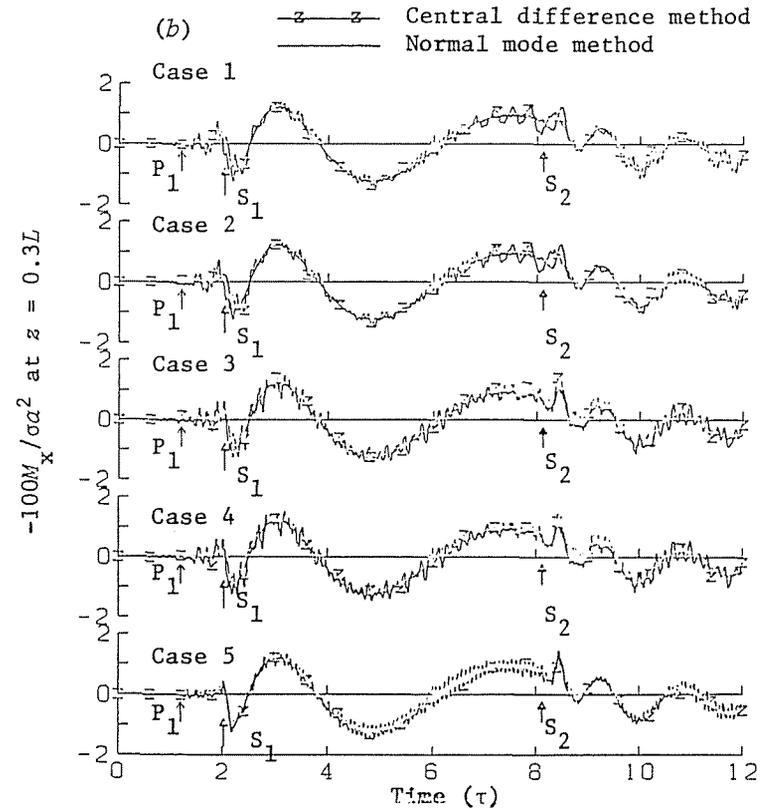
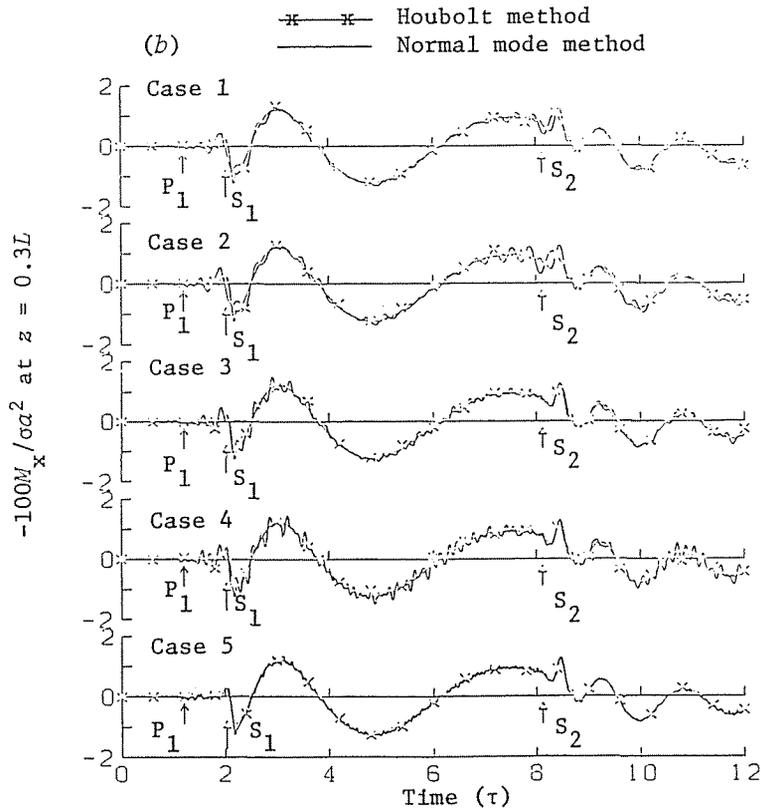


図 6-16 (b) 着目点 $z = 0.3L$ における曲げモーメント M_x の時間応答 (円筒殻, $\theta = 0$)

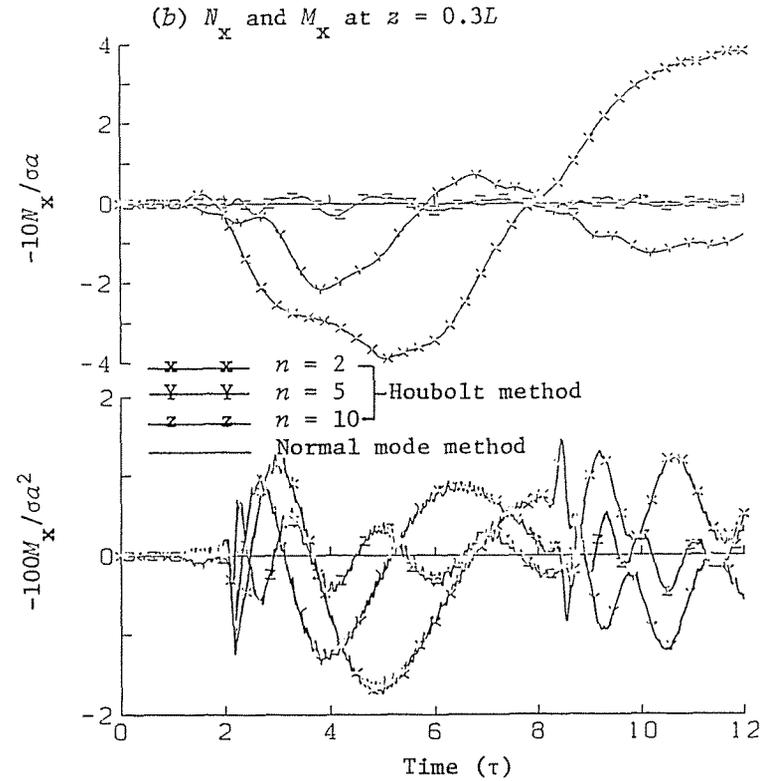
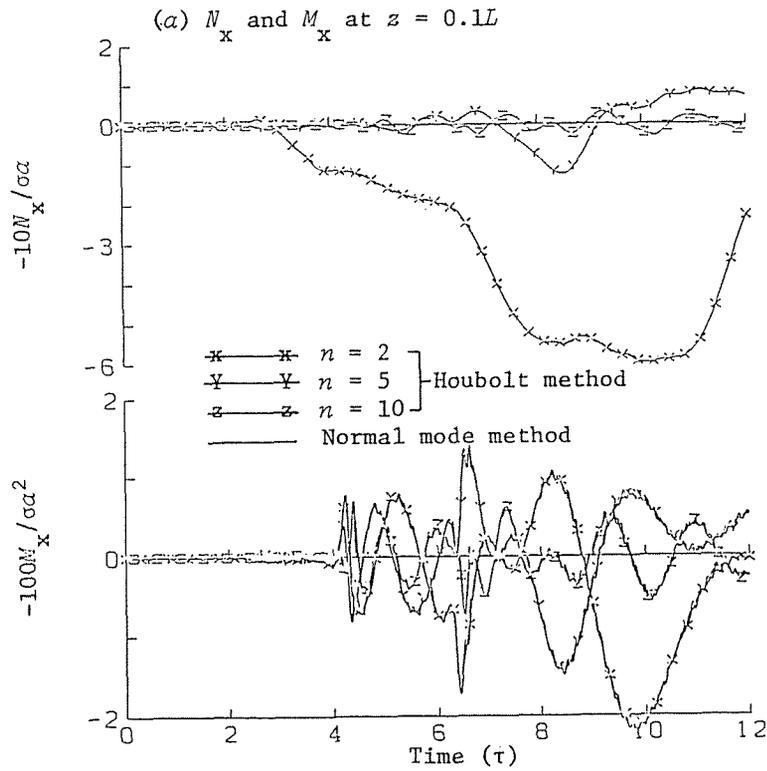


図6-17 波数 $n = 2, 5, 10$ に対する着目点 z の各値における合応力 N_x と曲げモーメント M_x の時間応答 (円筒殻, $\theta = 0$)
 (a) $z = 0.1L$, (b) $z = 0.3L$

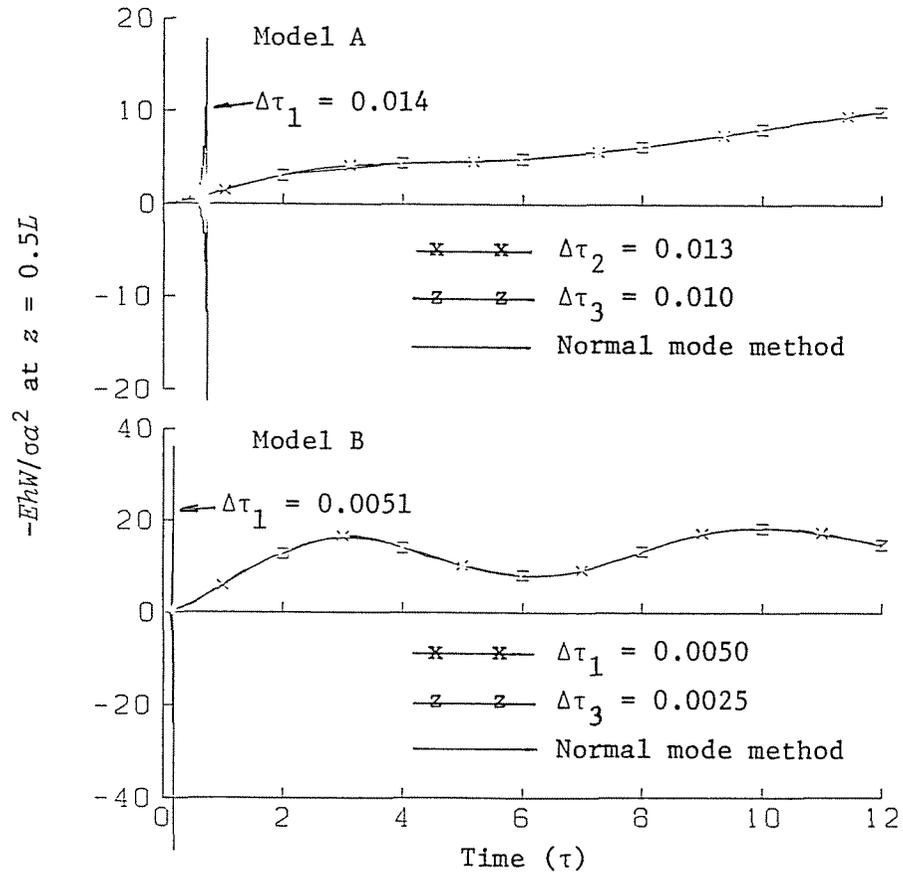


図6-18 固有方程式(6-62)の妥当性の検証(円筒殻のスペン中央におけるたわみWの時間応答, $\theta = 0$)

b) 双曲殻

双曲殻は鉄筋コンクリート製冷却塔として数多く建設され、今日では高さ 160 (m)以上のものが作られており、近い将来 200 (m)程度のものが作られようとしている大型構造物である^{24,25)}。

解析モデルは図 6-19 (a) に示すような片持形式の双曲殻で、荷重は自由縁に沿って余弦状に分布する面外方向線荷重 $\sigma \cos \theta$ と正弦に分布する面内方向線荷重 $\sigma \sin \theta$ がステップ関数 $H(t)$ 状に作用する場合を扱う。境界条件は次のように与えられる。

自由端： $N_x = M_x = M_x \theta = 0, Q_x = \sigma \cos \theta H(t), N_x \theta = \sigma \sin \theta H(t)$

固定端： $U = V = W = \phi_x = \phi_\theta = 0$

殻はポアソン比 ν を 0.15 とし、寸法は文献 (24, 25) を参照して、厚さ h と底部径 a との比 h/a 、底部とスロート部の距離 H_2 と底部径 a との比 H_2/a 、および頂部とスロート部の距離 H_1 と底部径 a との比 H_1/a を

$$h/a = 0.004, H_2/a = 2.0, H_1/a = 0.5$$

と一定にし、双曲殻の幾何形状の相違の応力・変形量に及ぼす影響をみるために、スロート部

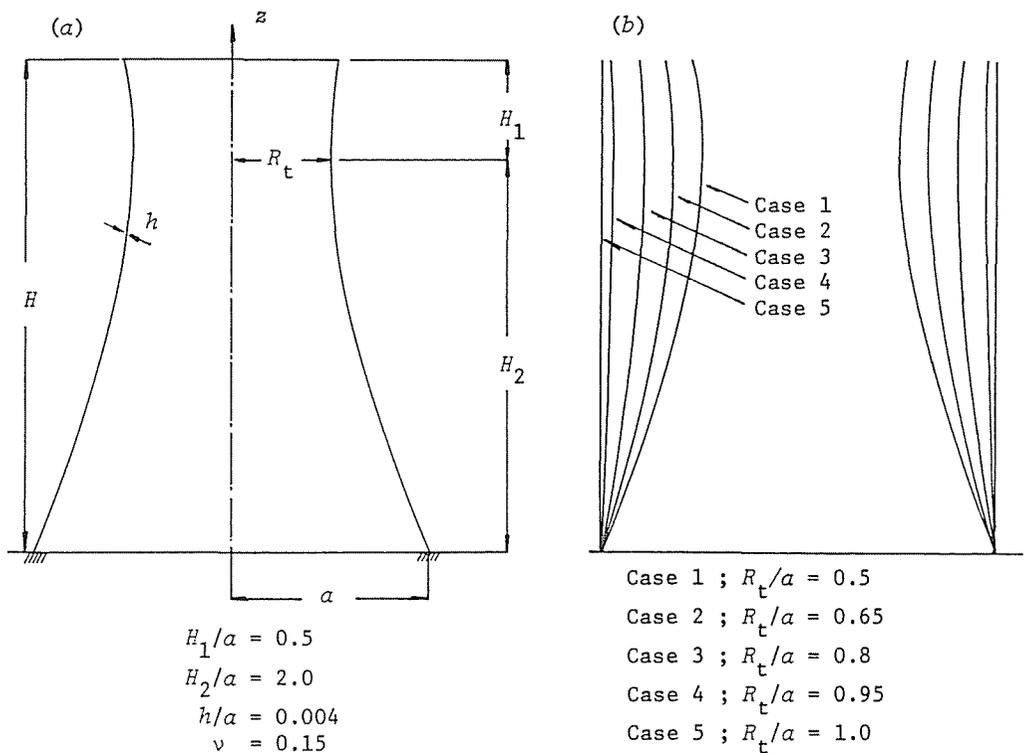


図 6-19 (a) 双曲殻, (b) R_t/a を変化させた双曲殻の形状

の半径 R_T を種々変化させ円筒殻を含む数種の形状の双曲殻を解析する (図 6-19(b))。以下では図 6-19(b) に記した Case No (Case 1~5) を用いて、殻形状を区別することにする。

応力波伝播問題の解析に先立って、Case 1 の双曲殻を静的負荷問題として解析し、要素分割の解に与える影響を調べた結果を表 6-3 に示す。表で N_1 , N_2 はそれぞれ、スロート部より上部およびスロート部より下部の回転軸に沿った等分割数である。表より明らかなように、解 (頂点のたわみ W , 固定端の曲げモーメント M_x とせん断力 Q_x) は、分割数の増加とともに一様に収束し、 $N_1 = 2$, $N_2 = 6$ で一定値に達している。

以下の応力波伝播の問題では、その特性を考慮してすべて $N_1 = 3$, $N_2 = 12$ とし、一要素の内部選点数は $M = 11$ とする。また時間積分スキームには Houbolt 法を用い、時間刻み幅 $\Delta\tau$ は $\Delta\tau = 1.4 \times 10^{-3}$ (Courant 数 $k = 0.77$) とした。

図 6-20~6-23 は、本解析法が双曲殻の応力波の伝播に追従できるかを確認するために、殻形状 Case 1 を代表的に解析し、底部 (固定端) から測った着目点 z の各値における、たわみ W と U 、合応力 N_x と $N_{x\theta}$ の時間履歴を示したものである。図には荷重の作用直後にその作用点 (頂部) より伝走する縦波およびせん断波の着目点への最初の到達時刻がそれぞれ、矢線 \Downarrow および \Downarrow で示されている。ちなみに、着目点 z での縦波とせん断波の到達時刻 τ_1 , τ_2 を z (τ_1 , τ_2) の形で表わせば、 $z = \frac{4H}{5}$ (0.50, 0.77), $z = \frac{3H}{5}$ (1.01, 1.54), $z = \frac{2H}{5}$ (1.52, 2.33), $z = \frac{H}{5}$ (2.04, 3.13) および $z = 0$ (2.58, 3.95) である。

各図を応力波伝播特性の観点から数値解の妥当性について検討を加えてみる。変位 U と W は $z = H$ を除きそれぞれ、縦波とせん断波の到達とともに応答が開始されている。合応力 N_x は縦波の到達後に応答が立ち上がった後、せん断波の到達時刻において不連続点 (時間に関する微分の) が観察される。また面内せん断応力 $N_{x\theta}$ は、縦波の到達とともに応答が立ち上がり、

表 6-3 解に及ぼす要素分割の影響 (静的負荷の問題, $M = 11$)

N_1	N_2	$EhW/\sigma a^2$	$1000M_x/\sigma a^2$	$10Q_x/\sigma a$
1	1	-38.5121	0.21388	1.25953
2	2	-38.5124	0.32266	1.37654
2	4	-38.5124	0.32258	1.37340
2	6	-38.5124	0.32259	1.37340
2	8	-38.5124	0.32259	1.37340
2	10	-38.5124	0.32259	1.37340
3	12	-38.5124	0.32259	1.37340

N_1 : Number of elements between top and throat of shell

N_2 : Number of elements between base and throat of shell

せん断波の到達時刻で値に有限の不連続性が生じ、その後の不連続性も固定端と自由端で反射を繰返しながら着目点に到着する時刻に対応している。例えば $z = \frac{4H}{5}$ では $\tau_2 = 7.13, 8.67, 15.03, \dots$ であり、 $z = 0$ の応答では $\tau_2 = 11.85, 19.75, 27.65$ である。このように本解析法で得られた結果は、応力波の伝播現象をほぼ忠実に表わしている。

図 6-24 は、Case 1 の形状の殻について、自由端から伝播した縦波が固定端に到着・反射 ($\tau = 2.58$) し、スロート部に致る ($\tau = 4.65$) 時間帯での回転軸に沿う変位 U, V, W の推移を示したものである。図は伝播速度の最も早い応力波である縦波の速度で変位 U が先行し、その後をせん断波の速度で変位 V, W が推移していく様子をほぼとらえている。

円筒殻を含む、図 6-19(b) に示した形状のたわみ W 、合応力 N_x と $N_{x\theta}$ の時間履歴をそれぞれ、図 6-25, 6-26 および図 6-27 に示す。各図において曲線上の数値は図 6-19(b) に示した殻の形状を表わす Case No. である。殻の幾何形状の違いは応力波の着目点への到達時刻の差として現われるが、例えば合応力 $N_{x\theta}$ にみられる有限の不連続性の発生時刻からも明らかのように、本数値解はその差を的確にとらえている。また殻の形状の力学的特性に与える影響は、既に構造振動問題の立場から指摘されているように、応力波伝播問題においても底部径に対しスロート部の半径を小さくすると、変位および経線方向合応力 N_x に対しては有利となることがわかる。

双曲殻は構造振動解析によれば、その幾何学的形状からスロート部の面内せん断応力が比較的高くなりやすいことが知られている²⁰⁾。以下面内せん断力 $N_{x\theta}$ に着目し、その特性を考察してみる。図 6-27 によれば、底部径に対してスロート部の径を小さくすれば $N_{x\theta}$ の値は小さくなる傾向を示し、図 6-23, 6-27 によれば高さ方向ではスロート部 ($z = 4H/5$) で大きくなる傾向にある。しかもスロート部における $N_{x\theta}$ のピーク値は、No. 1 の形状によれば (図 6-23)、構造振動問題として取り扱いが困難となる時刻 ($\tau = 7.9$) 近傍で生じている。これは大型構造物の波動論的取り扱いの重要性を示唆している。

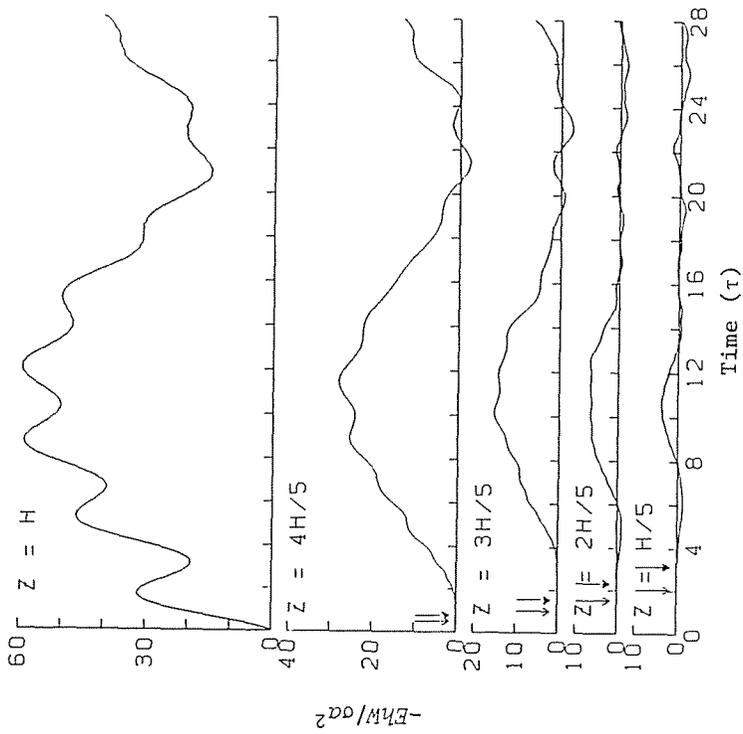


図6-20 着目点 z の各値における、たわみ W の時間応答 (双曲線, Case 1, $\theta = 0$)

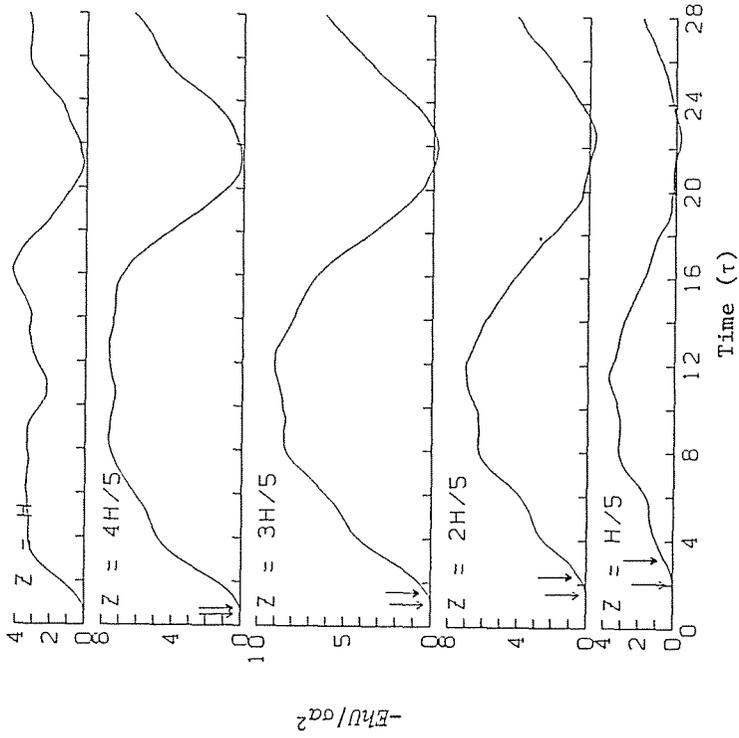


図6-21 着目点 z の各値における、たわみ U の時間応答 (双曲線, Case 1, $\theta = 0$)

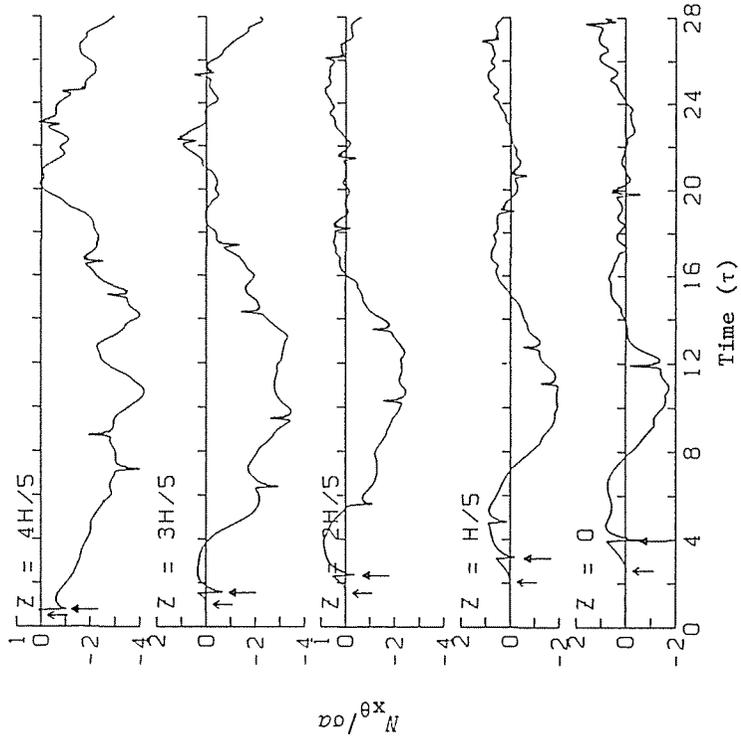


図6-23 着目点 z の各値における合応力 $N_{x\theta}$ の時間応答(双曲殻, Case 1, $\theta = \pi/2$)

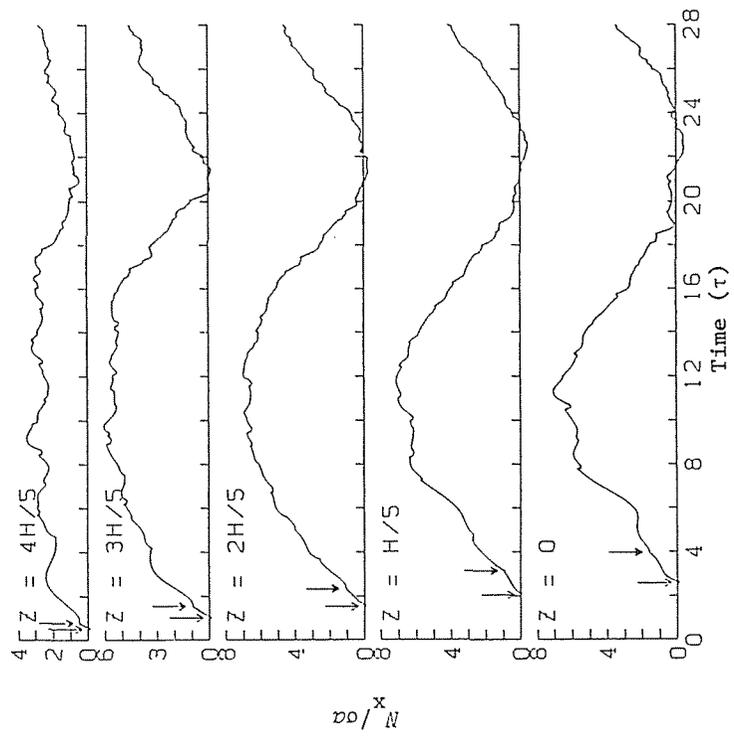


図6-22 着目点 z の各値における合応力 N_x の時間応答(双曲殻, Case 1, $\theta = 0$)

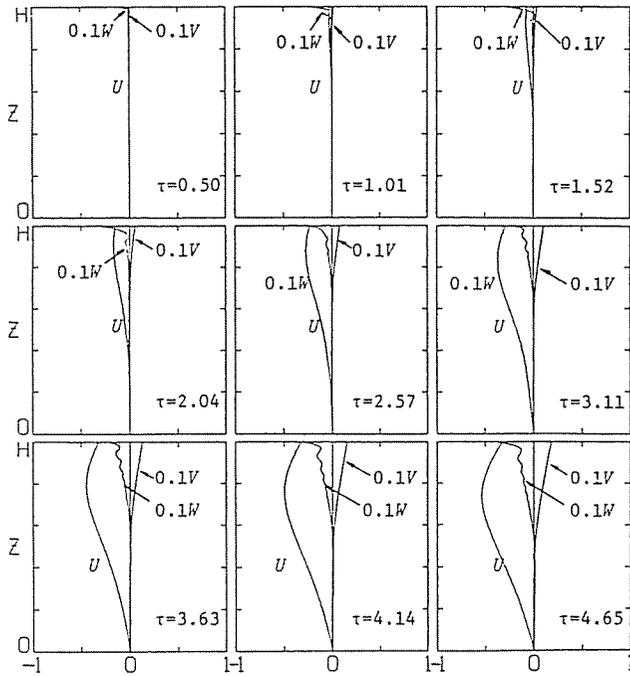


図6-24 変位分布 (U, V, W) の時間的推移

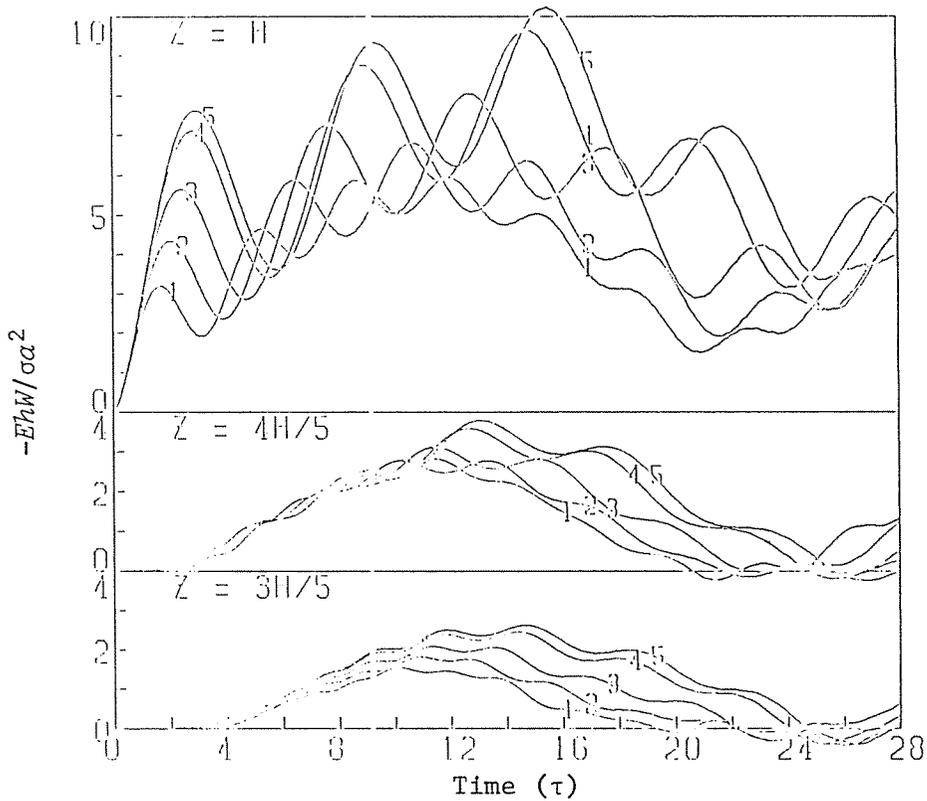


図6-25 たわみWの時間応答に及ぼす殻の幾何学的形状の影響 ($\theta=0$)

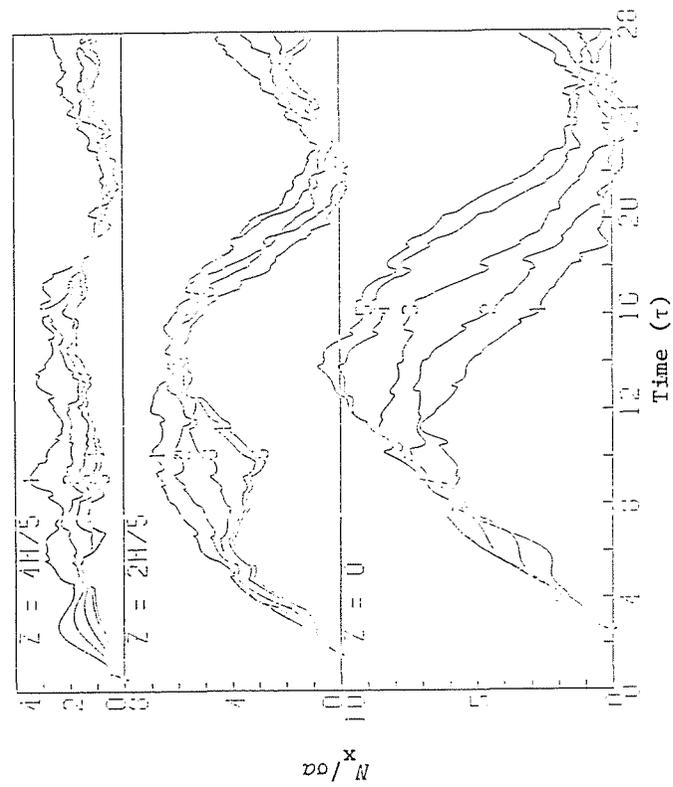


図6-26 合応力 N_x の時間応答に及ぼす蔽の幾何学的形状の影響 ($\theta = 0$)

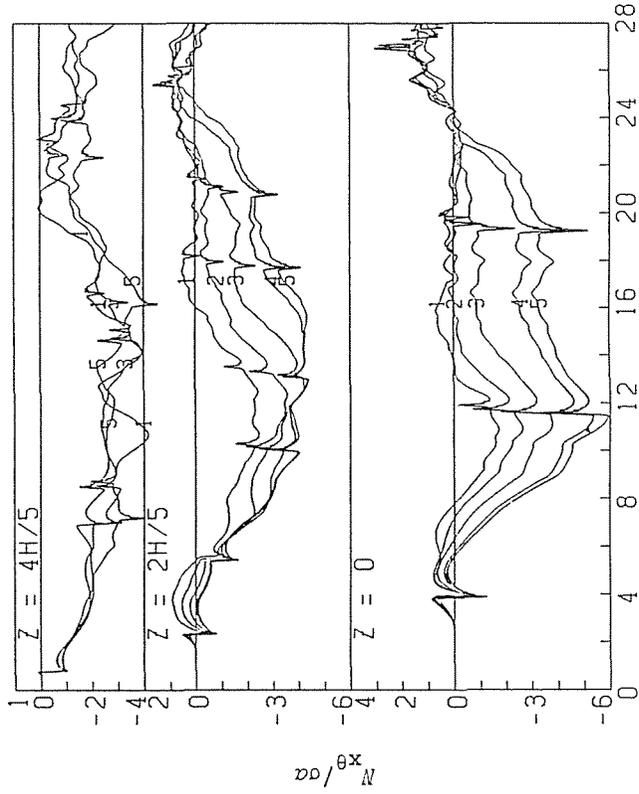


図6-27 合応力 $N_{x\theta}$ の時間応答に及ぼす蔽の幾何学的形状の影響 ($\theta = \pi/2$)

6-6 結 論

本章では、まず回転殻の応力波伝播問題として、せん断変形と回転慣性を考慮した修正理論に基づき、空間領域に対しては選点法、時間領域に対しては陽解法または陰解法を適用して構成された二種の解析アルゴリズムを提示した。各アルゴリズムは次のような特徴を有するものである。

- 1) 選点法と陽解法の組合せに対しては、両離散化手法の特性が生かされて、必然的に比較的次数の低い行列演算からなるアルゴリズムとなった。また時間刻み幅に関する安定限界と選点法に基づいて定式化された固有値問題の関連を明確にできた。
- 2) 選点法と陰解法の組合せに対しては、変位型有限要素法で用いられる部分構造法に類似な手法の導入により、解くべき方程式は比較的小さな方程式へと変換された。

次に数値例として、棒の縦衝撃問題、梁および円筒殻の横衝撃問題という基本的な構造要素に対する問題を解析し、その結果、本解析法の適用性、有効性について以下のことが明らかとなった。

- 1) 得られた数値解はいずれも、既知の解析解との比較により、また応力波の伝播現象に照らしてほぼ妥当なものであり、定量的にもほぼ十分な精度であることが確認された。
- 2) 数値解には、空間的に不連続な解を持つという応力波伝播問題に特有の性質のため、離散化誤差による高次振動が現われるが、要素分割数および内部選点数を増すことにより改善される。
- 3) 選点法による空間領域の近似の仕方は、一要素内の内部選点数には11程度を採り、要求される精度に応じて要素分割数を増すのが適切である。

さらに、本解析法の任意形状の回転殻への適用の可能性を確認する目的で、双曲殻をケース・スタディに計算を行い、数値解は応力波の伝播の様子を明確に表わすことを確めるとともに、次の点を明らかにすることができた。

- 1) 構造物が巨大化すれば、その挙動を構造振動問題として把握可能な時間以前(直後)に応答のピーク値を示す場合もある。それゆえ、構造物が大型化すれば構造振動状態へと移行する時間帯の過度応力状態は、応力波伝播の問題として対処する必要がある。

付 録

$a_1 \sim a_{51}$ および $b_1 \sim b_{21}$ は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= \frac{\rho_1}{\alpha^2}, \quad a_2 = \frac{\rho_4}{\alpha^2}, \quad a_3 = \nu r_1 r_2 - \rho_2 \rho_6, \quad a_4 = \frac{n \nu_2}{\alpha r} \\
 a_5 &= -\frac{n \gamma \nu_3 \rho_2}{\alpha r}, \quad a_6 = \frac{\nu r_2 + \rho_1 \rho_3 r_1}{\alpha}, \quad a_7 = \frac{1}{\alpha} \left\{ r_1' \rho_7 + \gamma (r_1 - r_2) \left(1 + \frac{\delta^2}{12 r_2^2} \right) \right\} \\
 a_8 &= -\frac{\delta^2 (r_1 - r_2)}{12 \alpha^2}, \quad a_9 = -\frac{\delta^2 r_1'}{12 \alpha^2}, \quad a_{10} = -\frac{\delta^2}{12} (r_1 - r_2) \rho_6 + \nu_1 \kappa \rho_1 r_1 \\
 a_{11} &= -\frac{n \gamma \delta^2 (r_1 - r_2)}{12 \alpha r}
 \end{aligned} \right\} \quad (A-1)$$

$$\left. \begin{aligned}
 a_{12} &= -a_4, \quad a_{13} = a_5, \quad a_{14} = \nu_1 a_1, \quad a_{15} = \nu_1 a_2 \\
 a_{16} &= \nu_1 r_1 r_2 - \rho_2 (\rho_5 + \nu_1 \kappa r_2^2), \quad a_{17} = -\frac{n (\nu r_1 + r_2 \rho_2 \rho_3)}{r} \\
 a_{18} &= a_{11}, \quad a_{19} = \nu_1 a_8, \quad a_{20} = -\frac{\nu_1 \delta^2 r_1'}{12 \alpha^2} \\
 a_{21} &= -\frac{\delta^2}{12} (r_1 - r_2) \rho_5 + \nu_1 \kappa \rho_2 \nu_2
 \end{aligned} \right\} \quad (A-2)$$

$$\left. \begin{aligned}
 a_{22} &= -a_6, \quad a_{23} = \frac{1}{\alpha} \left\{ \nu_1 \kappa r_1' \rho_7 - \gamma (\nu_1 \kappa r_1 + \nu r_1 + r_2 \rho_2) \right\} \\
 a_{24} &= a_{17}, \quad a_{25} = \nu_1 \kappa a_1, \quad a_{26} = \nu_1 \kappa a_2 \\
 a_{27} &= \frac{-\nu_1 n^2 \kappa \rho_2}{r^2} - \left\{ r_1^2 + r_1'^2 + 2 \nu r_1 r_2 + \frac{\delta^2}{12} (r_1 - r_2) (r_1^3 - r_2^3) \right\} \\
 a_{28} &= \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{\delta^2}{12} (r_1 - r_2) r_1 + \nu_1 \kappa \rho_1 \right\}, \quad a_{29} = \frac{\nu_1 \kappa \rho_4}{\alpha} - \frac{\delta^2 \gamma r_2 (r_1 - r_2)}{12 \alpha} \\
 a_{30} &= \frac{n}{\alpha} \left\{ \kappa \nu_1 - \frac{\delta^2}{12} (r_1 - r_2) r_2 \rho_3 \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (A-3)$$

$$\left. \begin{aligned}
 a_{31} &= a_8, \quad a_{32} = -a_9, \quad a_{33} = a_{10}, \quad a_{34} = a_{18}, \quad a_{35} = -a_{28} \\
 a_{36} &= a_{29}, \quad a_{37} = \frac{\delta^2}{12 \alpha^2}, \quad a_{38} = \frac{r \delta^2}{12 \alpha^2}, \quad a_{39} = -\frac{\delta^2}{12} (\nu r_1 r_2 + \rho_6) - \nu_1 \kappa \rho_1 \\
 a_{40} &= -\frac{n \delta^2 \nu_2}{12 \alpha r}, \quad a_{41} = -\frac{n \delta^2 \gamma \nu_3}{12 \alpha r}
 \end{aligned} \right\} \quad (A-4)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{42} &= a_{11}, \quad a_{43} = a_{19}, \quad a_{44} = a_{20}, \quad a_{45} = a_{21}, \quad a_{46} = a_{30} \\ a_{47} &= -a_{40}, \quad a_{48} = a_{41}, \quad a_{49} = \nu_1 a_{37}, \quad a_{50} = \nu_1 a_{38} \\ a_{51} &= \frac{\delta^2}{12}(\nu r_1 r_2 - \rho_5) - \nu_1 \kappa \rho_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-5})$$

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{b \rho_1}{\alpha}, \quad b_2 = \frac{b \nu r}{\alpha}, \quad b_3 = \frac{b \nu n}{r}, \quad b_4 = b(r_1 \rho_1 + \nu r_2) \\ b_5 &= -\frac{b \delta^2 (r_1 - r_2)}{12 \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-6})$$

$$b_6 = -\frac{b n \nu_1}{r}, \quad b_7 = \nu_1 b_1, \quad b_8 = -\frac{b \nu_1 r}{\alpha}, \quad b_9 = \nu_1 b_5 \quad (\text{A-7})$$

$$b_{10} = -b \nu_1 \kappa \rho_1 r_1, \quad b_{11} = \frac{b \nu_1 \kappa \rho_1}{\alpha}, \quad b_{12} = b \nu_1 \kappa \rho_1 \quad (\text{A-8})$$

$$\left. \begin{aligned} b_{13} &= b_5, \quad b_{14} = -\frac{b \delta^2}{12}(r_1 - r_2) r_1, \quad b_{15} = \frac{b \delta^2}{12 \alpha} \\ b_{16} &= \frac{b \delta^2 \nu r}{12 \alpha}, \quad b_{17} = \frac{b \delta^2 \nu n}{12 r} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-9})$$

$$\left. \begin{aligned} b_{18} &= \nu_1 b_5, \quad b_{19} = -\frac{b \nu_1 \delta^2 n}{12 r}, \quad b_{20} = \nu_1 b_{15} \\ b_{21} &= -\frac{b \nu_1 \delta^2 r}{12 r} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-10})$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= 1 + \frac{\delta^2}{12}(r_1 - r_2) r_1, \quad \rho_2 = 1 - \frac{\delta^2}{12}(r_1 - r_2) r_2, \quad \rho_3 = 1 + \nu_1 \kappa \\ \rho_4 &= r + \frac{\delta^2}{12} r_1' (2r_1 - r_2), \quad \rho_5 = \frac{\nu_1 r^2}{\alpha^2} + \frac{n^2}{r^2}, \quad \rho_6 = \frac{r^2}{\alpha^2} + \frac{\nu_1 n^2}{r^2} \\ \rho_7 &= 1 + \frac{\delta^2}{12} (3r_1 - 2r_2) r_1 \\ \nu_1 &= \frac{1 - \nu}{2}, \quad \nu_2 = \frac{1 + \nu}{2}, \quad \nu_3 = \frac{3 - \nu}{2} \\ b &= \frac{1}{1 - \nu^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-11})$$

第 6 章 参 考 文 献

- 1) Timoshenko, S.P. : On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *Phil. Mag.*, Vol.41, pp.744-746, 1921.
Timoshenko, S.P. : On the transverse vibrations of bars of uniform cross-section, *Phil. Mag.*, Vol.43, pp.125-131, 1922.
- 2) Mindlin, R.D. : Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *J. Appl. Mech.*, Vol.18, No.1, pp.31-38, 1951.
- 3) Mirsky, I. and Hermann, G. : Nonaxially symmetric motions of cylindrical shells, *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol.29, No.10, pp.1116-1123, 1957.
- 4) Naghdi, P.M. and Cooper, R.M. : Propagation of elastic waves in cylindrical shells, including the effects of transverse shear and rotatory inertia, *J. Acoust. Soc. Amer.*, Vol.28, No.1, pp.56-63, 1956.
- 5) Goland, M., Wickersham, P.D. and Dengler, M.A. : Propagation of elastic impact in bending, *J. Appl. Mech.*, Vol.22, pp.1-7, 1955.
- 6) Boley, B.A. and Chao, C.C. : Some solutions of the Timoshenko beam equations, *J. Appl. Mech.*, Vol.22, pp.579-586, 1955.
- 7) Sagartz, M.J. and Forrestal, M.J. : Bending stress propagation from the clamped support of an impulsively loaded beam, *AIAA Journal*, Vol.10, No.10, pp.1373-1374, 1972.
- 8) 宇治橋貞幸, 岡崎孝男, 松本浩之, 中原一郎 : 先端に衝撃荷重をうける片持ち円筒かくの変形と応力, *日本機械学会論文集(A編)*, 第46巻, 第406号, pp.647-655, 1980.
- 9) Plass, H.J. : Some solution of the Timoshenko beam equations for short pulse-type loading, *J. Appl. Mech.*, Vol.25, pp.379-385, 1958.
- 10) Chou, P.C. : Analysis of axisymmetrical motions of cylindrical shells by the method of characteristics, *AIAA Journal*, Vol.6, No. , pp.1492-1497, 1968.
- 11) Anderson, R.A. : Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory, *J. Appl. Mech.*, Vol.20, pp.504-510, 1953.
- 12) Huang, C.C. : Forced motions of elastic cylindrical shells, *J. Appl. Mech.*, Vol.42, pp.321-325, 1975.
- 13) Reisman, H. and Medige, J. : Forced motion of cylindrical shells, *Proc. ASCE*, Vol.94, No.EM5, pp.1167-1182, 1968.
- 14) Emery, A.F. and Cupps, F.J. : Finite difference computation of the dynamic motion of cylindrical shells including the effect of rotatory inertia and transver shear, *Earthquake Eng. Strut. Dyn.*, Vol.5, pp.323-335, 1979.
- 15) Koenig, H.A. : Dynamic finite element analysis for elastic waves in beams and plates, *Int. J. Solids Structures*, Vol.4, pp.643-660, 1968.
- 16) Yokoyama, T. and Kishida, K. : Finite element analysis of flexural wave propagation in elastic beams, *Technology Reports of the Osaka University*, Vol.32, No.1642, pp.103-111, 1982.
- 17) Hughes, T.J.R., Taylor, R.L. and Kanoknukulchai : A simple and efficient finite

- element for plate bending, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.11, No.10, pp.1529-1543, 1977.
- 18) 三上隆, 芳村仁: 選点法による応力波伝播の解析, 第33回応用力学連合講演会講演論文抄録集, pp.241-242, 1983.
 - 19) Mikami, T. and Yoshimura, J.: Application of the collocation method to static and dynamic analysis of shells of revolution, *Proc. of the Fifth ASCE-EMD Specialty Conference, Vol.1 Engineering Mechanics in Civil Engineering*, pp.205-208, 1984.
 - 20) Magrab, E.B.: *Vibrations of Elastic Structural Members*, SIJTHOFF & NOORDHOFF, Chapter VIII, 1979.
 - 21) Przemieniecki, J.S.: *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, Chapter 9, 1968.
 - 22) Houbolt, J.C.: A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft, *J. Aeronaut. Sci.*, Vol.17, pp.540-550, 1950.
 - 23) Leech, J.W.: Stability of finite difference method for solving matrix equation, *AIAA Journal*, Vol.3, No.11, pp.2172-2173, 1965.
 - 24) Mungan, I. and Lehmkamper, O.: Buckling of stiffened hyperboloidal cooling towers, *Proc. ASCE*, Vol.105, No.ST10, pp.1999-2007, 1979.
 - 25) 石岡仁, 坂本祐吉 他3名: 自然通風式冷却塔の構造 一第1報 冷却塔の塔体構造一, 石川島播磨技報, 第16巻, 第5号, pp.559-566, 1976.
 - 26) 大内一, 小池健二 他2名: RC大型冷却塔模型の水平加力実験と弾塑性解析, 土木学会論文報告集, No.266, pp.39-50, 1977.
 - 27) 三上隆, 芳村仁: 選点法による回転殻の応力波伝播問題の解析, 土木学会論文集, 巻374号/1-6, pp.319-328, 1986.

第 7 章 総 括

第7章 総括

本論文は、構造物の動的問題で、その支配方程式が空間に関して二点境界値問題として表わされる場合を対象にし、重みつき残差法の一つに位置付けられる選点法に基づく空間領域の離散化手法について述べ、さらに、多数の解析例の集積によって、手法の適用可能性および数値解析上の特性を明らかにしたものである。提示した手法は、直交多項式の零点を選点とする選点法に要素分割という有限要素法的手法を加味したものであり、考察している問題の支配方程式、境界条件式および隣接要素上の結合条件式が与えられさえすれば、解析の全過程がマトリックス代数により組立てられる汎用性の広い解法であり、構造物の動的問題を簡便にしかも比較的精度よく解析し得る実用的解法である。

各章における内容の要約および結論をまとめて示せば、以下の通りである。

第2章では、第3章以下の個々の問題の基礎となる選点法について述べた。まず、従来の研究で用いられることが少なかった混合法を試行関数とする選点法に、要素分割という技巧を加えて、考察している問題の空間領域を離散化し、代数方程式系あるいは常微分方程式系へ帰着させる過程を略述した。次に、数値計算の簡易化を計るための準備について述べるとともに、選点法における内部選点と端点を分点とする一つの閉じた型の補間型積分則を導き出し、その重みが選点法の適用結果得られる方程式系の係数マトリックスの数値安定性の判断に役立つことを明らかにした。また、選点の選び方を、関数近似における補間多項式の標本点の選定および選点法と仮想仕事の原理に基づく近似解法の等価性の観点から考察し、直交多項式の零点の採用の有効性を示した。

第3章では、固有振動問題の解析について述べた。この問題の解（固有振動数，固有振動モード）は、構造物の動的特性を議論する上にも必要不可欠であり、得られた数値解の精度は、動的応答問題の変形・応力の応答値の精度に関する基礎的な情報を提供してくれるので、ここでは、全体を三つの部分に分け、Ⅰ部ではTimoshenko 梁、Ⅱ部では古典理論に基づく回転殻、およびⅢ部では矩形Mindlin板の解析について述べた。得られた成果は、次の通りである。

- 1) Timoshenko 梁を例にとり、選点法の適用の結果得られる固有方程式は、固有ベクトルに物理的意味を持たせた二つの形で定式化できることを示した。一つは内部選点における変位を固有ベクトルの成分とする内部選点固有方程式であり、いま一つは端点における変位を固有ベクトルの成分とする端点固有方程式である。前者は一般固有値問題の形であり、後者は固有マトリックスが固有値パラメータの関数となるが、その次数は著しく小さくなるのが特長である。
- 2) 本手法の重要な特色は、例えば頂点が特異点となる球殻を取り上げれば、その処理法を要求される従来手法とは異なり、なんら特別な手続きを必要としない直接的な計算手法である。
- 3) 端点固有方程式による場合には、固有振動数の見落しの危険性があるが、低次に限れば、要素分割数の増加と解のステップ幅の設定に注意することにより回避できる。
- 4) 選点に shifted Legendre 多項式の零点（L-選点）を採用した結果が、shifted Chebyshev 多項式の零点（C-選点）に基づく結果に比べて好結果を生んでいる。
- 5) 要素数をN、要素内の内部選点数をMと記せば、固有振動数が既知の解との比較においてほぼ

1%以内の相対誤差で求まるのは、 $N=1$ の場合で、支配方程式の階数および元数に無関係に低次 $[M/2]$ 個までである。($[]$: Gauss の記号)。さらに Timoshenko 梁に対する数値結果は、 N 要素分割では低次 $[MN/2]$ 個までは相当精度よく求められることを示唆している。なお、 M および N と解の精度の関係は、動的応答解析においては、空間近似の仕方を決定する際の判断基準としても有効である。

6) 本手法によれば、固有マトリックスは非対称となるが、固有振動モード間の直交性は十分な精度で成立している。

7) Timoshenko 梁の数値結果より判断すれば、せん断変形・回転慣性の影響を取り入れた修正理論に基づく本手法は、厚肉梁(板、殻)に対するとときと同程度の精度を保持しつつ、かなりの薄肉梁(板、殻)を解析しうる利点を有している。その適用限界は使用計算機の語長にもよるが、矩形断面梁においては、スパンと厚さとの比で 10^4 程度である。

なお成果5)～7)は、 L -選点に基づくものである。

第4章では、外力が構造物の変形に伴ってその作用方向が変化する非保存系の弾性安定問題の解析を、柱・梁を例に取り上げて述べた。非保存的安定問題を内部選点固有方程式の形で記述し、その固有値を見出す問題へと変換し、それに基づいて Beck の問題など代表的な非保存系の問題を解析した。得られた成果は、次の通りである。

- 1) 本手法は、非自己随伴型の微分方程式の解法にも有効である。
- 2) 本手法によれば、臨界荷重は従来手法よりも少ない自由度(内部選点数 $M=7$)で、同程度の精度で求められる。
- 3) 低次の近似で解析すれば、真の解(臨界荷重, 固有値曲線)と異なる解を見出す危険性がある。この欠点は、内部選点数を増すことにより自動的に解除できるが、本手法を他の構造要素に適用する際の留意事項である。

第5章では、構造物の動的応答が低次の振動数モードに支配される構造振動問題の解析を古典理論に基づく回転殻に対して述べた。ここでは、時間方向の積分に直接積分法の利用を前提とし、階数低下された支配方程式に選点法を適用して空間を離散化し、時間に関する2階の連立常微分方程式を導く過程を記述した。なおここでの問題は第3章と第4章の問題と異なり場の局所的性質が重要となるため、数値計算例では、静的負荷の問題も解析した。取り扱った殻は円筒殻と球殻という限られた場合であるが、次のようなことが明らかになった。

- 1) 階数低下された支配方程式に本手法を適用すれば、曲げモーメントおよびせん断力などの高階微係数で表わされる力学的諸量は、たわみと同程度の精度で求められる。
- 2) 本手法は、境界近傍および荷重点近傍の応力集中に対する追従性がよい。
- 3) 空間領域の離散化は、一要素内の選点数を $M=11$ 程度に固定し、要求される精度に呼応して要素分割数を増すのがよい。また空間領域の離散化の近似度の判定には、支配方程式の平均二乗

残差の利用が有効である。

- 4) 本手法によれば、従来手法よりも少ない自由度で、実用上十分な精度の解析がおこないうことが判明した。

第6章では、低次のみならず高次の振動数モードにも支配され、局所的な波の伝播を追いかける波動伝播問題を回転殻に対して述べた。ここでは、応力波伝播問題の解析で重要な役割を果たすせん断変形・回転慣性の影響を考慮した修正殻理論に基づき、空間領域に対しては選点法、時間領域に対しては陽解法または陰解法を適用して構成された二つの解析アルゴリズムを提示した。得られた成果は次の通りである。

- 1) 選点法と陽解法によるアルゴリズムは、双方の特長が生かされて、必然的に次数の低いマトリックス演算で構成された。
- 2) 選点法と陰解法によるアルゴリズムは、有限要素法でよく知られた部分構造法に類似な手法を導入することにより、解くべき方程式は比較的小さな方程式へと変換できた。
- 3) 選点法と陽解法の組合せの場合には、安定性を失わないための時間刻みの最大値と選点法の適用により得られる固有値の関連性を理論的に明らかにし、具体的な数値計算例によって検証できた。この固有値は、その誘導過程から理解できるように、各要素の両端を完全固定という境界条件を課して得られる点に特徴がある。
- 4) 本手法の適用により得られた数値解は、既知の解析解との比較により、また応力波の伝播現象に照らしても妥当なものであり、定量的にも十分な精度であることが確認できた。
- 5) 空間領域の離散化は、構造振動問題と同様に、一要素内には内部選点数を 11 程度にとり、要求される精度に応じて要素分割数を増すのが適切である。

以上、各章における内容の要約および提示した手法の個々の問題に対する適用性、数値解析上の特性の主なものについてまとめて述べた。本手法は構造物の広範囲にわたる動的問題を簡便にしかも比較的精度よく解析し得る実用的手法である。しかし、これで既往の手法がすべてカバーできるというのではなく、既往の手法と互いに補完し合いながら、構造物の動的挙動の解明にあれば本手法の特長が十分発揮されるものと思われる。

謝 辞

本研究は、選点法による構造物の動的問題の解析に関する過去8年間の著者の研究をまとめたものであり、その間、終始懇篤なるご指導を賜りました北海道大学工学部土木工学科構造力学講座、芳村仁教授に対し深く感謝の意を表わす次第である。

本論文の作成中、韭澤憲吉助教授をはじめ研究室の佐々木康彦助手、小西美智代事務官、ならびに志村祐子前事務官には、多大のご協力を得た。ここに記して深く謝意を表わす次第である。

選点法による構造物の動的問題の解析に関する研究

発行 昭和62年9月

著者 三上 隆
北海道大学工学部構造力学講座

〒060 札幌市中央区北13条西8丁目

☎ 011-716-2111(代) 内線 6176

印刷 / 株式会社サンコー