



Title	共振器法によるプラズマ計測に於ける境界要素法解析手法に関する研究
Author(s)	富岡, 智
Citation	北海道大学. 博士(工学) 乙第5049号
Issue Date	1996-09-30
DOI	10.11501/3118261
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/32683
Type	theses (doctoral)
File Information	5049.pdf



[Instructions for use](#)

共振器法によるプラズマ計測に於ける
境界要素法解析手法に関する研究

富岡 智

目次

1	序論	1
2	境界要素法の基礎	5
2.1	グリーン関数の性質	6
2.2	境界積分方程式	9
2.2.1	ポアソン方程式の境界積分方程式	10
2.2.2	ヘルムホルツ方程式の境界積分方程式	12
2.2.3	波動方程式の境界積分方程式	12
2.3	離散化	14
2.3.1	内挿関数	14
2.3.2	積分方程式の離散化	19
2.4	グリーン関数	22
2.4.1	二次元ポアソン方程式のグリーン関数	22
2.4.2	二次元ヘルムホルツ方程式のグリーン関数	23
2.4.3	二次元波動方程式のグリーン関数	28
3	解析モデル	32
3.1	プラズマ密度の計測法	32
3.2	プラズマの誘電率とヘルムホルツ方程式	33
3.3	ファブリ・ペロー共振器の特徴	40
3.4	境界条件	42
3.4.1	FPR 鏡面の境界条件	43
3.4.2	プラズマ領域と自由空間の界面における境界条件	43
3.4.3	導波管の入射条件	45
3.4.4	放射条件	45

3.5	反射係数の導出	46
4	開放型問題に対する境界要素法の適用	48
4.1	ポアソン方程式に対する開放型問題	48
4.2	ヘルムホルツ方程式に対する開放型問題	55
5	開放型ファブリ・ペロー共振器の共振特性	60
5.1	完全導体壁面の場合の共振特性	60
5.2	開放型共振器の等価回路	79
5.2.1	種々の共振回路の周波数特性	79
5.2.2	開放型共振器の等価回路	86
5.3	壁面損失を考慮した開放型共振器の共振特性	88
5.3.1	損失壁の境界条件	88
5.3.2	壁面損失による Q 値	92
5.3.3	損失壁の境界条件の評価	94
5.3.4	開放型共振器の壁面損失	100
6	多媒質問題に対する非物理解の発生とその除去法	102
6.1	支配方程式および解析モデル	103
6.2	条件数	104
6.3	二媒質問題	107
6.3.1	二媒質二領域分割法	107
6.3.2	仮想境界分割法	108
6.4	解析結果	111
6.5	計算時間	115
6.6	まとめ	117
7	平板状プラズマを含むファブリ・ペロー共振器	118
7.1	プラズマ密度の推定	118
7.2	衝突周波数の推定	125
8	不均質密度分布を有するプラズマの解析	129
8.1	解析モデル	130
8.2	領域要素を用いた境界要素法	131
8.3	フェルマーの原理を考慮した境界要素法	133

8.4	解析結果	136
8.5	まとめ	144
9	境界要素法における二次元波動方程式の解の安定性	145
9.1	支配方程式と基本解	146
9.2	線形化・離散化	147
9.2.1	非特異要素	148
9.2.2	特異積分	151
9.3	結合行列	155
9.4	解析モデル	157
9.5	解析結果	159
9.6	まとめ	164
10	結論	165
	謝辞	167
	参考文献	168

第1章

序論

本論文では開放型共振器中に、損失、分散、不均質の性質を有する媒質を置いた場合の、解析手法の確立を目的とする。このモデルの応用例は広く、本論文で扱う共振器法によるプラズマ密度および温度の計測をはじめとし、高周波用基板の複素誘電率の測定、南極の氷の年代推定、物質の非破壊検査、地中資源の探索、地震源の特定等の測定の他に、プラズマ等の媒質の集中加熱が挙げられる。

この問題に対する解析手法としては境界要素法を採用する。工学問題の多くは特定の境界条件と偏微分方程式で記述される場の支配方程式で表される。境界形状が簡単なモデルでは、座標変換等を用いて解くことが可能であるが、形状が複雑になると、境界あるいは領域を離散化して計算機を用いた数値解析に頼らざるを得ない。数値解析は大きく分けて領域法と境界法に分類される。前者は差分法や有限要素法で代表されるように節点と呼ばれる代表点を領域内におき、差分の原理あるいは最小作用の原理を適用させる直接的な解法である。一方、後者に分類される境界要素法は、グリーン関数を用いて、境界上の節点と別の境界上の節点の結合から境界積分方程式を導き、その方程式を解いて境界上の解のみを、まず求め、その後で領域内の場を求める間接的な方法である。

以上から解るように、境界要素法に代表される境界法は領域法に比べ、解析次数が次元低いことから、計算機の主記憶と計算時間の両面で勝っていることが解る。また、境界上の節点同士を直接結合するため精度も良いとされている。さらに、境界要素法が境界の無い場合のグリーン関数に基づいているので、開放問題には、特別な考慮をすること無く、適用できる。しかしながら、境界要素法はアルゴリズムの複雑さ、非線形問題への適用の困難さ等の欠点があり、核融合の計算コード等には未だ採用されていない。

しかし、今後ますます大規模な計算コードが必要とされるのは明らかであり、計算コストと精度の面で有用な境界要素法の可能性は大きい。

プラズマと電磁波の相互作用は、屈折、損失、分散、共鳴、異方性、非線形等の解析における種々の問題があり、さらにプラズマ自身が密度分布を有する不均質媒質であるので問題はより複雑となる。これらは支配方程式の選択、境界条件の決定等の解析モデルにより、どの問題が解析できるかが決定される。

共振器中の特定の空間にプラズマを閉じ込めた場合は、真空とプラズマの二媒質問題となり、プラズマの表面上での境界条件を置くことにより、屈折については容易に解けるはずである。

ところが、一つの媒質の周囲を異なる媒質が取り囲む場合には、本来存在しない非物理解の発生が知られている [1]。本論文では非物理解を定量的に評価できるパラメータを導入し、さらにその除去法を示す。

プラズマにおける損失については、ヘルムホルツ方程式中の波数を複素波数にする事で考慮できる。

分散は、ヘルムホルツ方程式を支配方程式に選んだ瞬間に、特定の周波数のみで連立積分方程式を構成できるので、波数に周波数依存性を考慮するだけでよい。但し、過渡問題として波動方程式を用いる場合には、非線形項として現れるため、境界要素法では非常に困難となる。

共鳴、異方性については本論文では扱っていないが、特別な考慮を必要とするものの、境界要素法を適用することは本質的には不可能ではない。

境界要素法で、困難とされているのは、非線形、不均質問題である。非線形は、解析周波数等の解析モデルの条件の限定あるいは場合分けによる線形化、あるいは収束計算により、一部は解けるであろう。解けない場合には、別の手法との結合解法を用いれば可能となる。

不均質はプラズマ解析において避けて通ることはできない問題である。不均質とは、プラズマの密度分布が存在する場合であり、これは、媒質定数の空間分布が存在することを意味する。

境界要素法では、不均質問題を解くことは不可能とされていた。これは、媒質定数の空間分布を境界積分で表現することができないためである。プラズマ以外の領域を境界要素法で解き、不均質なプラズマを他の解法に任せる方法もあるが、その場合の境界要素法のメリットの多くが失われてしまう。

空間分布および境界形状が特殊な場合には、境界要素法のみで、級数展開により境界積分で表された例もあるが、任意形状の場合には、級数展開の成分が多くな

り、やはり境界要素法のメリットは失われる。

本論文では、この不均質問題に対する境界要素法のみによる近似解法を提案し、その有効性を評価する。

一方、共振器を含むモデルを解析する場合には、共振周波数付近での、共振器の壁面損失は無視できなくなる。本論文では、壁面の損失を考慮する境界条件の導出を行い、解析モデルに対する壁面損失の評価を行う。

また、本論文では、実験の容易性、つまりプラズマ等の試料の出し入れが容易であることから、開放型共振器を採用している。境界要素法は、開放型問題を得意としている。これは、解析空間を取り囲む無限遠での境界上で、グリーン関数が0となるためである。電磁波の解析から離れるが、二次元ポアソン方程式では、グリーン関数が無限遠で0にならないため、特別の考慮を要する [1]。本論文では、グリーン関数を丁寧に導出し、そのとき発生する積分定数の任意性を用いて開放問題への適用を示す。

以上で、プラズマに対する定常問題の境界要素法による解法が、ある程度確立できたと思われるが、非定常問題を扱う場合には、分散、共鳴、非線形等の解決すべき問題点が再浮上する。さらに、境界要素法自身にも、不安定性が指摘されている [2]。

本論文では、過渡現象のプラズマ解析の基礎となる、自由空間の波動方程式に対する、二次元境界要素法の解の安定性についても論ずる。

過渡応答問題に対する解の安定条件は、既に報告されている [2] が、その導出には疑問点が残る。

筆者は、安定か否かを示す定量的な指標を導入し、従来指摘されている解の安定性が間違っていることを新たに指摘する。

以下に、本論文の流れを示す。

まず、第2章および第3章では、本論文で用いた場の支配方程式に対する境界要素法の一般論、および解析モデル全般について述べる。

第4章では、境界要素法における開放型問題についてふれ、特にポアソン方程式の解法では、従来用いられている基本解では誤った解を導くことを示す。

第5章ではプラズマを含まない場合のファブリペロー共振器の境界要素法解析の結果を示し、さらに、金属壁に有限の導電率を与えた場合の、解析手法を示す。

第6章では、多媒質問題に対する境界要素法解析の、非物理解の発生とその除去法を示し、第7章では、その手法を用いて、共振器中の平板状プラズマの解析を行い、プラズマ密度と衝突周波数が共振特性より推定できることを示す。

さらに、第8章では、プラズマが密度分布を有する場合の、不均質問題に対する境界要素法の近似解法を示す。

第9章では、流れが変わるが、二次元波動方程式の境界要素法における解の安定性について論ずる。

第10章では、本論文で得られた成果を列挙する。

第2章

境界要素法の基礎

境界要素法は、積分方程式あるいは微分方程式で表される物理場の、計算機を用いた解法の一つである。一般に、場の解法は、支配方程式と境界条件をもとに、領域内部の場を決定する方法である。二階の偏微分方程式を例にとると、境界上の変数として、場の値およびその一階微分があり、これらの一方あるいはその一次結合が境界条件として与えられた場合の領域内の場を決定する。

境界要素法では、任意の点に単位ソースを置いた場合の解を示すグリーン関数と、領域積分を境界積分に置き換えるグリーンの積分公式により、境界積分方程式を求める。この境界積分方程式は、境界上にソース点を置いて、任意の点を観測点とした場合の、ソースの境界積分と観測点の関係を示しており、波動問題ではホイヘンスの原理と等価である。すなわち、境界上のソースの振幅と位相、あるいは境界上の場と一階微分が解っていれば、観測点の解が決定される。

しかし、境界上では境界条件として一方のみしか与えられていないので、境界要素法では、二段階に分けて領域内の場を決定する。

まず、境界上に複数の観測点を選び、それらのそれぞれの点に関する境界積分方程式に、境界条件を組み込み、境界上の未知数について解く。

境界積分方程式は、境界上の場の値とその一階微分の積分の形で与えられる。一方は、境界条件として与えられ、他方は未知数である。

積分形をそのままアナログ的に計算機にかけることは、現在は不可能である。そこで、適当な内挿関数により境界を離散化する。その離散化の代表点を節点と呼び、その節点を観測点と一致させることにより、方程式の本数と未知数の数が一致し、これらの方程式は連立代数方程式に書き換えられ、解を求めることが可能となる。その結果、境界上の場および一階微分が全て決定される。

次に、領域内の観測点に関する境界積分方程式を求め、その点の場を決定する。この積分は、すでに前の段階で、境界上の全ての変数が決定されているので、陽な形で実行できる。

本章の内容は周知の理論であるが、後章の議論で必要となるので、その準備としてあえて記す。2.1節では境界要素法で重要な役割を果たすグリーン関数の物理的な意味を示し、これと、境界積分方程式の関係を示す。2.2節では数学的に境界積分方程式の導出を行い、2.3節では境界積分の離散化について示す。また、2.4節では、後章で用いるいくつかの波動型方程式に対する基本解(グリーン関数)の導出と、その基本解の積分定数について議論を行う。

2.1 グリーン関数の性質

グリーン関数の物理的な意味を示すために、最も簡単な例として、3次元ポアソン方程式を考える。

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

境界の無い空間に単位電荷を置いた場合、

$$\nabla^2 \phi^* = -\delta(\mathbf{r}) \quad (2.2)$$

で場は記述され、この解は

$$\phi^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (2.3)$$

で与えられ、これをグリーン関数と呼ぶ。

次に、空間中に電荷分布 ρ/ϵ_0 を考える。境界が存在しない場合には、

$$\phi = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \phi^* d\Omega \quad (2.4)$$

の重ね合わせの原理が利用できる。

さらに、単位双極子が作る場を考える。図2.1のように、 $\pm Q$ の電荷を e_z 方向に距離 d 隔てて配置するとき、この双極子が作る場は

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r_+} - \frac{Q}{r_-} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left((\rho^2 + (z - d/2)^2)^{-1/2} - (\rho^2 + (z + d/2)^2)^{-1/2} \right) \\ &\simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left((\rho^2 + z^2 - zd)^{-1/2} - (\rho^2 + z^2 + zd)^{-1/2} \right) \\ &\simeq \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \left(\left(1 + \frac{zd}{2r^2}\right) - \left(1 - \frac{zd}{2r^2}\right) \right) = \frac{zQd}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{1}{4\pi r^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_z) \frac{Qd}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (2.5)$$

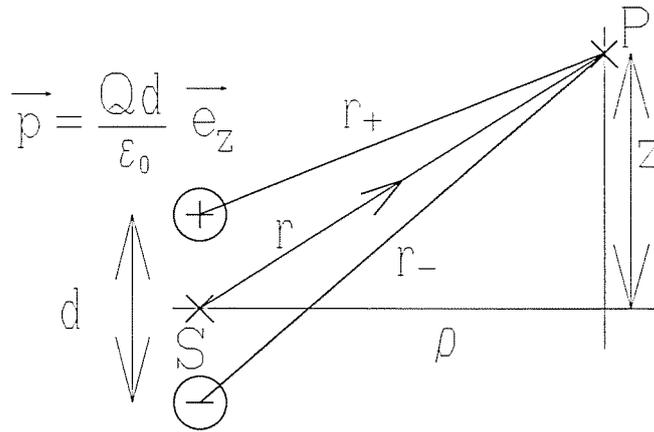


図 2.1: 電気双極子の作る field

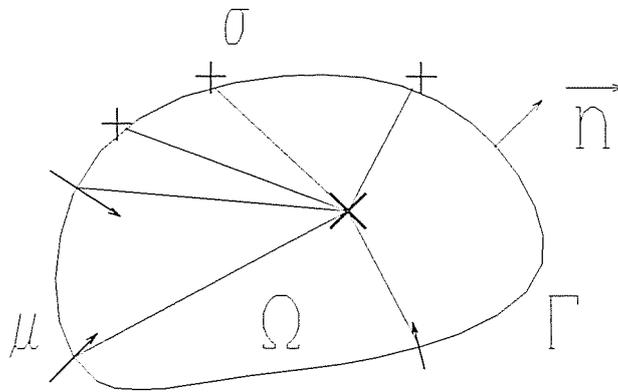


図 2.2: 単極子, 双極子ソースの境界積分

と表される。さらに、(2.3) 式より、

$$\nabla_S \phi^* = \frac{\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0} \quad (2.6)$$

が導かれ、これを (2.5) 式に代入し $Qd/\epsilon_0 = 1$ とすれば、単位双極子の作る場として

$$\phi = -\mathbf{e}_z \cdot \nabla_S \phi^* \quad (2.7)$$

が得られる。ここで ∇_S はソース点を原点とした微分演算子を表す。

図 2.2 のように、仮想的な境界上に単極および双極子の表面分布がある場合には、領域内の場は (2.3), (2.5) 式より

$$\phi = \int \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \phi^* - \frac{\mu}{\epsilon_0} (-\mathbf{n}) \cdot \nabla_S \phi^* \right) d\Gamma \quad (2.8)$$

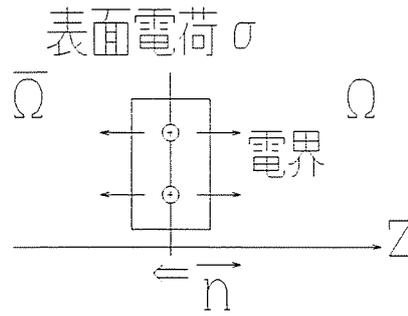


図 2.3: 境界上の単極子とポテンシャルの微分

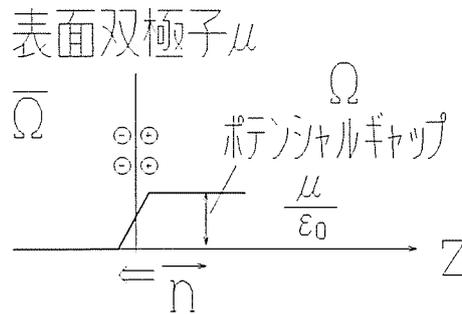


図 2.4: 境界上の双極子とポテンシャルの微分

と表される。ここで、 \mathbf{n} は境界における外向き単位法ベクトルを示し、双極子の向きは内向きを正とした。

境界上のソース分布は、ポテンシャルおよびその勾配と置き換えることが出来る。滑らかな境界を仮定すれば、図 2.3および図 2.4の様に一次元モデルで考えることが出来る。境界から \mathbf{n} および $-\mathbf{n}$ の両方に出ていく電気力線の和は

$$\mathbf{E}_z^+ \cdot (-\mathbf{n}) + \mathbf{E}_z^- \cdot \mathbf{n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.9)$$

と表される。ここで上付添字は境界より正負のいずれの領域かを示している。観測点を領域内に取り、それを原点とした微分演算子 ∇ を用いると、

$$(\nabla\phi^+ + \nabla\phi^-) \cdot \mathbf{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.10)$$

を得る。同様に、双極子が存在する場合、

$$\phi^+ - \phi^- = \frac{\mu}{\epsilon_0} \quad (2.11)$$

のポテンシャルギャップが存在する。ここで、 $\nabla\phi^+ + \nabla\phi^-$ を $\nabla\phi$ に、 $\phi^+ - \phi^-$ を ϕ に改めて置き直すと、(2.8)式は、

$$\phi = \int ((\nabla\phi)\phi^* - \phi(\nabla_S\phi^*)) \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.12)$$

と表される。上式は、境界上の全ての点で、境界値および一回微分により、場が決定されることを示しており、場の一意性と等価である。

2.2 境界積分方程式

境界要素法において、境界積分方程式の導出には重み付き残差法の一つと表現する方法もあるが、本論文ではより簡単な方法を示す。

多くの物理場は二階の偏微分方程式で与えられる。この場合、境界積分方程式は、支配方程式およびその方程式のグリーン関数、グリーンの第二積分公式のみから導くことができる。本論文では、ポアソン方程式、ヘルムホルツ方程式、波動方程式を支配方程式に考える。積分公式として、領域積分と境界積分の関係を表すグリーンの第二積分公式は

$$\int_V (\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi) dV = \int_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.13)$$

と与えられる。ここで、 ϕ, ψ は共に領域内で連続で二階微分が可能な関数であり、 \mathbf{n} は境界上の単位法線ベクトルを表し、その向きは領域の内から外へ向かう向きである。また、 V は解析対象となる閉領域、 S はその境界面を表している。空間偏微分の代わりに時間偏微分を用いた場合には、単純に二階微分を部分積分することにより

$$\int_t \left(\phi \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) dt = \left[\phi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial t} \right]_t \quad (2.14)$$

が得られる。

支配方程式を、

$$\mathcal{L}\{f(\mathbf{r}, t)\} = v(\mathbf{r}, t) \quad (2.15)$$

とするとき、そのグリーン関数は

$$\mathcal{L}\{G(\mathbf{r}_0, t_0; \mathbf{r}, t)\} = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0) \quad (2.16)$$

の解として与えられる。このグリーン関数は無限領域での支配方程式の解であり、境界条件は一切考慮しない。物理的な意味は、点 (\mathbf{r}, t) に単位ソースを置いたときの、観測点 (\mathbf{r}_0, t_0) での場を表現する関数である。

なお、異方性等の場合を除き、グリーン関数 G は観測点とソース点の立場を入れ換えても同じである。

$$G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) = G(\mathbf{r}_0, t_0; \mathbf{r}, t) \quad (2.17)$$

本論文では必要に応じ上記の性質を利用して両者を入れ換える。

2.2.1 ポアソン方程式の境界積分方程式

支配方程式として、

$$\mathcal{L}\{f(\mathbf{r})\} = \nabla^2 f(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r}) \quad (2.18)$$

のポアソン方程式を考える。

グリーンの積分公式の、 ϕ, ψ をそれぞれ f とグリーン関数 G とし、(2.18), (2.16) 式を用いれば

$$\begin{aligned} \int_V \{f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)v(\mathbf{r})\} dV \\ = \int_S \{f(\mathbf{r})\nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)\nabla f(\mathbf{r})\} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (2.19)$$

を得る。

上式の左辺第一項の δ 関数の積分は、点 \mathbf{r}_0 が領域 V の内部にある場合と境界 S 上にある場合で異なる。

まず、点 \mathbf{r}_0 が領域 V の内部にある場合には、容易に

$$\int_V \{f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\} dV = f(\mathbf{r}_0) \quad (2.20)$$

とできる。

点 \mathbf{r}_0 が境界 S 上にある場合には、ここでは、境界要素法の文献 [3,4] とは異なる導出を示す。これらの文献では、図 2.5 のように、領域 V と境界 S を変形して、 S 上の点 \mathbf{r}_0 が、新たな領域 V' に含まれるような、境界 S' を用いる。

$$\int_{V'} = \int_V + \int_{\Delta V} \quad (2.21)$$

$$\int_{S'} = \int_S + \int_{\Delta S} \quad (2.22)$$

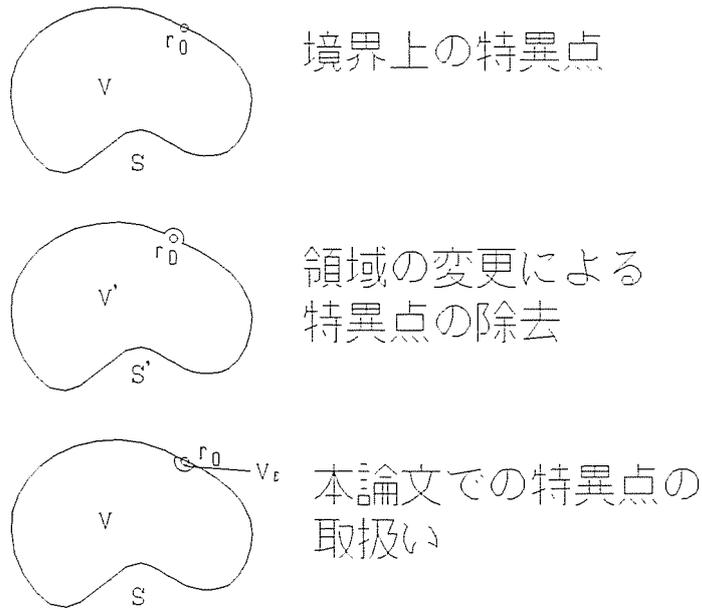


図 2.5: 境界 S 上の δ 関数の領域積分

この新たな領域 V' では (2.20) 式をそのまま用いることができるが、境界積分に ΔS の分を考慮する必要がある。

本論文では、境界 S も領域 V も変更しない単純な方法で、 S 上の \mathbf{r}_0 に対する領域積分を示す。 δ 関数は、一点でのみ無限大の値を有し、その点を除く領域では 0 となり、その領域全体の積分が 1 となる超関数として定義される。その例として、半値幅 σ が無限小のガウス分布が挙げられる [5]。

$$\delta(x - x_0) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x - x_0)^2}{\sigma^2}\right\} \quad (2.23)$$

これを用いると、二次元空間での $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ は

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) &= \delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{\sigma^2}\right\} \\ &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{\rho^2}{\sigma^2}\right\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

と表される。境界を考慮した場合でも、点 \mathbf{r}_0 近傍のみの半径 ρ_ϵ の領域 V_ϵ を考えれば良く、 f が連続で有界な値を持つとし、 ρ_ϵ が十分小さい時には、

$$f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0) \quad (2.25)$$

に収束する。δ関数の半値幅σはσ ≪ ρ_cとすると、

$$\begin{aligned}
 \int_{V_\epsilon} f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV &= \int_{V_\epsilon} f(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dV \\
 &= f(\mathbf{r}_0) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\rho_c} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \sigma^2} \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{\sigma^2} \right\} \rho d\rho d\theta \\
 &= f(\mathbf{r}_0) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\rho_c^2} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi \sigma^2} \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{\sigma^2} \right\} d\rho^2 d\theta \\
 &= f(\mathbf{r}_0) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left[\lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{\rho^2}{\sigma^2} \right\} \right]_0^{\rho_c^2} d\theta \\
 &= \frac{\Delta\theta}{2\pi} f(\mathbf{r}_0)
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

を得る。ここで、ΔθはS上の点r₀から微小領域V_εを臨む角度である。

ポアソン方程式の境界積分方程式をまとめると、

$$-c_0 f(\mathbf{r}_0) = \int_S \{ f(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \nabla f(\mathbf{r}) \} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \{ G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) v(\mathbf{r}) \} dV \tag{2.27}$$

$$c_0 = \begin{cases} 1 & \mathbf{r}_0 \text{ in } V \\ \frac{\Delta\theta}{2\pi} & \mathbf{r}_0 \text{ on } S \end{cases} \tag{2.28}$$

となる。

2.2.2 ヘルムホルツ方程式の境界積分方程式

ヘルムホルツ方程式

$$\mathcal{L}\{f(\mathbf{r})\} = (\nabla^2 + k_0^2)f(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r}) \tag{2.29}$$

において、k₀が定数の場合には、(2.27)式と同じ、境界積分方程式が導かれる。k₀が定数でない(r依存を持つ)場合には第8章で別に述べる。

2.2.3 波動方程式の境界積分方程式

波動方程式の場合には、時間微分に関する積分が入るため若干異なる。

$$\mathcal{L}\{f(\mathbf{r}, t)\} = \nabla^2 f(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = v(\mathbf{r}, t) \tag{2.30}$$

で表される波動方程式と、そのグリーン関数 G の満足する方程式 (2.16) 式の、それぞれに G, f を掛けて両辺を引き算し、時間 t および空間 V に対して積分を行うと、

$$\begin{aligned} & \int_t \int_V (f(\mathbf{r}, t) \mathcal{L}\{G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0)\} - G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) \mathcal{L}\{f(\mathbf{r}, t)\}) dV dt \\ &= \int_t \int_V (f(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0) - G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) v(\mathbf{r}, t)) dV dt \end{aligned} \quad (2.31)$$

となる。左辺の \mathcal{L} を空間微分に関する項と時間微分に関する項に分離し、積分順序を考慮すると、左辺は

$$\begin{aligned} & \int_t \int_V (f \mathcal{L}\{G\} - G \mathcal{L}\{f\}) dV dt \\ &= \int_t \int_V (f \nabla^2 G - G \nabla^2 f) dV dt - \frac{1}{c^2} \int_V \int_t \left(f \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - G \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \right) dt dV \end{aligned} \quad (2.32)$$

となり、さらに (2.13), (2.14) 式を用いると、

$$\int_t \int_S (f \nabla G - G \nabla f) \cdot \mathbf{n} dS dt - \frac{1}{c^2} \int_V \left[\left(f \frac{\partial G}{\partial t} - G \frac{\partial f}{\partial t} \right) \right]_t dV \quad (2.33)$$

となる。(2.31) 式の右辺の第一項は、ポアソン方程式と同様に

$$\int_t \int_V (f(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0)) dV dt = c_t c_r f(\mathbf{r}_0, t_0) \quad (2.34)$$

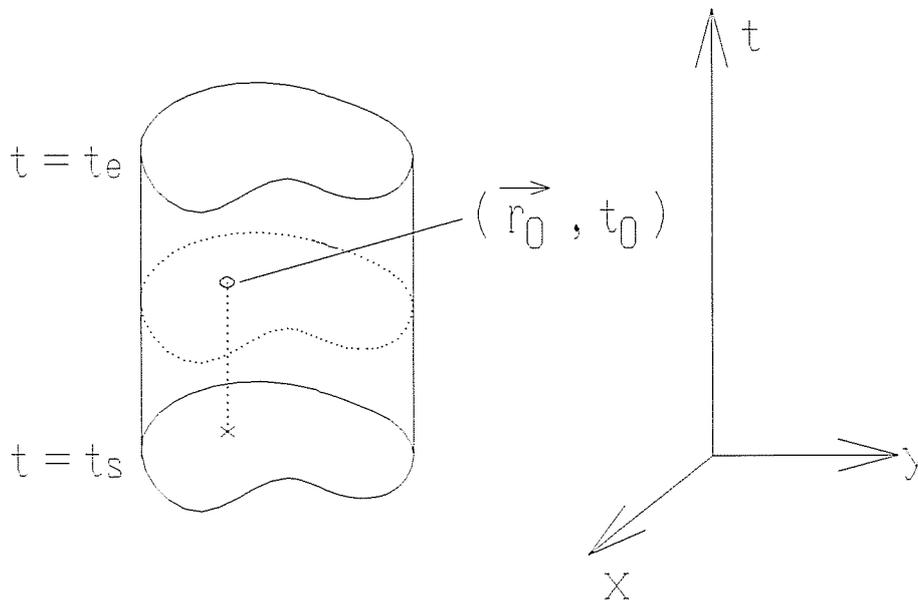


図 2.6: $xy-t$ 空間の解析領域

$$c_t = \begin{cases} 0 & t_0 \notin [t_s, t_e] \\ 1/2 & t_0 = t_s, t_0 = t_e \\ 1 & t_0 \in [t_s, t_e] \end{cases} \quad (2.35)$$

$$c_r = \begin{cases} 0 & \mathbf{r}_0 \notin V \\ \theta/2\pi & \mathbf{r}_0 \in S \\ 1 & \mathbf{r}_0 \in V \end{cases} \quad (2.36)$$

となる。波動方程式の境界積分方程式をまとめると、

$$\begin{aligned} -c_t c_r f(\mathbf{r}_0, t_0) = & \int_t \int_S (f(\mathbf{r}, t) \nabla G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) - G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) \nabla f(\mathbf{r}, t)) \cdot \mathbf{n} dS dt \\ & - \frac{1}{c^2} \int_V \left[(f(\mathbf{r}, t) \frac{\partial G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0)}{\partial t} - G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}) \right]_t dV \\ & + \int_t \int_V [G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, t_0) v(\mathbf{r}, t)] dV dt \end{aligned} \quad (2.37)$$

となる。図 2.6 のような、空間二次元時間一次元のモデルについて、上式の意味を考える。上式の右辺第一項は、図の曲面からの (\mathbf{r}_0, t_0) への積分を表し、第二項は、 $t = t_s$ と $t = t_e$ における平面からの積分を表している。空間軸に関する境界に時間軸の境界も考慮した時空境界を、新たな境界として定義するなら、図の立体 (x, y, t 軸) の表面からの影響と見做すことができる。第三項はこの時空領域内のソースの分布に関する積分である。なお、2.3 節で述べるように、波動方程式のグリーン関数の選び方により、第二項の積分の内的一方 (通常は $t = t_e$ の平面に関する積分) を省略できる。

2.3 離散化

前節で導いた境界積分方程式は、境界形状および境界条件が特殊な場合に限り、解析的に解くことが可能であるが、一般には、境界を分割する必要が生じる。

本節では、まず任意の関数を離散点の値と、隣接する離散点間の区間内の内挿関数である基底関数について述べ、最後にこの基底関数を用いて、積分方程式の離散化について述べる。

2.3.1 内挿関数

この節では、本論文で用いている一定要素、線形要素の内挿関数の導出を行う。一定要素、線形要素の導出は、文献 [6] の subsectional bases に基づいた導出を行う。

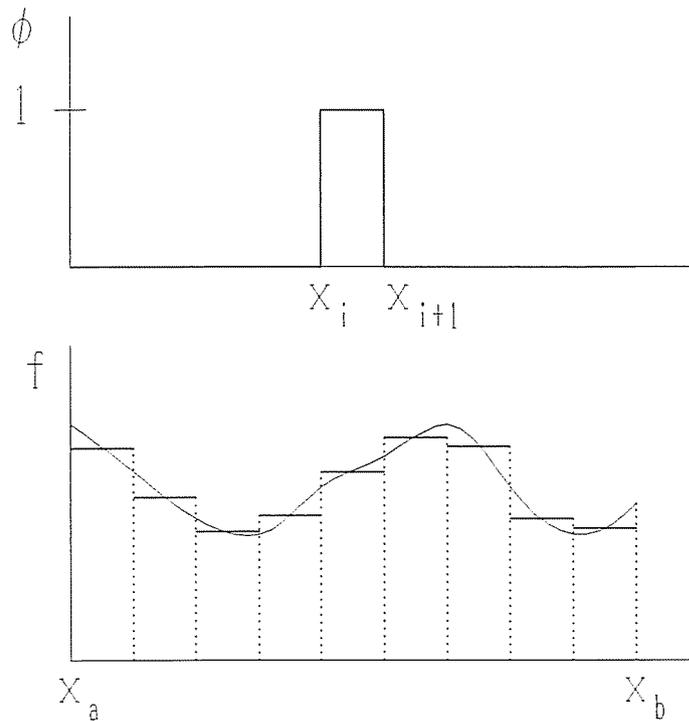


図 2.7: 一定要素の基底関数

一定要素

任意の関数 f は、完備な関数 ϕ_n で固有関数展開により

$$f = \sum \phi_n(x) f_n \quad (2.38)$$

と表すことができる。区間 $[x_a, x_b]$ を N 個に分割する場合を考える。分割に用いた座標を $x_i (i = 1, N - 1)$ とし、区間 $L_i = [x_{i-1}, x_i]$ 内で一定となる基底関数を考える。

$$\phi_i = \begin{cases} \psi_{i,0} = 1 & (x \in [x_{i-1}, x_i]) \\ 0 & (x \notin [x_{i-1}, x_i]) \end{cases} \quad (2.39)$$

なお、 ψ_i については後述する。この区間 L_i 内の代表点 x'_i (一般に区間の中心) での f を $f_i = f(x'_i)$ とするとき、この f は図 2.7 の様に、有限幅のステップ関数の合成として定義できる。

このように特定の区間内のみで 0 でない値を有する基底関数を、subsectional bases と呼ぶ [6]。

線形要素

さらに、 x_i を中心として、隣接する区間 $[x_{i-1}, x_i], [x_i, x_{i+1}]$ 内で、それぞれ一次変化を仮定した基底関数を

$$\phi_i = \begin{cases} \psi_{i,+1} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \psi_{i,0} = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \quad (2.40)$$

とすると、 $f_i = f(x_i)$ すると、図 2.8 のように表される。

いま、 x を $[x_j, x_{j+1}]$ 内に選ぶと、

$$\begin{aligned} f &= f_j \psi_{j,0} + f_{j+1} \psi_{j+1,+1} \\ &= f_j \left(\frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} \right) + f_{j+1} \left(\frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} \right) \\ &= \frac{1}{x_{j+1} - x_j} \{ f_j x_{j+1} - f_{j+1} x_j + (f_{j+1} - f_j) x \} \end{aligned}$$

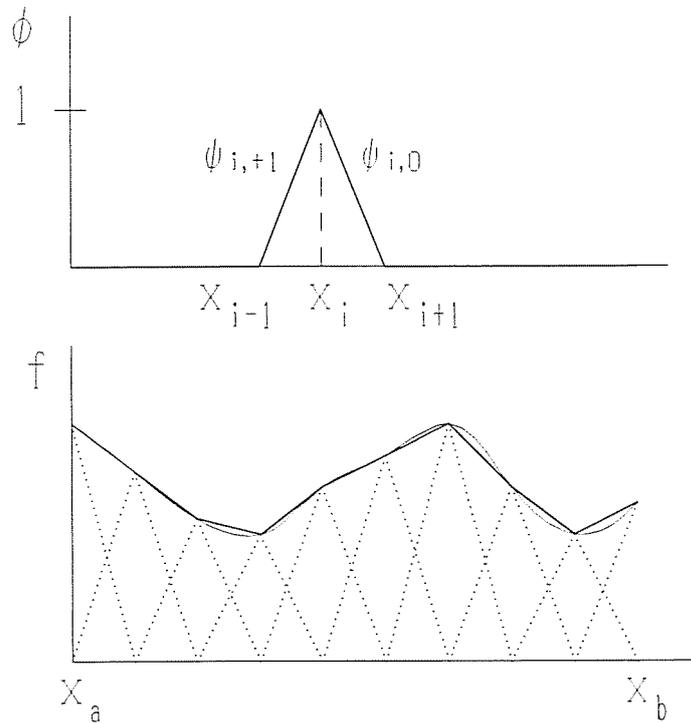


図 2.8: 線形要素の基底関数

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x_{j+1} - x_j} \{f_j(x_{j+1} - x_j) - (f_{j+1} - f_j)x_j + (f_{j+1} - f_j)x\} \\
&= f_j + \frac{f_{j+1} - f_j}{x_{j+1} - x_j} (x - x_j)
\end{aligned} \tag{2.41}$$

と表すことができ、これは関数 f の x_j 点周りのテーラー級数展開

$$f(x) = f(x_j) + f'(x_j)(x - x_j) + f''(x_j)\frac{(x - x_j)^2}{2} + \dots \tag{2.42}$$

の第二項以降を無視したものと一致する。

境界要素法では、(2.39) 式のようにステップ状に変化する ϕ_n による f の表現を、特定の区間内で一定であることから一定要素と呼び、(2.40) 式の線形変化する ϕ_n による表現を線形要素と呼んでいる。

これらの表現では有限項のテーラー級数展開を有限数の代表点周りで行うため、完備性は保証されず、真の評価すべき関数 \tilde{f} とは異なる。一定要素、線形要素のそれぞれに用いる基底関数を $\phi_n^{(0)}, \phi_n^{(1)}$ として改めて性質を考えてみる。

$$f^{(0)} = \sum_{i=1}^N \phi_i^{(0)} f_i \tag{2.43}$$

$$f^{(1)} = \sum_{i=1}^N \phi_i^{(1)} f_i \tag{2.44}$$

図 2.7, 2.8 で解るように、 $f^{(0)}$ は x'_i 点において、 $f^{(1)}$ は x_i 点において \tilde{f} に一致する。しかし、 $f^{(0)}$ は x_i 点で f が不連続になり、 $f^{(1)}$ は x_i 点で一階微分が不連続となる。より高次の $\phi_n^{(m)}$ を用いることにより、連続となる階数は増加し、当然、 \tilde{f} との誤差は減少する。

面要素

本論文では、二次元モデルを扱うため、境界積分項は線積分で表される。しかし、領域積分 ((2.27) 式右辺第二項) および波動方程式の空間境界と時間軸に対する積分項 ((2.37) 式右辺第二項) は面要素の扱いが必要となる。後者は空間一次元と時間一次元の計二次元の積分となる。この積分は空間軸と時間軸が直交しているので、先の一定、線形、二次要素をそれぞれ独立に適用すれば良い。これに対して、領域積分には若干の考慮を要する。任意の形状を有する領域の直交座標系による表現は難しく、一般に三角要素が採用される。

三角要素に対する内挿関数をテーラー展開により導く。図 2.9 のように、三角要素の二辺を u, v 軸とし、点 r_0 まわりでテーラー展開を行う。

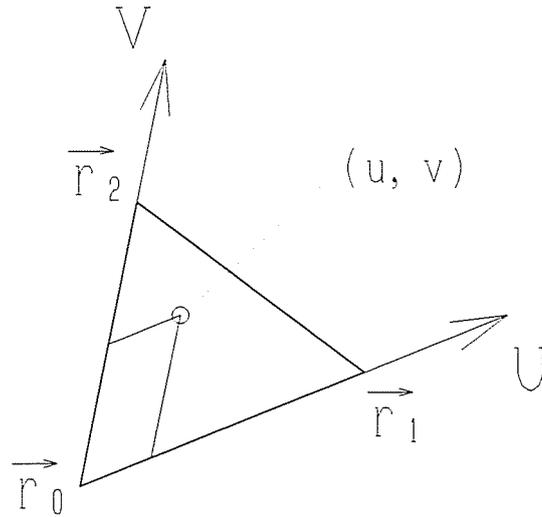


図 2.9: 三角要素

$$\begin{aligned}
 f &= f_0 + (\nabla f)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_0} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \dots \\
 &= f_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} (u - u_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{(u_0, v_0)} (v - v_0) + \dots
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

この式の第二項以降を無視した、

$$f^{(0)} = f_0 \tag{2.46}$$

が三角要素の一定要素にあたり、第四項以降を無視したものが一次(線形)要素に対応する。三角要素内の偏微分は一定とすると、

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{f_1 - f_0}{u_1 - u_0} \tag{2.47}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{f_2 - f_0}{v_2 - v_0} \tag{2.48}$$

とでき、これを用いると、

$$\begin{aligned}
 f^{(1)} &= \left(1 - \frac{f_1 - f_0}{u_1 - u_0} - \frac{f_2 - f_0}{v_2 - v_0} \right) f_0 + \frac{f_1 - f_0}{u_1 - u_0} f_1 + \frac{f_2 - f_0}{v_2 - v_0} f_2 \\
 &= \hat{\phi}_0 f_0 + \hat{\phi}_1 f_1 + \hat{\phi}_2 f_2
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

と与えられる。三角要素内で定義される一定要素、一次要素は図2.10で表現される。

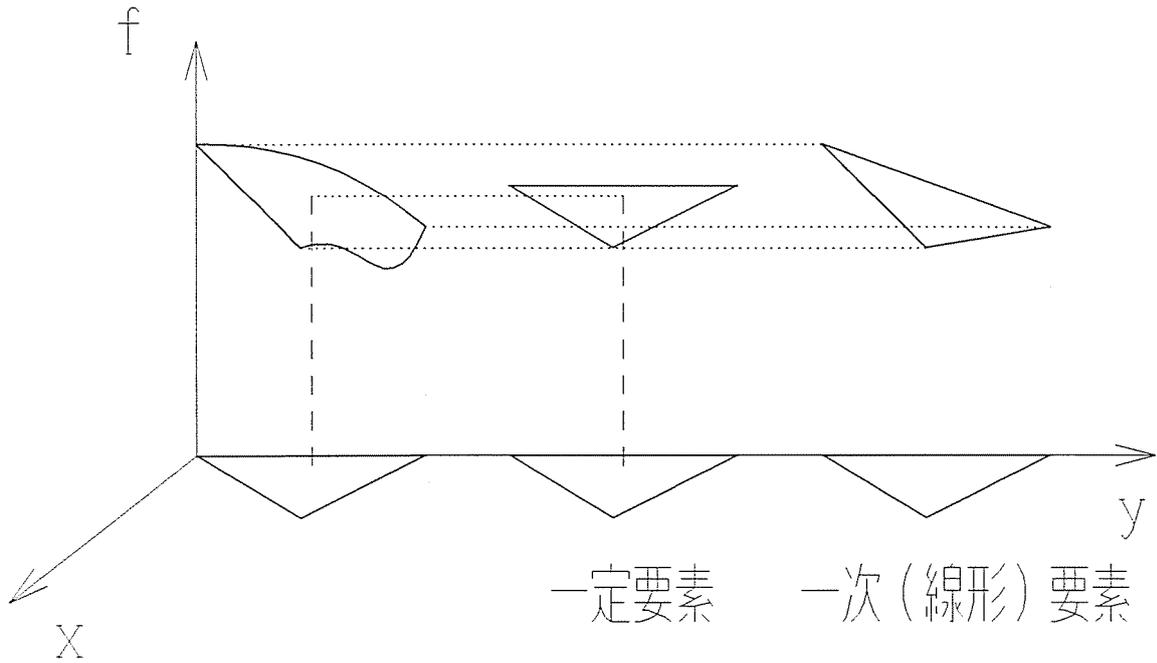


図 2.10: 三角要素内の内挿関数

2.3.2 積分方程式の離散化

前節で導いた境界積分方程式(2.27)式を、内挿関数 ϕ あるいは ψ を用いて離散化する。なお、(2.37)式については、時間軸が追加されるのみで、同様に示せるので省略する。

まず、連続境界を任意間隔の節点で離散化する。この間隔は内挿関数に何を選ぶかにより異なるが、境界上の予想される変化を再現できる寸法とする。

例えば、ヘルムホルツ方程式の場合には、波数およびその逆数である波長の概念が領域において定義できる。

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (2.50)$$

波数は領域内の座標成分に分離できる。

$$k_0^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (2.51)$$

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}, \quad k_y = \frac{2\pi}{\lambda_y}, \quad k_z = \frac{2\pi}{\lambda_z} \quad (2.52)$$

境界を x 軸に一致させ、 λ_0 と λ_x を比較する。

$$k_0^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 > k_x^2$$

$$\begin{aligned} \frac{k_x}{k_0} &= \frac{\lambda_0}{\lambda_x} < 1 \\ \lambda_x &> \lambda_0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

となり、境界上の変化は、領域内の変化である波長に比べ緩やかである。従って、波長を十分細かく表現できる節点間隔を選べば、境界上でも十分細かく表現できている。本論文では、波長の1/10程度の節点間隔を採用すれば充分である。但し、導波管のカットオフ状態のような場合には、上記の関係を満足しないので、さらに細かい分割が必要となるので注意を要する。

(2.27) 式の \mathbf{r}_0 を \mathbf{r}_i として再度記す。

$$-c_i f(\mathbf{r}_i) = \int_S \{f(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) \nabla f(\mathbf{r})\} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \{G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) v(\mathbf{r})\} dV \quad (2.54)$$

上式中の $f(\mathbf{r})$ 、 $\nabla f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}$ および $v(\mathbf{r})$ を内挿関数により線形化する。

$$f(\mathbf{r}) = \sum_j \phi_j(\mathbf{r}) f_j \quad \mathbf{r} \text{ on } S \quad (2.55)$$

$$\nabla f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \sum_j \phi_j(\mathbf{r}) (\nabla f(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n})_j = \sum_j \phi_j(\mathbf{r}) \left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_j \quad \mathbf{r} \text{ on } S \quad (2.56)$$

$$v(\mathbf{r}) = \sum_k \hat{\phi}_k(\mathbf{r}) v_k \quad \mathbf{r} \text{ in } V \quad (2.57)$$

これを用いると、(2.54) 式の右辺第一項は

$$\begin{aligned} & \sum_j \int_{S_j} \left(\phi_j(\mathbf{r}) f_j \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n} - G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) \phi_j(\mathbf{r}) \left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_j \right) dS \\ &= \sum_j \left(\int_{S_j} \phi_j(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n} dS f_j - \int_{S_j} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) \phi_j(\mathbf{r}) dS \left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_j \right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

と線形化でき、同様に、第二項の領域積分項は、

$$\sum_k \int_{V_k} \hat{\phi}_k(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) dV v_k \quad (2.59)$$

と表される。積分内をそれぞれ、

$$\int_{S_j} \phi_j(\mathbf{r}) \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n} dS = \hat{h}_{ij} \quad (2.60)$$

$$\int_{S_j} G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) \phi_j(\mathbf{r}) dS = g_{ij} \quad (2.61)$$

$$\int_{V_k} \hat{\phi}_k(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) dV = p_{ik} \quad (2.62)$$

とにおいて、さらに $f_i = u_i, (\nabla f \cdot \mathbf{n})_i = \left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_j = q_i$ とすれば (2.54) 式は

$$-c_i u_i = \sum_j (\hat{h}_{ij} u_j - g_{ij} q_j) + \sum_k p_{ik} v_k \quad (2.63)$$

となる。境界上のそれぞれの節点を \mathbf{r}_i と一致させて、これらの方程式を連立させて、行列表現すると、

$$\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v} = 0 \quad (2.64)$$

なる、代数方程式を得る。但し、

$$h_{ij} = \hat{h}_{ij} + c_i \delta_{ij} \quad (2.65)$$

である。

一般に、 \mathbf{r}_j 点における u_j, q_j の一方は境界条件として与えられ、他方は未知数であり、 \mathbf{r}_k における v_k はソース分布として既知である。また、 $\mathbf{H}, \mathbf{G}, \mathbf{P}$ はグリーン関数が既知であれば、解析的あるいは数值的に計算できる。 u_j, q_j の内未知数の変数を \mathbf{x}' とし、その係数行列を \mathbf{A}' と置き、 u_j, q_j の他方すなわち既知数を \mathbf{x} 、その係数行列を \mathbf{A} とすると、

$$\mathbf{A}'\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{P}\mathbf{v} \quad (2.66)$$

と記述できる。両辺に \mathbf{A}' の逆行列を掛けて

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}'^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}'^{-1}\mathbf{P}\mathbf{v} \quad (2.67)$$

として、境界上の解 \mathbf{u}, \mathbf{q} を決定できる。

点 \mathbf{r}_i を領域内に置いて、上で求めた u_j, q_j を (2.63) 式に代入するだけで、領域内の場 u が求められる。

$\mathbf{H}, \mathbf{G}, \mathbf{P}$ のグリーン関数 G およびその法線方向微分 $\nabla G \cdot \mathbf{n}$ の積分については、行列の非対角成分と対角成分に分けて扱う。

非対角成分は点 \mathbf{r}_i が微小積分区間 S_j に含まれていない場合の積分結果で、この積分区間では、グリーン関数およびその法線方向微分は緩やかな変化をする。また、この積分は解析的には不可能な場合が多く、ガウスの数値積分公式等 [8] を用いて数値積分を行う。

一方、対角成分は点 \mathbf{r}_i が微小積分区間 S_j に含まれている場合で、グリーン関数の変化が激しいため、数値積分では誤差を大きく含んでしまうが、幸いなことに、解析的な積分が可能である。この対角成分の積分を特異積分項と呼ぶ。

また、グリーン関数の性質から、対角成分が大きな値を有し、この積分の精度が、境界要素法の精度を決定するといっても過言ではない。この特異積分は、線形化の方法にも依存するので、ヘルムホルツ方程式については第6章で、波動方程式については第9章で説明する。

2.4 グリーン関数

解析的に場を解く場合には、境界条件を組み込んだグリーン関数を採用する [10] ことにより積分を省くことができる。つまり、(2.27),(2.37) 式中の境界積分内の G および $\nabla G \cdot \mathbf{n}$ が、境界上で0となるようなグリーン関数を採用する方法である。

しかし、任意の形状の境界値問題を解く場合には、境界条件を組み込んだグリーン関数の導出は難しく、境界要素法では境界条件を考慮しないグリーン関数、すなわち、解析空間内の一点のみに単位ソース分布を置いた自由空間のグリーン関数を考える。

但し、境界条件を全く与えないのではなく、無限遠で0となるような境界条件は容易に与えられる場合が多く、開放型問題、散乱問題等で、無限遠での積分を省くことが可能となる。

以下、二次元のポアソン方程式、ヘルムホルツ方程式および波動方程式のそれぞれに対して、自由空間におけるグリーン関数の導出を行う。

2.4.1 二次元ポアソン方程式のグリーン関数

グリーン関数の満足する方程式は、

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (2.68)$$

で与えられる。点 \mathbf{r}_i を中心とした半径 $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$ の円 (領域) で両辺を積分する。

$$\int_V \nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) dV = - \int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV \quad (2.69)$$

なお、二次元問題では、 V は領域を表し二次元であり、以下に出て来る S は V を取り囲む境界を表すので、その次元は一次元となる。上式の左辺はガウスの積分定理およびグリーン関数の等方性により

$$\int_V \nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) dV = \int_S \nabla G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^{2\pi} \frac{dG}{dr} r d\theta = 2\pi r \frac{dG}{dr} \quad (2.70)$$

となる。一方、右辺はデルタ関数の性質により

$$-\int_V \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) dV = -1 \quad (2.71)$$

となる。従って、

$$\frac{dG}{dr} = \frac{-1}{2\pi r} \quad (2.72)$$

$$G(r) = \frac{-1}{2\pi} \ln r + C \quad (2.73)$$

を得る。

上式には積分定数 C が残っている。境界要素法で開放領域問題を扱う場合には、開放領域を閉じた領域にするため、仮想的な無限遠の境界を設定する。ところが、このグリーン関数は無限遠 ($r \rightarrow \infty$) で発散するため、無限遠での積分を省くことが出来ず、別の境界条件が必要になってしまう。積分定数 C の設定は、この境界条件の設定に密接に関係する。詳細については、第4章で論ずる。

2.4.2 二次元ヘルムホルツ方程式のグリーン関数

ヘルムホルツ方程式のグリーン関数は、ポアソン方程式のように簡単な導出はできない。文献 [4] では一次元のグリーン関数を、文献 [7] では一次元から三次元のグリーン関数を、それぞれフーリエ変換と複素積分により求めている。

本論文では、上記の文献と異なる方法、すなわちフーリエ変換を用いない方法を示す。但し、二次元のグリーン関数を直接求めるのではなく、三次元のグリーン関数 G_3 を求め、それを積分する方法 [7] を採用する。

三次元のグリーン関数

ヘルムホルツ方程式のグリーン関数は

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) + k^2 G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (2.74)$$

を満足する。

この微分方程式の同次方程式の一般解 G^0 は

$$\nabla^2 G^0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) + k^2 G^0(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = 0 \quad (2.75)$$

を満足し、極座標系で等方性 ($\frac{\partial}{\partial \theta} = 0, \frac{\partial}{\partial \phi} = 0$) を考慮すると

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dG^0}{dr} \right) + k^2 G^0 = 0 \quad (2.76)$$

となる。この微分方程式は、

$$G' = G^0 r \quad (2.77)$$

なる変数変換を用いると、 G' は容易に求められる。

$$G' = Ae^{+jkr} + Be^{-jkr} \quad (2.78)$$

従って、同次方程式の一般解 G^0 は

$$G^0 = \frac{Ae^{+jkr} + Be^{-jkr}}{r} \quad (2.79)$$

となる。

一方、非同次項 $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ による、特殊積分 G_p は、非同次項とその全ての導関数の一次結合で表される。

$$G_p = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta^{(n)} \quad (2.80)$$

ここで、上付きの添え字は微分の回数を示しており、それぞれの項は

$$\begin{aligned} \delta^{(1)} &= \nabla \delta \cdot \mathbf{e}_r = \nabla \cdot \delta \mathbf{e}_r = \frac{d\delta}{dr} \\ \delta^{(2)} &= \nabla \frac{d\delta}{dr} \cdot \mathbf{e}_r = \nabla \cdot \frac{d\delta}{dr} \mathbf{e}_r = \frac{d^2\delta}{dr^2} \\ &\vdots \\ \delta^{(n)} &= \nabla \frac{d^{n-1}\delta}{dr^{n-1}} \cdot \mathbf{e}_r = \nabla \cdot \frac{d^{n-1}\delta}{dr^{n-1}} \mathbf{e}_r = \frac{d^n\delta}{dr^n} \end{aligned} \quad (2.81)$$

で表される。この G_p を (2.74) 式に代入して、 c_n を決定する。

$$\nabla^2 G_p + k^2 G_p = -\delta \quad (2.82)$$

両辺を半径 ϵ の小球で領域積分する。

$$\int_V (\nabla^2 G_p + k^2 G_p) dV = -1 \quad (2.83)$$

左辺第一項、第二項はそれぞれ

$$\begin{aligned} \int_V \nabla^2 G_p dV &= \int_S \nabla G_p \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \left(4\pi r^2 \frac{dG_p}{dr} \right)_{r=r} = 4\pi r^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta^{(n+1)} = 0 \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned}
\int_V k^2 G_p dV &= \int_V k^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \delta^{(n)} dV = \int_V k^2 \left(c_0 \delta + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \delta^{(m)} \right) dV \\
&= \int_V k^2 \left(c_0 \delta + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \nabla \cdot \delta^{(m-1)} \mathbf{e}_r dV \right) \\
&= k^2 c_0 + \int_S \sum_{m=1}^{\infty} c_m \delta^{(m-1)} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n} dS \\
&= k^2 c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(c_m 4\pi r^2 \frac{d^{(m-1)}1}{dr^{(m-1)}} \right)_{r=r} = k^2 c_0 + 4\pi \epsilon^2 c_0 = k^2 c_0
\end{aligned} \tag{2.85}$$

となる。従って、

$$c_0 = \frac{-1}{k^2} \tag{2.86}$$

を得る。 c_1 以降については任意であるが、積分すると0となり意味を持たないので、 $c_m = 0 (m = 1, \dots)$ とすると、特殊積分 G_p は

$$G_p = \frac{-1}{k^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \tag{2.87}$$

となる。

非同次方程式 ((2.74) 式) の一般解 G は、同次方程式の一般解 G^0 と、非同次方程式の特殊積分 G_p の和で表されるので、(2.79),(2.87) 式より

$$G = G^0 + G_p = \frac{Ae^{+jkr} + Be^{-jkr}}{r} + \frac{-1}{k^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \tag{2.88}$$

が得られる。

上式にはデルタ関数が入っており、このままでは扱いにくい。そこで、デルタ関数に (2.74) 式を代入すると

$$G = G^0 + \frac{1}{k^2} (\nabla^2 G + k^2 G) \tag{2.89}$$

となり、さらに整理すれば、

$$\nabla^2 G + k^2 G^0 = 0 \tag{2.90}$$

なる微分方程式が新たに導かれる。上式と (2.79) 式を比較して

$$\nabla^2 G = \nabla^2 G^0 \tag{2.91}$$

を得る。両辺を半径 r の球で領域積分して、ガウスの積分定理を用いると

$$\left(4\pi r^2 \frac{dG}{dr} \right) = \left(4\pi r^2 \frac{dG^0}{dr} \right) \tag{2.92}$$

となる。従って

$$\frac{dG}{dr} = \frac{dG^0}{dr} = A \left(\frac{+jk}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{+jkr} + B \left(\frac{-jk}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{-jkr} \quad (2.93)$$

が導かれる。さらに

$$\int \frac{1}{r} e^{+jkr} dr = \left[\frac{1}{r} \frac{e^{+jkr}}{jk} \right] + \int \frac{1}{r^2} \frac{e^{+jkr}}{jk} dr \quad (2.94)$$

を用いると、非同次方程式の一般解は

$$G = \int \frac{dG}{dr} dr = A \frac{e^{+jkr}}{r} + B \frac{e^{-jkr}}{r} + C \quad (2.95)$$

となる。

このグリーン関数は、ポアソン方程式のグリーン関数と違って、無限遠で C に収束する。そこで、グリーン関数の境界条件として、

$$\lim_{r \rightarrow \infty} G(r) = 0 \quad (2.96)$$

を与える。さらに時間変化を $e^{j\omega t}$ とした波動を考えると、 e^{+jkr} , e^{-jkr} はそれぞれ時間とともに、 r_i に向かう波と無限遠に向かう波に対応する。無限遠に向かう波のみを扱うことにすると、

$$G = B \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (2.97)$$

$$\frac{dG}{dr} = B \left(\frac{-jk}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{-jkr} \quad (2.98)$$

となる。

係数 B を決定するために、この G を再度 (2.74) 式に代入して、半径 r の球で積分すると、

$$\int_V (\nabla^2 G + k^2 G) dV = -1 \quad (2.99)$$

左辺の積分内第一項は、

$$\begin{aligned} \int_V \nabla^2 G dV &= \left(4\pi r^2 \frac{dG}{dr} \right)_{r=r} \\ &= 4\pi r^2 B \left(\frac{-jk}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{-jkr} \end{aligned} \quad (2.100)$$

となり、第二項は

$$\begin{aligned} \int_V k^2 G dV &= 4\pi k^2 \int_0^r Gr^2 dr = 4\pi k^2 B \int_0^r r e^{-jkr} dr \\ &= 4\pi k^2 B \left[r \frac{e^{-jkr}}{-jk} + \frac{e^{-jkr}}{k^2} \right]_0^r \\ &= 4\pi B \left\{ (+jkr + 1)e^{-jkr} - 1 \right\} \end{aligned} \quad (2.101)$$

となる。従って

$$-4\pi B = -1 \quad (2.102)$$

より、三次元のグリーン関数 G_3 は

$$G_3(r) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad (2.103)$$

となる。

二次元のグリーン関数

二次元のグリーン関数 G_2 は、本節の冒頭で述べたように、三次元のグリーン関数 G_3 を円筒座標表現し、 z 軸に沿ってそれを積分すれば良い。

極座標系での r は円筒座標系の ρ, z を用いて、

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (2.104)$$

と表されるので、三次元のグリーン関数は (2.103) 式より

$$G_3(r) = \frac{e^{-jk\sqrt{\rho^2+z^2}}}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}} \quad (2.105)$$

と変換できる。これを z 軸に沿って積分すると、

$$G_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} G_3 dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-jk\sqrt{\rho^2+z^2}}}{4\pi\sqrt{\rho^2+z^2}} dz \quad (2.106)$$

となる。ここで、

$$z = \rho \sinh t \quad (2.107)$$

なる変数変換を行えば

$$G_2 = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k\rho \cosh t} dt \quad (2.108)$$

となる。第二種ハンケル関数の積分表現 [7]

$$H_\nu^{(2)}(x) = -\frac{e^{j\nu\pi/2}}{j\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jx \cosh t - \nu t} dt \quad (2.109)$$

と比較すると、二次元のグリーン関数 G_2 は

$$G_2(\rho) = \frac{-j}{4} H_0^{(2)}(k\rho) \quad (2.110)$$

が導かれる。

2.4.3 二次元波動方程式のグリーン関数

波動方程式のグリーン関数は、波動方程式をフーリエ変換によりヘルムホルツ方程式に変換し、その解を逆変換する事により導出できる。但し、二次元の解の逆変換は容易でないので、ヘルムホルツ方程式のグリーン関数の導出と同様に、まず三次元の解を求めそれを積分して二次元の解を求める。

波動方程式のフーリエ変換

波動方程式の基本解は、

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_i, t_i) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_i, t_i)}{\partial t^2} + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \delta(t - t_i) = 0 \quad (2.111)$$

を満足する。簡単にするために、 (\mathbf{r}_i, t_i) を原点とする。

一方、グリーン関数 G の時間に関するフーリエ積分を \hat{G} とするとき、フーリエ変換および逆変換は、

$$\hat{G}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\mathbf{r}, t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.112)$$

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}(\mathbf{r}, \omega) e^{+j\omega t} d\omega \quad (2.113)$$

と、定義できる。

(2.111) 式の両辺をフーリエ変換する。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\nabla^2 G - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \delta(\mathbf{r}) \delta(t) \right) e^{-j\omega t} dt = 0 \quad (2.114)$$

第一項は、定義より

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \nabla^2 G e^{-j\omega t} dt = \nabla^2 \int_{-\infty}^{+\infty} G e^{-j\omega t} dt = \nabla^2 \hat{G} \quad (2.115)$$

と表される。第二項の積分は、部分積分を二回繰り返すことにより

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} e^{-j\omega t} dt = \left[\left(\frac{\partial G}{\partial t} + j\omega G \right) e^{-j\omega t} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \omega^2 \int_{-\infty}^{+\infty} G e^{-j\omega t} dt \quad (2.116)$$

となる。時間に関する境界条件として、 $t = \pm\infty$ でグリーン関数とその一階微分を 0 とすれば、境界項は消え、上式は

$$-\omega^2 \int_{-\infty}^{+\infty} G e^{-j\omega t} dt = -\omega^2 \hat{G} \quad (2.117)$$

となる。従って、(2.114) 式は

$$\nabla^2 \hat{G} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \hat{G} + \delta(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.118)$$

のヘルムホルツ方程式に変形できる。

三次元のグリーン関数

前節で求めた三次元ヘルムホルツ方程式のグリーン関数 ((2.103) 式) において $k = \omega/c$ とすると、(2.118) 式の解は

$$\hat{G}(r, \omega) = \frac{e^{-j\frac{\omega}{c}r}}{4\pi r} \quad (2.119)$$

となる。これをフーリエ逆変換すると、三次元のグリーン関数 G_3 が

$$\begin{aligned} G_3(r, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\frac{\omega}{c}r}}{4\pi r} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega(t-\frac{r}{c})} d\omega = \frac{1}{4\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \end{aligned} \quad (2.120)$$

と導かれる。

二次元のグリーン関数

(2.120) 式を円筒座標表現して、 z 軸に沿って積分する。

$$\begin{aligned} G_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}} \delta\left(t - \frac{\sqrt{\rho^2 + z^2}}{c}\right) dz \\ &= 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{4\pi\sqrt{\rho^2 + z^2}} \delta\left(t - \frac{\sqrt{\rho^2 + z^2}}{c}\right) dz \end{aligned} \quad (2.121)$$

ここで、 z を r に変数変換する。

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \quad (2.122)$$

$$dz = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} dr \quad (2.123)$$

を用いて、

$$\begin{aligned}
 G_2(\rho, t) &= 2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \frac{1}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} dr \\
 &= \frac{c}{2\pi} \int_{\rho}^{\infty} \delta(ct - r) \frac{1}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} dr \\
 &= \frac{c}{2\pi \sqrt{c^2 t^2 - \rho^2}} U(ct - \rho)
 \end{aligned} \tag{2.124}$$

が導かれる。ここで、 U はヘヴィサイドの階段関数である。

波動方程式のグリーン関数の物理的な意味を考えてみる。

三次元の場合、時刻0に原点($r = 0$)から放出された場は、時刻 t には、半径 $r = ct$ の球面上に到達し、その大きさは、 $1/r$ のオーダーで減衰する。この時、この球面以外の点では0となる。この様子は、大きさを別とすれば、粒子の運動と等価である。つまり、速度 c で x 軸方向に移動する粒子は、時刻 t には $x = ct$ に達する。

それに対して、二次元の場合には、波の先頭は $\rho = ct$ になるものの、その円筒よ

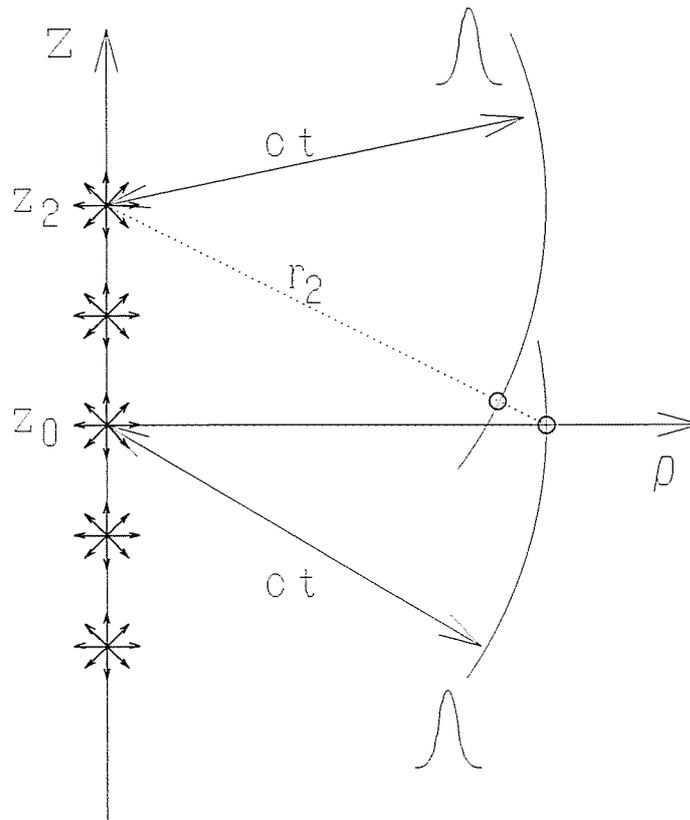


図 2.11: 二次元波動方程式のグリーン関数

りも内側の全領域にその解が存在する。これは、時刻0で z 軸上で一斉に放出された場が、遅れて点 r に到達する事を意味する。図2.11にこの様子を示す。ソース点を z 軸 $(0, 0, z)$ 上にとり、観測点を $(\rho, 0, 0)$ に置き、 $t = 0$ でインパルスが同時に発生したと考える。このインパルスは、三次元空間を z 軸上の各ソース点を中心とした球状に広がっていく。観測点に最も早到達するものは、 $(0, 0, 0)$ から放出されたインパルスで、その後、時間とともに $z = z_{\pm 1}, z = z_{\pm 2}$ から放出されたインパルスが、次々と到達する。最初のインパルスが到達した瞬間には、 $\rho < ct$ の内側の至るところにインパルスが存在する。

境界要素法は、2.1節で述べたようにグリーンの積分公式により、解析次数を一つ落とすことが可能である。波動方程式の三次元問題は時間軸も考慮すると、四次元問題となるが、この性質と、グリーン関数にデルタ関数が含まれることで、計二次元低い解析次数で解くことが可能となる。

それに対して、本論文で扱う二次元波動方程式は、時間軸を含めた三次元から、グリーンの公式から下げられる次元のみで、計二次元である。

第3章

解析モデル

本論文では共振器法によるプラズマの計測に対する、境界要素法による解析手法の問題点の克服を目的としている。

この章では、解析対象であるプラズマと、共振器形状、境界条件について記述する。

3.1 プラズマ密度の計測法

プラズマ密度の測定を行う方法にはプローブを用いる方法と、電磁波(光を含む)を利用する方法がある [13]。プローブ法は、プラズマ中に直接プローブを挿入し、プラズマとプローブの電位差により電流を得る方法であるが、温度および密度が低い状態の測定に限定される。また、プラズマに対する擾乱も大きい。一方、電磁波を用いる方法は、外部からプラズマに電磁波を入射し、その反射波あるいは透過波を測定する方法であり、大電力の電磁波を入射しない限りプラズマに擾乱を与えることは無い。

プラズマと電磁波の相互作用 [15] には、屈折、損失、分散、共鳴、異方性、非線形等の種々の現象が存在する。プラズマの密度計測には、上記の内、屈折を利用する。大別すると、透過法と、反射法、共振器法に分類できる [14,15]。損失を考慮しないプラズマに対する正常波モードの屈折率 κ は、電子密度を n_e 、質量を m_e とすると、

$$\kappa = \sqrt{\frac{\epsilon_p}{\epsilon_0}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} \quad (3.1)$$

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e} \quad (3.2)$$

で、与えられる。電磁波の周波数を、高周波から低くしていくと、 $\omega = \omega_{pe}$ で、 $\kappa = 0$ となり、電磁波は伝搬できなくなる。この状態をカットオフと呼ぶ。

透過法はカットオフ周波数より高周波の電磁波(光)を用いる。その代表的な方法が干渉法である。プラズマを通り抜ける透過波は、参照波に比べ、 $\Delta\Phi$ の位相変化を受ける。この位相変化は光路に沿った屈折率の積分として

$$\Delta\Phi = \int \kappa k_0 dr \quad (3.3)$$

で与えられる。透過光を参照光と干渉させれば、出力はプラズマが無いときに比べ、 $\cos \Delta\Phi$ の出力の低下が起こる。

しかし、出力が $\Delta\Phi$ の周期関数となるため、密度と干渉出力を一対一に対応させることはできない。プラズマの生成消滅過程を、計測した場合の密度の増加から減少に転じる時刻、あるいはその逆の時刻を決定するのは容易ではない。

これを、避けるために参照光と透過光の周波数を、 $\Delta\omega$ ずらしておく方法等 [14, 17, 18] が採用されている。

反射法は、カットオフを利用した方法である。周波数が、 ω_{pe} より低周波の波の屈折率は純虚数となり、入射した波は減衰する。減衰した波のエネルギーは、プラズマに与えられるわけではなく、逆向きに反射される。これを応用した例として、密度分布を有する不均質なプラズマに対して、あらゆる周波数成分を有する電磁波を入射し、反射波が戻ってくるまでの時間を測定することにより密度分布を求める方法 [19, 20] が報告されている。

本論文では、共振器法を用いたプラズマ密度計測のシミュレーションを行う。共振器の共振周波数は鏡面間の距離によって決定される。つまり、鏡面間の位相差が $n\pi$ となる周波数が共振周波数となる。共振器中にプラズマを挿入すると、プラズマにより、波長の伸長が発生し、そのため鏡面間の位相差が短くなり、共振周波数が高周波側にシフトする。また、プラズマ内の粒子同志の衝突がある場合には、電磁波の損失が発生し、共振の鋭さを示す Q 値の低下につながる。この共振周波数の変化と Q 値の変化を測定すれば、プラズマの密度と衝突周波数の両方が同時に測定できる。

3.2 プラズマの誘電率とヘルムホルツ方程式

本節ではマクスウェル方程式と電子の運動方程式から、誘電率テンソルおよびヘルムホルツ方程式を導く。

電磁界の満足するマクスウェル方程式は以下の式で与えられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.7)$$

ここで、電束密度 \mathbf{D} 、磁束密度 \mathbf{B} はそれぞれ、

$$\mathbf{D} = \overleftarrow{\epsilon} \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \mathbf{J}_P \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{J}_M \quad (3.11)$$

と表される。ここで、 $\mathbf{J}_P, \mathbf{J}_M$ はそれぞれ、分極電流、磁化電流を表している。

プラズマ中は、巨視的にみると電気的中性であり、また真電流 \mathbf{J} も存在しない。さらに、プラズマの反磁性は無視でき非磁性体と近似できるものとする。

$$\rho = 0 \quad (3.12)$$

$$\mathbf{J} = 0 \quad (3.13)$$

$$\mathbf{M} = 0 \quad (3.14)$$

分極電流は、電子とイオンの移動によって定義でき、さらに、電子がイオンより高速で移動することを考慮すると

$$\mathbf{J}_P = n_i e \mathbf{v}_i - n_e e \mathbf{v}_e \simeq -n_e e \mathbf{v}_e \quad (3.15)$$

と与えられ、電子の速度が決まれば求められる。

電子は、電界、磁界および衝突による外力を受けるので、運動方程式は、

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) - m_e \nu_e \mathbf{v}_e \quad (3.16)$$

となる。ここで、 ν_e は電子のイオンに対する衝突周波数である。上式右辺の第二項中の磁界による力と、第一項の電界による力を比較してみる。磁界を外部磁界 \mathbf{B}_0 と電磁波の磁界 \mathbf{B}_1 と分けて、

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \quad (3.17)$$

と表す。

まず、 B_1 による力を考える。単純なモデルとして、平面波を考えると、電界強度 E と磁界強度 H の間にはインピーダンス ζ が次式の様に定義できる。

$$\zeta = \frac{|E|}{|H_1|} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (3.18)$$

磁束密度 B_1 の絶対値を電界強度 E で表すと

$$|B_1| = |\mu H_1| = \left| \mu \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E \right| = |\sqrt{\epsilon \mu} E| = \left| \frac{1}{v_p} E \right| \quad (3.19)$$

と表される。ここで、 v_p は電磁波の位相速度である。

上式を用いると、(3.16) 式の右辺第一項および第二項中の B_1 による項は

$$|F_E| = |qE| \quad (3.20)$$

$$|F_H| = |qv_e||B_1| = \left| q \frac{v_e}{v_p} E \right| = \left| \frac{v_e}{v_p} F_E \right| \quad (3.21)$$

となる。プラズマ中の電磁波の位相速度は v_p 、カットオフのごく近傍の周波数を除けば、ほぼ光速と考えられる。一方、電子の速度は高温のトカマクプラズマでも $10keV$ 程度なので、光速よりもはるかに小さい。よって、

$$v_e \ll v_p \quad (3.22)$$

となり、電磁波の磁場 B_1 による力は考慮する必要が無くなる。したがって、電子の運動方程式は

$$m_e \frac{dv_e}{dt} = -e(E + v_e \times B_0) - m_e \nu_e v_e \quad (3.23)$$

となる。

両辺に $\frac{n_e(-e)}{m_e}$ を掛けて電流と電界の関係を導く。

$$\frac{dJ_P}{dt} = \omega_{pe}^2 \epsilon_0 E - \Omega_e a_z \times J_P + \nu_e J_P \quad (3.24)$$

ここで、プラズマ周波数 ω_{pe} およびサイクロトロン周波数を Ω_e として次式で与え、また外部磁界は z 方向を向くものとした。

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e} \quad (3.25)$$

$$\Omega_e = \frac{e B_0}{m_e} \quad (3.26)$$

さらに、ベクトルの回転オペレータを

$$\mathbf{a}_z \times = (\mathbf{a}_y \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_x \mathbf{a}_y) \cdot \quad (3.27)$$

で表すと、

$$\overleftrightarrow{\Omega}_e = \Omega_e (\mathbf{a}_y \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_x \mathbf{a}_y) \quad (3.28)$$

となり、これを用いると(3.24)式は

$$\frac{d\mathbf{J}_P}{dt} = \omega_{pe}^2 \epsilon_0 \mathbf{E} - \overleftrightarrow{\Omega}_e \cdot \mathbf{J}_P + \nu_e \mathbf{J}_P \quad (3.29)$$

を得る。ここで、 \mathbf{J}_P の時間全微分は

$$\frac{d\mathbf{J}_P}{dt} = -en_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -en_e \left(\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + \mathbf{v}_e \cdot \nabla \mathbf{v}_e \right) \quad (3.30)$$

と表すことが出来、上式の右辺第二項は微小量 \mathbf{v}_e の二次の項なので無視すると、

$$\frac{d\mathbf{J}_P}{dt} = \frac{\partial \mathbf{J}_P}{\partial t} \quad (3.31)$$

となり全微分と偏微分は一致する。時間全微分は時間偏微分の $j\omega$ に置き換えることが出来る。

$$\omega_{pe}^2 \epsilon_0 \mathbf{E} = \left\{ j(\omega + j\nu_e) \overleftrightarrow{\mathbf{1}} + \overleftrightarrow{\Omega}_e \right\} \cdot \mathbf{J}_P \quad (3.32)$$

導電率テンソル $\overleftrightarrow{\sigma}$ が

$$\mathbf{J}_P = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{E} \quad (3.33)$$

で定義できるとき、(3.32)式より、

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\sigma} &= \omega_{pe}^2 \epsilon_0 \left[j(\omega + j\nu_e) \overleftrightarrow{\mathbf{1}} + \overleftrightarrow{\Omega}_e \right]^{-1} = \omega_{pe}^2 \epsilon_0 \begin{pmatrix} j\hat{\omega} & \Omega_e & 0 \\ -\Omega_e & j\hat{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & j\hat{\omega} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{-j\omega_{pe}^2 \epsilon_0}{\hat{\omega}(\hat{\omega}^2 - \Omega_e^2)} \begin{pmatrix} +\hat{\omega}^2 & +j\hat{\omega}\Omega_e & 0 \\ -j\hat{\omega}\Omega_e & +\hat{\omega}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\omega}^2 - \Omega_e^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.34)$$

となる。ここで $\hat{\omega}$ は複素周波数を表し、

$$\hat{\omega} = \omega + j\nu_e \quad (3.35)$$

とした。この導電率テンソル $\overleftrightarrow{\sigma}$ と等価な誘電率テンソル $\overleftrightarrow{\epsilon}$ は

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \epsilon_0 \overleftrightarrow{\mathbf{1}} + \frac{1}{j\omega} \overleftrightarrow{\sigma} \quad (3.36)$$

で与えられる。(3.34)式より

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} S & +jD & 0 \\ -jD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

$$S = \frac{1}{2}(R + L) \quad (3.38)$$

$$D = \frac{1}{2}(R - L) \quad (3.39)$$

$$R = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\hat{\omega} - \Omega_e)} \quad (3.40)$$

$$L = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\hat{\omega} + \Omega_e)} \quad (3.41)$$

$$P = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega\hat{\omega}} \quad (3.42)$$

が導かれる。なお、磁界が存在しない場合には当然のことであるが、 $S = P, D = 0$ となり、異方性は無くなる。

(3.6)式の両辺の回転をとり、同様に \mathbf{E} の時間偏微分を $j\omega$ とし、 $\mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{P}, \mathbf{J}_P$ を順次消去すると

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = \mu_0 \left(\epsilon_0 \omega^2 \mathbf{E} - \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \right) = \mu_0 \left(\epsilon_0 \omega^2 \mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{J}_P}{\partial t} \right) \\ &= \mu_0 \left(\epsilon_0 \omega^2 \overleftrightarrow{\mathbf{1}} - j\omega \overleftrightarrow{\sigma} \right) \cdot \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \frac{\overleftrightarrow{\epsilon}}{\epsilon_0} \cdot \mathbf{E} \end{aligned} \quad (3.43)$$

となり、ベクトルヘルムホルツ方程式が導かれる。

この方程式の、 x, y 成分は誘電率テンソルの非対角項の影響でお互いに結合されているが、外部磁界の方向(z 成分)は z 成分のみで独立な方程式を形成している。外部磁界の存在しない問題、または外部磁界と同じ方向に電界変化を持つ電磁波(正常波)を考える場合には、

$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = 0 \quad (3.44)$$

なる、スカラーヘルムホルツ方程式を得る。ここで、 k は波数を表し、 $\omega \gg \nu_e$ とすると

$$k^2 = \epsilon_0 \mu_0 \left(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - j\omega_{pe}^2 \frac{\nu_e}{\omega} \right) \quad (3.45)$$

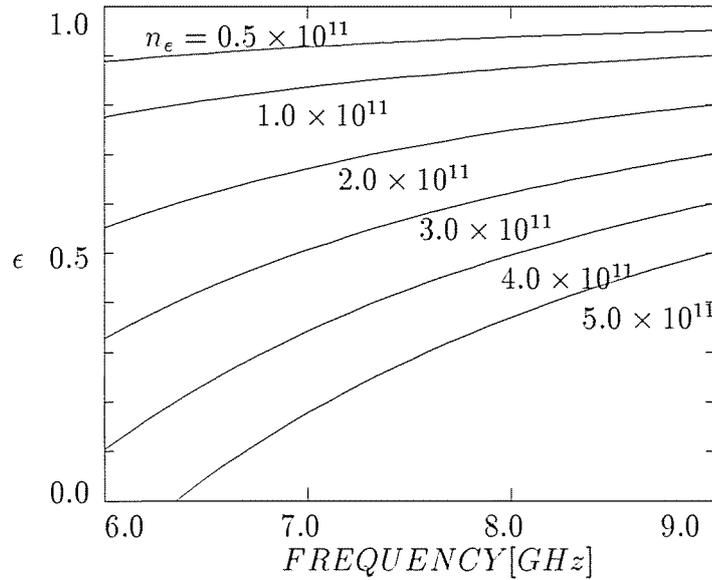


図 3.1: プラズマの分散関係

で、与えられる。

正常波の場合には異方性は無くなるものの依然分散性は残っている。無衝突プラズマ ($\nu_e = 0$) の場合には、 ω_{pe} がカットオフ周波数となり、それより低周波の電磁波は伝搬できなくなる。解析対象のプラズマ密度を $0 \sim 5 \times 10^{11} [\#/cm^3]$ とするときの、分散関係を図 3.1 に示す。

衝突の影響を考慮するために、複素誘電率を導入する。

$$k^2 = \epsilon k_0^2 \quad (3.46)$$

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' \quad (3.47)$$

$$\epsilon' = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (3.48)$$

$$\epsilon'' = \frac{\omega_{pe}^2 \nu_e}{\omega^2 \omega} \quad (3.49)$$

と表される。但し、上式の ϵ は全て比誘電率である。衝突項は、誘電率の虚数部に現れ、損失項として評価できる。

この、複素誘電率を用いて、平面波について考える。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{j(\omega t - kr)} \quad (3.50)$$

上式の波数 k は

$$k = k' - jk'' \simeq \sqrt{\epsilon'} - j \frac{\epsilon''}{2\sqrt{\epsilon'}} \quad (3.51)$$

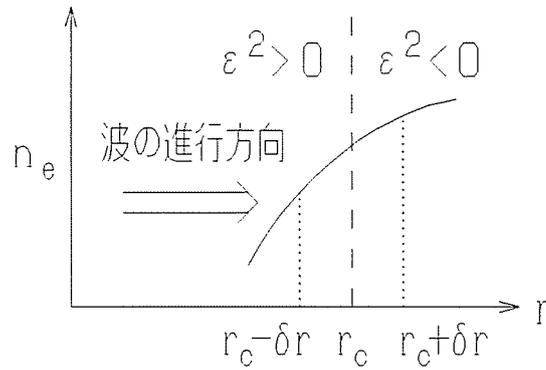


図 3.2: カットオフ状態の誘電率

となり、この複素波数を考慮すると、

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \epsilon^{j(\omega t - k' r)} e^{-k'' r} \quad (3.52)$$

と表される。これは、衝突周波数が大きくなるほど、減衰が大きくなることを示している。無衝突プラズマ中を電磁波が伝搬するとき、電磁波のエネルギーを電子に運動エネルギーとして与え、電子が移動させられる。その電子は、電磁波と逆相になったとき、運動エネルギーは電磁波にポテンシャルエネルギーとして戻される。この過程を繰り返しながら、電磁波は減衰せずに伝搬する。この時、電子は電界に対して位相が遅れ、これが波長の伸長につながる。周波数が、十分高いときには、電子が移動する前に逆相になるため、エネルギーの授受はほとんど行われず、波長の伸長が起こらず、真空中の伝搬と大きな違いは無くなる。

衝突がある場合には、電子が加速される途中で、電子はイオンおよび中性粒子と衝突し、運動エネルギーの一部を熱エネルギーとしてイオンと中性粒子に与えてしまう。その結果、逆相になっても、電子から戻されるエネルギーは少ないため、電磁波は減衰してしまう。

カットオフ以下の電磁波の場合は減衰するが、エネルギーを損失しているわけではない。図 3.2 のように、 r が正の方向に密度が緩やかに増加している場合に、電磁波が正の方向に入射するモデルを考える。 $r = r_c$ でカットオフとなり、 $r > r_c$ では k は純虚数、 $r < r_c$ では k は実数となる。 $r = r_c$ での反射係数 Γ は、

$$\Gamma = \lim_{\delta r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\epsilon(r_c - \delta r)} - \sqrt{\epsilon(r_c + \delta r)}}{\sqrt{\epsilon(r_c - \delta r)} + \sqrt{\epsilon(r_c + \delta r)}} \quad (3.53)$$

で与えられる。 $r \pm \delta r$ における、密度を $n_c \pm \delta n_e$ とするとき、

$$\sqrt{\epsilon(r_c - \delta r)} = \sqrt{1 - \frac{(n_c - \delta n_e)}{n_c}} = \sqrt{\frac{\delta n_e}{n_c}} \quad (3.54)$$

$$\sqrt{\epsilon(r_c + \delta r)} = \sqrt{1 - \frac{(n_c + \delta n_e)}{n_c}} = j \sqrt{\frac{\delta n_e}{n_c}} \quad (3.55)$$

と与えられるので、反射係数は

$$\Gamma = \frac{1-j}{1+j} = -j, \quad |\Gamma| = 1 \quad (3.56)$$

となる。この結果から、カットオフでは、全反射が発生することが解る。つまり、電磁波のエネルギーは、進行方向を変えるのみで、電子に与えられるわけではない。

3.3 ファブリ・ペロー共振器の特徴

ファブリ・ペロー共振器(以下FPRと略す)は、ファブリとペローにより干渉計として考案された。それは、二枚の平面ガラスを対向させ、内面に光線の一部のみを透過させるようにメッキしたもので、高い分解能を有する。現在FPRはレーザ発振用、あるいは高調波発生用の共振器として広く用いられている。なお、ガラスの鏡面を金属板に置き換えると、電磁波に対する共振器と考えることができる。

FPRの大きな特徴として次の2つが挙げられる。一つは開放型共振器であること、もう一つは高いQ値を有することである。開放型共振器の利点は物質の出し入れが容易であり、出し入れによる共振器の形状や大きさの変化は起こらないことである。一方Q値が高いということは共振特性が鋭く、共振器中の位相変化を敏感に検出することができる。以上の特徴から、FPRを精度の必要な誘電率測定やプラズマの密度測定に対する応用 [21-24] が提案されている。FPRのような開放型共振器の損失には、鏡面周辺部における回折損失、鏡面での熱損失あるいは透過、及び媒質中での誘電体損失などが挙げられる。ミリ波、マイクロ波帯での電磁波の場合、金属鏡面での透過は少なく、抵抗も小さいので、鏡面による回折損失が主になる。この回折損失は平行平板反射鏡を対向させた場合よりも曲面鏡の方が遥かに小さく、特に両鏡面の焦点が一致する共焦点型共振器で最小になることが知られている。鏡面に曲率を持たせた共振器はさらにQ値が高くなり、精度の高い測定の他に加熱器としても有効になる。

二次元ファブリ・ペロー共振器

FPRのうちで最もQ値が大きいのはおわん状の回転放物体を二つ合わせたFPRであるが、単純化するために奥行き方向(z 方向)に無限長の二次元FPRを考える。核融合の閉じ込め容器の主流にトカマク、ヘリオトロンなどのトーラス状のものがあるが、炉壁を鏡面とみなして巨視的にみると三次元FPRよりも二次元FPRの方が妥当であり、プラズマ計測や加熱目的には適したモデルと考えられる。

二次元FPRでQ値の最も大きいものは共焦点型放物筒FPRである。光の伝搬軸を x 軸上にとり、放物線を、

$$x = py^2 + q \quad (3.57)$$

とするとき、その焦点座標は、次のように与えられる。

$$x = \frac{1}{4p} + q, \quad y = 0 \quad (3.58)$$

二枚の鏡面を b の間隔で配置し、両鏡面の焦点を原点に選ぶと、

$$x = \pm \left(\frac{1}{2b}y^2 - \frac{b}{2} \right) \quad (3.59)$$

となる。

FPRの両鏡面間で定在波を立たせた場合、 x 軸上あるいは x 軸と平行に数列の山が幾つかできる。 x 軸上にできる定在波を基本モード、その他を高次モードと呼ぶ。一般に各モードに対する共振周波数は異なるがこれらが同一周波数で共振する状態をモードの縮退と呼んでいる。共焦点FPRではこのモード縮退が起こり、FPR内に誘電体やプラズマをいれることによって縮退が解けることも知られている。

本論文では楕円筒型FPRを選んでいるが、この理由として、既にE-LINE表示法で理論的に解かれている[35]こと、基本モードに関しては共焦点型と同様に高いQ値が得られること、さらに媒質の有無に関わらず縮退が解けているため、各モードの変化を比較しやすいこと、等が挙げられる。

楕円は、

$$\frac{1}{r^2}x^2 + \frac{1}{s^2}y^2 = 1 \quad (3.60)$$

と与えられる。Q値を高くするために、基本モードが共焦点型になるよう条件を選ぶ。上式は、 $y \sim 0$ では

$$x = \mp r \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}y^2} \simeq \mp r \left(1 - \frac{1}{2s^2}y^2 \right) = \pm \left(\frac{r}{2s^2}y^2 - r \right) \quad (3.61)$$

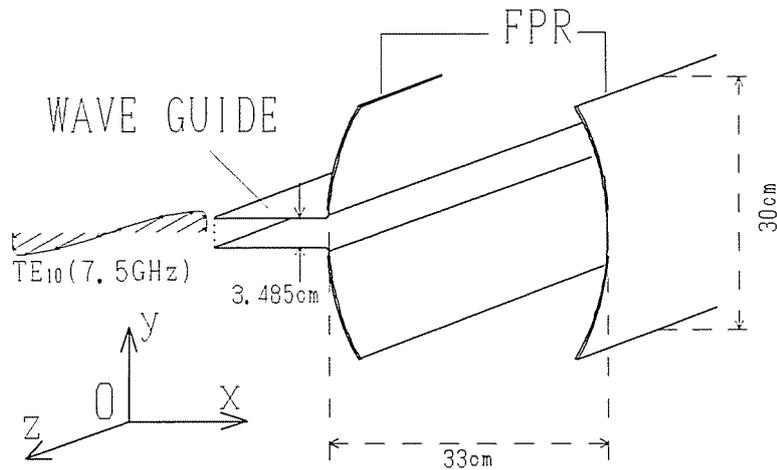


図 3.3: 導波管を結合した二次元 FPR

となる。(3.59) 式と比較して、

$$r = \frac{b}{2}, \quad s = \frac{b}{\sqrt{2}} \quad (3.62)$$

が求められ、基本モードが共焦点となる楕円筒共振器は

$$\frac{4}{b^2}x^2 + \frac{2}{b^2}y^2 = 1 \quad (3.63)$$

の曲面上に鏡面をとる。

FPR の鏡面は完全導体と仮定し、図 3.3 のように一方の鏡面の中央に穴を開け完全導体の導波管を結合する。導波管の他端から E_z によって TE_{10} 波で励振する。この共振器の特性については、第 5 章で論ずる。

なお、このモデルのように E_z のみを考える場合、内部の媒質が異方性媒質でなければ、 z 軸方向に無限長をとる必要はなく、有限長にしてその断面に金属板を張ることで代用できるので、比較実験を行うことも可能である。

3.4 境界条件

(3.44) 式で導出した、電界のヘルムホルツ方程式に対する境界条件は、境界上での電界、あるいは境界上における電界の法線方向偏微分(磁界)、あるいはそれらの一次結合で与えられる。本論文で採用している境界条件の内、共通なものについて述べる。

3.4.1 FPR 鏡面の境界条件

FPR 鏡面を完全導体と仮定する。電界を鏡面に対して、垂直成分 E_n と接線成分 E_t, E_z とに分けて考える。完全導体上では、無限大の導電率を有する。その結果、接線成分は 0 となる。詳細は損失壁に対する境界条件と共に 5.3.1 節にて導出している。

$$E_z = 0 \quad (3.64)$$

3.4.2 プラズマ領域と自由空間の界面における境界条件

プラズマを誘電体とみなして、境界条件を導出する。二つの媒質が接する境界上の点では、それぞれの媒質に対して、 $E_z, \frac{\partial E_z}{\partial n}$ が変数であり、合計四変数となる。また、それぞれの領域に対する独立な積分方程式が、計二つ導かれる。従って、この問題が解けるためには、独立な境界条件が二つ必要である。

図 3.4(a) の積分路に沿って、ファラデーの法則を適用する。

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int j\omega \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} dS \quad (3.65)$$

左辺の積分路中の \mathbf{n} の成分および右辺の面積分は、 \mathbf{n} 方向の長さを 0 に近づけるこ

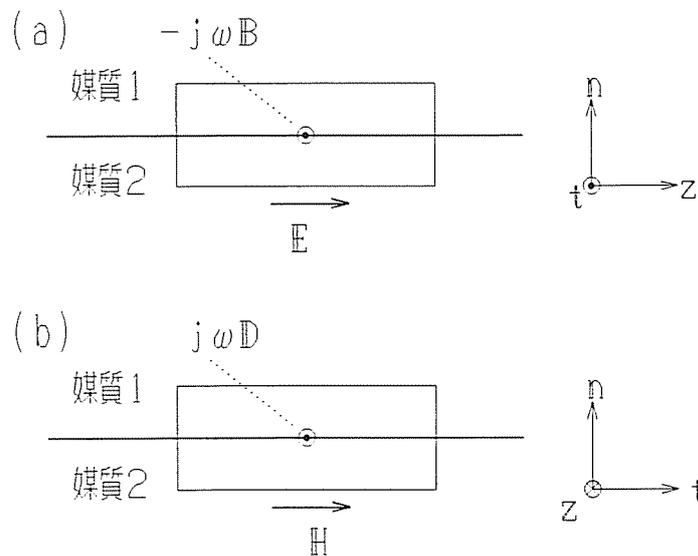


図 3.4: 二媒質の境界における積分路

とにより0となる。従って、

$$E_{z_1} - E_{z_2} = 0 \quad (3.66)$$

となる。

同様に、図3.4(b)を考えて、アンペールの法則に対して、積分を行う。

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int j\omega \mathbf{D} \cdot \mathbf{z} dS \quad (3.67)$$

その結果、

$$H_{t_1} - H_{t_2} = 0 \quad (3.68)$$

が得られる。ファラデーの法則の t 成分

$$(\nabla \times \mathbf{E})_t = -j\omega\mu H_t \quad (3.69)$$

を、 n, t, z なる右手系で求めると、

$$\frac{\partial E_n}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial n} = -j\omega\mu H_t \quad (3.70)$$

となり、さらに $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ とおけば

$$H_t = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z}{\partial n} \quad (3.71)$$

が得られる。従って、もう一つの境界条件として、

$$\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial n} \right)_1 - \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial n} \right)_2 = 0 \quad (3.72)$$

が得られる。 n を媒質の外向き法線方向にとれば、

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E_{z_1}}{\partial n_1} + \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial E_{z_2}}{\partial n_2} = 0 \quad (3.73)$$

と表される。自由空間の透磁率とプラズマの透磁率が等しい場合には、

$$\frac{\partial E_{z_1}}{\partial n_1} + \frac{\partial E_{z_2}}{\partial n_2} = 0 \quad (3.74)$$

を得る。

3.4.3 導波管の入射条件

導波管内で、 TE_{10} モード以外の高次モードがカットオフ状態の周波数を考える。導波管とFPR結合部から数波長離れた点では、高次モードは十分減衰しており、 TE_{10} モードが形成されているとする。

この時、入射面での電界は入射波と反射波の合成として与えられる。

$$E_z = E_z^{in} + E_z^{ref} \quad (3.75)$$

導波管の幅を、 h とすれば各々は

$$E_z^{in} \propto \cos\left(\frac{\pi y}{h}\right) e^{j(\omega t - \beta x)} \quad (3.76)$$

$$E_z^{ref} \propto \cos\left(\frac{\pi y}{h}\right) e^{j(\omega t + \beta x)} \quad (3.77)$$

と与えられる。ここで、 β は x 軸に対する伝搬定数で

$$\beta^2 = k_0^2 - \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 \quad (3.78)$$

を満足する。

法線方向を $-x$ 方向にとると、法線方向微分は

$$\frac{\partial E_z}{\partial n} = -\frac{\partial E_z}{\partial x} = j\beta(E_z^{in} - E_z^{ref}) \quad (3.79)$$

と表される。上式と、(3.75)式から、 E_z^{ref} を消去すると、入射条件として

$$j\beta E_z + \frac{\partial E_z}{\partial n} = 2j\beta E_z^{in} \quad (3.80)$$

が導かれる。ここでは、既知数は E_z^{in} のみで、 E_z 、 $\frac{\partial E_z}{\partial n}$ は共に変数となる。但し、上記の入射条件と積分方程式の二本の方程式が与えられるので、この問題は解析可能となる。

3.4.4 放射条件

境界要素法では、グリーン積分公式を使うため、解析領域は閉じている必要がある。しかし、グリーン関数およびその法線方向微分が、無限遠で収束する場合には、無限遠に仮想的な境界をおくことにより、閉じた空間を形成できる。ヘルムホルツ方程式は、この場合に当てはまるので、あえて領域を閉じるための放射条件を必要としない。但し、厳密には注意を要する点もある。これについては第4章で論ずる。

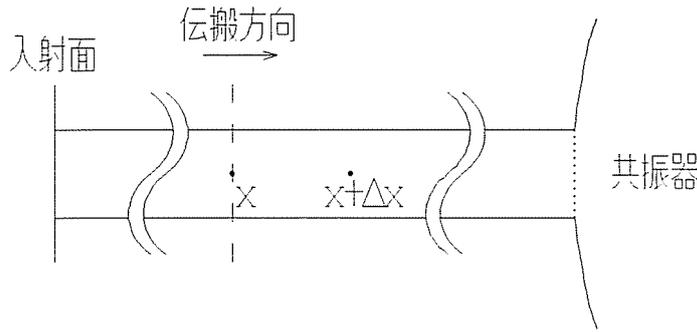


図 3.5: 反射係数計算のための内点の配置

3.5 反射係数の導出

本論文では境界要素法解析の結果から、反射係数を求め、手法の妥当性を評価する。そこで、反射係数の導出法についても本節で述べることにする。

境界要素法では、まず境界上の全ての節点に対する $E_z, \frac{\partial E_z}{\partial n}$ が求められる。この E_z を (3.75) 式に代入すれば、 E_z^{in} は入射条件として、最初から既知なので、 E_z^{ref} が決定できる。

しかし、線形要素を用いた境界要素法解析では、角点の誤差の影響を受け易い。そこで、反射係数の導出には角点から離れた導波管内の二点の E_z から求めることにする。

観測点の条件として、高次モードが十分減衰するために FPR との結合部から一波長程度離れること、さらに角点の影響を避けるために入射面からも一波長以上離れていることの二つが挙げられる。

この条件に合う二点を図 3.5 のように、伝搬方向に Δx 離して配置する。これらの間隔は、導波管内のモードが TE_{10} のみになっている場合には、微小である必要はない。

それぞれの点での電界は、共に入射波と反射波の重ね合わせとなる。

$$E_z(x) = E_z^{in}(x) + E_z^{ref}(x) \quad (3.81)$$

$$E_z(x + \Delta x) = E_z^{in}(x + \Delta x) + E_z^{ref}(x + \Delta x) \quad (3.82)$$

二点間の入射波と反射波のそれぞれの位相差は (3.76) 式より

$$E_z^{in}(x + \Delta x) = E_z^{in}(x)e^{-j\beta\Delta x} \quad (3.83)$$

$$E_z^{ref}(x + \Delta x) = E_z^{ref}(x)e^{+j\beta\Delta x} \quad (3.84)$$

と表される。一方、反射係数は以下のように定義できる。

$$R(x) = \frac{E_z^{ref}(x)}{E_z^{in}(x)} \quad (3.85)$$

以上から E_z^{in}, E_z^{ref} を消去すると、反射係数として次式が導かれる。

$$R(x) = \frac{2jE_z(x) \sin(\beta\Delta x)e^{j\beta\Delta x}}{E_z(x + \Delta x)e^{j\beta\Delta x} - E_z(x)} - 1 \quad (3.86)$$

第4章

開放型問題に対する境界要素法の適用

境界要素法は、積分方程式の導出で述べたように、グリーンの積分公式およびグリーン関数に基づいており、領域内部に節点をとる必要がない。そのため、領域法に分類される解析手法に比べ、開放型問題に対して大きな利点を有する。

グリーンの積分公式では、閉領域に対してのみ適用できるので、開放型問題も閉領域として扱うためには、解析領域の外側に任意の境界を設ける必要が生じる。境界積分方程式の積分核中に現れる場およびその法線方向微分、あるいはグリーン関数およびその法線方向微分のいずれかが、無限遠で0となる場合には、その境界を無限遠に仮想的に置くことが可能である。そうでない場合には、放射条件等を有する真の境界を設定する必要が生じる。幸いなことに、ヘルムホルツ方程式および波動方程式のグリーン関数およびその法線方向微分は共に無限遠で0に収束するので、特別な考慮を必要としない。但し、問題ごとにどのような仮想的な積分路をとるのかは、意識すべきである。一方、二次元のポアソン方程式では無限遠でグリーン関数が発散してしまうため、特別な考慮が必要となる。

この章では、この二次元ポアソン方程式における開放型問題の扱い方と、後章で用いるヘルムホルツ方程式の開放型問題に対する境界の取り方について論ずる。

4.1 ポアソン方程式に対する開放型問題

二次元ポアソン方程式に対する例題として、導体柱を考える。この種の問題は、ポテンシャル ϕ を与える問題と、表面電荷 σ を与える問題に分類できる。

導体表面に帯電した σ は導体表面を S とすると、ガウスの法則およびガウスの積

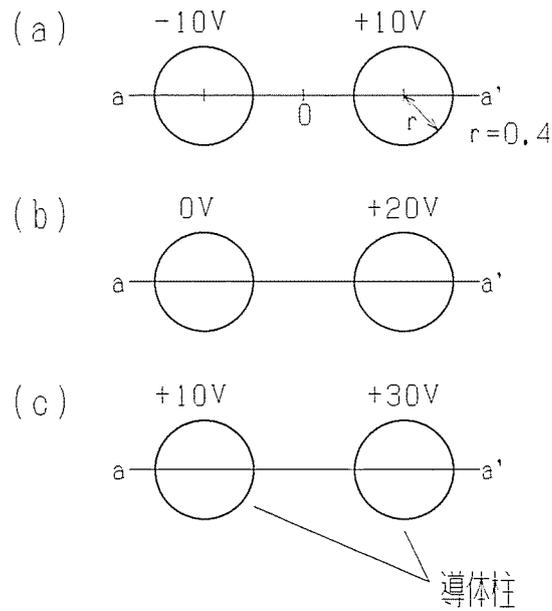


図 4.1: 二導体柱の解析モデル

分公式より、

$$\int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \sigma \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) dV = \int_S \sigma dS \quad (4.1)$$

が得られる。ここで \mathbf{r}_s は表面 S 上の点を示している。境界 S が滑らかな場合には、

$$\sigma = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \quad (4.2)$$

と表すことが出来、ポテンシャル ϕ を変数としたポアソン方程式

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (4.3)$$

のノイマン条件となる。但し ρ は領域内の電荷分布であり、境界上の σ ではない。一方、ポテンシャル ϕ を境界値として与える場合には、ディリクレ問題として、定義できる。

本節での議論は、どちらのタイプの境界条件でも同じ扱いが可能なので、ディリクレ問題に限定して話をすすめる。

ディリクレ問題として、境界条件を与える場合には、ポテンシャルの任意性が発生する。すなわち、ポテンシャルの基準電位をどこに取るかによって、境界も含んだ領域全体の電位がシフトする。

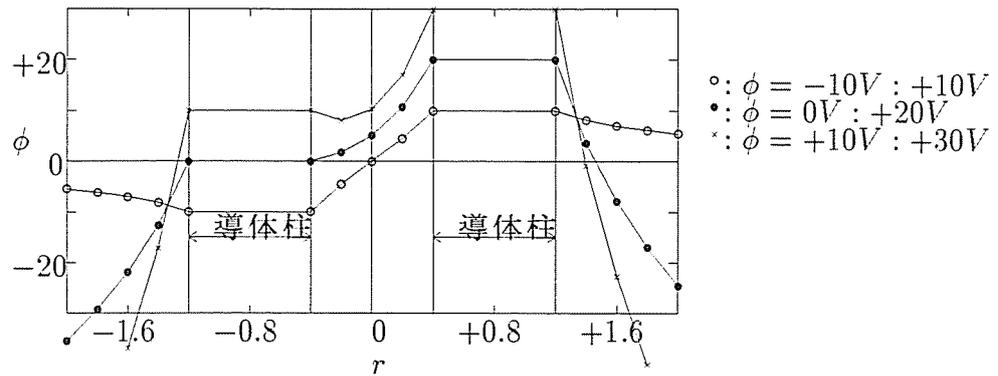


図 4.2: 二導体柱の通常の方法による誤った解析結果

例えば、無限遠に基準点を置いた場合、図 4.1(a),(b),(c) のモデルを考えたとき、ポテンシャルの空間分布は、(a) と (b) の間で $10V$ 、(a) と (c) の間では $20V$ のシフトが見られるはずである。

通常境界要素法解析では、グリーン関数として

$$G = \frac{-1}{2\pi} \ln r \quad (4.4)$$

を用いる。一定要素を用い、一つの導体柱を 32 分割した場合の、解析した結果を図 4.2 に示す。横軸は、図 4.1 中の断面 $a-a'$ を示しており、縦軸はポテンシャル ϕ を示している。この図から、全体にシフトした様子は見られない。

この原因を明らかにするために別の例を示す。図 4.3 のように、半径 r の導体柱にポテンシャルを与えたモデルを考える。導体が一つの場合のモデルは物理的には考え難いが、導体に電荷を与え、無限遠に等量の逆符号の電荷を置いたモデルに相当する。この場合、導体の付近では電界は 0 となり、ポテンシャルは一定となる。ポテンシャルを $10V, 20V$ とした場合の結果を、図 4.4 に示す。さきほどと同様、シフトは現れない。また、ポテンシャルを二倍にする事により、あたかも表面電荷が二倍になったように見える。しかし、最初に述べたように、電荷はポテンシャルの法線方向微分 (電界) に比例するが、無限遠に基準点を置いた場合には、電荷とポテンシャルは比例しない。

上の結果は、閉領域問題の例であるコンデンサや同軸ケーブルの結果と似ている。

同じモデルで、半径 r を変えた場合の結果を図 4.5 に示す。スケールを変えただけで、ポテンシャル分布が大きく変わってしまう。つまり、座標変換によりフィールドが変わってしまうことを示している。

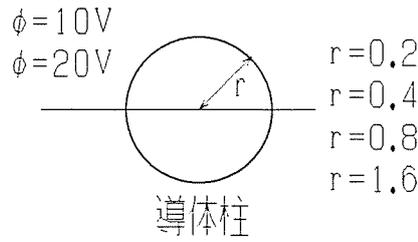


図 4.3: 一導体柱の解析モデル

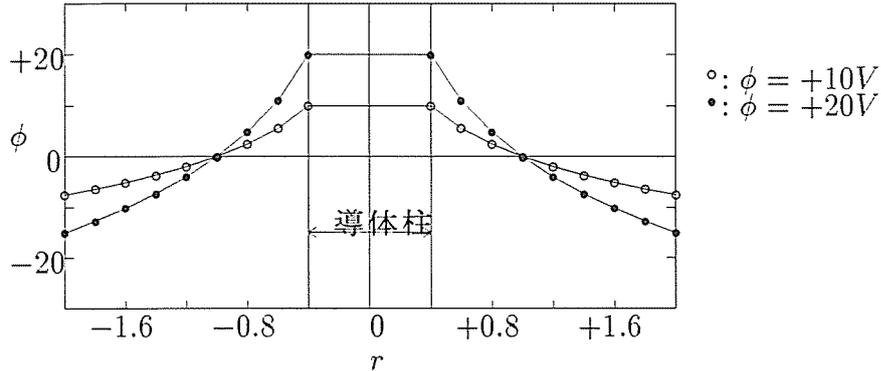


図 4.4: 一導体柱の通常の方法による誤った解析結果

これらの原因を考えてみよう。2.4.1節で、導いたグリーン関数は

$$G = \frac{-1}{2\pi} \ln r + C \quad (4.5)$$

で表された。今、考えている解析モデルの解析空間は開放型問題なので、図 4.6 のように、解析体系の外側に仮想的な、境界を必要とする。

境界要素法では、この仮想的な境界 S' 上で積分が 0 になることを前提として、その境界上には節点を取らない。仮想的な境界 S' からの積分 I' が 0 となるための条件を考えてみよう。 I' は、

$$I' = I_1 - I_2 \quad (4.6)$$

$$I_1 = \int G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_i) \nabla \phi(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' dS' \quad (4.7)$$

$$I_2 = \int \nabla G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_i) \phi(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' dS' \quad (4.8)$$

と与えられる。

境界 S' を無限遠 ($R \rightarrow \infty$) に選ぶと、

$$\nabla G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{n}' = - \left(\frac{\partial G}{\partial r} \right)_{R \rightarrow \infty} = \left(\frac{1}{2\pi r} \right)_{R \rightarrow \infty} \simeq \left(\frac{1}{2\pi R} \right)_{R \rightarrow \infty} = 0 \quad (4.9)$$

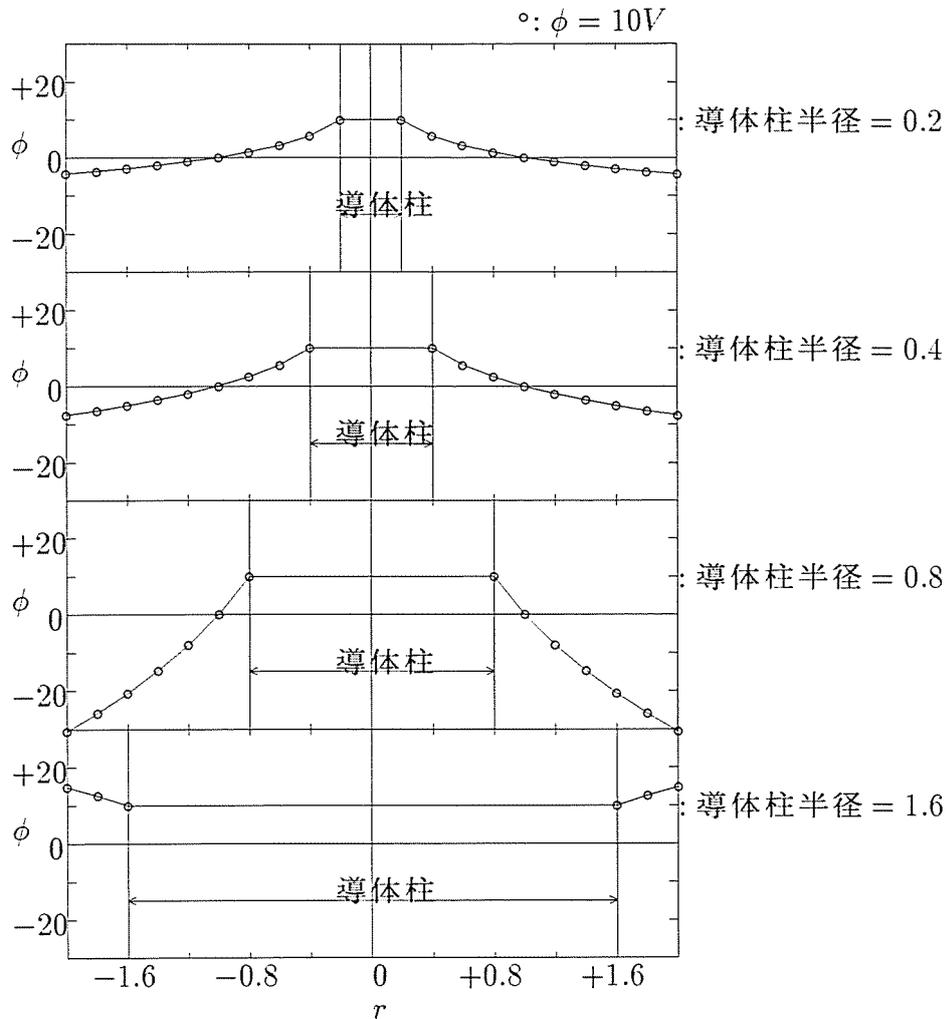


図 4.5: 一導体柱の通常の方法による誤った解析結果 (半径依存性)

より、 $I_2 = 0$ となる。 I_1 は

$$I_1 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int \left(\frac{-1}{2\pi} \ln r + C \right) \nabla \phi(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' dS' \quad (4.10)$$

となり、 $\nabla \phi(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' = 0$ とならない限り、発散する。

今まで示した、通常境界要素法での解析結果は $C = 0$ の例であり、 S の寸法が十分小さい場合には、 $R = 1$ において I_1 は 0 となる。逆に、 I_2 は、 $\phi = 0$ にならない限り 0 とならない。図 4.4, 4.5 の結果では、 $r = 1$ においてポテンシャルの値は 0 となっている。(この図の解析体系の寸法が十分小さくない場合でも、1 より十分小さくなくても、0 に落ちているのは、軸対称の問題なので、原点に集中電荷を置いた場合と等価になったためである。) つまり、グリーン関数に何も考慮しない場合 ($C = 0$) の積分方程式は、自動的に半径 1 の仮想的な境界 S' 上に、境界条件 $\phi = 0$ を置いてしまう。

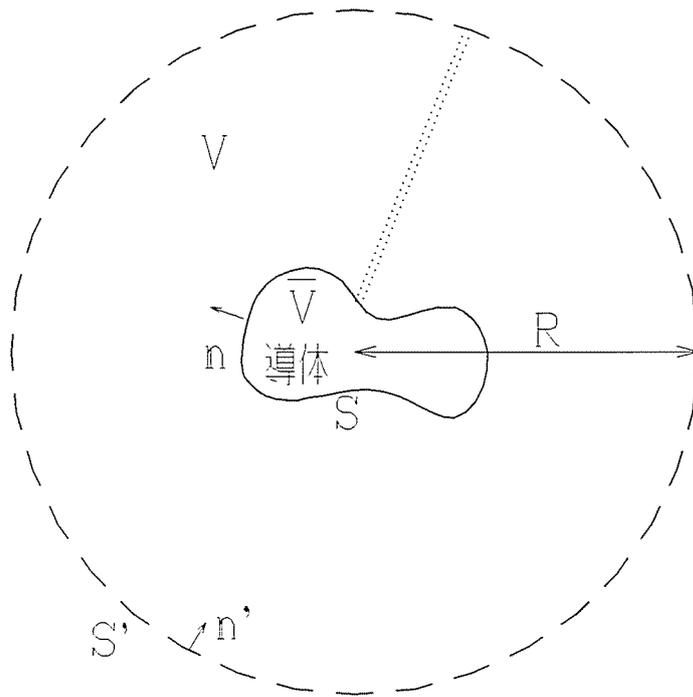


図 4.6: 開放型問題の解析領域

その結果、開放型問題にも関わらず、コンデンサや同軸ケーブルの解析結果と似た結果が得られたと考えられる。

この境界の半径は常に1であり、解析モデルの寸法に関わらない。つまり、解析体系を大きくした場合でも、場は相似とならない。いいかえると、座標系の取り方に依存してポテンシャルの解が変化してしまうことを意味する。

このような、条件を自動的に置かせないようにするためには、グリーン関数の積分定数 C を適切に選べば良い。グリーン関数を

$$G = \frac{-1}{2\pi} (\ln r - \ln R) \quad (4.11)$$

とし、解析対象となる領域(解析領域ではない)よりも十分大きな R を選ぶ。この時、仮想的な境界 S' は半径 R 上に置かれ、そこからの積分は、

$$I_1 = 0 \quad (4.12)$$

$$I_2 \simeq 0 \quad (4.13)$$

となる。当然、 S' 上に節点を取る必要もない。

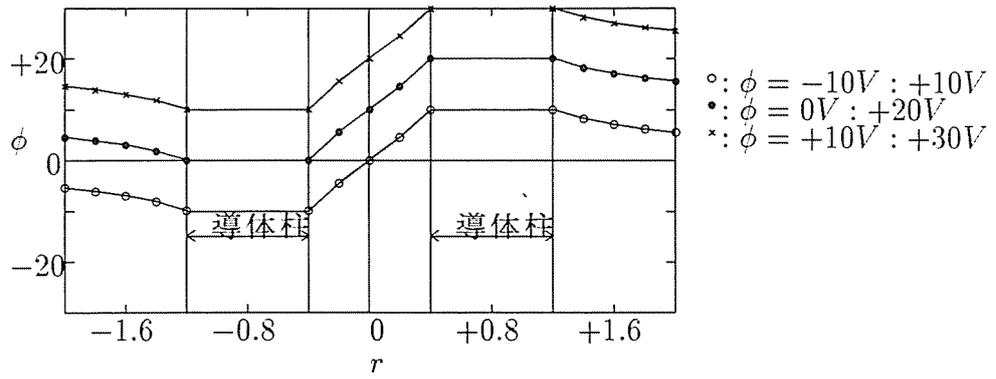


図 4.7: グリーン関数の積分定数を考慮した解析結果 (二導体柱)

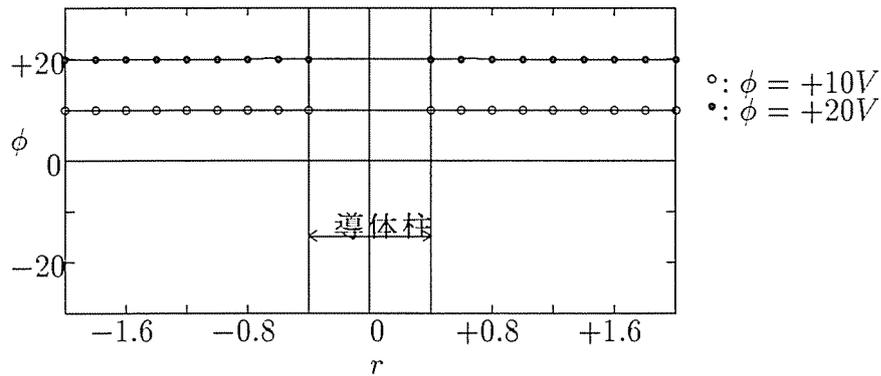


図 4.8: グリーン関数の積分定数を考慮した解析結果 (一導体柱)

R を無限大にすることが理想であるが、計算機の制限により、 R は一般に 10^{100} 程度が上限となる。しかし、幸いなことに対数で与えているので、原理的には $\log R$ として、 10^{100} 程度を与えられる。但し、 R を極端に大きくすると、グリーン関数の節点間の距離依存性が消えてしまい、節点の結合が見えなくなってしまう。すなわち、連立方程式

$$Ax = b \tag{4.14}$$

の条件数 (第6章参照) の低下あるいはランクの低下を招いてしまうので、極端に大きな値を入れることはできない。

$\log_{10} R = 1000$ としたときの、図 4.1, 4.3 のモデルの解析結果を、図 4.7, 4.8 に示す。これらの結果は、境界条件として与えたポテンシャルの差の分だけ、全領域に亘ってシフトしており、予測した結果と一致している。

以上を、境界要素法による開放型問題に拡張してまとめる。開放型問題では、仮想的な積分路を考えることにより、閉じた領域とすることが可能である。この仮想

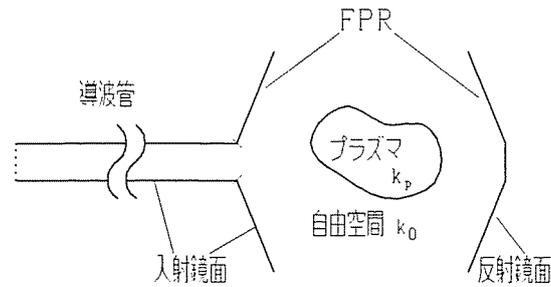


図 4.9: 解析モデル

的な積分路からの積分が0となるようにとれば、この積分を方程式系に組み込む必要はなくなる。通常は、この積分路を解析体系より無限遠に取る。但し、二次元のポアソン方程式のように、無限遠で発散してしまうタイプのグリーン関数を持つ場合には、グリーン関数の積分定数を適切に選ぶことにより、十分遠方に仮想的な境界を有する条件を決めることができ、その結果、無限遠での条件を模擬することが可能となる。

境界要素法には、本論文の様に境界上にポテンシャルおよびその微分値を置く直接法と、これらの代わりに電荷および電気双極子を置く間接法がある。間接法の場合には、全ての境界上の電荷の積分値が0となるような付帯条件 [1] により、グリーン関数の任意性の考慮をせずに正しい解析が得られるが、開放問題に対する直接法の場合には、この任意性を正しく評価しない限り、暗黙の内に任意の境界条件が課されることにより、解析結果が、物理的に全く意味を持たない解となる。

4.2 ヘルムホルツ方程式に対する開放型問題

ヘルムホルツ方程式のグリーン関数およびその法線方向微分は、無限遠で0となるので、開放型問題に対しても前節のような取扱いをする必要はない。

しかし、本論文で用いる無限に長い導波管から入射する電磁波を扱う場合は、仮想的な積分路の取り方について考慮を要する。第3章では、連続条件、金属板の境界条件、入射条件について個々に論じたが、本節では、境界の配置について論ずる。

改めて、プラズマを含む解析モデルを図4.9に示す。この問題はプラズマ領域と自由空間領域に分けて、別々の支配方程式(ヘルムホルツ方程式)を解けばよい。

プラズマ領域に対する方程式は、閉領域になるので特に考慮することはない。

自由空間領域については三つの散乱体があると考え。一つはプラズマであり、

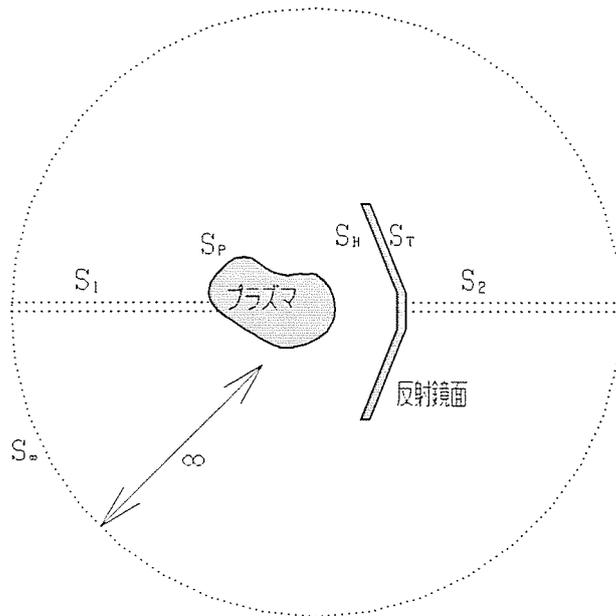


図 4.10: プラズマおよび反射鏡面に対する積分路

他の二つはFPR 鏡面である。図中の左側の鏡面および導波管を入射鏡面と呼び、右側を反射鏡面と呼ぶことにする。

まず、プラズマと反射鏡面について考える。鏡面の厚さを有限とすれば、これらの境界から無限遠の境界につながる仮想的なカットを、図 4.10 のように入れば、往復部分 S_1, S_2 は積分方向が逆向き (法線ベクトルが逆向き) なので消える。また、グリーン関数は 2.3 節で示したように、

$$G = \frac{-j}{4} H_0^{(2)}(kr) \quad (4.15)$$

と表されるので、境界積分 I' は無限遠で

$$I' = \int G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_i) \nabla \phi(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' dS_\infty - \int \nabla G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_i) \phi(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' dS_\infty = 0 \quad (4.16)$$

となる。従って、これらについては、プラズマ領域と反射鏡面の内部を除く領域全体が解析領域となる。

次に、入射鏡面について考える。入射鏡面はFPR、導波管壁および入射面より構成される。FPR および導波管壁は、反射鏡面と同様に有限の厚みとできるが、入射面は有限の厚みを持たせることはできないため、先ほどとは違う扱い方をする。本来なら無限に続く導波管を入射面で代用することにより、有限長の導波管として扱うことができたが、解析領域は入射面より右側のみに制限される。

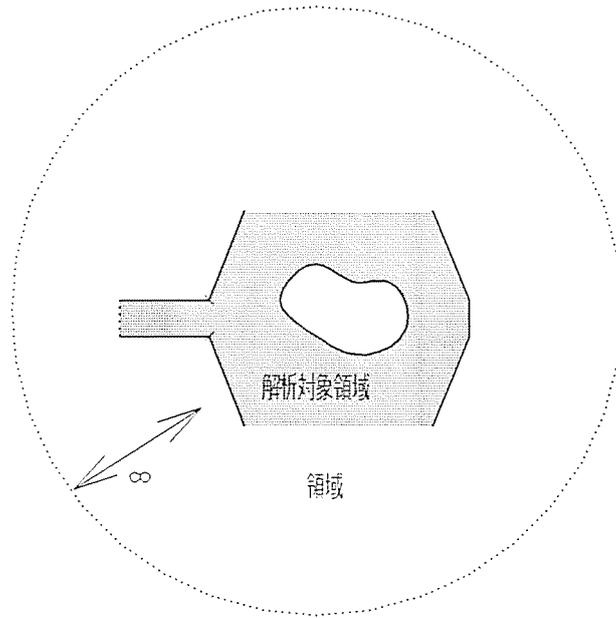


図 4.11: 解析対象領域

この状態では、無限遠に延びるカットを入れることは不可能なので、開放領域として扱えない。そこで、解析対象の領域(境界も含む)すなわち観測点 r_i をおく場所を、図 4.11のように両鏡面間の領域及び導波管中に限定する。この領域に対して、入射鏡面の境界を、図 4.12のような積分路を考える。

解析対象領域から、放射された電界及び磁界は鏡面の裏側の領域では0となる。磁界は $\frac{\partial E_z}{\partial n}$ と表されるので、 E_z , $\frac{\partial E_z}{\partial n}$ の両方を0とおくことができ、 S_3 からの積分は

$$I = \int G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_i) \nabla \phi(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' dS_3 - \int \nabla G(\mathbf{r}'; \mathbf{r}_i) \phi(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' dS_3 = 0 \quad (4.17)$$

とできる。また、無限遠の積分 I' は先ほどと同様に0となる。従って、この仮想的な境界は、入射鏡面と無限遠の境界によって形成される閉領域を作るための、妥当な選び方であることが解る。但し、積分方程式を満足する点は閉領域のすべての点ではなく、解析対象領域のみである。なお、完全導体の裏側は、完全導体が十分大きい場合には電界、磁界は0となるが、端点がある場合には、その付近では回折の影響で0とはならない。この影響を考慮するために裏側の境界を数波長分延ばしている(図 4.10, 図 4.12中の S_T)。

反射鏡面についても、解析対象領域を限定することにより、裏側の境界を省くことができる。

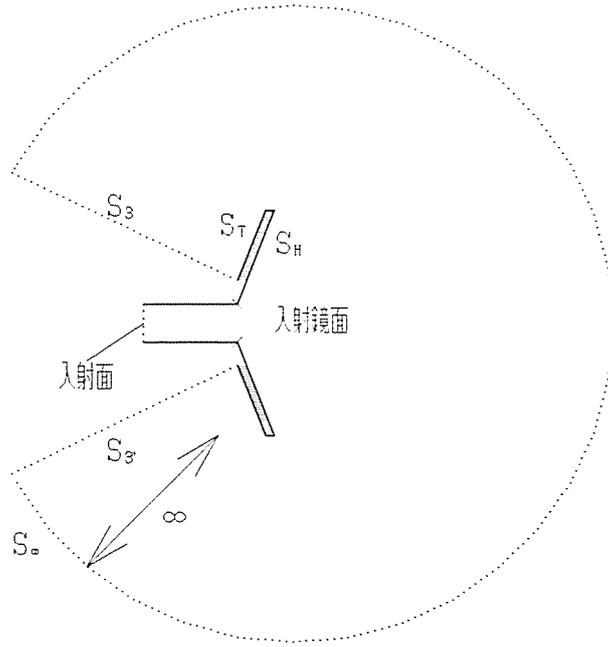


図 4.12: 入射鏡面に対する積分路

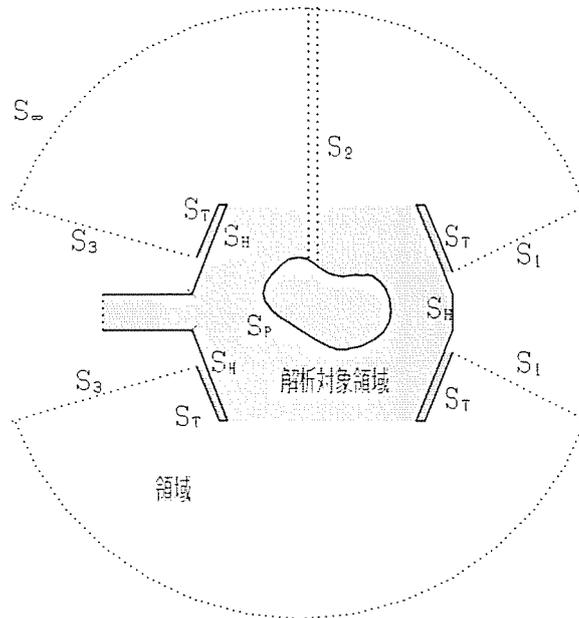


図 4.13: 自由空間領域の解析対象領域と積分路

図4.13に入射鏡面、反射鏡面、プラズマ領域を考慮した自由空間領域の境界の選び方および解析対象領域を示す。

第5章

開放型ファブリ・ペロー共振器の共振特性

共振器を理解するためには、共振器の共振特性と内部の電界分布の関係を明らかにする必要がある。

共振特性は、実験により求めることが出来るが、内部電界分布は実験では容易に求めることは出来ない。従って、電界分布を求めるための数値解析の位置付けは重要なものとなる。

本章ではプラズマ等の媒質を挿入しない状態における、開放型ファブリ・ペロー共振器の共振特性および内部電界分布を、境界要素法によって求め、開放型共振器は閉じた共振器と共振のメカニズムが異なることを示す。

さらに、共振器を扱う場合には多重反射を起こすため、表面における壁面損失を考慮する必要がある。境界要素法における壁面損失の条件を導出し、最も損失の影響が現れる閉じた共振器を例に取り、この境界条件の妥当性を評価する。

5.1 完全導体壁面の場合の共振特性

図3.3に示した導波管とFPRの結合部における反射係数の周波数特性の計算結果を図5.1に示す。上の図には複数の共振が見られる。その一部を拡大したものを下の図に示す。図中の丸および四角はそれぞれ反射係数の絶対値と位相を示している。図5.2には、反射係数を複素平面にプロットしたスミスチャートを示す。さらに図5.3~図5.10には電界強度(E_z)の空間分布を示す。この図の等高線は、見やすくするために、共振器中の最大絶対値で規格化している。また、図5.11は、導波管から

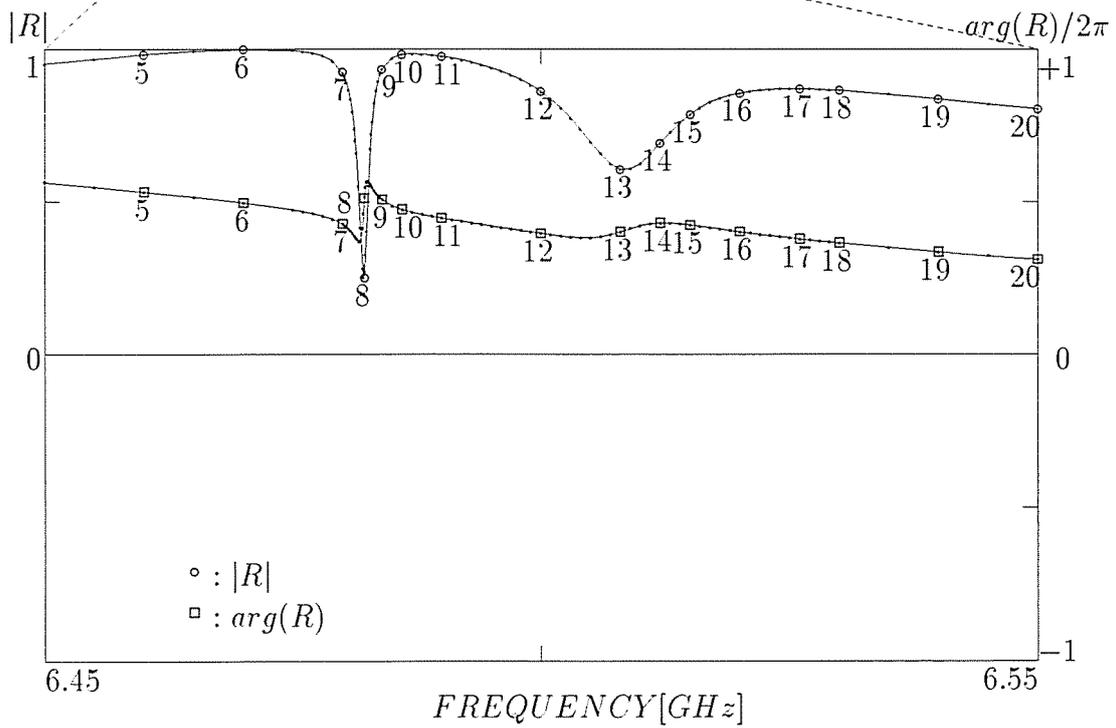
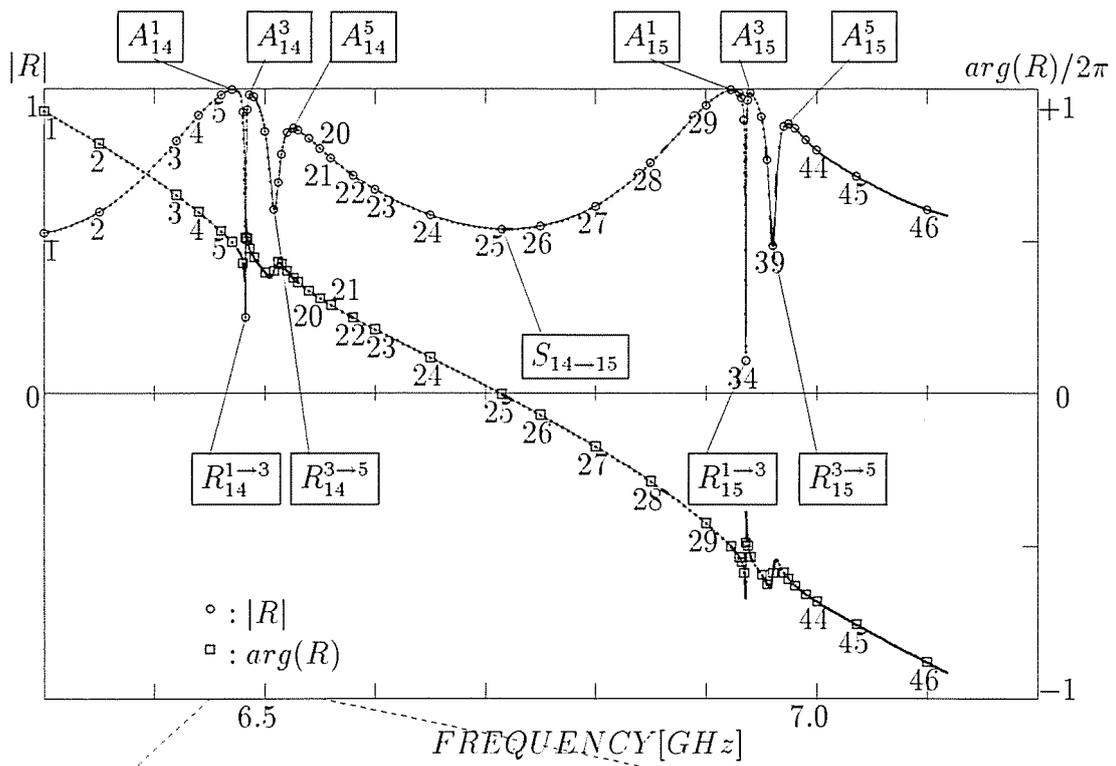


図 5.1: 反射係数の周波数特性

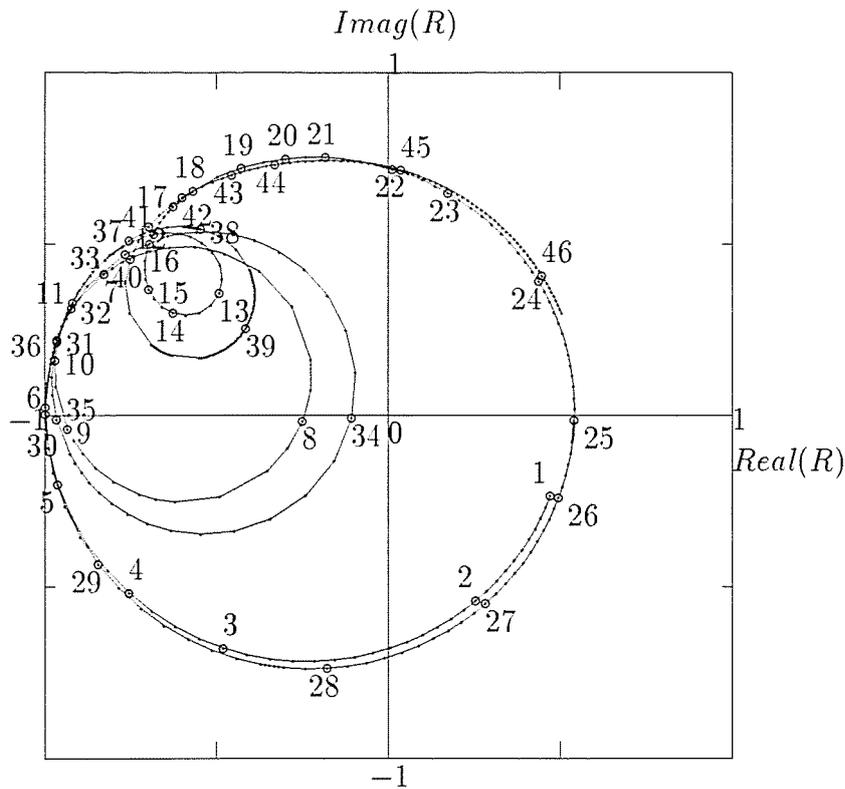


図 5.2: スミスチャート

最大強度を1の入射波で励振した場合の、共振器内部の各内部分布における最大電界(絶対値)を示している。

図 5.1, 図 5.2, 図 5.11中の白抜きの記号は内部電界分布を求めた周波数を示しており、これに付した番号は、図 5.3~図 5.10中の通し番号と一致する。また、図中の R, S, A はそれぞれ共振、準共振、反共振であり、共振と準共振は反射係数が極小の状態を表しており、逆に反共振は反射係数が極大の状態を表している。これらの詳細についてはこの節の後半で述べる。

結合部での反射係数は、3.5節で述べた方法により、導波管中での反射係数を求め、それを結合部の反射係数に換算したものをを用いた。結合部で直接求めないのは、結合部付近では導波管モードが TE_{10} モードのみならず、高次の減衰モードも混在するためである。

結合部での TE_{10} モードに対する反射係数への換算は以下のように位相の補正のみで与えられる。

$$R(x_2) = \frac{E^{ref}(x_2)}{E^{in}(x_2)} = \frac{E^{ref}(x_1)e^{-j\beta(x_2-x_1)}}{E^{in}(x_1)e^{+j\beta(x_2-x_1)}} = R(x_1)e^{-2j\beta(x_2-x_1)} \quad (5.1)$$

ここで、結合面の座標を x_2 、結合面から一波長以上離れた導波管中の点の座標を x_1

とし、(3.76),(3.77)式を用いた。

反射係数は負荷インピーダンスを線路の特性インピーダンスで規格化したインピーダンス Z を用いて

$$R = \frac{Z - 1}{Z + 1} \quad (5.2)$$

と表される。 $|Z| = \infty$ すなわち負荷が開放の場合には反射係数は1となり、その位相は $2n\pi$ となる。逆に $Z = 0$ すなわち負荷が短絡の場合には反射係数は-1となり、その位相は $(2n + 1)\pi$ となる。

開放型共振器の共振は閉じた共振器の共振とメカニズムが異なる。

導波管と孔が結合した閉じた共振器において、共振器内にきれいなモードが形成されている場合を考える。この時、多重反射により空洞共振器内全体に電磁界のモードが広がっており、また内部の電磁界のエネルギーも大きくなっており、その結果、壁面に流れる電流 $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ も大きくなる。壁面に損失がある場合には、電磁界のエネルギーを壁面でジュール損として失うので、反射波のエネルギーは低下し、結果として反射係数が低下する。モードが立っていない場合には、電磁界の空間分布は共振空洞の一部のみでかつそのエネルギーも小さいので、ジュール損も小さく、反射係数の低下は小さい。また、壁面の損失により、壁面表面上での電界は0とならず、表面より深いところで0となる。そのため、電界が0となる共振器の見かけの形状は、本来の形状より若干広がり、その結果、共振周波数は低周波側にシフトする。なお、壁面の損失が小さくなるに従い共振は鋭くなり、壁面損失が全く無い場合には、反射係数の落ち込みは見られないはずである。これについては、5.3節で論ずる。

一方、開放型共振器の場合には、形状にもよるが、一般に、電磁界の損失の原因は壁面のジュール損よりも、開口部からの回折損失が支配的である。したがって、きれいなモードが形成されているときには、損失は回折損失が小さくなるのでジュール損のみとなり、反射係数は閉じた共振器とは逆に極大となる。逆に、モードが形成されていない時には開口部からの放射により、反射係数は小さくなる。

以上の様に開放型共振器と閉じた共振器の、共振とモード形成の関係は完全に逆転している。この様子を、図5.1~図5.11から確認する。

No.1では、導波管結合部において、回折の影響により電磁波が開口部に向かって広がっていく様子がみられる。結合部から放射された波は反対側の反射鏡面に達し、反射され入射鏡面に戻って来る。この時、結合部における反射波と入射波の位相は揃っていない。

周波数が大きくなるに従い入射波と反射波の位相が揃い、No.6 では結合部が短絡面となり、反射係数が極大 (A_{14}^1) となる。結合部から放射された波は反対側の反射鏡面に達し、反射される。この鏡面は x 軸付近では、両鏡面の中央に焦点を結ぶ形状となっているので、導波管に戻っていく。反射鏡面にて、 x 軸から離れた点で反射された波は、入射側の導波管のすぐ横の入射鏡面で反射され、反射鏡面の中心付近に戻り、さらに反射の後、導波管に戻っていく。この時、反射係数が1に近く、さらに短絡面となっていることから、導波管に戻っていった波と同じ振幅で逆相の入射波が、あたかも入射鏡面で再度反射を繰り返したように見え、きれいなモードが形成される。

このモード分布は x 軸方向に定在波の山が14列、それと直交する y 軸方向に1列であることから、共振器のモードとして (14,1) モードあるいは14次の基本モードと呼ぶことにする。なお、共焦点型楕円筒ファブリ・ペロー共振器の基本モードについては、榎戸 [25,35] により解析的に解かれており、エルミートガウシアン関数となる。

No.7 ではモードが崩れはじめ、No.8 では反射係数が極小 (R_{14}^{1-3}) になり、結合面が短絡する (但し、反射係数が小さいので結合面の電界は小さく、結合面の状態はほとんど意味を持たない)。この状態では、反射係数が小さいことから開口部からの漏れはあるものの、 x 軸上の反射鏡面よりの場所で、電界分布の集中が見られる。この様子は図5.11からも理解できる。結合面から入射した電磁波は両鏡面間を複数回繰り返した後、結合部に戻らず、その電界成分がその両側に集中するモードを形成し、最終的には、開口部から漏れて行くため反射係数は低下する。また、 y 方向の山の数は、入射鏡面側で2列、反射鏡面側で3列となり、短絡面 (定在波の節の面) も x 軸上の分布と x 軸から離れた分布の位相がずれており単一モードではないことが判る。

さらに、周波数を上げると、No.10 で反射係数が極大 (A_{14}^3) となり、結合面が短絡となる。この分布は x 軸上の分布と x 軸から離れた列の分布の位相が一致しており、(13,3) モードであることが判る。No.6 の分布と比べると x 方向の山が一つ減っている。

本節の冒頭で述べたように閉じた共振器では、モードが立っている状態と反射係数の急激な低下がほぼ同一の周波数で発生する。一方、開放型共振器では、反射係数が低下する状態と内部でモードが形成される状態は異なる周波数で発生する。反射係数が低下する状態では、多重反射を繰り返し内部にエネルギーを蓄える形となるので、この状態を共振と呼び、反射係数が極大となりモードが立っている状態

を反共振と呼ぶことにする。これらの性質については次節にて述べる。

以上から、No.8の共振は、No.6の反共振モード(14,1)からNo.10の反共振モード(13,3)への移行の途中の分布で、一時的に多重反射を繰り返しながら開口部から放射するモードとなることが判る。

さらに周波数を上げていくと、No.11で入射鏡面側で3列、反射鏡面側で2列の分布となり、No.12では中央より反射鏡面側で4列となり、反射鏡面の端から電磁波の漏洩が起ころはじめる。No.13では両鏡面の端まで電界分布が現れ、反射係数が極小(R_{14}^{3-5})となり、電界の集中が見られる。

No.15で、反共振モード(12,5)が形成されているが、スミスチャートから判るように、結合面の位相は短絡にはならない。これは、基本モードおよび3次モードの共振と、5次モードの共振が独立でないためと考えられる。つまり、低次のモードが非共振状態になる前に5次モードの共振が重なるためであり、次節で述べる低次モードのサセプタンスが、5次モードのアドミタンスに比べ十分大きいとは言えないためである。この条件が成り立てば、短絡するのみならず反射係数が1に近づくはずである。また、No.16の反射係数が極大の状態(A_{14}^5)とは、周波数が若干ずれていることも、この理由によるものであるが、両鏡面のサイズが(12,5)モードが形成されるのに十分な大きさでないことにも起因している。

No.16~No.29までは分布が変化しながら、開口部からの放射が見られる。No.25は結合面が開放で反射係数が極小(S_{14-15})となる。この状態も、次のモードへの移行の途中の放射パターンと考えることができるので、周波数変化に対する反射係数の変化は緩やかなものの、共振の一種である。しかし、図5.11から判るように、電界の集中は見られないので、他の共振と区別して準共振と呼ぶことにする。

No.30では再び基本モード(A_{15}^1)に戻る。この時、定在波の山の数は15列に増えており、モードは(15,1)となっている。以下、No.34で共振(R_{15}^{1-3})、No.36で(14,3)モード(A_{15}^3)、No.39で共振(R_{15}^{3-5})、No.40付近で(13,5)モード(A_{15}^5)となる。

次に、共振器の電界集中について改めて考える。図5.11から、きれいなモードが形成されている反共振よりも、開口部からの放射が発生する共振時の方が電界の集中が発生することが判る。この理由を図5.12により示す。導波管と入射鏡面の結合部から放出された波は、回折により広がり、反射鏡面側に伝搬する。この図では、ある方向に放射された波の伝搬の向きを模式的に示したものである。反共振の場合には、反射鏡面から直接あるいは数回の両鏡面間の反射の後、導波管の結合面に戻ってくる。一方、共振の場合には、結合面には波は戻ってこずに、結合面のすぐ横に反射波が到達し、反射鏡面の中心付近に到達し、その反射は、 x 軸をはさんで

No.	反射係数	電界集中	定在波数		状態	記号
			伝搬方向 ℓ	垂直方向 m		
6	極大	無し	14	1	反共振	A_{14}^1
8	極小	有り			共振	R_{14}^{1-3}
10	極大	無し	13	3	反共振	A_{14}^3
13	極小	有り			共振	R_{14}^{3-5}
15	ほぼ極大	無し	12	5	反共振	A_{14}^5
25	極小	無し			準共振	$S_{14 \rightarrow 15}$
30	極大	無し	15	1	反共振	A_{15}^1
34	極小	有り			共振	R_{15}^{1-3}
36	極大	無し	14	3	反共振	A_{15}^3
39	極小	有り			共振	R_{15}^{3-5}
41	ほぼ極大	無し	13	5	反共振	A_{15}^5

表 5.1: 共振器内の状態の変遷

逆側に達する。これを複数回繰り返しながら、徐々に開口部に近づき、やがて放射される。このあいだに、 x 軸上の中央より反射鏡面側を何度も通過するため、電界の強度が強められる。

内部電界分布の変化を改めて表 5.1 に示す。

No.6~No.15 の反共振時の定在波の数は、周波数の増加と共に、伝搬軸と垂直方向に二つ増え、それと同時に伝搬方向の数は 1 減っている。そこで、伝搬方向の定在波数を ℓ 、それと垂直方向の定在波の数を m とすると、

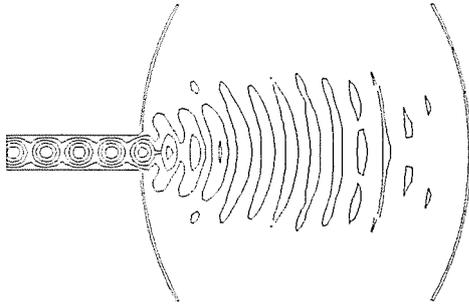
$$n = \ell + \frac{m-1}{2} \quad (5.3)$$

を一定としながら、状態が変化している。さらに、準共振状態 (No.25) を越えると、この n が一つ増え、 m が 1 に戻る。それ以降も同様なので、この n を基本定在波数として定義し、各状態の記号 (A, S, R) の下付添字とした。上付の添字は垂直方向の定在波の数 m を示している。

No.1

FREQUENCY = 6.300000[GHz]

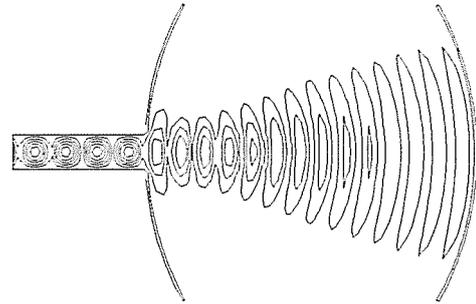
|R| = 0.527202 ARG(R) = -26.498[DEG]



No.4

FREQUENCY = 6.440000[GHz]

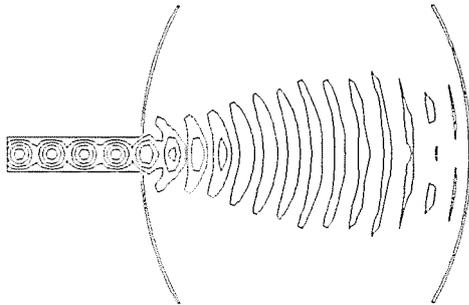
|R| = 0.914664 ARG(R) = -145.534[DEG]



No.2

FREQUENCY = 6.350000[GHz]

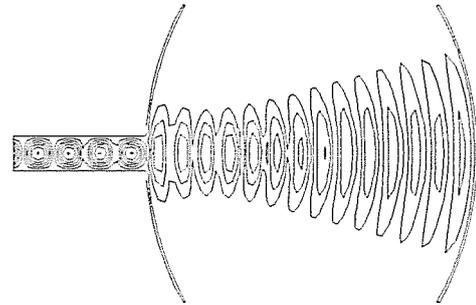
|R| = 0.597232 ARG(R) = -64.781[DEG]



No.5

FREQUENCY = 6.460000[GHz]

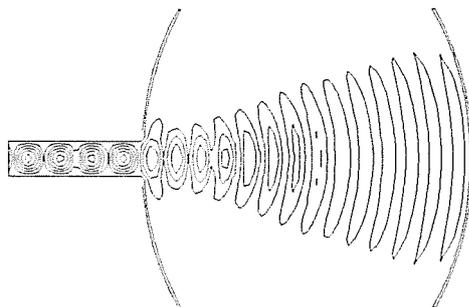
|R| = 0.982470 ARG(R) = -168.251[DEG]



No.3

FREQUENCY = 6.420000[GHz]

|R| = 0.830284 ARG(R) = -125.254[DEG]



No.6

A_{14}^1

FREQUENCY = 6.470000[GHz]

|R| = 0.998459 ARG(R) = 178.626[DEG]

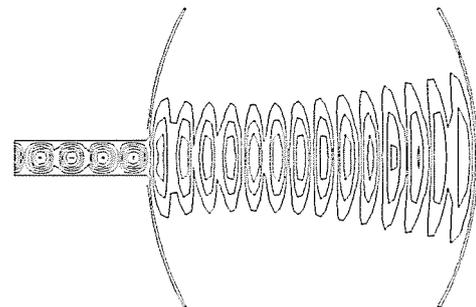
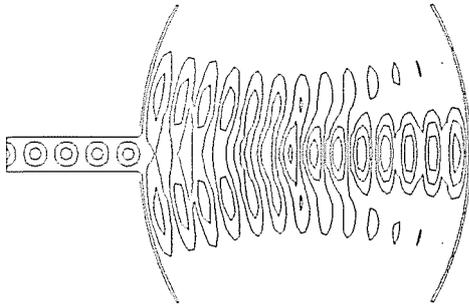


图 5.3: 内部電界分布 (1)

No.7

FREQUENCY = 6.480000[GHz]

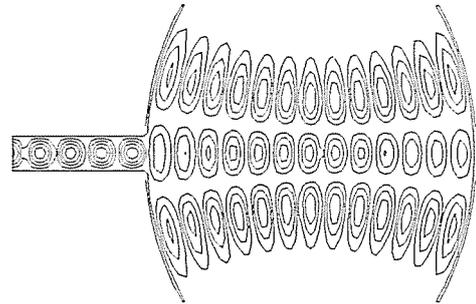
|R| = 0.924865 ARG(R) = 153.497[DEG]



No.10 A_{14}^3

FREQUENCY = 6.486000[GHz]

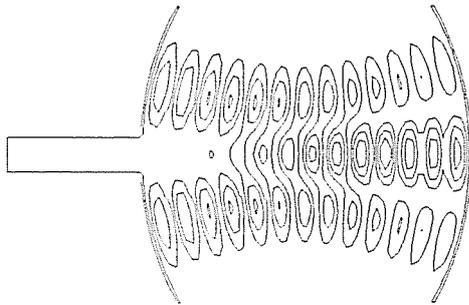
|R| = 0.982230 ARG(R) = 170.648[DEG]



No.8 R_{14}^{1-3}

FREQUENCY = 6.482200[GHz]

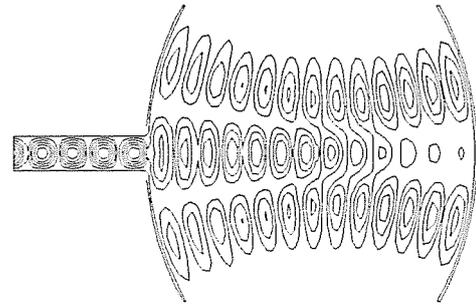
|R| = 0.249786 ARG(R) = -176.135[DEG]



No.11

FREQUENCY = 6.490000[GHz]

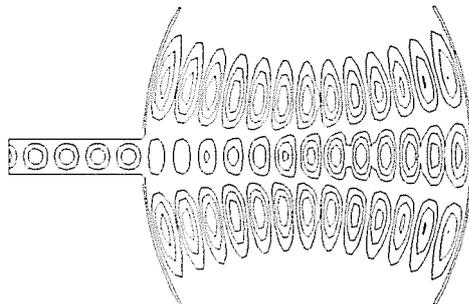
|R| = 0.976481 ARG(R) = 160.376[DEG]



No.9

FREQUENCY = 6.484000[GHz]

|R| = 0.934687 ARG(R) = -177.551[DEG]



No.12

FREQUENCY = 6.500000[GHz]

|R| = 0.862340 ARG(R) = 142.300[DEG]

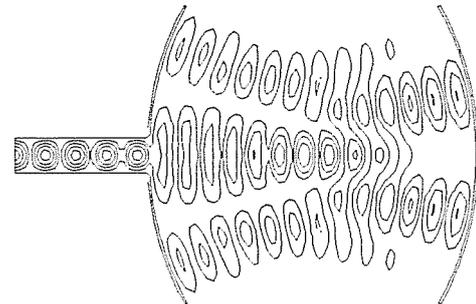
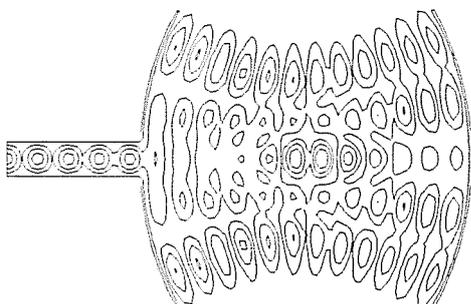
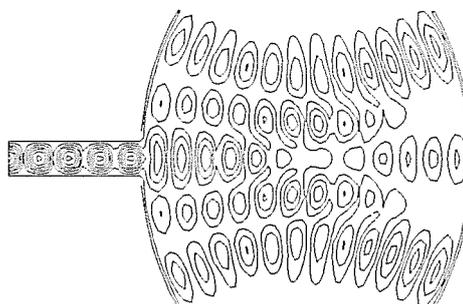


図 5.4: 内部電界分布 (2)

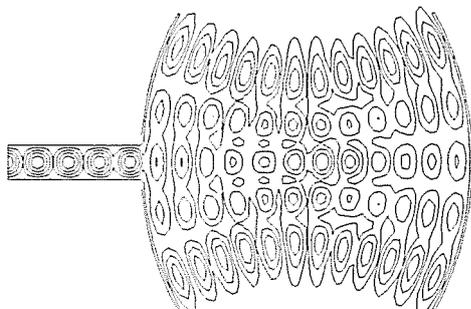
No.13 R_{14}^{3-5}
 FREQUENCY = 6.508000[GHz]
 $|R| = 0.606330$ ARG(R) = 144.090[DEG]



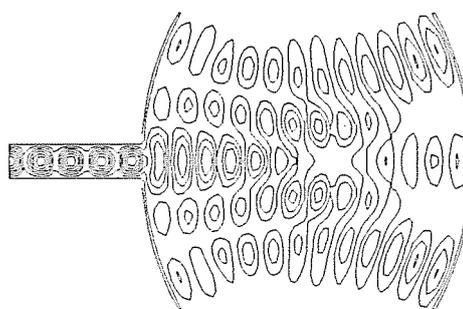
No.16
 FREQUENCY = 6.520000[GHz]
 $|R| = 0.857191$ ARG(R) = 144.240[DEG]



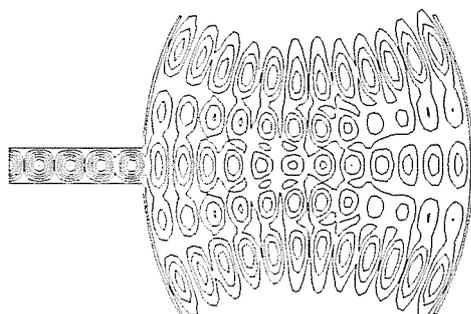
No.14
 FREQUENCY = 6.512000[GHz]
 $|R| = 0.692786$ ARG(R) = 154.523[DEG]



No.17 A_{14}^5
 FREQUENCY = 6.526000[GHz]
 $|R| = 0.871308$ ARG(R) = 135.807[DEG]



No.15 (A_{14}^5)
 FREQUENCY = 6.515000[GHz]
 $|R| = 0.787184$ ARG(R) = 152.157[DEG]



No.18
 FREQUENCY = 6.530000[GHz]
 $|R| = 0.866062$ ARG(R) = 130.998[DEG]

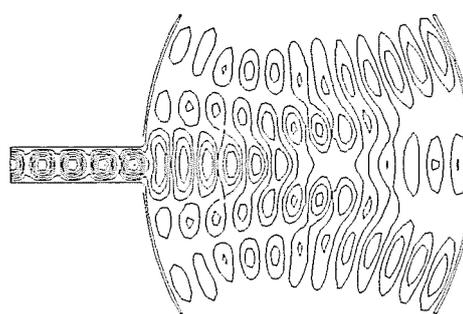
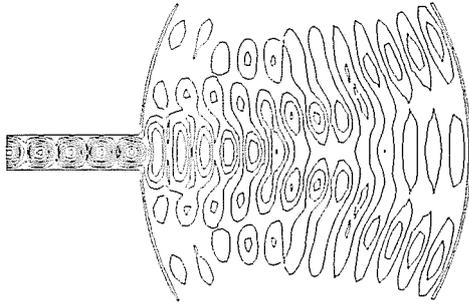


図 5.5: 内部電界分布 (3)

No.19

FREQUENCY = 6.540000[GHz]

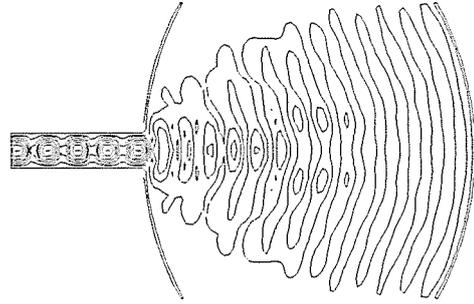
$|R| = 0.837912$ ARG(R) = 120.695[DEG]



No.22

FREQUENCY = 6.580000[GHz]

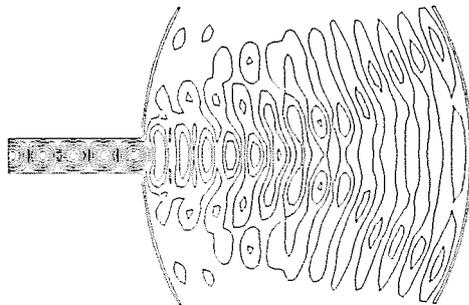
$|R| = 0.717434$ ARG(R) = 88.893[DEG]



No.20

FREQUENCY = 6.550000[GHz]

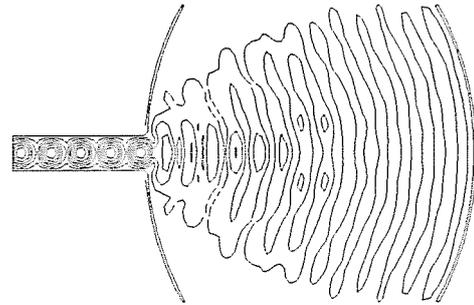
$|R| = 0.804989$ ARG(R) = 111.819[DEG]



No.23

FREQUENCY = 6.600000[GHz]

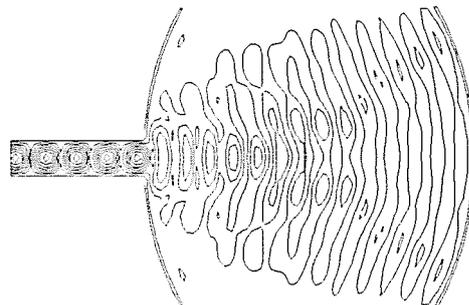
$|R| = 0.670836$ ARG(R) = 74.967[DEG]



No.21

FREQUENCY = 6.560000[GHz]

$|R| = 0.773290$ ARG(R) = 103.742[DEG]



No.24

FREQUENCY = 6.650000[GHz]

$|R| = 0.586362$ ARG(R) = 41.759[DEG]

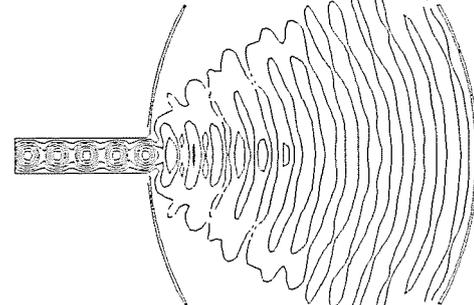
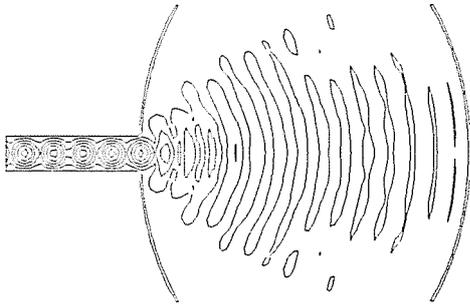


図 5.6: 内部電界分布 (4)

No.25 $S_{14 \rightarrow 15}$

FREQUENCY = 6.715000[GHz]

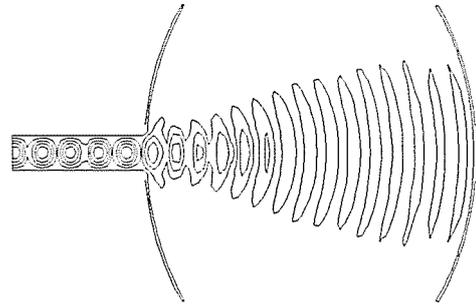
$|R| = 0.541045$ ARG(R) = -1.444[DEG]



No.28

FREQUENCY = 6.850000[GHz]

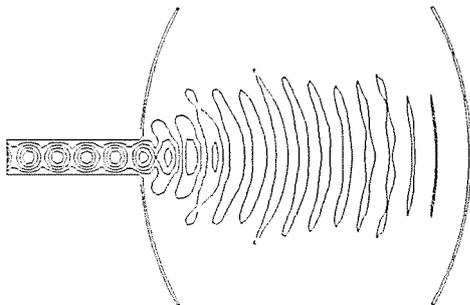
$|R| = 0.758349$ ARG(R) = -103.568[DEG]



No.26

FREQUENCY = 6.750000[GHz]

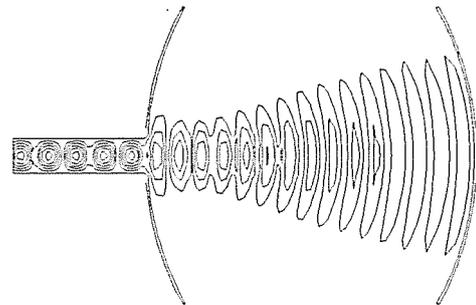
$|R| = 0.550709$ ARG(R) = -25.792[DEG]



No.29

FREQUENCY = 6.900000[GHz]

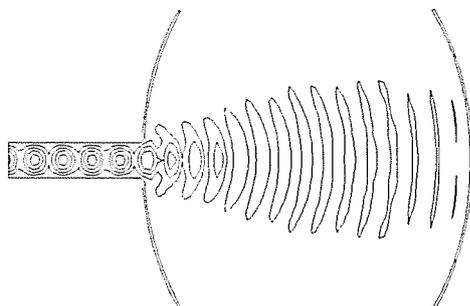
$|R| = 0.949136$ ARG(R) = -152.764[DEG]



No.27

FREQUENCY = 6.800000[GHz]

$|R| = 0.616777$ ARG(R) = -62.666[DEG]



No.30 A_{15}^1

FREQUENCY = 6.922500[GHz]

$|R| = 0.997840$ ARG(R) = 179.847[DEG]

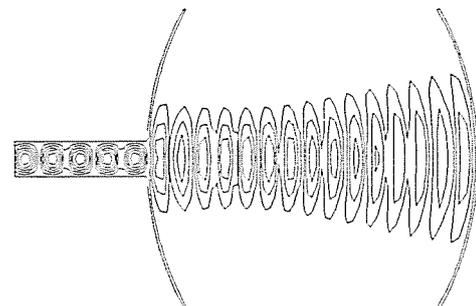
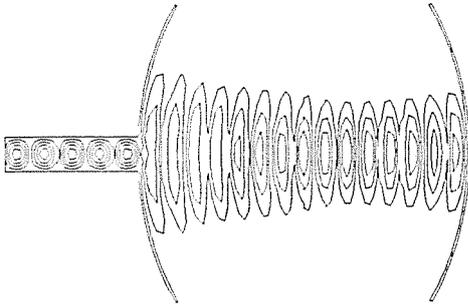


图 5.7: 内部電界分布 (5)

No.31

FREQUENCY = 6.930000[GHz]

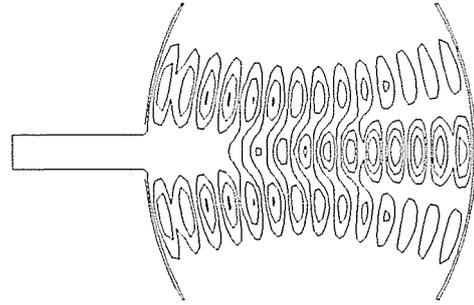
|R| = 0.989078 ARG(R) = 167.159[DEG]



No.34 R_{15}^{1-3}

FREQUENCY = 6.935600[GHz]

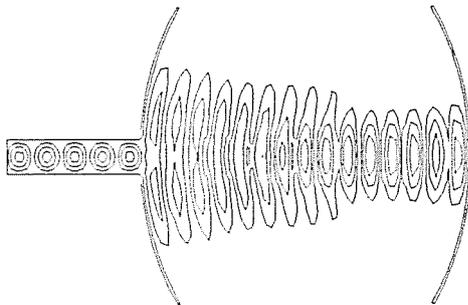
|R| = 0.106612 ARG(R) = -175.777[DEG]



No.32

FREQUENCY = 6.932000[GHz]

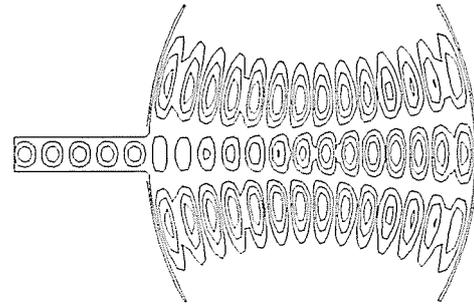
|R| = 0.973427 ARG(R) = 161.383[DEG]



No.35

FREQUENCY = 6.937500[GHz]

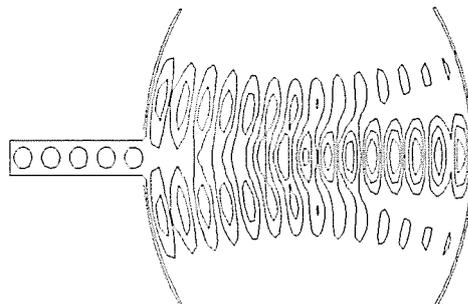
|R| = 0.965242 ARG(R) = -179.299[DEG]



No.33

FREQUENCY = 6.934000[GHz]

|R| = 0.899308 ARG(R) = 148.475[DEG]



No.36 A_{15}^3

FREQUENCY = 6.940000[GHz]

|R| = 0.987752 ARG(R) = 167.490[DEG]

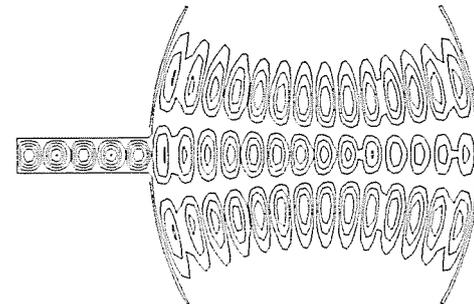
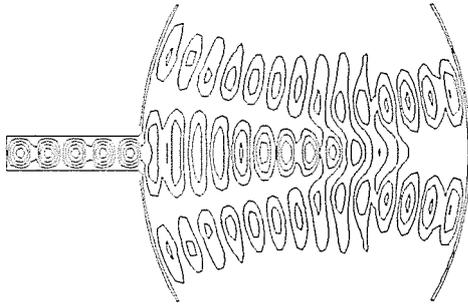


図 5.8: 内部電界分布 (6)

No.37

FREQUENCY = 6.950000[GHz]

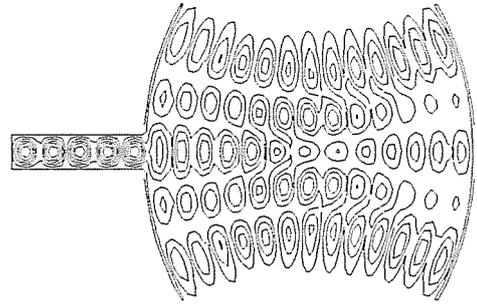
|R| = 0.909703 ARG(R) = 146.000[DEG]



No.40

FREQUENCY = 6.970000[GHz]

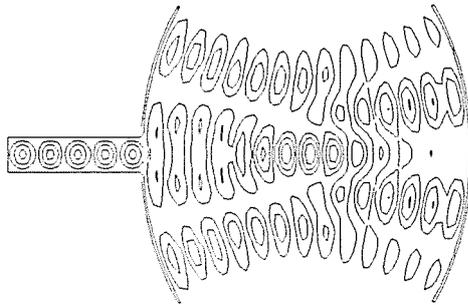
|R| = 0.877769 ARG(R) = 148.832[DEG]



No.38

FREQUENCY = 6.955000[GHz]

|R| = 0.770012 ARG(R) = 135.103[DEG]

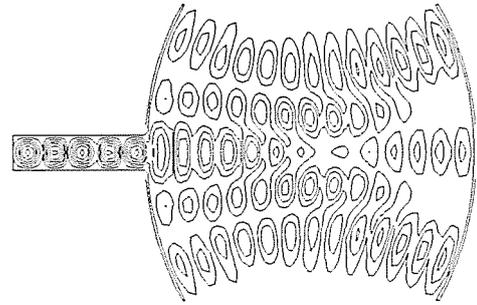


No.41

A_{15}^5

FREQUENCY = 6.974000[GHz]

|R| = 0.887316 ARG(R) = 141.643[DEG]

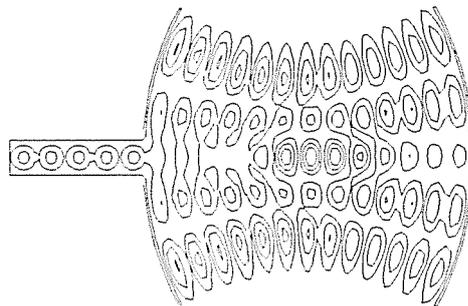


No.39

R_{15}^{3-5}

FREQUENCY = 6.960100[GHz]

|R| = 0.486443 ARG(R) = 148.566[DEG]



No.42

FREQUENCY = 6.980000[GHz]

|R| = 0.873041 ARG(R) = 133.448[DEG]

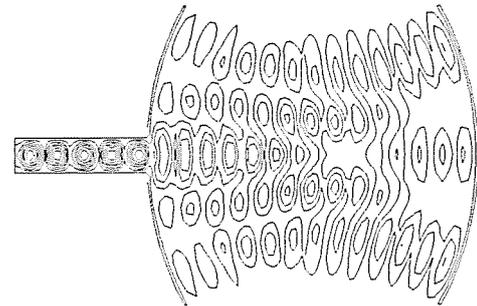
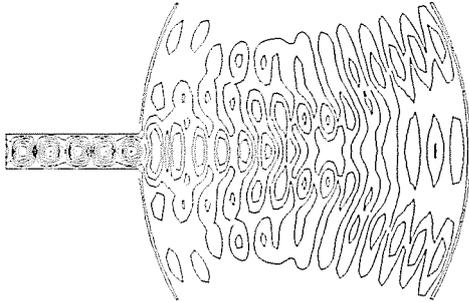


图 5.9: 内部電界分布 (7)

No.43

FREQUENCY = 6.990000[GHz]

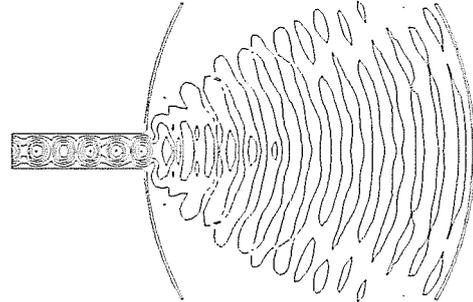
|R| = 0.835273 ARG(R) = 123.028[DEG]



No.46

FREQUENCY = 7.100000[GHz]

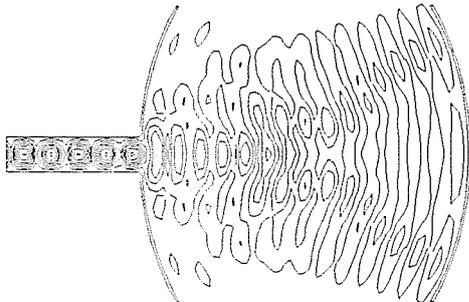
|R| = 0.606203 ARG(R) = 42.473[DEG]



No.44

FREQUENCY = 7.000000[GHz]

|R| = 0.801128 ARG(R) = 114.413[DEG]



No.45

FREQUENCY = 7.036000[GHz]

|R| = 0.715462 ARG(R) = 86.988[DEG]

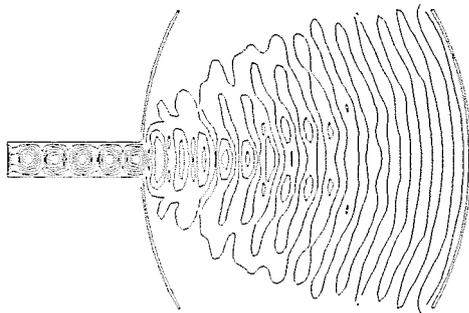


図 5.10: 内部電界分布 (8)

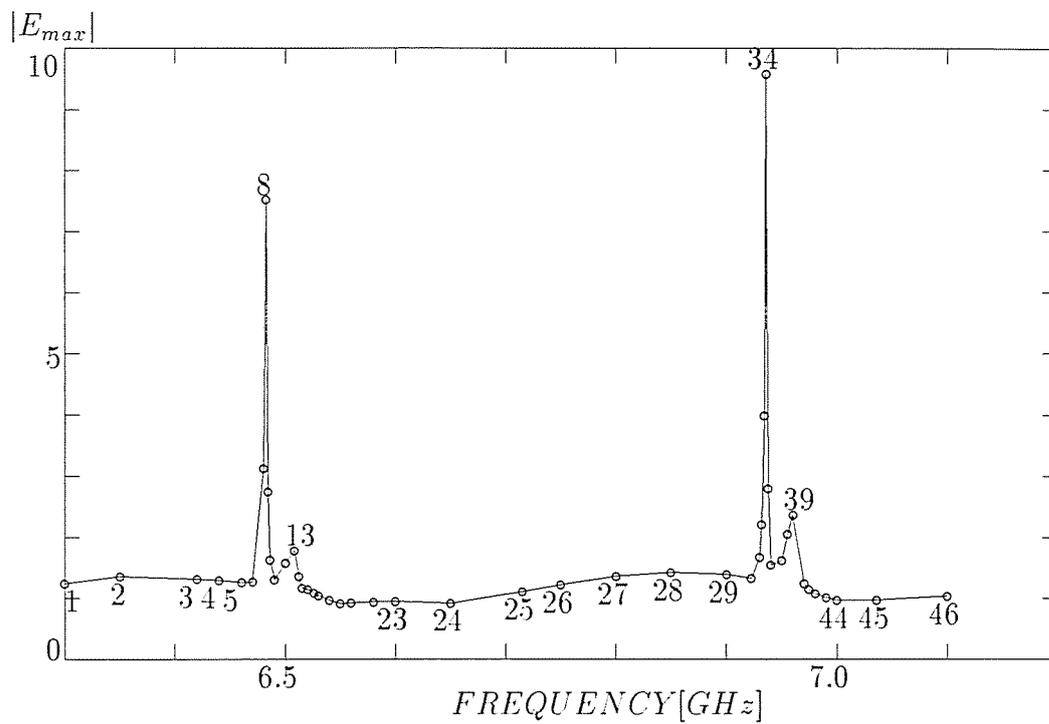


図 5.11: 内部電界の最大値

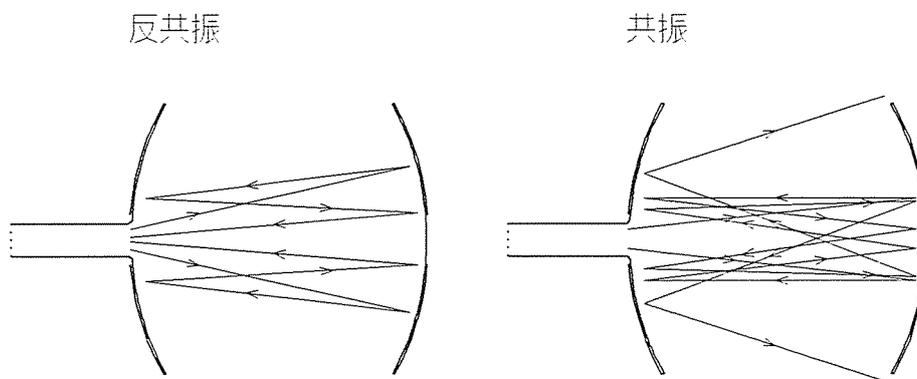


図 5.12: 電磁波の反射パターン

さらに、別の例を示す。共振器の鏡面の幅を基本モードしか立たない幅にする。鏡面幅を30cmから18cmに変更した場合の共振特性、スミスチャート、電界分布を図5.13、図5.14、図5.15に示す。幅が広い場合と比べ、鋭い共振は見られない。この場合には、モード(14,1)から(15,1)への移行の途中の、反射係数が極小となる準共振(S_{14-15})のみしか現れず、電界の集中を伴う共振は起こらない。

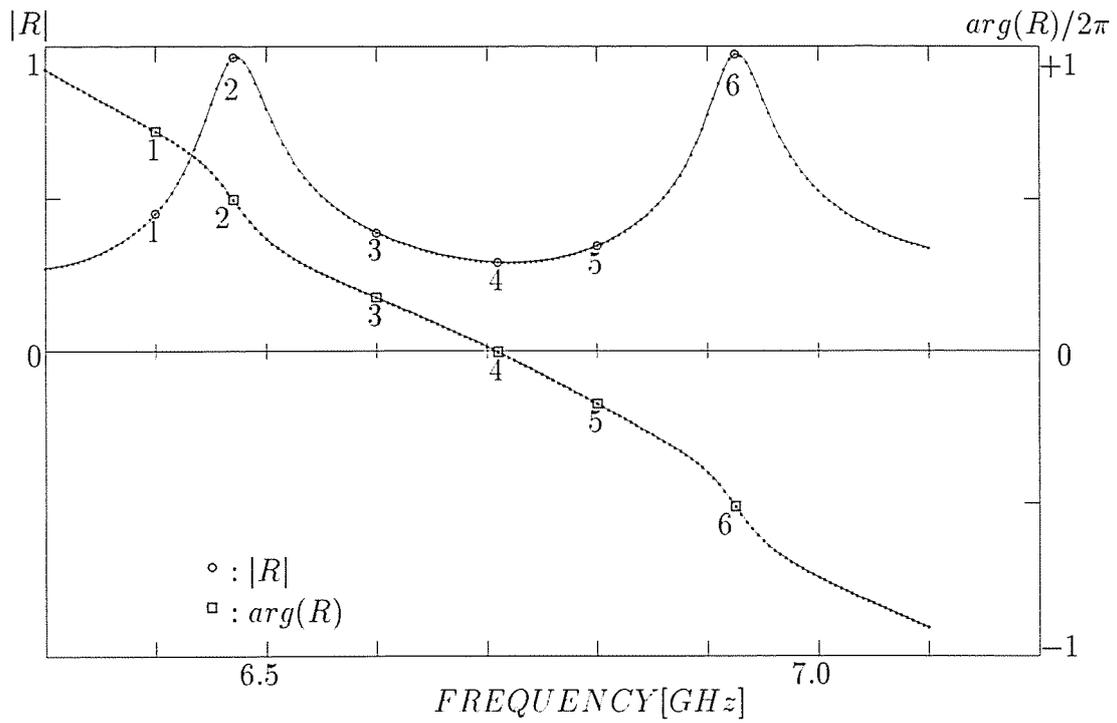


図 5.13: 反射係数の周波数特性 (鏡面幅 18cm)

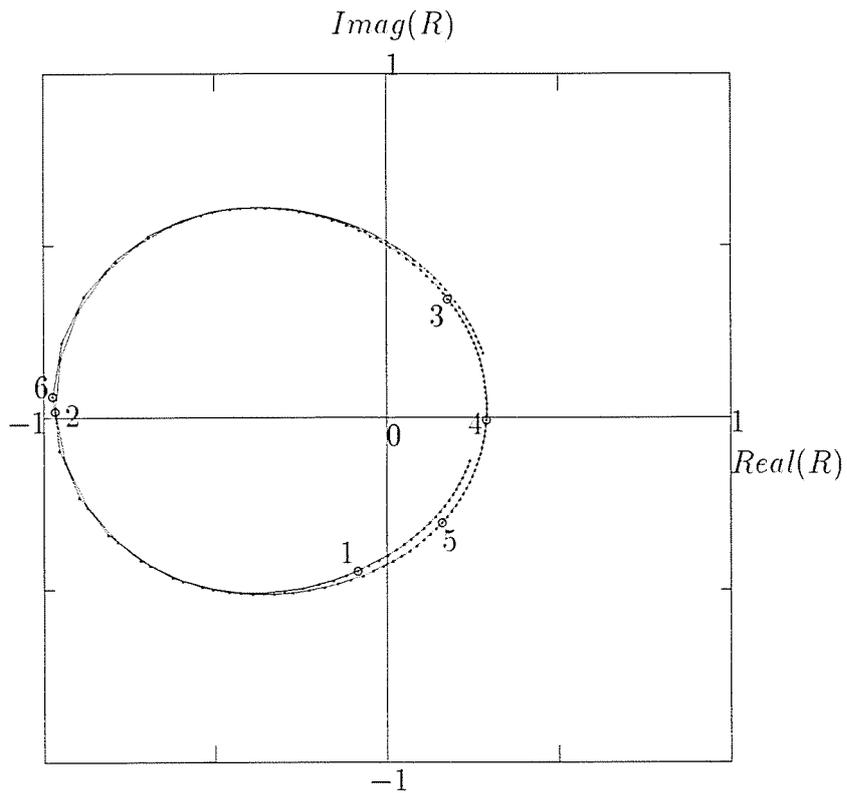
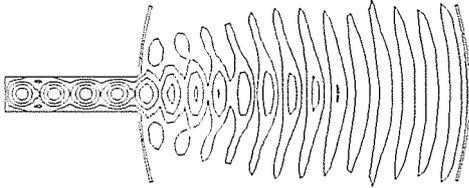


図 5.14: スミスチャート (鏡面幅 18cm)

No.1

FREQUENCY = 6.400000[GHz]

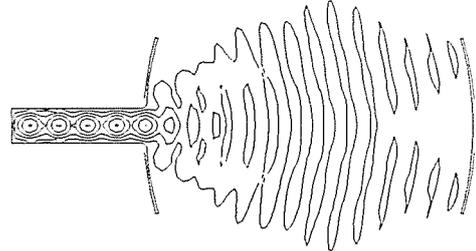
|R| = 0.451738 ARG(R) = -100.589[DEG]



No.4

FREQUENCY = 6.710000[GHz]

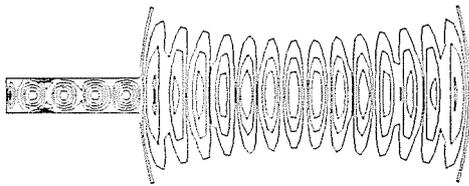
|R| = 0.290159 ARG(R) = -1.256[DEG]



No.2

FREQUENCY = 6.470000[GHz]

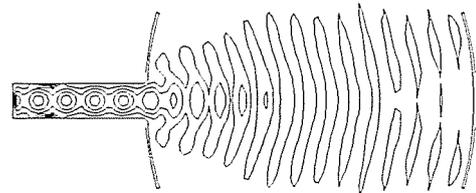
|R| = 0.964960 ARG(R) = 178.865[DEG]



No.5

FREQUENCY = 6.800000[GHz]

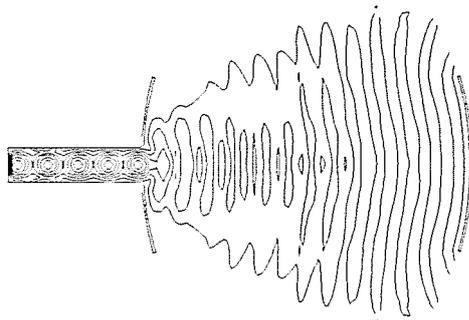
|R| = 0.344321 ARG(R) = -62.181[DEG]



No.3

FREQUENCY = 6.600000[GHz]

|R| = 0.388285 ARG(R) = 62.616[DEG]



No.6

FREQUENCY = 6.925000[GHz]

|R| = 0.975340 ARG(R) = 176.354[DEG]

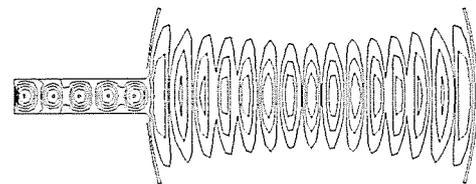


図 5.15: 内部電界分布 (鏡面幅 18cm)

5.2 開放型共振器の等価回路

本節では開放型共振器の等価回路が、閉じた共振器の等価回路と同様に表すことが出来ることを示し、また、共振および反共振の性質を述べる。

一般に閉じた共振器の等価回路は図 5.16 のように表される [11]。本来は、このような集中定数回路ではなく、空間スケールを考慮した分布定数回路で定義すべきであるが、定性的な評価を行うには、これで十分である。

本節では、直列共振回路と並列共振回路の共振時および非共振時の位相に着目して議論を進める。

5.2.1 種々の共振回路の周波数特性

負荷インピーダンスを Z_L 、線路の特性インピーダンスを Z_0 、負荷アドミッタンスを Y_L 、特性アドミッタンス Y_0 とすると反射係数 R は次式で与えられる。

$$R = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = \frac{Y_0 - Y_L}{Y_0 + Y_L} \quad (5.4)$$

直列共振回路

まず、図 5.17 の直列共振回路を考える。この回路の負荷インピーダンス Z_L は、

$$Z_L = R_L + j \left(\omega L_L - \frac{1}{\omega C_L} \right) = R_L + jX_L \quad (5.5)$$

と与えられる。

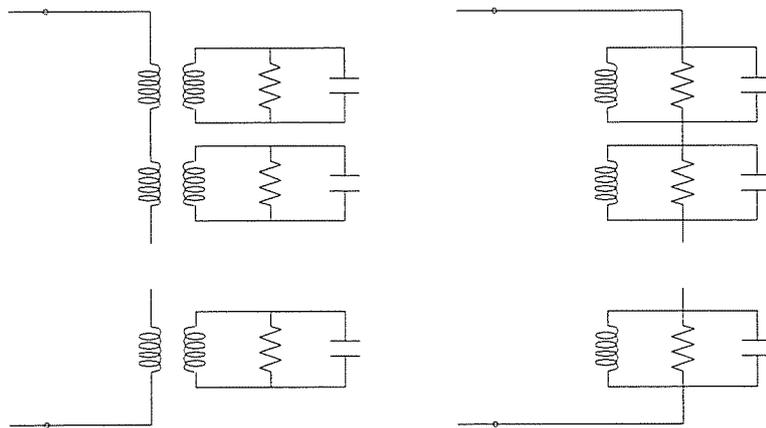


図 5.16: 閉じた共振器の等価回路

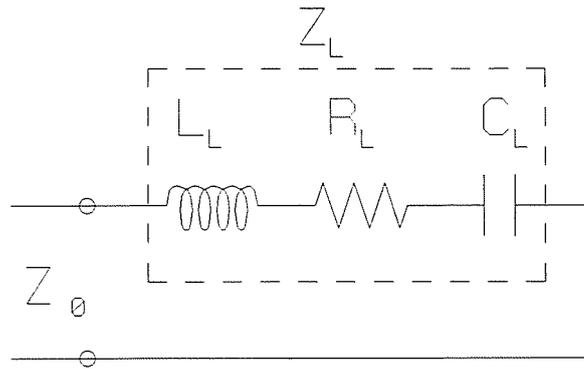


図 5.17: 直列共振回路

共振状態を、インピーダンスの虚部が0($X_L = 0$)の状態、非共振状態を、共振周波数から十分離れインピーダンスの虚部が実部より十分大きい状態 ($|X_L| \gg |R_L|$) とする。

共振周波数 ω_0 は

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_L C_L}} \quad (5.6)$$

と表され、この時のリアクタンス X_L は0となる。したがって、反射係数 R_{ser} は

$$R_{ser}(\omega = \omega_0) = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} \quad (5.7)$$

となり、反射係数の大きさは極小となる。

Z_0 は実数なので、反射係数の位相は、

$$\arg(R_{ser}(\omega = \omega_0)) = \begin{cases} 2n\pi & (R_L > Z_0 \quad \text{密結合}) \\ (2n+1)\pi & (R_L < Z_0 \quad \text{疎結合}) \end{cases} \quad (5.8)$$

となる。

非共振状態では、リアクタンス $|X_L|$ が大きくなり、抵抗 R_L および線路の特性インピーダンス Z_0 が無視できる。この時、反射係数は

$$R_{ser}(|X_L| \gg R_L, Z_0) = \frac{R_L + jX_L - Z_0}{R_L + jX_L + Z_0} \simeq 1 \quad (5.9)$$

となり、位相は

$$\arg(R_{ser}(|X_L| \gg R_L, Z_0)) \simeq 2n\pi \quad (5.10)$$

となる。

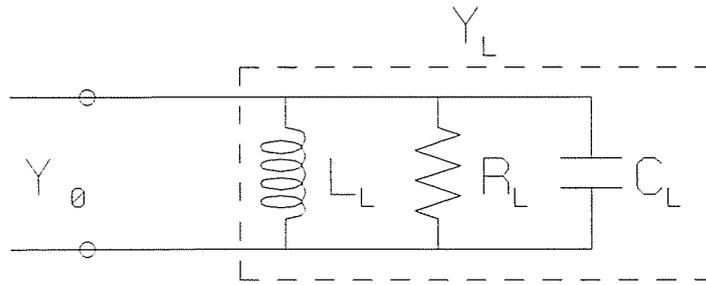


図 5.18: 並列共振回路

並列共振回路

同様に、図 5.18 の並列共振回路のアドミッタンス Y_L を、

$$Y_L = \frac{1}{R_L} + j \left(\omega C_L - \frac{1}{\omega L_L} \right) = G_L + jB_L \quad (5.11)$$

とすると、共振時および非共振時の反射係数は

$$R_{par}(\omega = \omega_0) = \frac{Y_0 - G_L}{Y_0 + G_L} \quad (5.12)$$

$$\arg(R_{par}(\omega = \omega_0)) = \begin{cases} 2n\pi & (Y_0 > G_L \quad \text{密結合}) \\ (2n+1)\pi & (Y_0 < G_L \quad \text{疎結合}) \end{cases} \quad (5.13)$$

$$R_{par}(|B_L| \gg G_L, Y_0) = \frac{Y_0 - G_L - jB_L}{Y_0 + G_L + jB_L} \simeq -1 \quad (5.14)$$

$$\arg(R_{par}(|B_L| \gg G_L, Y_0)) = (2n+1)\pi \quad (5.15)$$

となる。

複数の共振回路の接続方法

今、考えている共振器は、前節で示したように複数の共振周波数を有する。これを実現するには、上記の直列共振回路および並列共振回路を複数接続すれば良い。

二つの共振回路を接続するのみでも、以下の4通りの方法が考えられる。

- (a) 二つの直列共振回路を直列に接続
- (b) 二つの直列共振回路を並列に接続
- (c) 二つの並列共振回路を直列に接続
- (d) 二つの並列共振回路を並列に接続

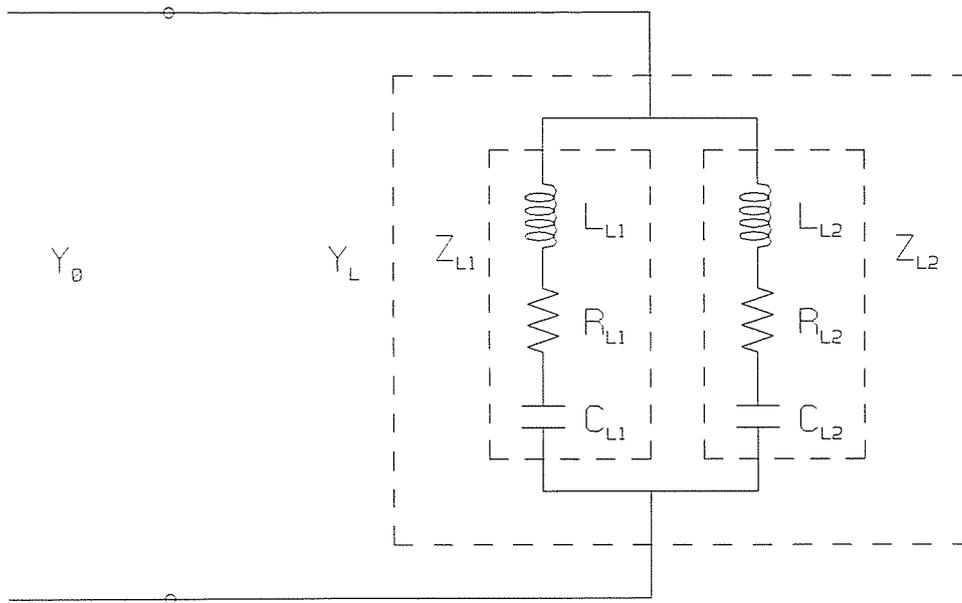


図 5.19: 二つの直列共振回路の並列接続

上記の内、(a),(d)は集中定数回路として扱う場合には、合成抵抗、合成インダクタンス、合成キャパシタンスに対する共振が、一つだけしか発生しないので扱わない。残りの(b),(c)について反射係数の特性を求める。

直列共振回路の並列接続

まず、図 5.19の直列共振回路を並列に接続する場合を考える。この回路に対しては、一方が必ず非共振状態である。いま、 $L2$ の直列共振回路が非共振回路と仮定すると、

$$Z_{L2} \simeq jX_{L2} \quad (5.16)$$

となり合成アドミッタンスは、

$$Y_L = \frac{1}{Z_{L1}} + \frac{1}{Z_{L2}} \simeq \frac{1}{Z_{L1}} + \frac{1}{jX_{L2}} = \frac{jX_{L2} + Z_{L1}}{jZ_{L1}X_{L2}} \simeq \frac{1}{Z_{L1}} \quad (5.17)$$

となり、直列共振回路 $L1$ の状態により周波数特性が決まる。

つまり

$$Z_L = \frac{1}{Y_L} = Z_{L1} \quad (5.18)$$

の直列共振回路の結果と同じものが得られる。

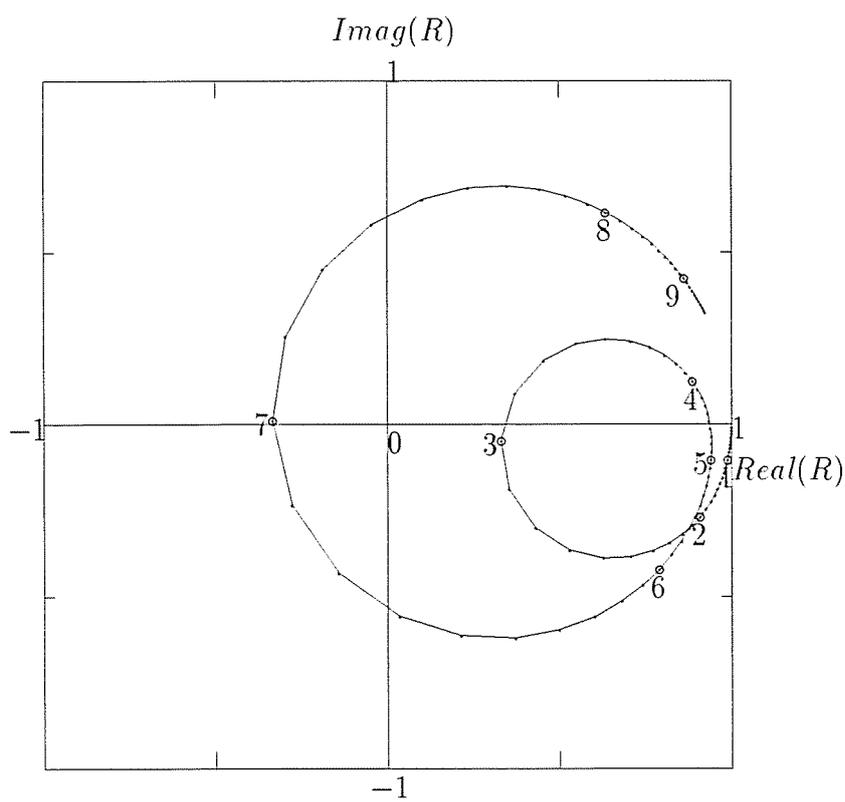
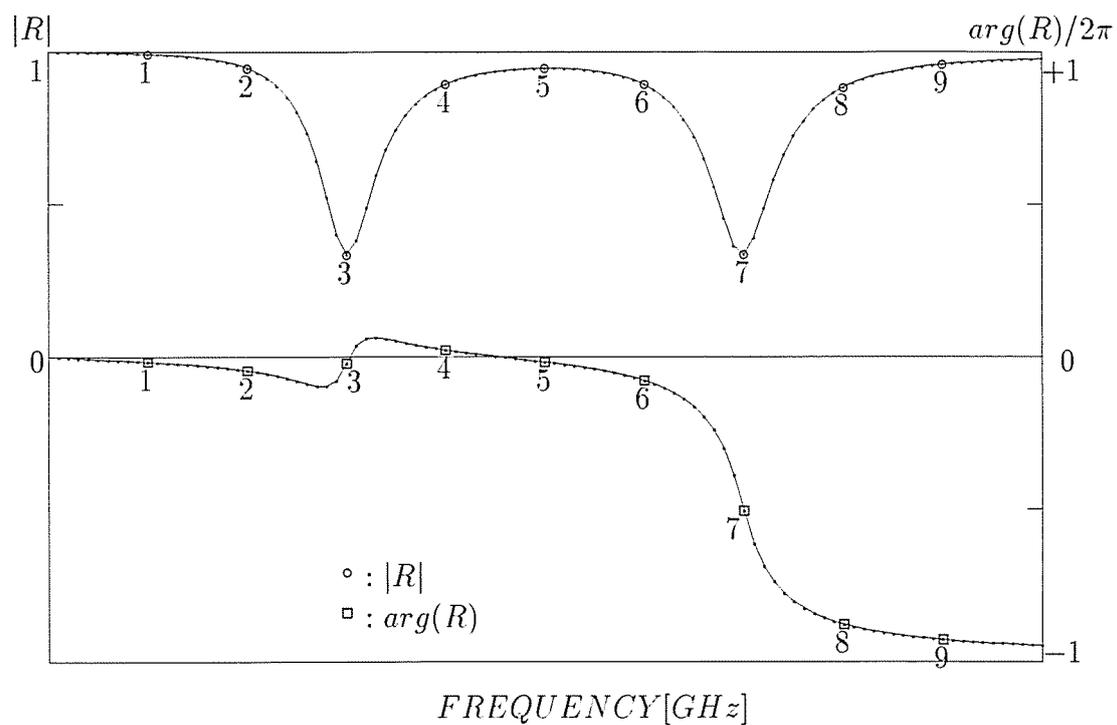


図 5.20: 二つの直列共振回路の並列接続に対する共振特性

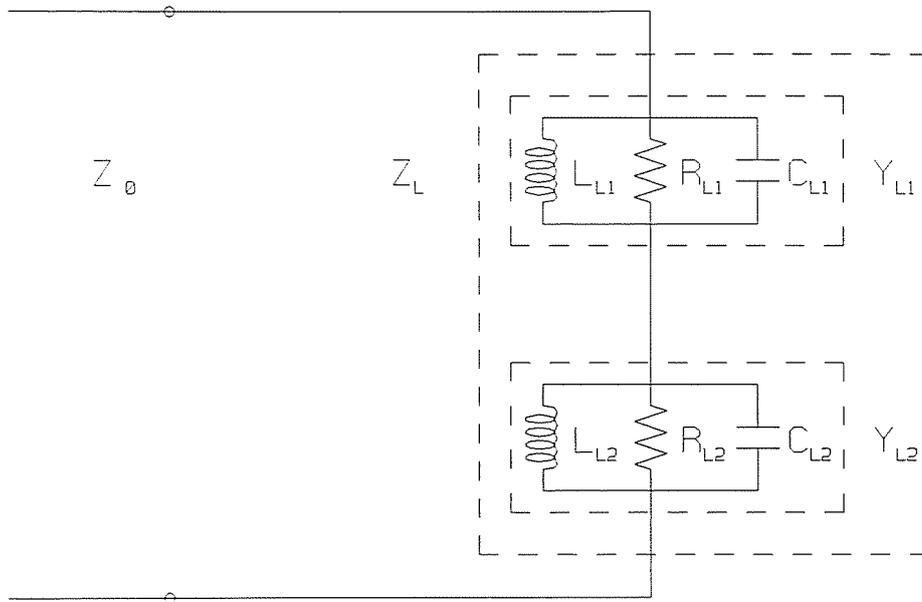


図 5.21: 二つの並列共振回路の直列接続

逆に、 $L1$ が非共振状態のインピーダンスは

$$Z_L = Z_{L2} \quad (5.19)$$

となり、回路 $L1$ の影響を考慮する必要はなくなる。

以上は、一方の回路が非共振状態の時に開放状態となり、他方の回路にのみ電流が流れるため、非共振状態の影響を考慮する必要がないことを示している。同様に、両方の回路が非共振状態の時にも、負荷回路全体が開放になることから直列共振回路が一つのみでの取扱いですむことが理解できる。図 5.20 にこの回路の共振特性とスミスチャートを示す。

並列共振回路の直列接続

次に、図 5.21 の並列共振回路を直列に接続する場合を考える。先ほどと同様に並列共振回路 $L2$ が非共振状態の時には、この回路のアドミッタンス Y_{L2} が

$$Y_{L2} \simeq jB_{L2} \quad (5.20)$$

となり、合成インピーダンスは、

$$Z_L = \frac{1}{Y_{L1}} + \frac{1}{Y_{L2}} \simeq \frac{1}{Y_{L1}} + \frac{1}{jB_{L2}} = \frac{jB_{L2} + Y_{L1}}{jY_{L1}B_{L2}} \simeq \frac{1}{Y_{L1}} \quad (5.21)$$

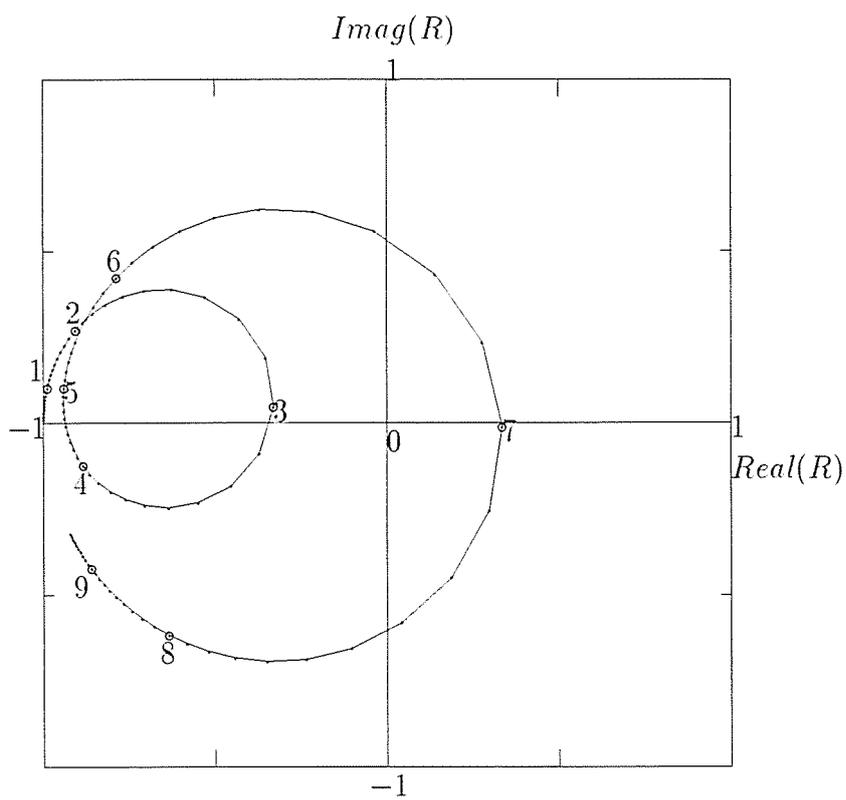
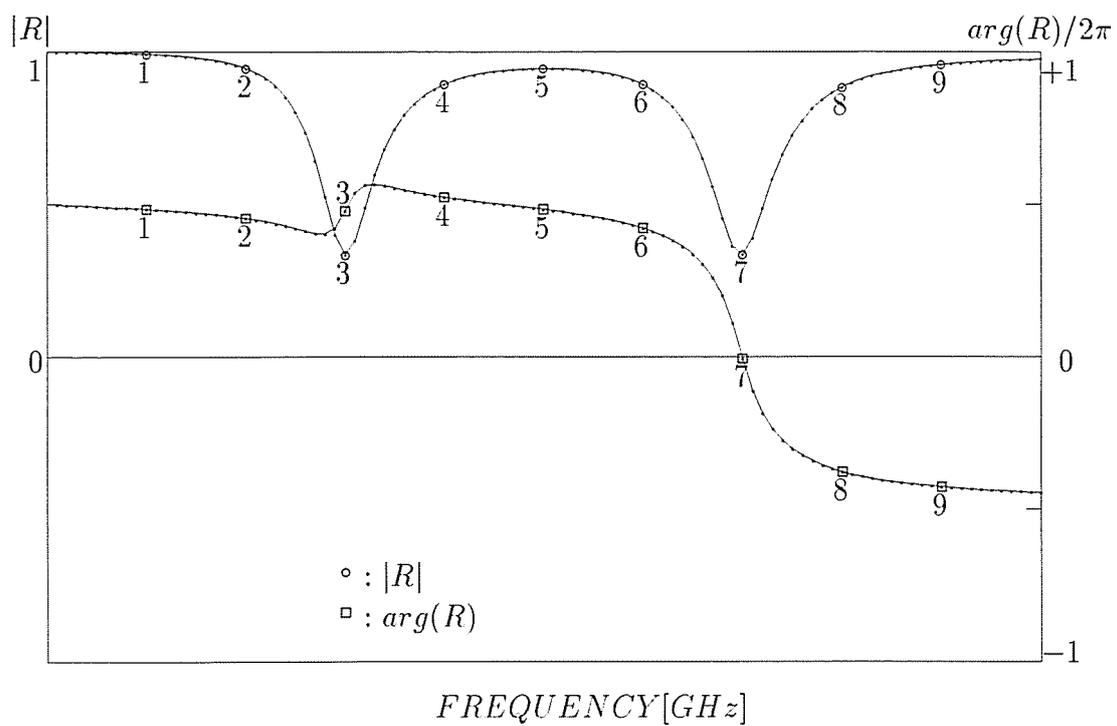


図 5.22: 二つの並列共振回路の直列接続に対する共振特性

となり並列共振回路 $L1$ の状態のみに依存する。

直列共振回路の並列接続とは逆に、一方の回路が非共振状態の時に短絡状態となり、他方の回路にのみ電位差が生じるため、非共振状態の影響を考慮する必要がないことを示している。両方の回路が非共振状態の時にも、負荷回路全体が短絡になる。図 5.22 にこの回路の共振特性とスミスチャートを示す。

5.2.2 開放型共振器の等価回路

上記で示した図 5.20, 図 5.22 のスミスチャートと、解析により得た開放型共振器の共振特性 (図 5.2) を比較すると、共振に近づきはじめる位相が π であることから、開放型共振器の等価回路は、本節の冒頭で述べたように、並列共振回路の直列接続で表現できることが判る。

ここで、非共振状態について、再度考察する。二つの並列共振回路の直列接続を例にすると、共振周波数を ω_1, ω_2 とすると、図 5.22 から判るように、非共振状態は $\omega = 0, \infty$ および $\omega_{12} \in (\omega_1, \omega_2)$ の、三つの周波数で発生する。それぞれの位相は、 $\omega = 0, \infty$ では $(2n+1)\pi$ に漸近するのに対し、 ω_{12} では $(2n+1)\pi$ を跨ぐ形で存在する。この状態を反共振と定義する。前節では、反共振状態でモードが形成されることについて述べた。ここでは、反共振における等価回路の振る舞いとモード形成の関係を述べる。

規格化したインピーダンス Z とその複素共役 Z^* を用いて反射係数を表すと、

$$R = \frac{Z-1}{Z+1} = \frac{(Z-1)(Z^*+1)}{(Z+1)(Z^*+1)} = \frac{ZZ^*-1+(Z-Z^*)}{ZZ^*+1+(Z+Z^*)} \quad (5.22)$$

となる。反共振では位相が π となるので、

$$\text{Im}(R) = 0 \quad (5.23)$$

より、虚部である $Z - Z^*$ が 0 となることから、次式が必要条件となる。

$$\text{Im}(Z) = 0 \quad (5.24)$$

反共振も、非共振状態の一つなので、 $|G_1| \ll |B_1|, |G_2| \ll |B_2|$ から

$$\begin{aligned} \text{Im}(Z) &= \text{Im}\left(\frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2}\right) = \text{Im}\left(\frac{1}{G_1 + jB_1} + \frac{1}{G_2 + jB_2}\right) \\ &= \frac{B_1}{G_1^2 + B_1^2} + \frac{B_2}{G_2^2 + B_2^2} \simeq \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2} = \frac{B_1 + B_2}{B_1 B_2} \end{aligned} \quad (5.25)$$

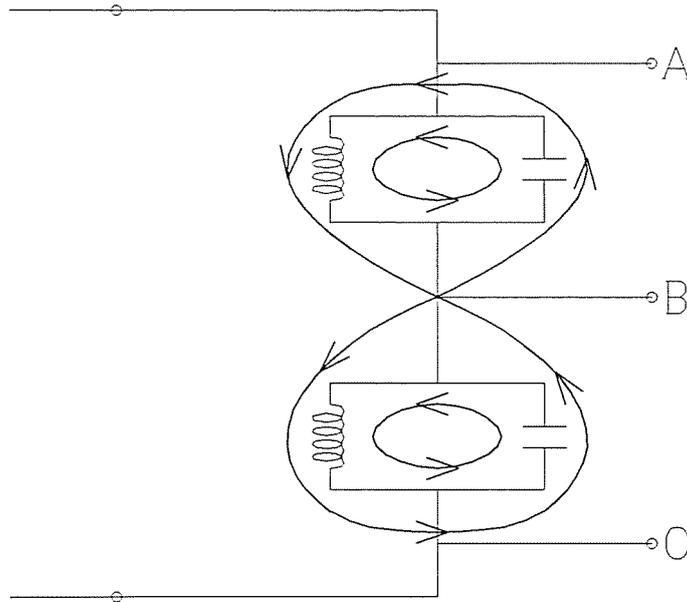


図 5.23: 反共振状態の等価回路

となり、

$$B_1 + B_2 = \omega_{12}(C_1 + C_2) - \frac{1}{\omega_{12}} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = 0 \quad (5.26)$$

となる。この条件は、それぞれの並列共振回路を並列に接続した場合の、合成キャパシタンス C_{12} と合成インダクタンス L_{12} による共振条件に一致する。

反共振状態では図 5.23 の共振回路 L_1, L_2 が、共に非共振状態となり、それぞれのアドミタンスが大きくなるだけではなく、図中 A, B, C 点の電位が等しくなりお互いの素子間で、エネルギーの授受を行う。但し、通常の共振と異なり、抵抗やコンダクタンスの影響がないため、反射係数は極小にはならない。

共振器と対応させると、結合面で全ての共振にたいして短絡状態となることを意味している。

この反共振周波数は、

$$\frac{1}{\omega_{12}^2} = C_{12}L_{12} = (C_1 + C_2) \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) = C_1L_1 \frac{L_2}{L_1 + L_2} + C_2L_2 \frac{L_1}{L_1 + L_2} \quad (5.27)$$

と表されるので、 $C_1L_1 > C_2L_2$ の場合には

$$C_1L_1 > C_{12}L_{12} > C_2L_2 \quad (5.28)$$

となり、反共振周波数 ω_{12} は

$$\omega_1 < \omega_{12} < \omega_2 \quad (5.29)$$

となることが解る。

5.3 壁面損失を考慮した開放型共振器の共振特性

有限の導電率を有する導体と誘電体が接する場合、それぞれの媒質を解析空間とする二領域問題を考える必要がある。しかし、導電率の波数に与える影響が、誘電率が与える影響に比べて十分大きい場合には、導体表面に境界条件を置くことができ、導体領域を解析空間から除くことができる [26-29]。

本節では、有限の導電率を持つ導体壁(損失壁)の境界条件を導き、閉じた共振器に対してその境界条件を適用し、その境界条件の評価を行い、開放型共振器に適用する。

5.3.1 損失壁の境界条件

ここでは、任意の媒質定数を有する二つの媒質が接する場合の境界条件を導き、完全導体壁および損失壁に対する境界条件を導出する。

図 5.24 のような、媒質 1 から媒質 2 へ入射する波を考える。電界は、境界に平行な z 成分のみを有し、平面波近似が可能であると仮定する。

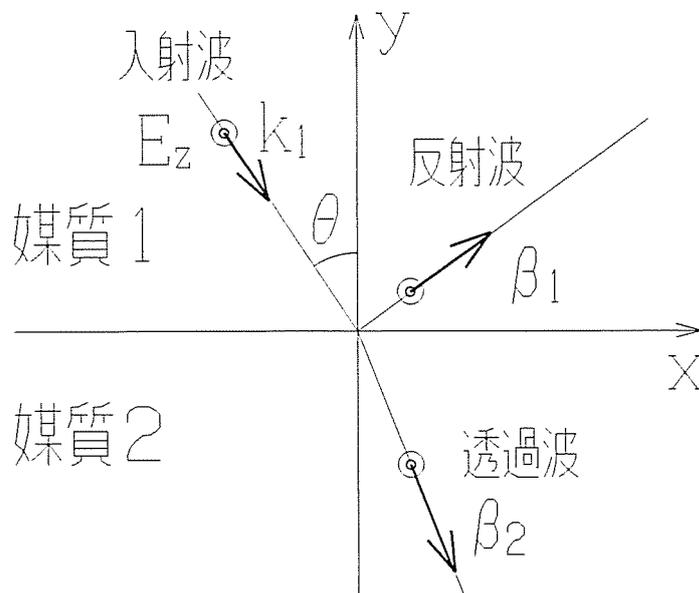


図 5.24: 境界での平面波の反射と透過

これらの媒質中における波数は、時間微分を $j\omega$ としたファラデーおよびマクスウェル・アンペールの法則

$$\nabla \times \mathbf{E}_i = -j\omega\mu_i\mathbf{H}_i \quad (5.30)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_i = (\sigma_i + j\omega\epsilon_i)\mathbf{E}_i \quad (5.31)$$

より得られるヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E}_i + (\omega^2\mu_i\epsilon_i - j\omega\mu_i\sigma_i)\mathbf{E}_i = 0 \quad (5.32)$$

から、

$$k_i^2 = \omega^2\mu_i\epsilon_i - j\omega\mu_i\sigma_i \quad (5.33)$$

と表される。

平面波の入射角を θ とし、電界の反射係数を R 、透過係数を T とするとき、それぞれの媒質における電界は、

$$E_{1z} = E_{0z}e^{-j(k_1 \sin \theta x - k_1 \cos \theta y)} + RE_{0z}e^{-j(\beta_{1x}x + \beta_{1y}y)} \quad (5.34)$$

$$E_{2z} = TE_{0z}e^{-j(\beta_{2x}x - \beta_{2y}y)} \quad (5.35)$$

と表される。ここで、 k_1 は入射波、 β_1 は反射波、 β_2 は透過波のそれぞれの複素波数を示す。電流が空間的に分布する場合 (表面電流ではない) には、3.4.2 節と同様に、ファラデーの法則とマクスウェル・アンペールの法則の積分表現より、境界 $y = 0$ において

$$E_{1z} = E_{2z} \quad (y = 0) \quad (5.36)$$

$$H_{1x} = H_{2x} \quad (y = 0) \quad (5.37)$$

なる連続条件が導かれる。さらに、(5.30) 式の x 成分を用いれば、(5.37) 式は

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E_{1z}}{\partial y} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial E_{2z}}{\partial y} \quad (y = 0) \quad (5.38)$$

と置き換えられる。

(5.34), (5.35) 式を (5.36) に代入すると、

$$e^{-jk_1 \sin \theta x} + Re^{-j\beta_{1x}x} = Te^{-j\beta_{2x}x} \quad (5.39)$$

となり、全ての x について上式が満足するためには、

$$\beta_{1x} = \beta_{2x} = k_1 \sin \theta \quad (5.40)$$

$$1 + R = T \quad (5.41)$$

が得られる。又、 β_1, β_2 はそれぞれの媒質における波数 k_1, k_2 と

$$\beta_{1x}^2 + \beta_{1y}^2 = k_1^2 \quad (5.42)$$

$$\beta_{2x}^2 + \beta_{2y}^2 = k_2^2 \quad (5.43)$$

の関係を満たすので、

$$\beta_{1y} = \sqrt{k_1^2 - (k_1 \sin \theta)^2} = k_1 \cos \theta \quad (5.44)$$

$$\beta_{2y} = \sqrt{k_2^2 - (k_1 \sin \theta)^2} \quad (5.45)$$

を得る。(5.40),(5.44)式より反射波の反射角は、媒質1,2のそれぞれの媒質定数に依存せず、常に入射角と一致する。しかし、透過波の角度は(5.40),(5.45)式のように、媒質定数および、入射角に依存することが解る。

さらに、(5.38)式に、(5.34),(5.35)式の y 偏微分を代入すれば、

$$\frac{1}{\mu_1} \{k_1 \cos \theta e^{-jk_1 \sin \theta x} - \beta_{1y} R e^{-jk_1 \sin \theta x}\} = \frac{1}{\mu_2} \sqrt{k_2^2 - (k_1 \sin \theta)^2} T e^{-jk_1 \sin \theta x} \quad (5.46)$$

となり、(5.44)式より

$$\frac{1}{\mu_1} \{k_1 \cos \theta (1 - R)\} = \frac{1}{\mu_2} \sqrt{k_2^2 - (k_1 \sin \theta)^2} T \quad (5.47)$$

が求められる。これと、(5.41)式を解くと、

$$R = \frac{\mu_2 k_1 \cos \theta - \mu_1 \sqrt{k_2^2 - (k_1 \sin \theta)^2}}{\mu_2 k_1 \cos \theta + \mu_1 \sqrt{k_2^2 - (k_1 \sin \theta)^2}} \quad (5.48)$$

$$T = 1 + \frac{\mu_2 k_1 \cos \theta - \mu_1 \sqrt{k_2^2 - (k_1 \sin \theta)^2}}{\mu_2 k_1 \cos \theta + \mu_1 \sqrt{k_2^2 - (k_1 \sin \theta)^2}} \quad (5.49)$$

を得る。

媒質1が誘電体、媒質2が導体であるとする、波数は

$$k_1^2 = \omega^2 \mu_1 \epsilon_1 \quad (5.50)$$

$$k_2^2 = \omega^2 \mu_2 \epsilon_2 - j\omega \mu_2 \sigma_2 \quad (5.51)$$

となり、さらに $\omega^2 \mu_1 \epsilon_1, \omega^2 \mu_2 \epsilon_2 \ll j\omega \mu_2 \sigma_2$ と置ければ、

$$k_2 \simeq -j\omega \mu_2 \sigma_2 \quad (5.52)$$

となる。

完全導体の場合には、 $|k_2^2| \rightarrow \infty$ となり、

$$R = -1 \quad (5.53)$$

$$T = 0 \quad (5.54)$$

となる。従って、完全導体の境界条件として

$$E_{1z} = E_{2z} = 0 \quad (5.55)$$

が導かれる。

有限の導電率 σ_2 を有する場合には、透過波の角度は、

$$\arctan\left(\frac{\beta_{2x}}{\beta_{2y}}\right) = \arctan\left(\frac{k_1 \sin \theta}{\sqrt{k_2^2 - (k_1 \sin \theta)^2}}\right) \simeq 0 \quad (5.56)$$

となり、伝搬方向と法線方向が一致する。よって、導体中の電磁波の境界における法線方向微分 ($\mathbf{n} = -\mathbf{e}_y$) は、

$$\frac{\partial E_{2z}}{\partial n} = -\frac{\partial E_{2z}}{\partial y} = -j\beta_{2y}E_{2z} \simeq -jk_2E_{2z} \quad (5.57)$$

となる。上式に、(5.36),(5.38) 式の連続条件を適用すると

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E_{1z}}{\partial n} = -\frac{jk_2E_{2z}}{\mu_2} = -\frac{jk_2E_{1z}}{\mu_2} \quad (5.58)$$

が導かれる。ここで、 k_2 は(5.33) 式より

$$k_2 \simeq \pm \sqrt{-j\omega\mu_2\sigma_2} = \pm(1-j)\sqrt{\frac{\omega\mu_2\sigma_2}{2}} \quad (5.59)$$

と表される。符合については、導体中で r の方向に伝搬するときに、ジュール損が発生し、減衰する符号を選べば良い。つまり、 e^{-jk_2r} の指数部が

$$\operatorname{Re}(-jk_2r) < 0 \quad (r > 0) \quad (5.60)$$

となるには、

$$-jk_2r = \pm j(j-1)\sqrt{\frac{\omega\mu_2\sigma_2}{2}}r = \pm(-1-j)\sqrt{\frac{\omega\mu_2\sigma_2}{2}}r \quad (5.61)$$

より、正の符号を選ぶ。従って、 k_2 は

$$k_2 = (1-j)\sqrt{\frac{\omega\mu_2\sigma_2}{2}} \quad (5.62)$$

となり、損失壁の境界条件として、

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E_{1z}}{\partial n} = -(1+j)\sqrt{\frac{\omega\sigma_2}{2\mu_2}}E_{1z} \quad (5.63)$$

が導かれる。

座標系を (n, t, z) 系とすると、(5.30) 式の t 成分より、

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E_{1z}}{\partial n} = j\omega \mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{t} = -j\omega \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t} \quad (5.64)$$

が得られ、一方 E_{1z} は

$$E_{1z} = \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{z} = \mathbf{E}_1 \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{t}) = (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} \quad (5.65)$$

と表され、これらを (5.63) 式に代入すれば、

$$-j\omega \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) \cdot \mathbf{t} = -(1+j) \sqrt{\frac{\omega\sigma_2}{2\mu_2}} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} \quad (5.66)$$

となる。 \mathbf{E}_1 は z 成分のみを有し、 \mathbf{H}_1 はそれと直交するので n, t 成分のみを有する。従って、上式の $\cdot \mathbf{t}$ を除く部分は両辺共 t 成分のみとなるので、

$$-j\omega \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1) = -(1+j) \sqrt{\frac{\omega\sigma_2}{2\mu_2}} (\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}) \quad (5.67)$$

となり、 $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n}$ について整理すると

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n} = \frac{j\omega}{1+j} \sqrt{\frac{2\mu_2}{\omega\sigma_2}} \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu_2}{2\sigma_2}} \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 \quad (5.68)$$

と表される。ここで、

$$Z_2 = (1+j) \sqrt{\frac{\omega\mu_2}{2\sigma_2}} \quad (5.69)$$

なるインピーダンス Z_2 を定義すれば、

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{n} = Z_2 \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 \quad (5.70)$$

と記述でき、インピーダンス境界条件 (IBC) と呼ばれる。なお、時間微分の $j\omega$ の符号および法線の向き \mathbf{n} により、最終結果が上式とは異なる [26-29] ので、注意を要する。

5.3.2 壁面損失による Q 値

次に、壁面損失による Q 値 (Q_w) について考える。 Q 値は共振器内部に蓄えられているエネルギー u の一周あたり平均と、壁面からの損失 P_w の比により定義される。

$$Q_w = \frac{\frac{1}{T} \int u dV}{\int P_w dS} \quad (5.71)$$

ここで、共振器内部のエネルギーは、

$$u = \frac{1}{2}\epsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2 \quad (5.72)$$

で与えられ、共振状態では、 E と H は位相がずれているのみで、それぞれの領域積分は等しく、

$$u = \epsilon E^2 = \mu H^2 \quad (5.73)$$

とも表すことが出来る。一方 P_w は壁面からの電磁エネルギーの流出を表すので、ポインティングベクトルの実部で表される。

$$P_w = \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) \quad (5.74)$$

壁面上での E と H の間には (5.70) 式の関係があるので、

$$P_w = Z_2 H^2 \quad (5.75)$$

よって

$$Q_w = \frac{\sqrt{2\omega\mu_2\sigma_2} \int H^2 dV}{\int H^2 dS} \quad (5.76)$$

となる。共振時には、体積積分と表面積積分はそのまま V と S の比に置き換えられる。

$$Q_w = \sqrt{2\omega\mu_2\sigma_2} \frac{V}{S} = \frac{2V}{\delta S} \quad (5.77)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_2\sigma_2}} \quad (5.78)$$

ここで、 δ は表皮厚さである。

誘電体および導体の透磁率を $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ とするとき、壁面での反射係数は (5.48) 式より、

$$\begin{aligned} R &= \frac{k_1 \cos \theta - \sqrt{k_2^2 - (k_1 \sin \theta)^2}}{k_1 \cos \theta + \sqrt{k_2^2 - (k_1 \sin \theta)^2}} \\ &= \frac{k_1^2 \cos 2\theta + k_2^2 - 2k_1 \cos \theta \sqrt{k_2^2 - (k_1 \sin \theta)^2}}{k_1^2 - k_2^2} \\ &\simeq \frac{1}{-k_2^2} (k_2^2 - 2k_1 k_2 \cos \theta) = -1 + 2 \frac{k_1}{k_2} \cos \theta \\ &= -1 + \frac{2k_1 \cos \theta}{(1-j)\sqrt{\frac{\omega\mu_2\sigma_2}{2}}} \simeq -1 + j k_1 \delta \cos \theta \end{aligned} \quad (5.79)$$

となる。反射係数の大きさは $|R| \simeq 1$ なので、反射係数を位相のみで表す。

$$R = e^{j\phi} \quad (5.80)$$

誘電体中の電界が同じ波数のまま導体中まで延びているとし、電界が0(短絡)となる見かけ上の境界は、(5.34)式より

$$e^{-jk_1 \cos \theta(-y)} + e^{j\phi} e^{-jk_1 \cos \theta y} = 0 \quad (5.81)$$

を満足する。移項して、両辺の対数をとれば、

$$-k_1 \cos \theta(-y) = \phi - k_1 \cos \theta y - \pi \quad (5.82)$$

となり、 y について整理すると、

$$y = \frac{\phi - \pi}{2k_1 \cos \theta} \quad (5.83)$$

となる。さらに、 $\phi \simeq \pi$ より

$$\phi - \pi \simeq -\sin(\pi - \phi) \simeq \sin \phi \simeq \tan \phi \quad (5.84)$$

の関係、および、(5.79)式を用いて

$$y = \frac{-k_1 \delta \cos \theta}{2k_1 \cos \theta} = -\frac{1}{2}\delta \quad (5.85)$$

を得る。上式は、入射角 θ には依存せず、常に表皮厚さの半分が見かけ上の境界となる。これは、(5.77)式の、共振器における損失が $\delta/2$ の厚さの全表面 S で発生することと一致する。

この、見かけ上の境界位置から共振器の共振周波数の変化を求めるためには、厳密には、共振器を固有モード関数展開し、その各モード電圧に対する微分方程式を解く必要がある。ここでは、結果のみを記す [11,12]。

$$\omega_n = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q_w} \right) \quad (5.86)$$

5.3.3 損失壁の境界条件の評価

図5.25に壁面損失の境界条件を評価するための、閉じたオーバーサイズ導波管型共振器のモデルを示す。

この共振器の、特定のモードに対する固有周波数付近の共振特性を、図5.26に示す。図中の白抜きは、導電率を $\sigma = 5.8 \times 10^7 [\Omega^{-1}m^{-1}]$ とした場合の解析結果を示し

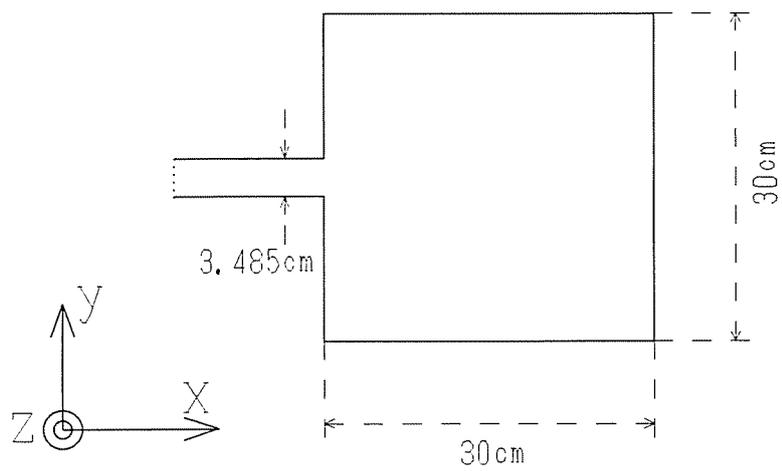


図 5.25: 閉じた共振器

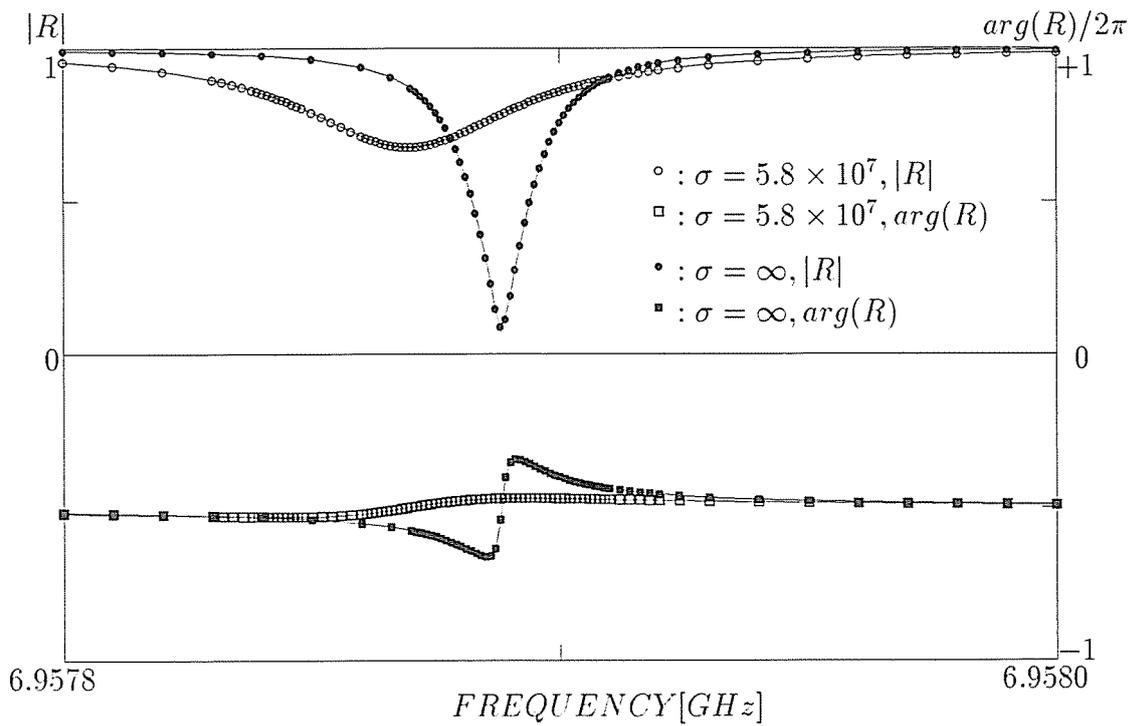


図 5.26: 閉じた共振器の共振特性

FREQUENCY = 6.957870[GHz]

|R| = 0.676704 ARG(R) = 179.778[DEG]

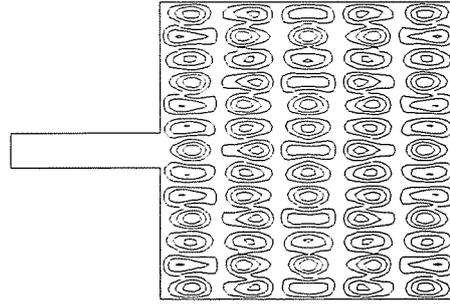


図 5.27: 共振時の内部電界分布

ており、損失壁面の境界条件には、(5.63) 式を用いた。黒印は、 $\sigma = \infty$ の場合の結果である。

この共振周波数のモードは図 5.27 の電界分布から判るように (5,13) である。このモードの固有周波数 f_0 は共振器形状のみで決定される。 E_z のみの $a \times b$ の寸法を有する矩形共振器の固有周波数は、 $a = b = 0.3[m]$, $(n, m) = (5, 13)$ とすると

$$f_0 = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} = 6.9593762[GHz] \quad (5.87)$$

となる。

また、 Q 値 (Q_w) は導電率がわかっているので、(5.77) 式より

$$Q_w = \sqrt{2\omega\mu_2\sigma_2} \frac{ab}{4a} = 1.89 \times 10^5 \quad (5.88)$$

となる。共振周波数 f_a は、この Q_w のために固有周波数より低下する。(5.86) 式より

$$f_a = f_0 \left(1 - \frac{1}{2Q_w}\right) = 6.9593577 \quad (5.89)$$

となる。

これらの理論値と解析結果から得られる固有周波数、共振周波数、 Q 値を比較する。共振周波数 f'_a は反射係数が極小となる周波数なので、共振特性が得られていれば求めることができる。 Q 値はスミスチャートもしくは複素インピーダンスを反射係数より求めることにより得られる。

$$Z = \frac{1+R}{1-R} \quad (5.90)$$

この複素インピーダンスの位相が $\pm\pi/4$ (実部および虚部が等しくなる)周波数 f'_\pm の差で固有周波数 f'_0 を割れば、負荷 Q となる。

$$Q_w = \frac{f'_0}{\Delta f'} \simeq \frac{f'_a}{\Delta f'} \quad (5.91)$$

$$\Delta f' = f'_+ - f'_- = |f(\arg Z = \pi/4) - f(\arg Z = -\pi/4)| \quad (5.92)$$

最後に、固有周波数は(5.86)式より

$$f'_0 = f'_a \frac{1}{1 - 1/(2Q_w)} \simeq f'_a \left(1 + \frac{1}{2Q_w}\right) = f'_a + \frac{\Delta f'}{2} \quad (5.93)$$

となる。共振周波数の近傍で、位相変化が対称とすれば、

$$f'_0 \simeq f'_+ \quad (5.94)$$

である。

図5.26より、これらの値を求めると、

$$\begin{aligned} f'_a &= 6.957870 \pm 1 \times 10^{-6} \quad [GHz] \\ \Delta f' &= 4.96 \times 10^{-5} \pm 1.4 \times 10^{-6} \quad [GHz] \\ Q'_w &= 1.40 \times 10^6 \pm 4.0 \times 10^4 \\ f'_0 &= 6.957895 \pm 1.2 \times 10^{-6} \quad [GHz] \end{aligned} \quad (5.95)$$

となる。

上式と(5.87),(5.88),(5.89)式で与えられる理論値を比較する。一見、 f'_a, f'_0 はほぼ一致しているように見えるが、 $\Delta f'$ のスケールで比較すると、 $(f - f')/\Delta f'$ は数百倍以上の大きな差を有している。一方、 Q_w はオーダーで一致している。なお、(5.95)式の誤差は解析時の周波数のサンプリングによる誤差を示しており、 f'_a, f'_+, f'_- のそれぞれに独立に発生するものとした。

ところで、図5.26の完全導体に対する特性を見ると、共振が見られる。理想的な完全導体であれば、共振器内ではエネルギーの損失は無いので、反射係数の絶対値は常に1となり共振は見られないはずである。この疑似的なディップが、境界要素法の誤差であることは明白である。この誤差が壁面損失と同様な原因と仮定して、固有周波数を求めると、

$$f'_0(\sigma = \infty) = 6.9578941 \pm 1.2 \times 10^{-6} \quad [GHz] \quad (5.96)$$

となり、(5.95)式の固有周波数とほぼ一致する。

導電率を先ほどの半分の $\sigma_{1/2} = 2.9 \times 10^7$ とした場合も同様に求めると

$$\begin{aligned}f'_a(\sigma = \sigma_{1/2}) &= 6.957620 \pm 1 \times 10^{-6} \quad [GHz] \\Q'_w(\sigma = \sigma_{1/2}) &= 1.04 \times 10^6 \pm 2.2 \times 10^4 \\f'_0(\sigma = \sigma_{1/2}) &= 6.957895 \pm 1.2 \times 10^{-6} \quad [GHz]\end{aligned}\tag{5.97}$$

となり、固有周波数は一致し、 Q_w もほぼ $1/\sqrt{2}$ 倍になっている。

境界要素法による誤差の原因の一つに境界要素サイズが考えられる。以上の例は境界要素サイズを $1cm$ (波長の $1/4$ 程度)とした。表5.2に境界要素サイズを $0.5, 0.25cm$ とした場合の固有周波数と Q 値を示す。

固有周波数および Q 値は要素サイズを細かく取るに従い理論値に近づく。また、サイズが $1cm$ の場合と同様、固有周波数および $Q/\sqrt{\sigma}$ は導電率に依存しないことも解る。

理論値からのずれが境界要素サイズのみ依存する事から、(5.63)式で与えられる損失壁に対する境界条件は妥当であると結論できる。

固有周波数 f_0 [GHz]

要素サイズ	導電率		
	$\sigma = \infty$	$\sigma = 5.8 \times 10^7$	$\sigma = 2.9 \times 10^7$
(理論値)	6.9593762 0.000	6.9593762 0.000	6.9593762 0.000
1cm	6.9578941 0.0014821	6.9578948 0.0014814	6.9578951 0.0014811
0.5cm	6.9589432 0.0004330	6.9589430 0.0004332	6.9589442 0.0004320
0.25cm	6.9590666 0.0003096	6.9590673 0.0003089	

上段：固有周波数 f'_0 , 下段： $f_0 - f'_0$ Q 値 (Q_w)

要素サイズ	導電率		
	$\sigma = \infty$	$\sigma = 5.8 \times 10^7$	$\sigma = 2.9 \times 10^7$
(理論値)	∞	1.89×10^5 24.86	1.34×10^5 24.86
1cm	$5.6 \times 10^5 \pm 0.6 \times 10^5$	$1.40 \times 10^5 \pm 0.04 \times 10^5$ 18.4 \pm 0.5	$1.05 \times 10^5 \pm 0.02 \times 10^5$ 19.5 \pm 0.4
0.5cm	$15.4 \times 10^5 \pm 4.8 \times 10^5$	$1.65 \times 10^5 \pm 0.05 \times 10^5$ 21.7 \pm 0.7	$1.19 \times 10^5 \pm 0.03 \times 10^5$ 22.1 \pm 0.5
0.25cm	$21.3 \times 10^5 \pm 9.2 \times 10^5$	$1.71 \times 10^5 \pm 0.06 \times 10^5$ 22.4 \pm 0.8	

上段：Q 値 (Q'_w) , 下段： $Q'_w / \sqrt{\sigma}$

表 5.2: 固有周波数と Q 値の境界要素サイズ依存性

5.3.4 開放型共振器の壁面損失

図 3.3 のモデルに、損失壁の境界条件および完全導体の境界条件を与えた場合の、共振特性およびスミスチャートを図 5.28、図 5.29 に示す。また、この共振特性から求めた共振周波数と Q 値を、表 5.3 に示す。表中の Q 値は共振特性に複数の共振が重畳しているため、(5.91) 式の f_{\pm} を求めることができないので、電力反射係数 (R^2) の半値全幅を Δf として求めた。

図 5.28、図 5.29 からは極小値の反射係数の絶対値に若干の差はあるものの、反射係数の特性はほぼ一致している。表 5.3 から、共振周波数および Q 値は周波数のサンプリング誤差の範囲に収まっていることが判る。

これらの結果は、開放型共振器は、閉じた共振器と異なり、壁面の損失に比べ開口部からの電磁波の漏れによるエネルギーの損失がはるかに大きいことを示している。従って、開放型共振器の解析において、壁面損失の寄与は小さく、考慮の必要は無いと結論できる。

	$\sigma = \infty$	$\sigma = 5.8 \times 10^7$	差
f_a	$6.4821 \pm 1.0 \times 10^{-4}$	$6.4821 \pm 1.0 \times 10^{-4}$	$0.0000 \pm 1.4 \times 10^{-4}$
Q	3965 ± 343	3898 ± 331	67 ± 447
f_a	$6.5080 \pm 1.0 \times 10^{-3}$	$6.5080 \pm 1.0 \times 10^{-3}$	$0.0000 \pm 1.4 \times 10^{-3}$
Q	543 ± 64	542 ± 64	1 ± 91
f_a	$6.7200 \pm 1.0 \times 10^{-3}$	$6.7200 \pm 1.0 \times 10^{-3}$	$0.0000 \pm 1.4 \times 10^{-3}$
Q	23.6 ± 0.1	23.6 ± 0.1	0.0 ± 0.14
f_a	$6.9356 \pm 1.0 \times 10^{-4}$	$6.9356 \pm 1.0 \times 10^{-4}$	$0.0000 \pm 1.4 \times 10^{-4}$
Q	5267 ± 566	5134 ± 537	133 ± 779
f_a	$6.9601 \pm 1.0 \times 10^{-4}$	$6.9601 \pm 1.0 \times 10^{-4}$	$0.0000 \pm 1.4 \times 10^{-4}$
Q	762 ± 12	760 ± 12	2 ± 17

表 5.3: 導電率による共振周波数と Q 値

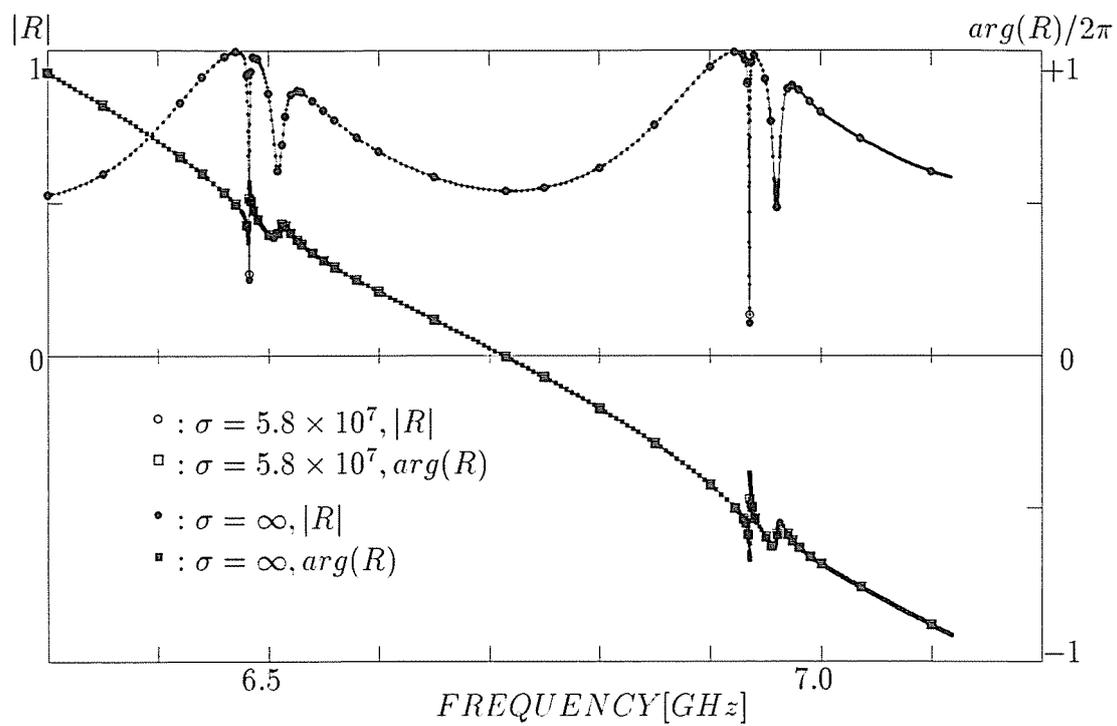


図 5.28: 開放型共振器の共振特性の導電率依存性

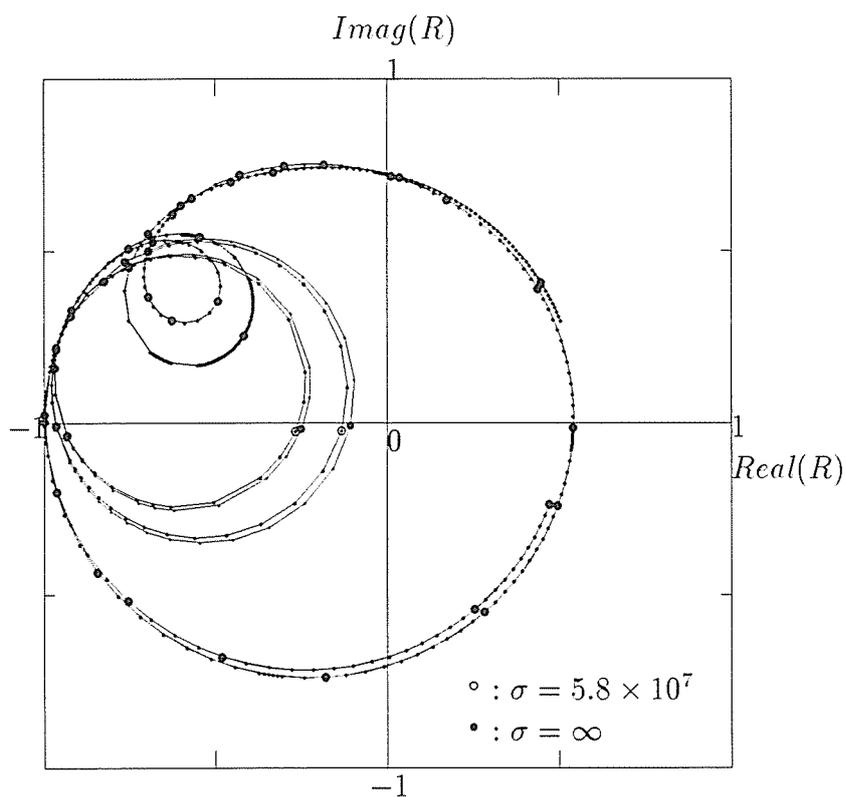


図 5.29: 開放型共振器のスミスチャートの導電率依存性

第6章

多媒質問題に対する非物理解の発生とその除去法

筆者は、一つの媒質が他の媒質を取り囲む場合には、従来の境界要素法では、物理的に説明出来ないスプリアス解が、本来の周波数特性に重畳することを報告した [30]。このスプリアス解は森田、本間等によっても報告されており [1,31]、その解決策として、領域の内部の点に関する積分方程式を拡張境界条件として、境界点に関する一連の積分方程式に加える方法等があげられている。

本論文では、別のアプローチによる、スプリアス解の抑制方法を仮想的な境界の採用によって実現する [32]。

波動方程式に適用する境界要素法は、ソース点と観測点の間がグリーン関数あるいは伝搬関数で結合されるため、ホイヘンスの二次波源の原理に基づく方法と理解できる。ある媒質が別の媒質を包含する多媒質問題を考えるとき、境界要素法における従来の領域分割法では、外側の媒質の光路には異なる媒質を跨ぐ場合が生ずるが、ホイヘンスの原理ではこのような光路のとり方を許してはいない。そこで、この光路を避けるために、同一媒質を仮想的な境界によって分割し、その境界では連続条件を与える“仮想境界分割法”を提案する。この仮想境界分割法と従来の領域分割法に基づく境界要素解析法を、共振器の周波数特性により比較し、スプリアス解発生の原因を条件数を用いて究明する。

また、仮想境界分割法はスプリアス解を除去するのみならず、計算コストの低減が可能なことを示す。

6.1 支配方程式および解析モデル

支配方程式および境界条件には、第3章で述べた、自由空間およびプラズマ領域のヘルムホルツ方程式、完全導体の条件、連続条件、入射条件を用いる(図6.1)。

プラズマは無損失・一定密度とし、異方性を生じる外部磁界はないものとする。

入射条件により、外部からの強制項(励振電流)は評価されているので、第2章で述べた離散化後の境界積分方程式は、 $E_z = u, \nabla E_z \cdot \mathbf{n} = q$ とおくと、

$$Hu - Gq = 0 \quad (6.1)$$

と表される。

H, G にはグリーン関数が含まれており、その要素 h_{ij}, g_{ij} は節点 i と節点 j の結合を示す。グリーン関数が、二点間の距離が0のときに発散することから、 H, G の対角成分 h_{ii}, g_{ii} については解析的な取扱いが必要になる。線形要素を用いた場合の h_{ij}, g_{ij} は、

$$h_{ij} = \hat{h}_{ij} + c_i \delta_{ij} = \hat{h}_i^{j,0} + \hat{h}_i^{j,-1,1} + c_i \delta_{ij} \quad (6.2)$$

$$g_{ij} = g_i^{j,0} + g_i^{j,-1,1} \quad (6.3)$$

と表される。ここで、上付きの添字は要素とそれに対応する内挿関数を示してい

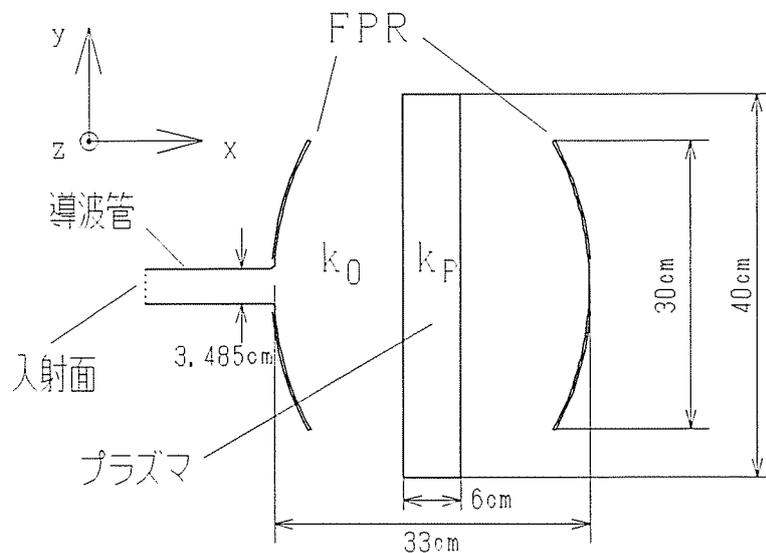


図 6.1: 解析モデル

る。要素に節点 i が含まれるとき、すなわち $i = j$ あるいは $i = j - 1$ のときには、

$$\hat{h}_i^{i,0} = \int_{S_i} \psi_{i,0} \frac{\partial G}{\partial n} dS_i = \int_{S_i} \psi_{i,0} \frac{\partial G}{\partial r} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r) dS_i = 0 \quad (6.4)$$

$$\hat{h}_i^{i,1} = \int_{S_i} \psi_{i,1} \frac{\partial G}{\partial n} dS_i = \int_{S_i} \psi_{i,1} \frac{\partial G}{\partial r} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_r) dS_i = 0 \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} g_i^{i,0} &= \int_{S_i} \psi_{i,0} G dS_i \\ &= \frac{j\ell_i}{4} \left[\frac{1}{k\ell_i} H_1^{(2)}(k\ell_i) - \left(\frac{1}{k\ell_i} \right)^2 \frac{2j}{\pi} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{(s!)^2 (2s+1)} \left(\frac{k\ell_i}{2} \right)^{2s} \left\{ 1 + \frac{2j}{\pi} \left(\psi(s+1) - \ln \frac{k\ell_i}{2} + \frac{1}{2s+1} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} g_i^{i,1} &= \int_{S_i} \psi_{i,1} G dS_i \\ &= -\frac{j\ell_i}{4} \left[\frac{1}{k\ell_i} H_1^{(2)}(k\ell_i) - \left(\frac{1}{k\ell_i} \right)^2 \frac{2j}{\pi} \right] \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\psi(s+1) = -\gamma + \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{s} \right) \quad (6.8)$$

γ : Euler constant

となる [33]。ここで、 ℓ_i は要素 i の長さを示す。

この対角項は、節点の間隔を十分細かく取れば数値積分によって代用は可能であるが、本章では、スプリアス解の発生原因の追求を行うので、誤差を含むものはあらかじめ除去するために、上式を用いる。

6.2 条件数

スプリアス解を同定するために条件数を導入する。条件数は連立方程式の解き易さの目安となる量、あるいは誤差に対する方程式系の強さを示す量で、他の数値解法でも導入されている。

本節では連立方程式に対する連立方程式の次数で規格化した条件数の導出を行う。連立方程式を

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (6.9)$$

と表す。

この方程式の次数が 2 の時の解 \mathbf{x} は、図 6.2 のように、二本の直線の交点として表すことができる。直線の太さは数学的には 0 であるが、計算機による数値解法では

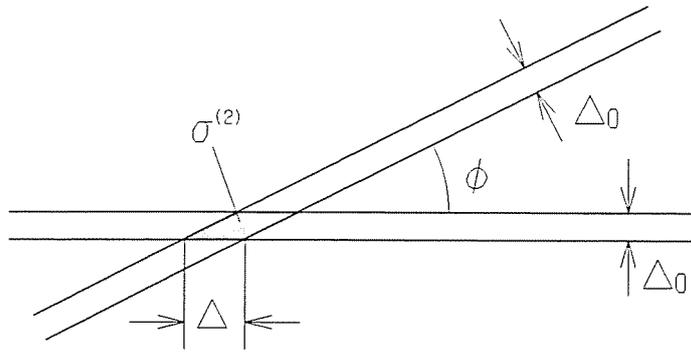


図 6.2: 有限太さの直線の交点

丸め誤差のため有限の太さ Δ_0 が生じ、数値解法における誤差となる。なす角度を ϕ とすると、重なった部分の面積は、

$$\sigma^{(2)} = \frac{\Delta_0^2}{\sin \phi} \quad (6.10)$$

と表される。この面積は二直線が直交したときに最小となり、 ϕ が0に近づくにつれて次第に大きくなる。さらに角度が小さくなり、 $\phi = 0$ になると無限大となるが、この場合、方程式のランクが一次下がっており、解は不定あるいは不能となる。

次数が3の場合について考える。三次元空間において連立方程式中のそれぞれの方程式は平面を表している。これらの面は有限の厚さ Δ_0 を持っており、互いに共面でない場合には、交点は平行六面体となる。平行六面体の体積は二辺がなす角度を ϕ_1 、それらが作る平面と残りの一辺がなす角度を ϕ_2 とすれば、

$$\sigma^{(3)} = \sigma^{(2)} \frac{\Delta_0}{\sin \phi_2} = \frac{\Delta_0^3}{\sin \phi_1 \sin \phi_2} \quad (6.11)$$

となる。

同様にN元連立方程式に拡張すると誤差は次式で与えられる。

$$\sigma^{(N)} = \sigma^{(N-1)} \frac{\Delta_0}{\sin \phi_{N-1}} = \frac{\Delta_0^N}{\prod_i^{N-1} \sin \phi_i} \quad (6.12)$$

条件数を連立方程式の解き易さとして、誤差を Δ_0^N で規格化した逆数として次式のように定義する。

$$\eta^{(N)} = \prod_i^{N-1} \sin \phi_i \quad (6.13)$$

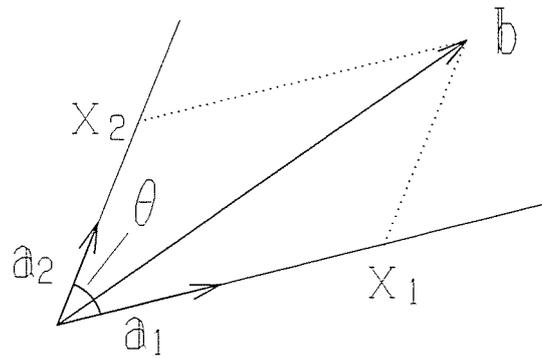


図 6.3: 斜交座標系における任意のベクトル

ここで角度 ϕ は、行列 A のみに依存し、 b は単に平行移動を与えるのみで、 ϕ つまり条件数には依存しない。従って、 A のみから条件数を導くことができる。

(6.9) 式の意味を改めて考える。行列 A の行ベクトルを a_i とすると、(6.9) 式は

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b \quad (6.14)$$

と表される。これは、図 6.3 のように、 a_i を基底とする斜交座標系で、ベクトル b を作るときの、基底ベクトルに対する各成分がベクトル x となることを示している。

基底ベクトルが張る N 次元平行六面体の体積を求める。二次元の場合には、 a_1, a_2 とこれらのベクトルのなす角を ϕ_1 とすると、

$$V^{(2)} = |a_1 \times a_2| = \det A^{(2)} = a_1 a_2 \sin \phi_1 \quad (6.15)$$

となる。この体積 (面積) を大きさに持ち、 a_1, a_2 が作る平面に共面なベクトルを a'_2 とする。三次元の体積は、この面と a_3 がなす角を ϕ_2 とすれば、

$$V^{(2)} = |a'_2 \times a_3| = \det A^{(3)} = a_1 a_2 a_3 \sin \phi_1 \sin \phi_2 \quad (6.16)$$

となる。これを繰り返すと、 N 次元平行六面体の体積は、

$$V^{(N)} = |a'_{N-1} \times a_N| = \det A = a_1 a_2 \dots a_N \sin \phi_1 \dots \sin \phi_{N-1} \quad (6.17)$$

これを、(6.13) 式と比較して、

$$\eta^{(N)} = \frac{V^{(N)}}{a_1 a_2 \dots a_N} = \frac{\det A}{a_1 a_2 \dots a_N} \quad (6.18)$$

を得る。さらに a_i が複素ベクトルであることを考慮すると、

$$\eta^{(N)} = \sqrt{\frac{\det A \det A^*}{\prod_i \sum_j a_{ij} a_{ij}^*}} \quad (6.19)$$

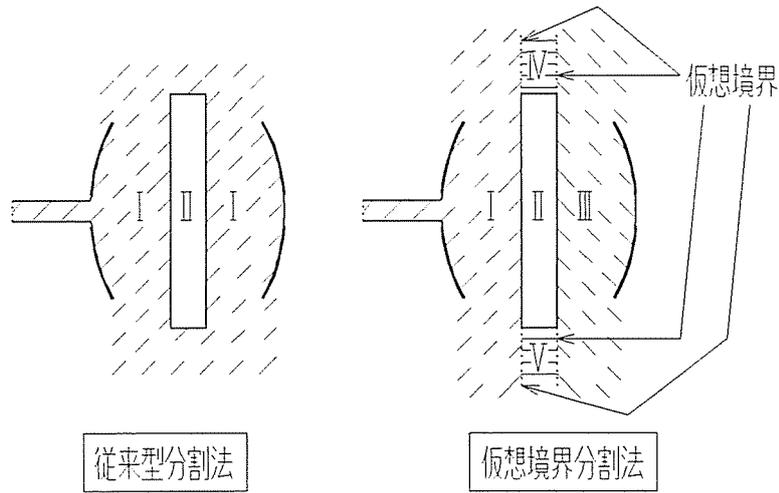


図 6.4: 従来の領域分割法と仮想境界分割法

が導かれる。

次数 N は節点数あるいは平行六面体の次元を示しており、一点あたりの条件数あるいは一次元あたりの条件数として

$$\eta = \left(\eta^{(N)} \right)^{1/N} = \left(\frac{\det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^*}{\prod_i \sum_j a_{ij} a_{ij}^*} \right)^{\frac{1}{2N}} \quad (6.20)$$

を定義する。この条件数を用いれば、異なる解析モデルでも、連立方程式解法の誤差あるいは基底ベクトルの直交性を評価できる。

6.3 二媒質問題

6.3.1 二媒質二領域分割法

媒質定数の異なる媒質を含む場合に、幾何学的形状を考慮して解析する例は少なく、一般に領域の分割数を媒質の数と同じにして、図 6.4(左) のように一媒質一領域として解析される。即ち、自由空間の領域が、プラズマ領域を取り囲むように分割し、その境界では、 u 、 q の連続条件によって結合する。

真空領域における境界積分は、共振器および導波管面上を反時計まわりに、プラズマとの境界はプラズマのまわりを時計まわりに積分する。これは自由空間領域からプラズマ領域を引いたものと理解できる。

自由空間領域、プラズマ領域についての境界積分方程式の離散化結果はそれぞれ

$$\begin{bmatrix} H_{11A}^1 & H_{11B}^1 & H_{12}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{11A}^1 \\ \mathbf{u}_{11B}^1 \\ \mathbf{u}_{12}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11A}^1 & G_{11B}^1 & G_{12}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{11A}^1 \\ \mathbf{q}_{11B}^1 \\ \mathbf{q}_{12}^1 \end{bmatrix}$$

$$H_{12}^2 \mathbf{u}_{12}^2 = G_{12}^2 \mathbf{q}_{12}^2 \quad (6.21)$$

と表される。ここで上付き添字は領域を示し、1が自由空間領域、2がプラズマ領域である。下付き添字は境界を示し、11Aがディリクレ条件の境界、11Bが入射条件境界、12が自由空間とプラズマ領域の間の境界を表す。また、連続条件と入射条件は(3.66),(3.74),(3.80)式より、

$$\mathbf{u}_{12}^1 = {}^* \mathbf{u}_{12}^2 \quad (6.22)$$

$$\mathbf{q}_{12}^1 = -{}^* \mathbf{q}_{12}^2 \quad (6.23)$$

$$\mathbf{q}_{11B}^1 = j\beta(-\mathbf{u}_{11B}^1 + 2\mathbf{u}_{11B}^{1(in)}) \quad (6.24)$$

となる。ここで添字*は積分路が逆向きからくる、逆順を示し、(in)は入射電界を示す。(6.21)~(6.24)式の未知数を左辺にまとめると、次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} G_{11A}^1 & -H_{11B}^1 - j\beta G_{11B}^1 & G_{12}^1 & -H_{12}^1 \\ 0 & 0 & -{}^* G_{12}^2 & -{}^* H_{12}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{11A}^1 \\ \mathbf{u}_{11B}^1 \\ \mathbf{q}_{12}^1 \\ \mathbf{u}_{12}^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H_{11A}^1 & -2j\beta G_{11B}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{11A}^1 \\ \mathbf{u}_{11B}^{1(in)} \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

6.3.2 仮想境界分割法

境界要素法は、節点と積分要素を結ぶ直線を光路と考えるとその二点間をグリーン関数で結合した、ホイヘンスの原理と等価な手法であるといわれる。ところが異なる媒質を含む場合の、二媒質二領域分割法ではホイヘンスの原理を応用したものとは言い難い。即ち、励振側鏡面に節点をとった場合の積分路には反射側鏡面も含まれており、その光路上には屈折率の異なるプラズマ領域が存在するにも関わらず、直接結合しているからである。もちろんプラズマ領域のまわりを自由空間の媒質定数を用いて逆まわりの積分をすることによって、この影響を補償しており、原理的には問題は生じないはずである。

上記の場合でも光路がプラズマ領域を跨がないように、自由空間領域を仮想境界によって図6.4(右)のように、複数の領域に分割する仮想境界分割法を提案する。仮想境界分割法では、入射鏡面から伝搬した波動は、仮想境界およびプラズマ領域との境界で二次波源を作り、さらに自由空間およびプラズマ領域に等方的に伝搬して、反射鏡面への透過波および励振鏡面への反射波を形成する。数式を用いて表現すると、観測点*i*が自由空間内にある場合の、従来型の分割法ではグリーン関数の領域積分は

$$\int_{\Omega_{out}} = \int_{\Omega_{all}} - \int_{\Omega_{in}} \quad (6.26)$$

のような領域演算の引き算と評価でき、一方仮想境界分割法では、

$$\int_{\Omega_{out}} = \int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_3} + \int_{\Omega_4} + \int_{\Omega_5} = \sum_{j \neq 2} \int_{\Omega_j} f(r, r_i, k_0) d\Omega \quad (6.27)$$

のように領域の加算で表される。

一方、仮想境界分割法により角点が増えるため、線形要素特有の角点付近の誤差が推定されるが、角点付近の節点の間隔を小さくすることによって対処する。これでも不足な場合には、*u* と *q* の節点の位置を別々にとる 0-1 次要素の採用等が考えられる [34]。

もう一つの角点の誤差の要因として、仮想境界を加えた場合には三領域の交点が存在し、この点では法線方向偏微分を定義できない。図6.5のように仮想境界の接合点を三点に分散させることによって、図中の *q* のように定義することはできる(向きは二等分角にならない)が、斜線部がどこにも含まれない領域となり誤差を生ずる原因となる。本論文では、この誤差に対しても角点付近の節点間隔を小さくする事により無視できると判断している。

自由空間を四領域に分割したときの境界積分方程式は次式で与えられる。

$$[A_{11} \quad G_{33} \quad G_{IF} \quad -H_{IF}] \begin{bmatrix} x_{11} \\ q_{33} \\ q_{IF} \\ u_{IF} \end{bmatrix} = [B_{11} \quad H_{33}] \begin{bmatrix} z_{11} \\ u_{33} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} G_{11A}^1 & -H_{11B}^1 - j\beta G_{11B}^1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_{11} = \begin{bmatrix} H_{11A}^1 & -2j\beta \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

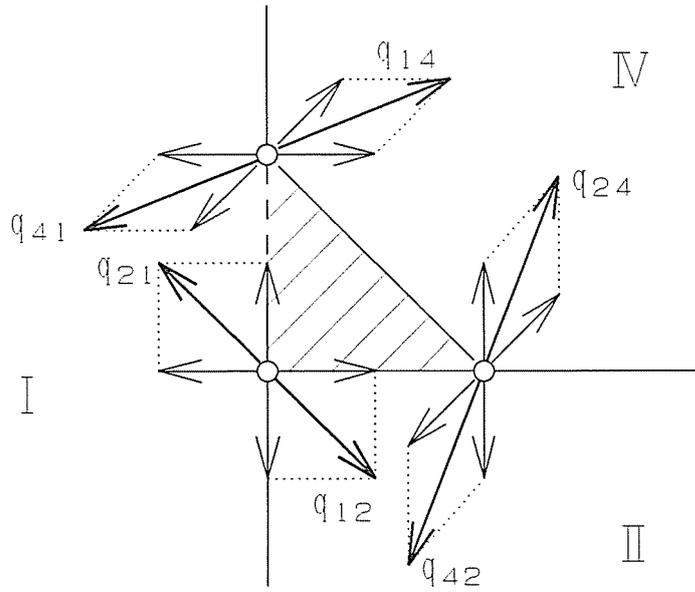


図 6.5: 三領域の交点における法線方向偏微分の定義

$$G_{33} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_{33}^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H_{33} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_{33}^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G_{IF} = \begin{bmatrix} -{}^*G_{12}^1 & 0 & -{}^*G_{14}^1 & 0 & 0 & -{}^*G_{15}^1 & 0 & 0 \\ G_{12}^2 & G_{23}^2 & 0 & -{}^*G_{24}^2 & 0 & 0 & -{}^*G_{25}^2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{14}^4 & G_{24}^4 & G_{34}^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{15}^5 & G_{25}^5 & G_{35}^5 \\ 0 & -{}^*G_{23}^3 & 0 & 0 & -{}^*G_{34}^3 & 0 & 0 & -{}^*G_{35}^3 \end{bmatrix}$$

$$H_{IF} = \begin{bmatrix} {}^*H_{12}^1 & 0 & {}^*H_{14}^1 & 0 & 0 & {}^*H_{15}^1 & 0 & 0 \\ H_{12}^2 & H_{23}^2 & 0 & {}^*H_{24}^2 & 0 & 0 & {}^*H_{25}^2 & 0 \\ 0 & {}^*H_{23}^3 & 0 & 0 & {}^*H_{34}^3 & 0 & 0 & {}^*H_{35}^3 \\ 0 & 0 & H_{14}^4 & H_{24}^4 & H_{34}^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{15}^5 & H_{25}^5 & H_{35}^5 \end{bmatrix}$$

$$T(\mathbf{x}_{11}) = [T(q_{11A}^1) \quad T(\mathbf{u}_{11B}^1)]$$

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{z}_{11}) &= [T(\mathbf{u}_{11A}^1) \quad T(\mathbf{u}_{11B}^{1(IN)})] \\
T(\mathbf{q}_{IF}) &= [T(\mathbf{q}_{12}^2) \quad T(\mathbf{q}_{23}^2) \quad T(\mathbf{q}_{14}^4) \quad T(\mathbf{q}_{24}^4) \quad T(\mathbf{q}_{34}^4) \quad T(\mathbf{q}_{15}^5) \quad T(\mathbf{q}_{25}^5) \quad T(\mathbf{q}_{35}^5)] \\
T(\mathbf{u}_{IF}) &= [T(\mathbf{u}_{12}^2) \quad T(\mathbf{u}_{23}^2) \quad T(\mathbf{u}_{14}^4) \quad T(\mathbf{u}_{24}^4) \quad T(\mathbf{u}_{34}^4) \quad T(\mathbf{u}_{15}^5) \quad T(\mathbf{u}_{25}^5) \quad T(\mathbf{u}_{35}^5)] \\
\mathbf{u}_{IJ}^I &= * \mathbf{u}_{IJ}^J \quad \mathbf{q}_{IJ}^I = -* \mathbf{q}_{IJ}^J
\end{aligned} \tag{6.29}$$

式中の*は(6.22),(6.23),(6.25)式と同様に積分路が逆向きからくる逆順を示し、上付き添字は領域、下付き添字は境界を示している。また、 $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{B}_{11}$ は(6.25)式の第1,第2列を、 $\mathbf{x}_{11}^1, \mathbf{z}_{11}^1$ は(6.25)式の第1,第2行を図6.4(右)の入射面と入射鏡面に対応する要素としてまとめたものであり、逆側の反射鏡面に関する要素は $\mathbf{G}_{33}^3, \mathbf{H}_{33}^3, \mathbf{q}_{33}^3, \mathbf{u}_{33}^3$ にまとめた。 $\mathbf{G}_{IF}, \mathbf{H}_{IF}$ は全て連続条件を表しており、一見複雑そうであるが、規則的である。即ち各列には必ず2つの領域に非零行列要素があり、その一方は積分路が逆向きで \mathbf{G} に関しては符号を変えるだけでよい。

6.4 解析結果

前節で述べた二つの領域法による解析結果を反射係数の周波数特性により評価する。プラズマ密度は $5 \times 10^{11} [\text{cm}^{-3}]$ とし、この時の屈折率はおよそ0.5である。それぞれの方法で連立された境界積分方程式(6.25),(6.28)式を解く。連立方程式の解法にはLU分解によるガウス法を用いた。

特定の周波数 f に対する境界要素法解析により、導波管内の二点の電界 E_z を求め、それを用いて、3.5節で示した方法により反射係数を求める。

図6.6に二媒質二領域分割法、図6.7に仮想境界分割法の解析結果を示す。

各図の横軸は周波数を、縦軸は反射係数の絶対値および位相、条件数 η の自乗を示す。黒丸は計算点を示し、実線は計算点をつないだものである。点線は二つの方法で大きく異なる周波数を示している。

図6.6と図6.7を比較すると、7.504GHzと7.579GHz付近に反射係数の絶対値および位相に特性の違いが見られる。図6.8に導波管に共振器を結合したときの等価回路とその反射係数の周波数特性の一例を示す。図6.6の特性はこの図6.8の特性と比較して位相の反転が見られることから、物理的に説明できない解、即ちスプリアス解であると考えられる。

図6.6と図6.7の条件数からは、仮想境界分割法のほうが、ベクトル列の直交性が

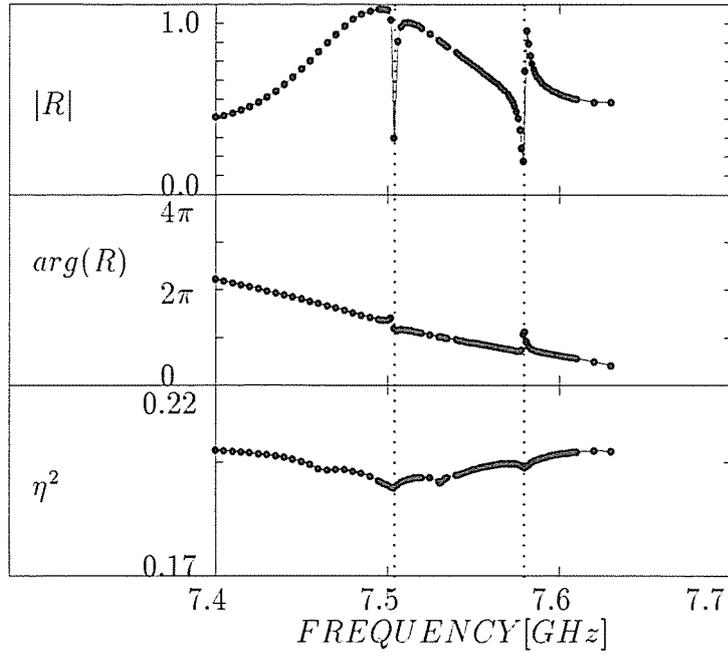


図 6.6: 従来の領域分割法による共振特性

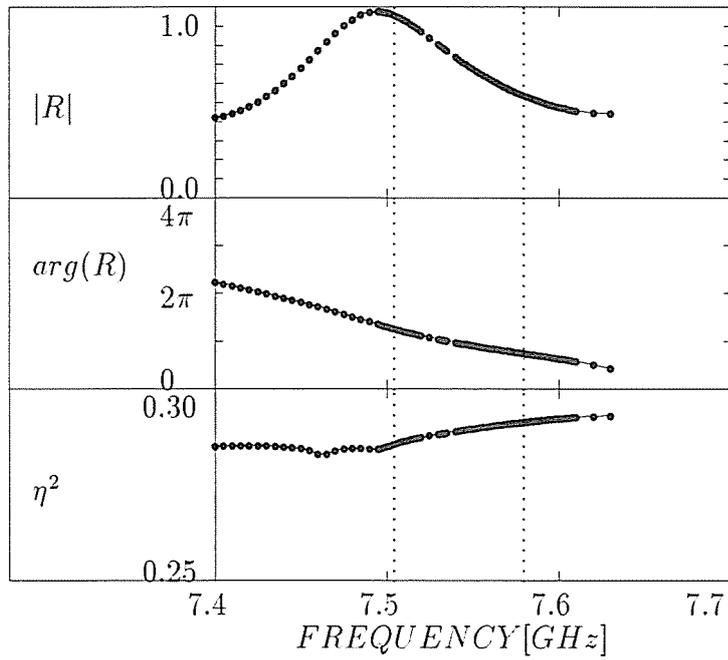


図 6.7: 仮想境界分割法による共振特性

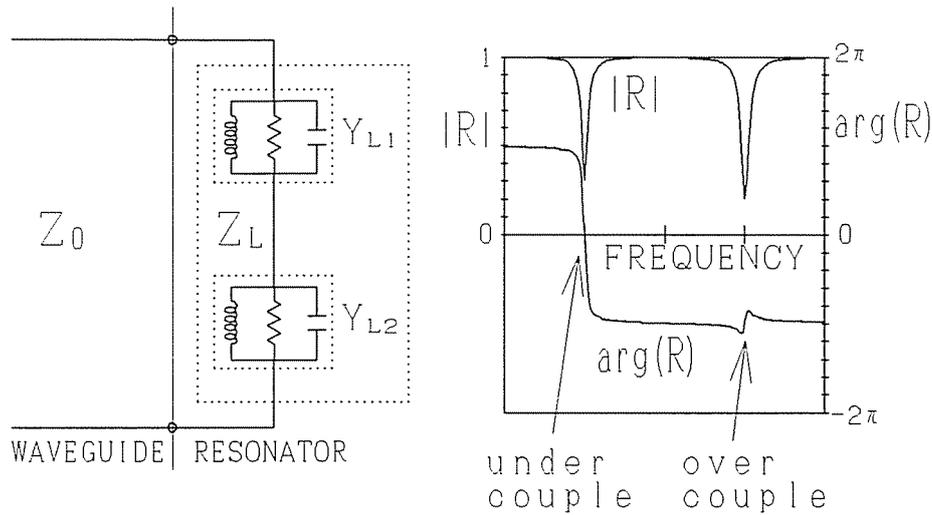


図 6.8: 等価回路と共振特性

よいことが理解できるが、直接スプリアス解との関連性を議論することはできない。そこで、二媒質二領域分割法の(6.25)式の条件数をさらに細かく分析する。節点*i*の所属する境界を自由空間領域の固有の境界[1(11)](入射鏡面、導波管壁、励振部、反射側鏡面)、自由空間の伝搬定数を与えた自由空間とプラズマ領域との境界[1(12)]、プラズマの伝搬定数を与えた自由空間との境界[2(12)]の3通りに分けると、(6.25)式の左辺の係数行列は

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} G_{11A}^1 & -H_{11B}^1 - j\beta G_{11B}^1 & G_{12}^1 & -H_{12}^1 \\ 0 & 0 & -{}^*G_{12}^2 & -{}^*H_{12}^2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} A_{11}^1 & G_{12}^1 & -H_{12}^1 \\ 0 & -{}^*G_{12}^2 & -{}^*H_{12}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^{1(11)} & G_{12}^{1(11)} & -H_{12}^{1(11)} \\ A_{11}^{1(12)} & G_{12}^{1(12)} & -H_{12}^{1(12)} \\ 0 & -{}^*G_{12}^{2(12)} & -{}^*H_{12}^{2(12)} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

と書き直せる。上式の小行列 $A_{11}^{1(11)}, G_{12}^{1(12)}, H_{12}^{1(12)}, G_{12}^{2(12)}$, および $H_{12}^{2(12)}$ は正方行列であり条件数を求めることができる。図 6.9に各小行列の条件数を示す。この図から、 $G_{12}^{1(12)}$ および $H_{12}^{1(12)}$ の条件数が、共に極小となる周波数とスプリアス解の発生周波数が一致していることが解る。

つまり、従来の二媒質二領域分割法でのスプリアス解の発生原因は、自由空間の積分時に逆向き積分によってプラズマ部分の領域を減算するときに行列の直交性が局所的に低下するためである。これらの条件数が極小となる周波数は、プラズマ領

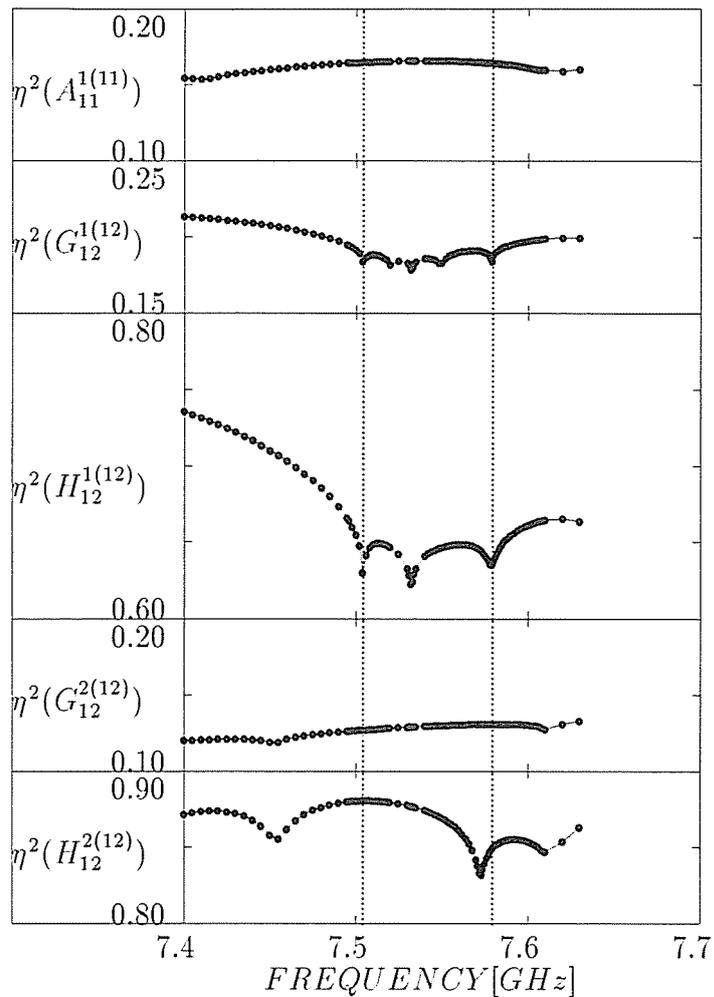


図 6.9: 小行列の条件数

域を取り囲む境界を短絡壁 ($u = 0$) または磁気壁 ($q = 0$) として、自由空間定数を用いた場合の固有値問題の解と一致する。図 6.10 に極小値に対応する TM モード (z 軸を伝搬方向とした場合の x - y の矩形モード) を示す。

また、スプリアス解が (3, 2) モード時の周波数で発生しないのは、励振電界および FPR 鏡面が x - z 面に面対称としたため、中央部の電界も面対称となるためと考えられる。

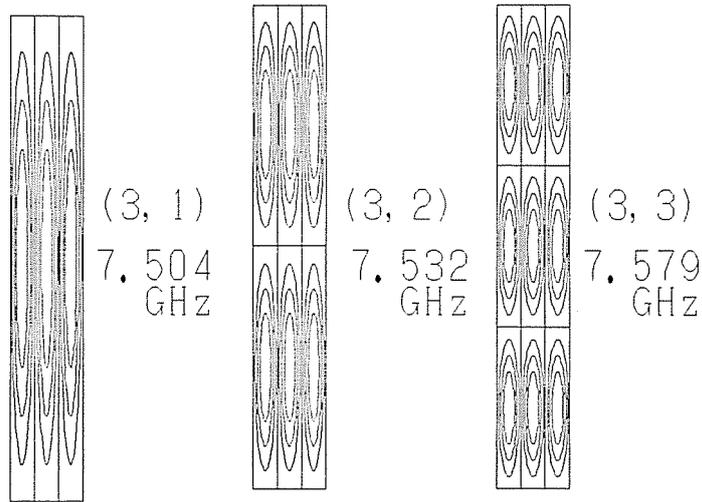


図 6.10: 小行列の条件数が極小となる TM モード

6.5 計算時間

仮想境界分割法は、スプリアス解の除去のみならず、計算時間の低減も計ることが出来る。

境界要素法における計算時間はおもに境界積分に必要な時間 τ_1 と連立方程式を解くのに要する時間 τ_2 に費される。

境界積分に関しては、総積分回数 N_1 に比例すると考えられる。 N_1 は(6.25),(6.28)式の非零要素数を数えることによって求められ、領域 Ω_i の節点数を m_i 、境界 Γ_{ij} の要素数を l_{ij} とすると次式で与えられる。

$$N_1 = \sum_i \left(m_i \cdot \sum_j l_{ij} \right) \simeq \sum_i m_i^2 \quad (6.31)$$

$$m_i \simeq \sum_j l_{ij} \quad (6.32)$$

尚、線形要素を使用した場合、節点数と要素数は若干異なるが、ここでは無視した。

一方、連立方程式の解法はガウス法で密行列を解く場合には、計算時間は未知数の数の3乗に比例する。未知数の総数 N_2 は(6.25),(6.28)式の総列数を数えればよく、総節点数に一致する。

$$N_2 = \sum_i m_i \quad (6.33)$$

i	ℓ_{ij}		m_i
1	115	63	198
2	63	0	148
3	0	63	142
4	10	11	31
5	10	11	31
total			470

i	ℓ_{ij}					m_i
1	115	63	0	10	10	198
2	63	0	63	11	11	148
3	0	63	59	10	10	142
4	10	11	10	0	0	31
5	10	11	10	0	0	31
total						550

従来型分割法

仮想境界分割法

表 6.1: 境界上の要素数

	従来の方法	仮想境界分割法
総積分数 N_1	125588	83194
総未知数 N_2	470	550
計算時間 τ	15.5 sec	11.5 sec

表 6.2: 計算速度の比較

と表される。

よって、計算時間 τ は次式となる。

$$\begin{aligned}
 \tau &= \tau_1 + \tau_2 = \alpha_1 N_1 + \alpha_2 N_2^3 \\
 &= \alpha_1 \sum_i m_i^2 + \alpha_2 \left(\sum_i m_i \right)^3
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

従来型分割法と仮想境界分割法の、各境界上での要素数(節点数)と未知数を表 6.1に、表 6.2には総積分数 N_1 、総未知数 N_2 と計算時間 τ の関係を示す。

この結果より、仮想境界分割法は未知数が増えているにもかかわらず、計算時間が短くなっていることが判る。この理由は、以下の二つが考えられる。第一に連立方程式の解法に必要な時間 τ_2 は未知数の総数の3乗に比例するというものの、仮想境界分割法は(6.28)式のように零要素が多いため、3乗までは効いてこない。次に、仮想境界によって一つの領域を小領域に分ける場合、仮想境界の節点数分だけ未知数は増加するものの、一つの領域に含まれる節点数はもとの領域の節点数より少なくなり、総積分数はそれらの自乗和で表されるため、明らかに小さくなり、

τ_1 には大きな短縮が見込まれる。

この計算時間の短縮は、スプリアスモードの除去を目的としていない場合にも同様に期待できる。

6.6 まとめ

境界要素法において、一つの媒質が異なる媒質を包含する問題の場合、従来から用いられてきた領域分割法ではスプリアス解が発生する。このスプリアス解の周波数は、外側領域を境界積分する時に現れる境界の一部である内側領域に cut を入れた逆回りの積分によって形成される小行列の固有周波数と、一致することを確認した。これは、森田等の結論と一致する [1] が、全ての固有周波数でスプリアス発生するとは限らず、外部領域の界の分布によって発生しないことも示した。

また、このスプリアス解を除去するために、仮想境界分割法を新たに提案した。仮想境界分割法は上記の小行列を避けるために、外部領域を仮想的な境界によって複数の小領域に分割して、それぞれの仮想境界に連続条件を置く方法である。この方法を用いてスプリアス解の除去が可能なことを示した。

さらに、この方法はスプリアス解の除去のみならず、計算時間の短縮につながることを示し、これはスプリアス解を伴わない、一般の問題にも期待できることを示した。

第7章

平板状プラズマを含むファブリ・ペロー共振器

本章では、最も簡単な例として、平板状プラズマをFPR中に閉じ込めた問題を考える。FPR中に誘電体板を挿入した問題の基本モードについては、榎戸 [35] により E-LINE 表示法を用いて既に解析されている。プラズマを誘電体と見なせば、上記の方法と境界要素法解析の比較が出来る。

平板状のプラズマをFPR内に挿入した場合は、鏡面間隔がプラズマ中の波長の伸長によって狭められたような状態になり、共振周波数が短波長側にシフトする。

共振周波数の変化量とプラズマ密度の関係を求めることにより、プラズマの密度の推定が可能となることを7.1節で示す。

一方、プラズマの衝突周波数は電磁波にとって減衰項として働く。7.2節では境界要素法による損失媒質の解析について述べ、更に減衰による Q 値の変化からプラズマの衝突周波数が推定できることを示す。

7.1 プラズマ密度の推定

図7.1のモデルを考える。プラズマは平板内に一様分布していると仮定する。密度が $0, 1, \dots, 5 \times 10^{11} [\text{cm}^{-3}]$ の場合の、前章までで述べた手法を用いて解析した共振特性を、図7.2に示す。これらの図から密度の増加とともに共振周波数が増大していることが判る。この共振周波数の増加量と密度の関係を求めれば、実験において同じモデルの共振特性の測定により、密度を決定することができる。

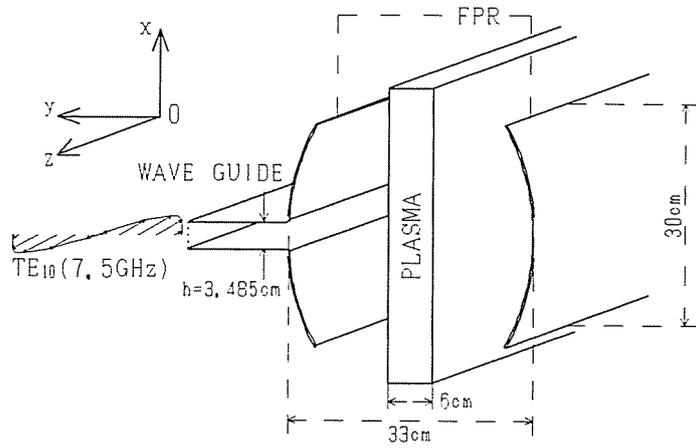


図 7.1: 平板状プラズマを含むファブリペロー共振器

プラズマを挿入しない状態の、基本モードに対する楕円筒FPRの共振条件は [35]

$$k_0 b = \left(\ell + \frac{1}{4} \right) \pi \quad (7.1)$$

で与えられる。ここで b は鏡面間隔、 ℓ は定在波の山の数を表している。

厚み d のプラズマを挿入した場合、プラズマ表面での反射による、モード分布の大きなズレがないとし、平面波の伝搬と仮定すれば、上式の左辺にプラズマの屈折率 N を考慮することにより、プラズマを含む場合の共振条件は、

$$k'_0 (b - d) + N k'_0 d = \left(\ell + \frac{1}{4} \right) \pi \quad (7.2)$$

となる。

ここで、屈折率 N は (3.45) 式および図 3.1 で与えたように密度および周波数に依存し

$$N = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} = 1 + \delta N \quad (7.3)$$

と与えられる。この非線形方程式を解くことにより、プラズマを挿入した場合の共振周波数を求めることができる。(7.2),(7.3) 式から $(\ell + 1/4)\pi$ を消去し、さらに両辺を光速 c で割ると

$$(\omega + \delta\omega)(b - d) + (\omega + \delta\omega)(1 + \delta N)d = \omega b \quad (7.4)$$

となり、さらに $\delta\omega$ について整理すると、かなり粗い近似ではあるが

$$\delta\omega = \frac{-\omega(\delta N)d}{b + (\delta N)d} \quad (7.5)$$

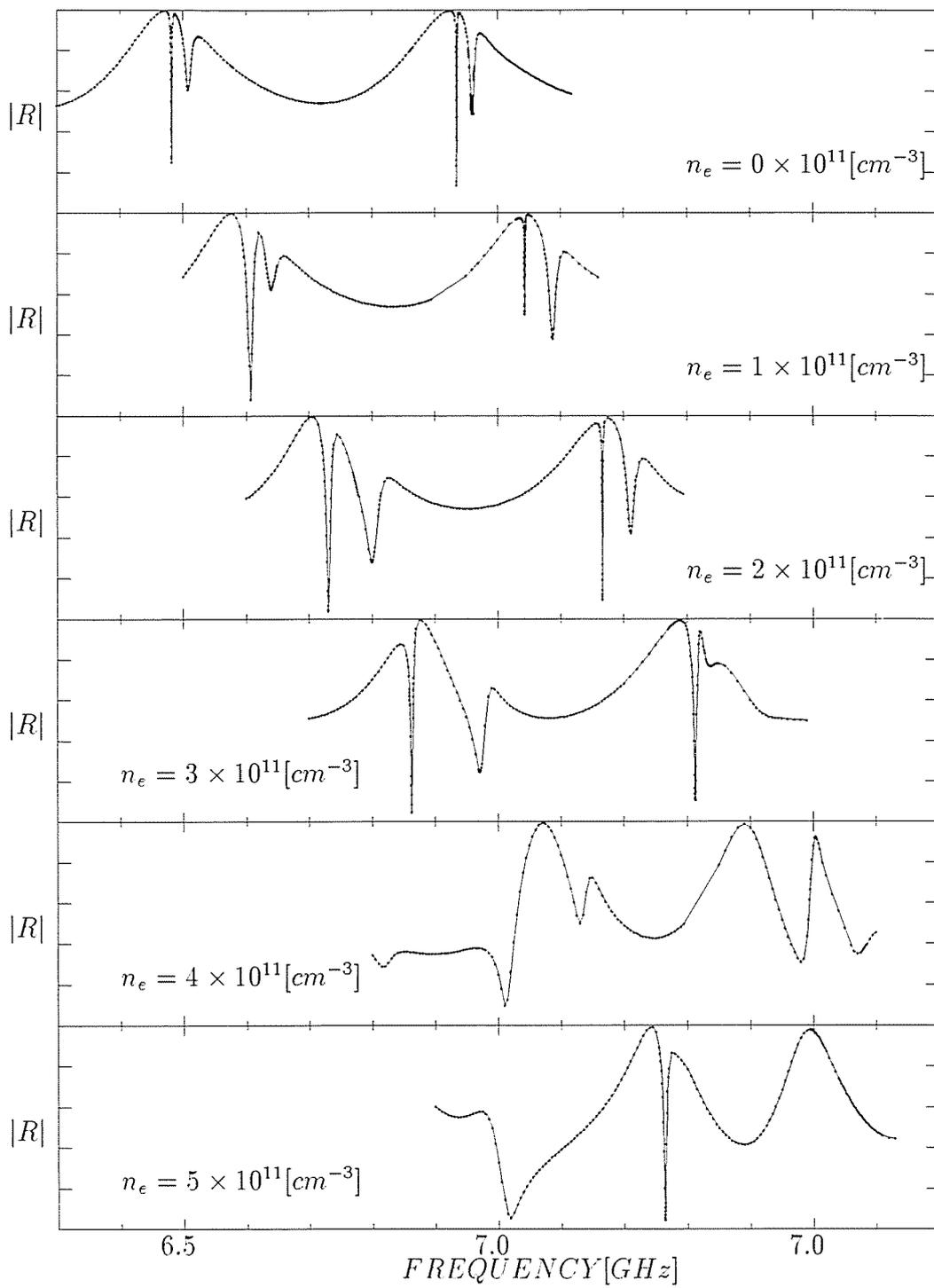


図 7.2: プラズマ密度による共振特性の変化

を得る。

以上は、位相を基に共振周波数を扱ったが、内部電界を評価するために、共振器内に蓄えられているエネルギーに着目して、共振条件を求める。

一般に、共振状態では、共振器中に蓄えられている電界のエネルギーと磁界のエネルギーは一致する。

$$\int_V (\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* - \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) dV = 0 \quad (7.6)$$

体積 V を真空領域 V_0 とプラズマ領域 V_p と考え、プラズマ領域に誘電率変化 $\delta\epsilon$ が発生したとする。

上式の変分をとると、

$$\int_V \{ \delta(\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) - \delta(\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \} dV = 0 \quad (7.7)$$

となり、積分内の各項は

$$\delta(\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) = \mu \mathbf{H}^* \cdot \delta \mathbf{H} + \mu \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{H}^* \quad (7.8)$$

$$\delta(\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \delta \epsilon + \epsilon \mathbf{E}^* \cdot \delta \mathbf{E} + \epsilon \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{E}^* \quad (7.9)$$

となる。

マクスウェル方程式とその複素共役は

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \epsilon \mathbf{E} \quad (7.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} \quad (7.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^* = -j\omega \epsilon \mathbf{E}^* \quad (7.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^* = j\omega \mu \mathbf{H}^* \quad (7.13)$$

と表される。(7.11),(7.13) 式を (7.8) 式に代入すると、

$$\delta(\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*) = \frac{1}{j\omega} (\nabla \times \mathbf{E}^* \cdot \delta \mathbf{H} - \nabla \times \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{H}^*) \quad (7.14)$$

となる。一方、(7.10) 式の変分をとれば、

$$\nabla \times \delta \mathbf{H} = j\epsilon \mathbf{E} \delta \omega + j\omega \mathbf{E} \delta \epsilon + j\omega \epsilon \delta \mathbf{E} \quad (7.15)$$

となり、

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{j\omega \epsilon} (\nabla \times \delta \mathbf{H} - j\epsilon \mathbf{E} \delta \omega - j\omega \mathbf{E} \delta \epsilon) \quad (7.16)$$

が得られる。同様に (7.12) 式の変分から、

$$\delta \mathbf{E}^* = \frac{1}{-j\omega\epsilon} (\nabla \times \delta \mathbf{H}^* + j\epsilon \mathbf{E}^* \delta\omega + j\omega \mathbf{E}^* \delta\epsilon) \quad (7.17)$$

が導かれる。この (7.16), (7.17) 式を (7.9) 式に代入して、

$$\begin{aligned} \delta(\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) &= \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \delta\epsilon + \frac{\mathbf{E}^*}{j\omega} \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{H} - j\epsilon \mathbf{E} \delta\omega - j\omega \mathbf{E} \delta\epsilon) \\ &\quad - \frac{\mathbf{E}}{j\omega} \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{H}^* + j\epsilon \mathbf{E}^* \delta\omega + j\omega \mathbf{E}^* \delta\epsilon) \\ &= -2\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \frac{\delta\omega}{\omega} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \delta\epsilon + \frac{1}{j\omega} \{ \mathbf{E}^* \cdot \nabla \times \delta \mathbf{H} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \delta \mathbf{H}^* \} \end{aligned} \quad (7.18)$$

となる。

(7.14), (7.18) 式を (7.7) 式に代入すれば、

$$\begin{aligned} &\int_V \frac{1}{j\omega} \{ \nabla \times \mathbf{E}^* \cdot \delta \mathbf{H} - \nabla \times \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{H}^* - \nabla \times \delta \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}^* + \nabla \times \delta \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{E} \} dV \\ &\quad + \int_V \left(2\epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \frac{\delta\omega}{\omega} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \delta\epsilon \right) dV = 0 \end{aligned} \quad (7.19)$$

となる。さらに上式の左辺第一項はガウスの積分定理により

$$\frac{1}{j\omega} \int_V \{ \nabla \cdot (\mathbf{E}^* \times \delta \mathbf{H}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \delta \mathbf{H}^*) \} dV = \frac{1}{j\omega} \int_S (\mathbf{E}^* \times \delta \mathbf{H} - \mathbf{E} \times \delta \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{n} dS \quad (7.20)$$

と変形できる。共振器の壁面が完全導体とすれば、境界 S 上で \mathbf{E}, \mathbf{E}^* は 0 となるので、上式は 0 となる。

従って、共振条件は (7.19) 式より

$$2 \frac{\delta\omega}{\omega} \int_V \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV = - \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* (\delta\epsilon) dV \quad (7.21)$$

が得られる。さらに、一次元モデルを考え、プラズマを置くことによる反射を無視できる (真空中とプラズマ中の電界の振幅が同じと仮定できる) とすると

$$\delta\omega = \frac{-\omega \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* (\delta\epsilon) dV}{2 \int_V \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV} = \frac{-\omega}{2} \frac{d\delta\epsilon}{b\epsilon_0 + d\delta\epsilon} \quad (7.22)$$

を得る。 $\delta\epsilon$ は δN との間に

$$\delta N = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} - 1 = \sqrt{\frac{\epsilon_0 + \delta\epsilon}{\epsilon_0}} - 1 = \frac{\delta\epsilon}{2\epsilon_0} \quad (7.23)$$

の関係があり、これを用いると

$$\delta\omega = \frac{-\omega(\delta N)d}{b + 2(\delta N)d} \quad (7.24)$$

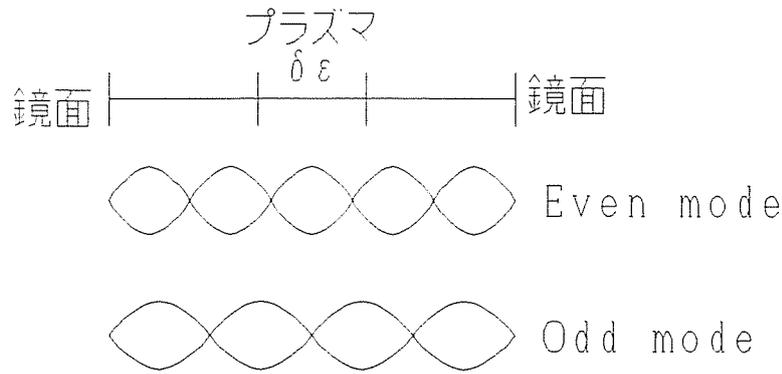


図 7.3: Even モードと Odd モード

を得る。左辺の分母は共振器内の電界によるエネルギーを示しており、誘電率が変化しても大きく変わらないとすれば、つまり、分母の第二項が無視できるとすれば、プラズマ密度が増えるとともに $\delta N(\delta\epsilon)$ は負の値となり、 $\delta\omega$ が正となり共振周波数が増大することが解る。また、この結果は位相により導いた共振条件、つまり(7.5)式の分母の第二項を無視した結果と一致する。

さらに、(7.21)式の右辺の積分の中には $\delta\epsilon$ のみではなく、 $\delta\epsilon$ の存在する局所での $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*$ も入っているので、場所による電界のエネルギー強度の影響も考慮する必要がある。

プラズマの挿入位置をFPRの中央とし、電界分布の影響を考える。第5章で述べた共振状態と反共振状態は周波数が近いところに存在しているので、反共振状態の $\delta\omega$ で共振状態の $\delta\omega$ を代用できると考えられる。反共振状態では、電界の分布は両鏡面において0となるので、図7.3の様に、電界分布が原点に対して対称となる場合と、反対称の場合の二通りが考えられる。それぞれの電界分布は

$$E_a = E_0 \cos k_x x \quad (7.25)$$

$$E_b = E_0 \sin k_x x \quad (7.26)$$

と与えられ、それぞれの体積積分は

$$\int E_a^2(\delta\epsilon) dx = \frac{1}{2} E_0^2(\delta\epsilon) \int_{-d/2}^{+d/2} (1 + \cos 2k_x x) dx = \frac{1}{2} E_0^2(\delta\epsilon) \left(d + \frac{\sin k_x d}{k_x} \right) \quad (7.27)$$

$$\int E_b^2(\delta\epsilon) dx = \frac{1}{2} E_0^2(\delta\epsilon) \int_{-d/2}^{+d/2} (1 - \cos 2k_x x) dx = \frac{1}{2} E_0^2(\delta\epsilon) \left(d - \frac{\sin k_x d}{k_x} \right) \quad (7.28)$$

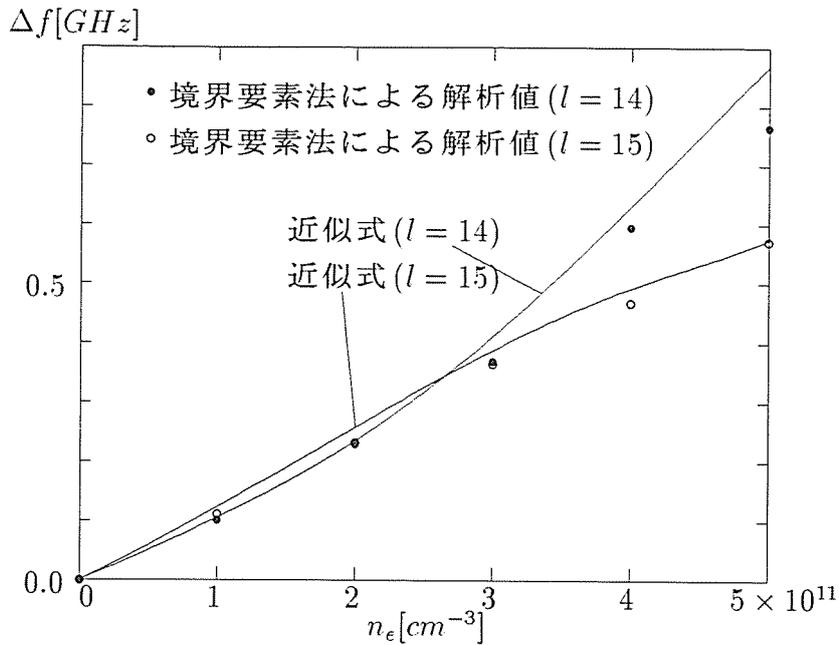


図 7.4: 共振周波数変化と密度

と表される。さきほどと同様に、 $\delta\omega$ を求めると、

$$\delta\omega = \frac{-\omega(\delta N)}{b + 2(\delta N)d} \left(d \pm \frac{\sin k_x d}{k_x} \right) \quad (7.29)$$

を得る。電界分布が対称、反対称の場合を、それぞれ奇関数、偶関数となることから odd モード、even モードと呼んでいる。

上式は、 y 方向の波数 k_y を無視し、また真空中とプラズマ中の電界の振幅が同じと仮定しているので、近似式である。しかし、定性的には、(7.24) 式で与えられる共振周波数の周りを、密度変化とともに正弦波状に波打ち、電界の分布が対称であるか反対称であるかにより位相が反転することを示している。

図 7.4 に、(7.29) 式から求めた近似的な共振周波数変化と図 7.2 により求めた共振周波数変化を示す。但し、後者は反共振周波数の変化で代用している。この図から境界要素法解析の結果と近似式が、定性的に一致していることが判る。また、同一密度でも even モードと odd モードにおいて傾きが異なることが判る。これは、共振周波数変化による密度推定の分解能の違いを意味しており、傾きが急な方が分解能が高くなるので、対象となるプラズマの密度に応じて、even モードと odd モードを使い分けることが可能である。この傾向は、高密度プラズマの方がより強くなっている。

7.2 衝突周波数の推定

プラズマに有限の衝突周波数が存在するとき、電磁波のエネルギーがプラズマに与えられることを、3.2節で述べた。

本節では電磁波のエネルギーの減衰を考慮した境界要素法解析を示し、その結果を用いて衝突周波数の推定について論ずる。

媒質に損失がある場合には誘電率を複素誘電率とすれば良い。この虚部 ϵ'' と実部 ϵ' の比はタンデルタ ($\tan \delta$) として、

$$\tan \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} \quad (7.30)$$

で定義される。虚部 ϵ'' は(3.49)式より

$$\epsilon'' = \frac{\omega_{pe}^2 \nu_e}{\omega^2 \omega} \quad (7.31)$$

と与えられる。従って、 $\tan \delta$ を用いて衝突周波数を表すことができ、

$$\nu_e = \frac{\omega^3}{\omega_{pe}^2} \epsilon' \tan \delta \quad (7.32)$$

となる。

一例として、弱電離プラズマを仮定すれば、衝突周波数 ν_e は電子が中性粒子と衝突する頻度は、

$$\nu_e = \nu_{en} = \bar{v}_e \sigma_{en} n_n \quad (7.33)$$

で与えられる。平均速度 \bar{v}_e はマクスウェル分布を仮定すれば、

$$\bar{v}_e = \left(\frac{8kT_e}{\pi m_e} \right)^{1/2} \quad (7.34)$$

として温度 $T_e[K]$ の関数で表される。又、衝突断面積 σ_{en} は

$$\sigma_{ei} = \pi(r_e + r_i)^2 \simeq \pi r_i^2 \quad (7.35)$$

となり、一般に定数として扱われ共に $10^{-15}[cm^2]$ が用いられる[16]。電離度 α は

$$\alpha = \frac{n_e}{n_e + n_n} \quad (7.36)$$

と定義され、これを用いると(7.33)式は

$$\nu_e = \bar{v}_e \sigma_e n_e \frac{1 - \alpha}{\alpha} \simeq \bar{v}_e \sigma_e \frac{n_e}{\alpha} \quad (7.37)$$

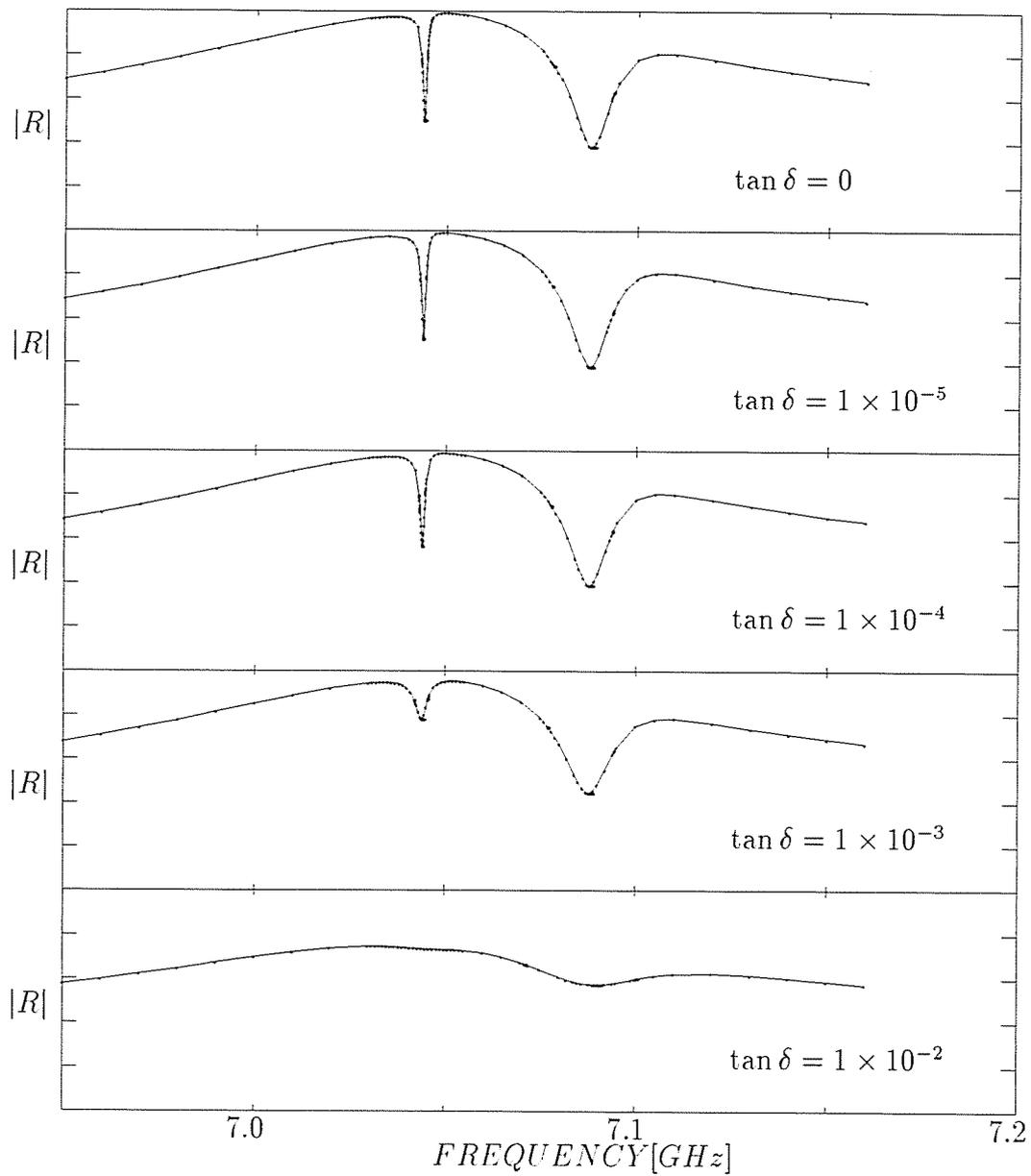


図 7.5: $\tan \delta$ による共振特性の変化

$\tan \delta$	Q_{1-3}	Q_{3-5}	$\nu_e [Hz]$	$T_e^* [K]$
0	4751±45	448.8±0.4	0	0
1×10^{-5}	4680±43	448.2±0.4	2.1×10^6	1.2×10^3
1×10^{-4}	4122±34	444.6±0.4	2.1×10^7	1.2×10^5
1×10^{-3}	1956± 8	408.7±0.3	2.1×10^8	1.2×10^7
1×10^{-2}	—	244.7±0.1	2.1×10^9	1.2×10^9

*:電離度 $\alpha = 0.001$ の場合

表 7.1: $\tan \delta$ と負荷 Q

となる。(7.37),(7.34) 式から \bar{v}_e を消去すれば、温度を衝突周波数の関数で表すことが出来る。

$$T_e = \frac{\pi m_e}{8k} \left(\frac{\nu_e \alpha}{\sigma_{en} n_e} \right)^2 \simeq 2.6 \times 10^{30} \frac{\nu_e \alpha}{n_e} \quad (7.38)$$

さらに、(7.32) 式により衝突周波数を $\tan \delta$ で表せば、

$$T_e = 2.6 \times 10^{30} \left(\frac{\alpha \omega^3}{n_e^2} \tan \delta \epsilon' \right)^2 \quad (7.39)$$

となる。

密度 n_e を $1 \times 10^{11} [cm^{-3}]$ (屈折率 ~ 0.9) として、 $\tan \delta = 0, 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$ の場合の、境界要素法解析の結果を図 7.5 に示す。

なお、損失媒質の境界要素法による解析は波数 k を複素波数にするだけでよいので、グリーン関数の k を複素数とするのみで他の考慮の必要は無い。

図 7.5 の共振特性から求めた Q 値を、表 7.1 に示す。表中の誤差は 5.3 節で述べたように、周波数のサンプリングから起因するものである。また、 Q の添字 ($i \rightarrow j$) は反共振モードが i 次のモードから j 次モードに移行する時の共振を意味する。この表には (7.39),(7.32) 式から求めた T_e, ν_e も記した。温度および衝突周波数を見ると、実験室で得られるプラズマの $\tan \delta$ は $0 \sim 1 \times 10^{-4}$ の間であることが判る。 $\tan \delta = 1 \times 10^{-4}$ と $\tan \delta = 0$ の Q 値の間に 15% 程度の差が見られるので、観測可能であると考えられる。つまり、 Q 値の測定が可能であることは、衝突周波数の推定が可能であり、さらに、電離度が判る場合には温度の推定が可能である。

次に、負荷 $Q(Q_\ell)$ をもとに $\tan \delta$ による Q 値 ($Q_{\tan \delta}$) を求め、境界要素法解析の妥当性を示す。負荷 Q は共振器内に蓄えられている内部エネルギーを一周期あたりの

損失エネルギーで割ったものである。損失エネルギーは、 $\tan \delta$ による損失と、壁面損失、開放端からの放射による損失の合計で与えられるので、それぞれの Q 値の逆数和で与えられる。

$$\frac{1}{Q_\ell} = \frac{1}{Q_{\tan \delta}} + \frac{1}{Q_{other}} \quad (7.40)$$

$\tan \delta$ の損失によりモードが大きく変化しないと仮定すれば、 Q_{other} は、 $\tan \delta = 0$ の時の Q_ℓ と見なせる。従って $Q_{\tan \delta}$ は

$$Q_{\tan \delta} = \frac{1}{\frac{1}{Q_\ell} - \frac{1}{Q_\ell(\tan \delta = 0)}} \quad (7.41)$$

により求められる。

$Q_{\tan \delta}$ を別の方法で近似的に求める。 Q 値の定義より、

$$Q'_{\tan \delta} = \frac{\int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dV}{\int_V \epsilon'' E^2 dV} = \frac{\int_V \epsilon E^2 dV}{\int_V \epsilon'' E^2 dV} \quad (7.42)$$

で与えられる。この式の体積積分が一次元近似できるとし、さらに E の分布が一様であると仮定すると、積分は鏡面間隔 b とプラズマの厚さ d の比に置き換わり、

$$Q'_{\tan \delta} \sim \frac{b}{d \tan \delta} \quad (7.43)$$

と近似できる。

(7.41),(7.43)式より求めた $Q_{\tan \delta}$ を表7.2に示す。

$\tan \delta$	$Q_{\tan \delta 1 \rightarrow 3}$	$Q_{\tan \delta 3 \rightarrow 5}$	$Q'_{\tan \delta}$
1×10^{-5}	$3.1 \times 10^5 \pm 2.7 \times 10^5$	$3.7 \times 10^5 \pm 4.0 \times 10^5$	5.5×10^5
1×10^{-4}	$3.11 \times 10^4 \pm 0.27 \times 10^4$	$4.78 \times 10^4 \pm 0.65 \times 10^4$	5.5×10^4
1×10^{-3}	3324 ± 31	4572 ± 58	5.5×10^3
1×10^{-2}	—	538.4 ± 0.8	5.5×10^2

表 7.2: $Q_{\tan \delta}$

この表から、境界要素法解析と近似式のそれぞれの結果はオーダーで一致していることが判る。又、(1 → 3)共振の方が(3 → 5)共振よりも Q 値が低く、大きな損失を受けていることが判る。これは、プラズマ密度が低い場合には、図5.1、図5.3～図5.10 および図5.11から判るように、プラズマが配置される場所での電界集中が、(1 → 3)共振の方が強い(体積積分で比較)ためと考えられる。

第 8 章

不均質密度分布を有するプラズマの解析

前章まではプラズマの密度を一定と仮定した。しかし、プラズマの密度が一定のモデルは実際には無い。本章では、既知の密度分布を有するプラズマに入射する電磁波の挙動を、境界要素法を用いた二種類の解法を示す。一つは、領域内に節点をおく方法であり、もう一つは境界積分のみから、解を求める近似解法である。

一般に、不均質媒質を含む問題は、境界要素法をはじめとする境界法のみでの解析は難しく、有限要素法等に代表される領域法との結合解法が用いられる。これは、境界要素法では領域内の情報を境界に置き換えることが難しいことに起因する。

領域内に節点を置く方法 [36, 37, 39] は、この結合解法に分類できる。不均質項を未知のソース項として空間に分布させ、領域積分を離散化し、境界節点および領域節点により代数方程式を導く。この方法は、非常に単純ではあるが、領域内の節点に関する未知数が増えるため、境界要素法の有する計算コストに関する特徴は十分に生かされていない。

境界要素法(境界積分)のみで不均質媒質を扱った例として、領域内の不均質媒質項を級数展開し、その各項を境界積分に変換する方法が報告されている [40]。しかし、不均質項が複雑な形の場合には有限項の級数展開での表現は難しい。

境界要素法における波動方程式の基本解は、振幅と位相に分離できる。フェルマーの原理によると、不均質媒質中の光路は曲げられ、さらに光路が曲がるため、ソース点から等方的に放射されたエネルギーは、たとえソースからの距離が一定の観測点であっても、観測点での受光エネルギーは一様ではない。境界積分のみによる方法では、曲がり方を考慮した光路上の波数の線積分を位相とし [36, 37]、受光エネルギーの光路依存性を考慮した振幅を用いる [37]。但し、この振幅は、ソースと観測点間の光路中での反射が無視できること、つまり波長に比べ伝搬定数の空間変化

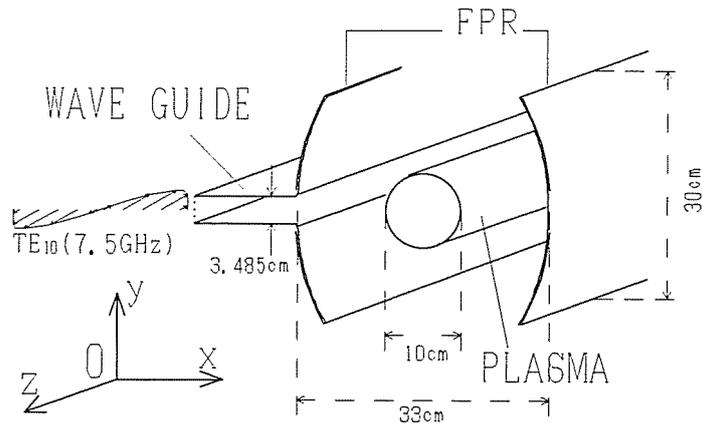


図 8.1: 解析モデル

が緩やかであることが必要である。なお、この方法と似た基本解の補正方法として、複数の平板状の均質媒質に対して単一の基本解を用いた方法 [41] が報告されている。

8.1 解析モデル

不均質媒質として、密度分布 $n(r)$ を有する円筒状のプラズマを考える。軸方向・回転方向には一様分布とし、半径方向には次式の放物分布を与える。

$$n(r) = n_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_c^2} \right) \quad (8.1)$$

コールドプラズマを仮定し損失は考慮しないものとする、波数は次式で与えられる。

$$k(r)^2 = \epsilon\mu\omega^2 = \frac{1}{c^2} \left(\omega^2 - \frac{e^2 n(r)}{\epsilon_0 m_e} \right) \quad (8.2)$$

このプラズマを図 8.1 のように二枚の曲率を有する金属板を対向させたファブリ・ペロー共振器 (以下 FPR と呼ぶ) 中に置く。FPR の鏡面は共焦点楕円筒とし、一方の中心には導波管を結合し、導波管の他端 (左端) を伝搬方向が x 軸とした TE_{10} モードで励振する。

不均質媒質における支配方程式は文献 [38] に述べられている。同様の導出を以下に記す。ファラデーの法則、電流を含まないマクスウェル・アンペールの法則、およ

びプラズマの電気的中性を考慮したガウスの法則は次式で与えられる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mu_0 \mathbf{H}}{\partial t} \quad (8.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = +\frac{\partial \epsilon \mathbf{E}}{\partial t} \quad (8.4)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = (\nabla \epsilon) \cdot \mathbf{E} + \epsilon (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0 \quad (8.5)$$

(8.3) の両辺の回転をとり、(8.4) 式をこれに代入し、磁場に関する項を消去し、さらに時間微分を $j\omega$ に置き換える。

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \epsilon \mu \omega^2 \mathbf{E} = 0 \quad (8.6)$$

上式に (8.5) 式を代入し

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla \left(\frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \right) + \epsilon \mu \omega^2 \mathbf{E} = 0 \quad (8.7)$$

を得る。

図 8.1 では、励振部から TE_{10} モードで入射された電界はプラズマ柱の軸方向成分 E_z のみがプラズマに入射される。プラズマに異方性を与えない場合には、プラズマ内部の電界もやはり軸方向成分 E_z のみを有する。一方、プラズマ内の密度分布は半径方向のみに与えられているので、 $\nabla \epsilon$ は半径方向のベクトルである。従って (8.7) 式の左辺第二項の内積は零となり、最終的に次式を得る。

$$\nabla^2 E_z + k(r)^2 E_z = 0 \quad (8.8)$$

また、真空領域における支配方程式は、均質媒質のヘルムホルツ方程式として

$$\nabla^2 E_z + k_0^2 E_z = 0 \quad (8.9)$$

で与えられる。この真空領域は、第 6 章と同様にスプリアス解を除くために、仮想境界により二領域に分割して解析を行う。

8.2 領域要素を用いた境界要素法

本節では不均質媒質中の媒質変化を、分布を含むソースと考え、線形化・離散化する方法を示す。

前節の (8.8) 式中の波数 k を、真空中の波数 k_0 と位置に依存する項 k_1 にわけ、さらに E_z を u と置き直す。

$$\nabla^2 u + (k_0^2 - k_1(r)^2) u = 0 \quad (8.10)$$

$$k_1(r)^2 = \frac{1}{c^2} \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_e} \left(1 - \frac{r^2}{r_c^2} \right) \quad (8.11)$$

グリーン関数 u^* には、境界が無い場合の自由空間でのヘルムホルツ方程式のグリーン関数を選ぶ。この関数は次式を満足する。

$$\nabla^2 u^*(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) + k_0^2 u^*(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = 0 \quad (8.12)$$

ここで、 \mathbf{r}_i は観測点を示す。このグリーン関数およびその法線方向微分は次式で表される。

$$u^*(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = \frac{-j}{4} H_0^{(2)}(k_0 \ell) \quad (8.13)$$

$$q^*(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = \mathbf{n} \cdot \nabla u^* = \frac{jk}{4} H_1^{(2)}(k_0 \ell) \cos \theta \quad (8.14)$$

$$\ell = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i| \quad (8.15)$$

$$\theta = \arg(\mathbf{n}, (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)) \quad (8.16)$$

第2章と同様に、(8.10) 式に u^* を、(8.12) 式に u をそれぞれ掛けて、グリーン積分方程式に代入すると、

$$\int_{\Omega} (k_1(r)^2 u^* u + \delta u) d\Omega = \int_{\Gamma} (u^* q - u q^*) d\Gamma \quad (8.17)$$

となる。左辺の積分内第二項のデルタ関数は、観測点の位置を考慮することにより容易に計算できる。さらに、積分を離散化すると

$$\frac{\psi}{2\pi} u_i + \sum_k \int_{\Omega_k} k_1^2 u^* u d\Omega = \sum_j \left(\int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma - \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma \right) \quad (8.18)$$

を得る。ここで、 ψ は観測点 \mathbf{r}_i における、領域を臨む角度である。上式での領域積分、境界積分は共に線形要素を仮定し u, q を積分からくり出せる。

$$\int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma = [g_{j1} \quad g_{j2}] \begin{bmatrix} q_{j1} \\ q_{j2} \end{bmatrix} \quad (8.19)$$

$$\int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = [h_{j1} \quad h_{j2}] \begin{bmatrix} u_{j1} \\ u_{j2} \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

$$\int_{\Omega_k} k_1 u^* u d\Omega = [v_{k1} \quad v_{k2} \quad v_{k3}] \begin{bmatrix} u_{k1} \\ u_{k2} \\ u_{k3} \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

境界積分にはガウスの四点積分を用いる。領域積分は、三角要素に分割し四次の積分公式 [9] を用いる。

なお、(8.18)~(8.21) 式は、ソース項を考慮して離散化された積分方程式 ((2.54) および (2.59)~(2.62) 式) と異なり、領域積分内の u が未知数として残っている。

観測点 \mathbf{r}_i を、プラズマ表面の境界上および領域内の節点にとり、(8.18) 式を計算し、 h, g, v, u, v のそれぞれの行列表現を、 $\mathbf{H}, \mathbf{G}, \mathbf{V}, \mathbf{u}, \mathbf{q}$ とすると、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{\Gamma_p}^{\Gamma_p} + \frac{\psi_i}{2\pi} \mathbf{I} + \mathbf{V}_{\Gamma_p}^{\Gamma_p} & \mathbf{V}_{\Omega_p}^{\Gamma_p} \\ \mathbf{H}_{\Gamma_p}^{\Omega_p} + \mathbf{V}_{\Gamma_p}^{\Omega_p} & \mathbf{V}_{\Omega_p}^{\Omega_p} + \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\Gamma_p} \\ \mathbf{u}_{\Omega_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\Gamma_p}^{\Gamma_p} \\ \mathbf{G}_{\Gamma_p}^{\Omega_p} \end{bmatrix} [\mathbf{q}_{\Gamma_p}] \quad (8.22)$$

を得る。ここで、上付き添字 Γ_p, Ω_p は観測点 \mathbf{r}_i の位置を表しており、下付き添字は、積分に対する節点を示している。また、 $\mathbf{V}'_{\Gamma_p}, \mathbf{V}'_{\Omega_p}$ は境界と接する領域要素の節点が、境界上の節点と一致することに起因している。(8.22) 式中の \mathbf{u}, \mathbf{q} は全て未知であるが、第6章と同様に自由空間中の方程式および境界条件と、プラズマ表面における \mathbf{u}, \mathbf{q} の連続性により、方程式の本数と未知数の個数は一致し解くことが可能となる [32]。

なお、この方法による誤差は線形化・離散化による誤差のみで、要素のサイズを小さくすることにより、解析の精度は向上する。

8.3 フェルマーの原理を考慮した境界要素法

前節の方法では不均質媒質内に節点を設定する必要があり、境界要素法のメリットが減少する。本節では、不均質媒質の境界積分のみによる定式化を示す。

境界要素法における波動方程式およびヘルムホルツ方程式は、ホイヘンスの二次波源の原理に基づいている。媒質が不均質の場合には、この原理は最終的にフェルマーの原理と置き換えることができる。フェルマーの原理では、不均質媒質中の二点を結ぶ光路は直線ではなく、二点間の位相差が最小になる光路を選ぶ。本節では、均質媒質での基本解に、光路の曲がりを考慮し、位相と振幅のそれぞれに補正を行う。

均質媒質におけるヘルムホルツ方程式および基本解の満足する方程式は、

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \quad (8.23)$$

$$\nabla^2 u_0^*(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) + k^2 u_0^*(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) = 0 \quad (8.24)$$

と表される。ここで u_0^* は、均質媒質中のグリーン関数を表す。前節と同様にグリーンの積分公式を用いると、

$$\frac{\psi}{2\pi} u_i = \int_{\Gamma} (u_0^* q - u q_0^*) d\Gamma \quad (8.25)$$

となる。このときの、基本解 u_0^* は次式で与えられる。

$$u_0^*(\mathbf{r}; \mathbf{r}_i) = \frac{-j}{4} H_0^{(2)}(k\ell) \quad (8.26)$$

まず位相について考える。上式のハンケル関数の引数 $k\ell$ は、ソース点と観測点の二点間の位相差を示している。そこで不均質媒質を扱うにあたり、

$$k\ell = \int_r^{r_i} k(r) ds \quad (8.27)$$

の、光路に沿った積分に置き換える。

次に基本解の振幅について考える。ソース点から放出されるエネルギー U_0 は、均質媒質・不均質媒質に関わらず等方的に放出される。図 8.2 に均質媒質と不均質媒質のそれぞれの場合の光路を示す。点 O から放出された波は、同一境界 $d\Gamma$ の両端に到達する。不均質媒質における放出された微小角度 $d\theta_1$ (境界を臨む角度) は、光路の曲がりのため、均質媒質における微小角度 $d\theta_0$ とは、同一の境界にも関わらず異なっている。つまり、同一境界で受け取るエネルギーが異なっている。

空間中のインピーダンスが波長に較べ緩やかに変化していると仮定すると、伝搬の途中での反射が小さいと見做すことが可能であり、このモデルを適用することにより、境界におけるエネルギー密度が評価できる。

なお、一般には $d\Gamma$ 上にソース点を置き、点 O に観測点を置くが、基本解の相反性によりソース点と観測点の立場を入れ換えることが可能である。本節では $d\Gamma$ 上に観測点を置いて議論を進める。

ソース点から放出されたエネルギーを U_0 として、光路と直交する境界 $d\Gamma_{\perp}$ 上での単位長さ当たりの受光エネルギー密度 dS_{\perp} は、

$$dS_{\perp} = U_0 \frac{rd\theta}{2\pi r} = \frac{U_0 d\theta}{2\pi} \quad (8.28)$$

と与えられる。また、任意の境界 $d\Gamma$ 上のエネルギー密度 dS と光路に直交する境界 $d\Gamma_{\perp}$ 上のエネルギー密度 dS_{\perp} の関係は、境界の法線ベクトル \vec{n} 、伝搬方向の単位ベクトル \vec{e}_k 、これらのなす角度 θ を用いて

$$dS_{\perp} = \vec{n} \cdot \vec{e}_k dS = \cos \theta dS \quad (8.29)$$

で表される。従って、均質媒質における微小区間 $d\Gamma$ を通過するエネルギー dS_0 、および不均質媒質のにおける同一区間を通過するエネルギー dS_1 は、

$$dS_0 = U_0 \frac{d\theta_0}{\cos \theta_0} \quad (8.30)$$

$$dS_1 = U_0 \frac{d\theta_1}{\cos \theta_1} \quad (8.31)$$

と与えられる。

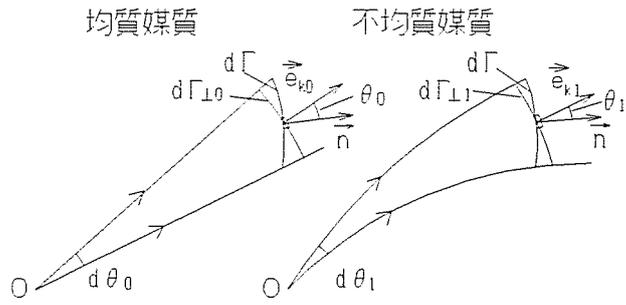


図 8.2: 境界におけるエネルギー密度

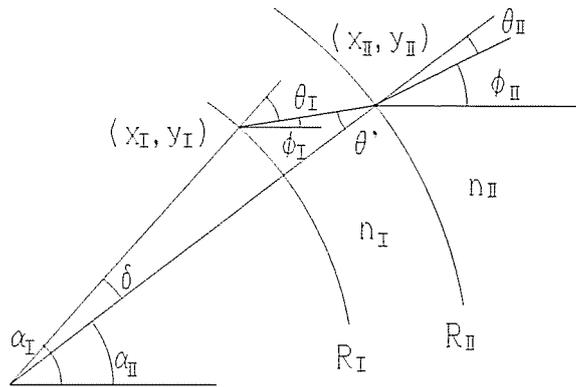


図 8.3: スネルの法則による光路の計算

(8.24) 式から判るように、基本解は電界の性質を持っており、エネルギーの $1/2$ 乗に比例する。(8.30) 式の比の $1/2$ 乗によって、均質媒質中の基本解に対する補正を行う。

$$u^* = w(\theta_1)u_0^* \quad (8.32)$$

$$w(\theta_1) = \left(\frac{dS_1}{dS_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{d\theta_1 \cos \theta_0}{\cos \theta_1 d\theta_0} \right)^{1/2} \quad (8.33)$$

(8.32) 式中の θ_1 を θ として、不均質媒質中の基本解 u^* およびその法線方向偏微分 q^* を改めて示すと

$$u^* = \frac{-j}{4} H_0^{(2)}(k'\ell) w(\theta) \quad (8.34)$$

$$\begin{aligned} q^* &= \vec{n} \cdot \nabla u^* = \frac{\partial u^*}{\partial r} \cos \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \sin \theta \\ &= \frac{jk'}{4} H_1^{(2)}(k'\ell) w(\theta) \cos \theta - \frac{j}{4\ell} H_0^{(2)}(k'\ell) \frac{\partial w(\theta)}{\partial \theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (8.35)$$

$$k'\ell = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_i} k ds \quad (8.36)$$

$$\ell = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_i} ds \quad (8.37)$$

が得られる。この修正した基本解を用いた境界積分方程式

$$\frac{\psi}{2\pi} u_i = \int_{\Gamma_j} u^* q d\Gamma - \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma \quad (8.38)$$

を、離散化し(8.19),(8.20)式の線形化を行うと、

$$[H_{\Gamma_p}^{\Gamma_p} + \frac{\psi_i}{2\pi} I][\mathbf{u}_{\Gamma_p}] = [G_{\Gamma_p}^{\Gamma_p}][\mathbf{q}_{\Gamma_p}] \quad (8.39)$$

が導かれる。

放物密度分布プラズマ中を伝搬する波の光路は、フェルマーの原理から解析的に求めることは難しいので、プラズマを層状に離散化しスネルの法則を繰り返し適用することにより、光路を求める。図8.3において、始点 (x_I, y_I) から θ_I で放出された光は、半径が $R_I \leq r \leq R_{II}$ 内では屈折率 n_I が一定と仮定すると、光路は直線をとる。半径 R_{II} 上での交点 (x_{II}, y_{II}) は容易に求められ、入射角 θ' は、

$$\theta' = \theta_I - \delta = \theta_I - \alpha_I + \alpha_{II} = \theta_I - \arctan\left(\frac{y_I}{x_I}\right) + \arctan\left(\frac{y_{II}}{x_{II}}\right) \quad (8.40)$$

となる。ここで、スネルの法則

$$n_I \sin \theta' = n_{II} \sin \theta_{II} \quad (8.41)$$

を適用すると、透過波の角度 θ_{II} は

$$\theta_{II} = \arcsin\left(\frac{n_I}{n_{II}} \sin \theta'\right) \quad (8.42)$$

が得られる。これを繰り返すことにより、任意の位置および角度で放出された光の光路が計算できる。

8.4 解析結果

第8.2節、第8.3節の方法による結果を比較する。これらの結果は、導波管とFPRの結合点における反射係数により評価する(3.5節)。

解析結果を図8.4、図8.5に示す。横軸は周波数を示しており、縦軸には反射係数の絶対値(白抜き)および位相(黒塗り)を示す。図中のDOMAIN(四角形)は8.2節で述べた領域積分を用いる方法を、FERMAT(丸)は8.3節のフェルマーの原理に基づ

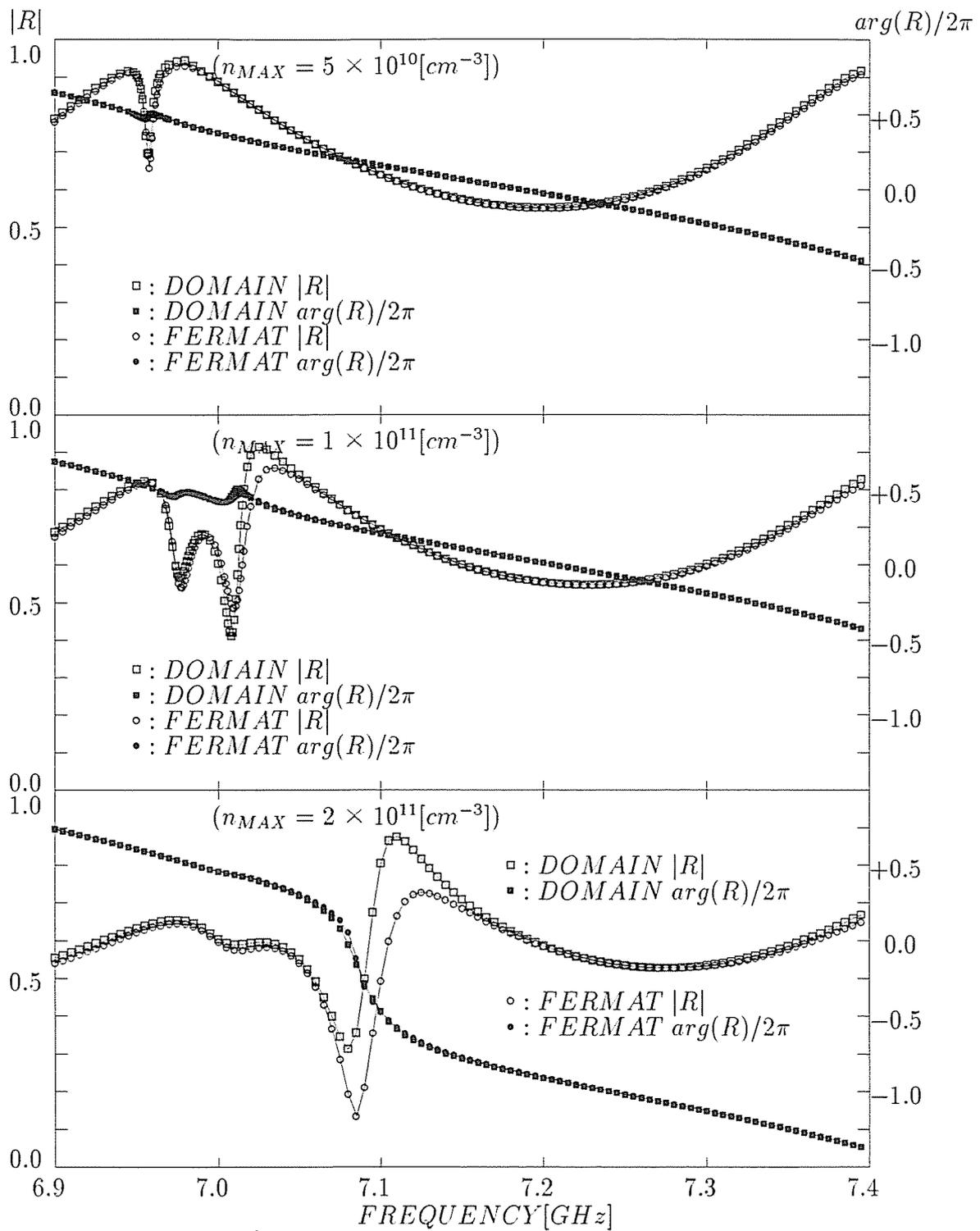


図 8.4: 放物密度プラズマ挿入時の反射係数 (1)

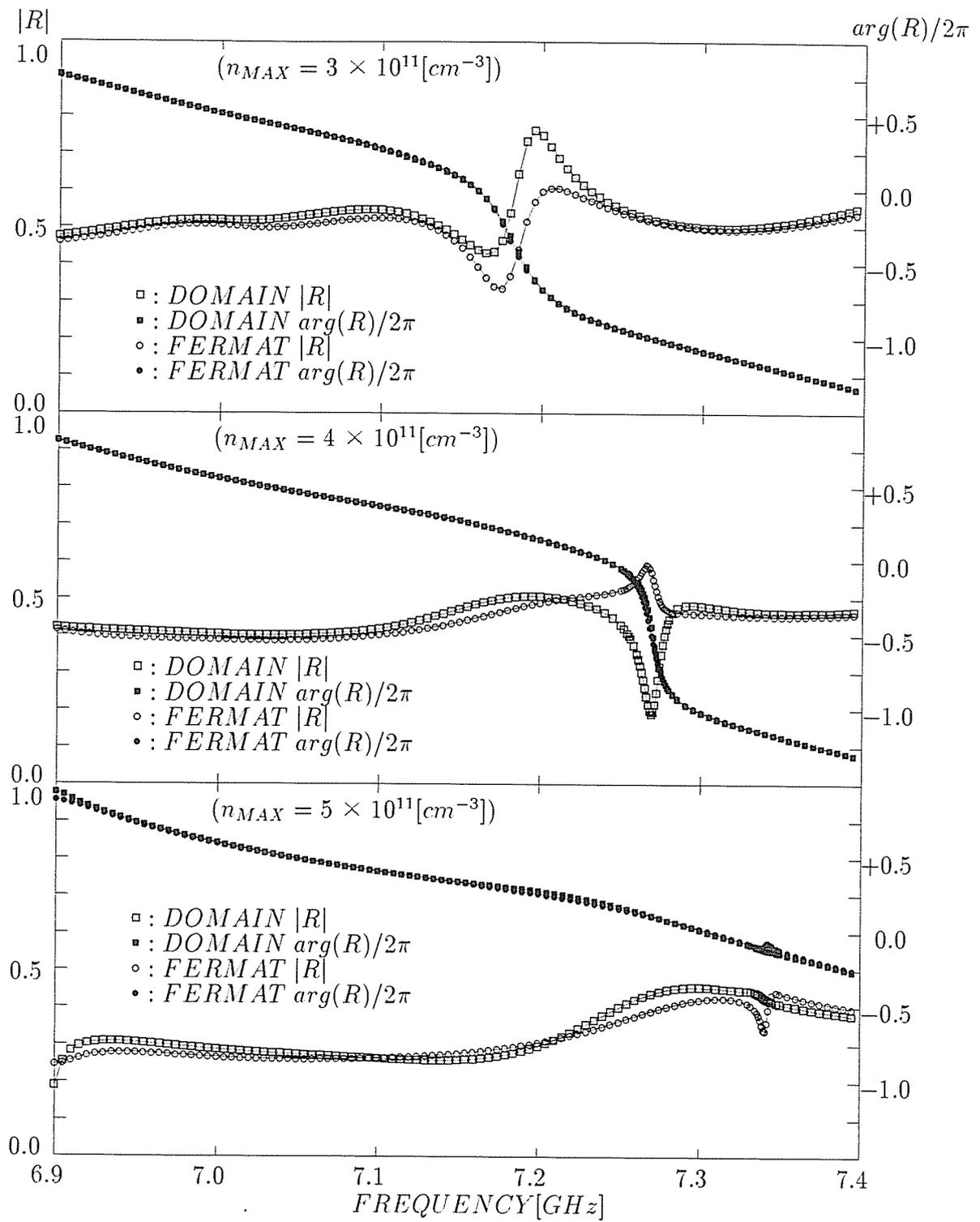


図 8.5: 放物密度プラズマ挿入時の反射係数 (2)

く方法の結果をそれぞれ示す。反射係数の絶対値は、プラズマ密度が大きくなるに従い二つの方法の違いがみられ、特に密度と共に共振時の差の増加が見られる。一方、位相には顕著な差は見られなかった。最大密度が $5 \times 10^{11} [\text{cm}^{-3}]$ の時には周波数が 7GHz で屈折率(比誘電率の $1/2$ 乗)はおおよそ 0.4 となる(図3.1)。プラズマの直径 10cm は4波長程度であり、プラズマ中ではさらに長くなる。この状態ではプラズマ中の空間インピーダンスの変化は波長に較べ、充分緩やかとはいえず、領域内部での反射あるいは散乱が発生する。

空間インピーダンスの変化と反射に関する考察のために、プラズマの直径に沿った光路を例として平面波で伝搬するモデルを考える。インピーダンスが緩やかに変化する媒質における微小区間 Δr からの反射係数 dR は

$$dR = \frac{Z(r + \Delta r) - Z(r)}{Z(r + \Delta r) + Z(r)} = \frac{1}{2Z} \frac{\partial Z}{\partial r} dr \quad (8.43)$$

と表される。規格化インピーダンスは、誘電率の $1/2$ 乗に反比例するので、

$$Z = \sqrt{\frac{1}{\epsilon(r)}} \quad (8.44)$$

$$\epsilon(r) = 1 - \frac{\omega_{pe0}^2}{\omega^2} \left(1 - \left(\frac{r}{r_c} \right)^2 \right) \quad (8.45)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial r} = -\frac{1}{2} \frac{1}{\epsilon^{3/2}} \frac{\omega_{pe0}^2}{\omega^2} \frac{2r}{r_c^2} \quad (8.46)$$

$$dR = -\frac{1}{2\epsilon} \frac{\omega_{pe0}^2 r}{\omega^2 r_c^2} dr \quad (8.47)$$

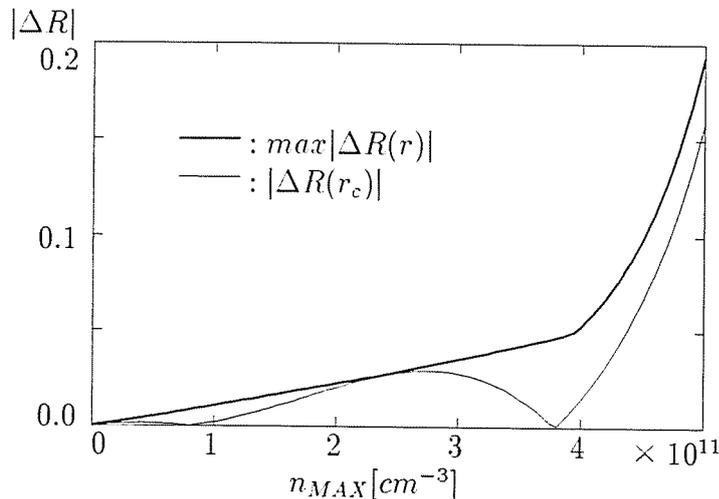


図 8.6: プラズマによる反射

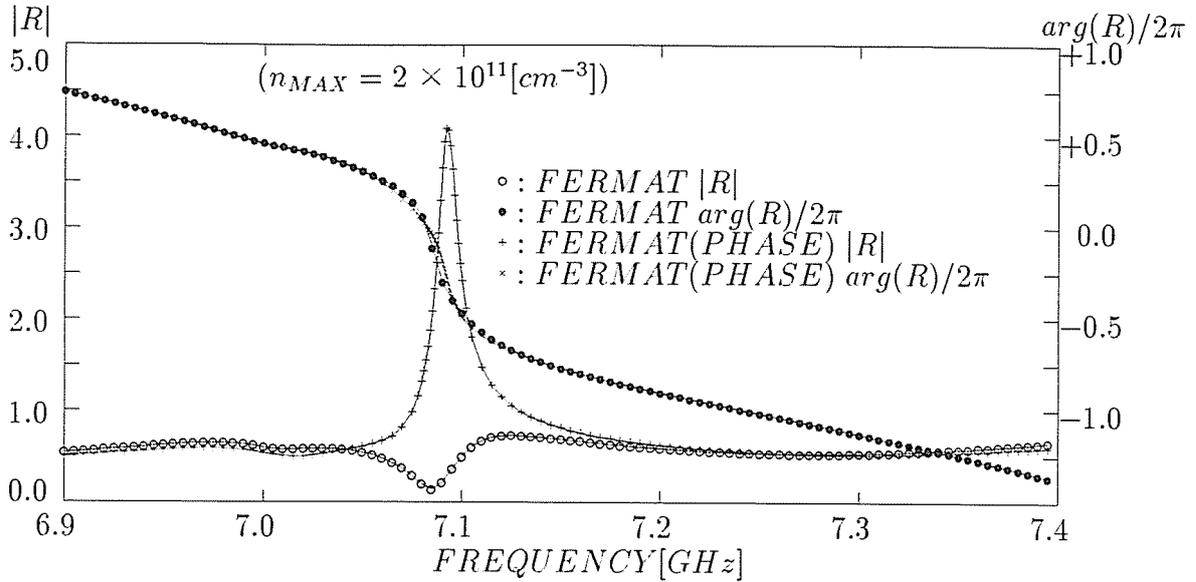


図 8.7: 光路・エネルギー補正と光路補正のみの比較

と表される。点 $-r_c$ と点 r の二点間の反射係数は、

$$\Delta R(r) = \int_{-r_c}^r e^{-2j\phi} dR(r) \quad (8.48)$$

$$\phi = \int_{-r_c}^r k(r) dr \quad (8.49)$$

と与えられる。この結果を図 8.6 に示す。最大密度が 5×10^{11} では、およそ 20% の反射が予想され、他の節点からも大きさこそ小さくなるが反射がありさらに位相が異なると推定できる。しかし、(8.34) 式には、この影響は考慮されていないため、プラズマ密度の増加とともに今回提案した方法の近似が悪くなっていると考えられる。

図 8.7 には、(8.34) 式の光路長のみを考慮 ($w=1$) した結果と、振幅と光路長を考慮した結果の違いを示す。光路長のみを考慮した場合 (図中 FERMAT (PHASE)) の絶対値が 1 を越えており、受動媒質であるプラズマからエネルギーを受け取っているように見え、明らかに解析法の誤りであることが判る。但し、位相についてはほぼ一致している。

以上より、反射係数の絶対値については、エネルギーに関する補正が有効であり、位相については、光路長の考慮のみでも充分であることが推定される。

また、これらの共振特性をもとに求めた Q 値を図 8.8 に示す。この Q 値の計算には、共振特性に複数のモードが重畳しているため、インピーダンスから求める事は出来ないので、5.3.4 節と同様に電力反射係数の半値幅を用いた。

図 8.8 から、二つの方法に対する結果は、最大密度が 3×10^{11} までは、非常に良く

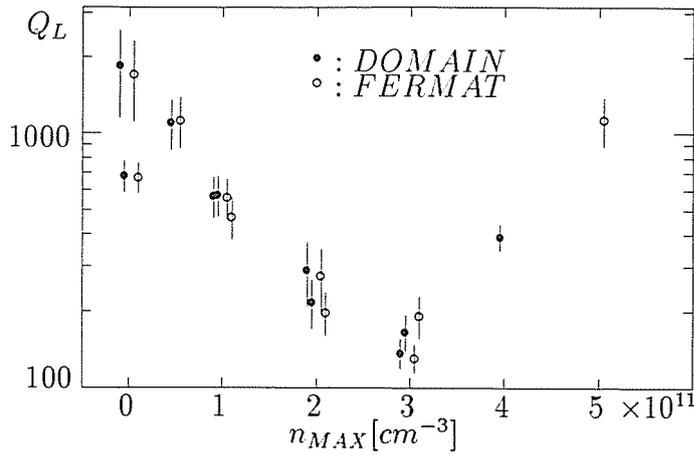


図 8.8: Q 値

	領域要素	フェルマーの原理
総節点数	739	318
総積分数	1,010,864	85,412
計算時間 (秒)		
積分	107	23
連立方程式解法	195	28
全計算時間	302	51

表 8.1: 計算コスト

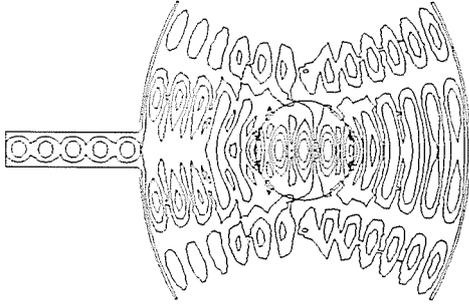
一致しており、それ以上では違いが見られる。領域要素を用いた方法では 4×10^{11} で共振が見られるが、 5×10^{11} では見られない。逆に、フェルマーの原理に基づく方法では 4×10^{11} では見られないが、 5×10^{11} では共振を示している。

領域要素を用いた方法では 4×10^{11} で、それ以下で密度と共に減少していた Q 値が増加している。この理由を示すために、図 8.9 に共振周波数における電界分布を示す。電界分布は、領域要素を用いた方法により解析した。この図から、 4×10^{11} は他の分布と異なり、導波管と FPR の結合部で基本モードの分布 (x 軸上の電界分布) は見られていない。逆に高次モードの分布 (基本モード以外の分布) は最大密度が $1 \sim 3 \times 10^{11}$ ではプラズマ領域を通過していないのに対し、 4×10^{11} 以上ではプラズマ内部まで入り込んでいる。これは、低密度において FPR 鏡面での反射が支配的だったのに対し、高密度ではプラズマ表面 (放物分布では表面付近の誘電率変化が激し

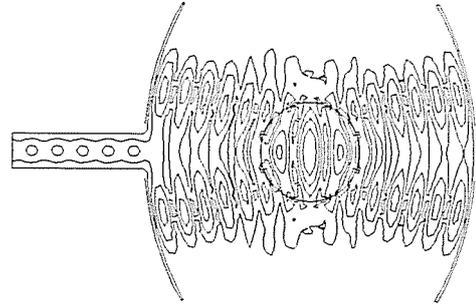
い)での反射が支配的となったためと考えられる。

最後に計算コストに関する比較を行う。表 8.1 に総節点数、総積分数および計算時間を示す。これから判るように、フェルマーの原理に基づく方法が、領域要素を用いた方法に比べ、メモリー(節点の自乗に比例)に関して約 $1/12$ 、計算時間に関しても約 $1/6$ と大きく優れている。本論文では扱わないが有限要素法等を用いた方法も領域内部に節点を持つため、領域要素を用いた方法と同様に、計算コストは大きくなると考えられる。

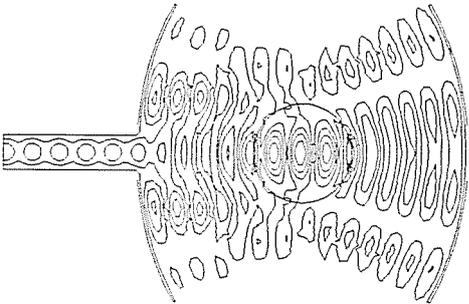
FREQUENCY = 7.010000[GHz]
max density = $1.000 \times 10^{11} [cm^{-3}]$



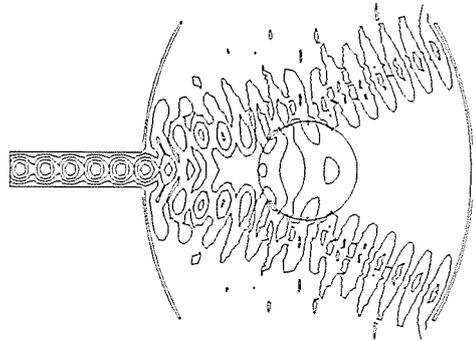
FREQUENCY = 7.270000[GHz]
max density = $4.000 \times 10^{11} [cm^{-3}]$



FREQUENCY = 7.080000[GHz]
max density = $2.000 \times 10^{11} [cm^{-3}]$



FREQUENCY = 7.330000[GHz]
max density = $5.000 \times 10^{11} [cm^{-3}]$



FREQUENCY = 7.170000[GHz]
max density = $3.000 \times 10^{11} [cm^{-3}]$

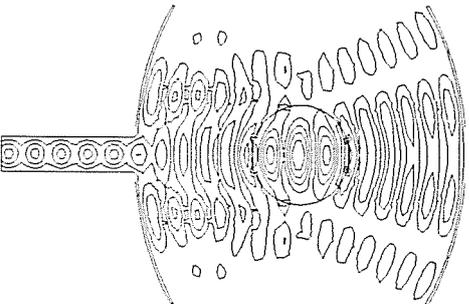


图 8.9: 内部電界分布

8.5 まとめ

本章では、波長に較べ媒質定数が緩やかに変化する不均質媒質中の電磁波の伝搬問題に対し、フェルマーの原理に基づく基本解を用いた境界要素法を新たに提案した。この方法は、境界積分のみから方程式が形成されるので、計算コストの削減が期待できる。

不均質媒質中の一点から放出された電磁波の別の点までの光路は、フェルマーの原理により曲がる。また、受光されるエネルギー密度は光路の変化に依存する。フェルマーの原理に基づく方法は、均質媒質中の基本解に対して、位相について光路の曲がり、さらに振幅に対してエネルギー密度を考慮した基本解を用いる。このとき、不均質媒質中での反射や散乱を考慮していないので、屈折率の変化が緩やかであることが必要となる。

また、比較のために、不均質項を領域中でソース分布として与え、領域内部の点で線形化・離散化した境界要素法の定式化も示した。

この二つの方法を、密度分布を有するプラズマを含む開放型共振器モデルに対して適用し、反射係数の周波数特性により解析手法の評価を行った。

その結果、プラズマの密度変化あるいは波数の空間変化が波長に較べ緩やかな場合、共振特性の絶対値および位相の両者が、二つの解析方法において一致し、筆者の提案した近似解法は有効な方法であることが確認できた。また、密度が大きい場合(近似が悪くなる場合)でも、反射係数の位相はほぼ一致しており、絶対値も非共振状態ではほぼ一致した。

この結果から、プラズマ密度推定に対しての、この近似解法の有効領域は、位相を用いて共振周波数を求める場合には、密度0からカットオフ密度 ($6 \times 10^{11} [cm^{-3}]$ 程度) までの、ほぼ全域にわたると推定できる。また、位相が正しいことから、内部電界分布を求める場合にも有効である。しかし、 Q 値については低密度の場合にのみしか、適用できないので、プラズマの衝突周波数測定の実シミュレーションには、共振周波数近傍のみを、領域節点を用いる方法や有限要素法のような、別の領域法との結合解法に頼る必要がある。

また、計算コストについてもメモリー・計算時間の両面において数倍以上、フェルマーの原理に基づく方法が優れていることを示した。

第9章

境界要素法における二次元波動方程式の解の安定性

境界要素法を過渡応答問題に適用するとき解の不安定性の問題が指摘されている [2]。電磁界問題は、境界の形状に応じて、散乱問題と多重反射問題に分けられる。散乱問題は、一様媒質中に導電率あるいは誘電率の異なる媒質があり、外部から入射された電磁界は、一度の散乱だけでその後は散乱体との相互作用を起こさない問題である。一方、多重反射問題は、共振器や導波管で代表されるように、境界に入射した電磁界は向かい合う別の境界に伝搬し、それが元の境界に再び戻ってくる問題で、入射波の影響は長時間にわたり持続する。この結果、多重反射問題の方が不安定解の発生が起こり易いと考えられる。

この多重反射問題では、内部にプラズマ等を含まない場合でも、解の安定性に問題があり、本章ではプラズマを含まないモデルに限定して議論を進める。

境界法における過渡応答問題の解の安定性に関しては、二次元散乱問題では文献 [2,42] に、三次元散乱問題では [43-45] に示されている。一方、共振が生ずるような多重反射問題では、報告は少なく三次元の例で文献 [44] が挙げられる。これらの論文での解の安定性に関する結論は、文献 [2,42-44] では安定条件として $c\Delta t < \Delta R$ が必要とされており、文献 [45] では不安定は見られなかったとされている。

境界要素法では二次元問題に於いて観測点および世界線上で、三次元問題に於いて観測点で、それぞれ特異積分が発生し解析的な扱いが必要になる。三次元に対する文献 [43,44] では、解析的な扱いをしており、また線形化の結果が直前の境界値をもとに現時刻の境界値を決定するので、差分法と同様な $c\Delta t < \Delta R$ が必要となることが理解できる。一方、二次元問題に対する文献 [42] では観測点の特異積分が解析

的に得られているが、世界線上の特異点は数値積分をしており、さらに基本解の性質から無限の過去の時刻の境界値が現時刻の境界値に寄与するので、三次元と同様の $c\Delta t < \Delta R$ が成り立つものかどうかは疑わしい。

本章では、線形要素を適用し解の精度を保証するために、観測点と世界線上の両方の特異積分は解析的に行う。特に、観測点を含む要素に対しては、観測点まわりの節点と世界線の関係により二つの線形化方法を考える。境界条件については、ディリクレ型、ノイマン型、および両者の混合型の3種の条件を取扱い、上記の各線形化方法と各境界条件での、時間ステップと境界要素サイズの比と解の安定性について論ずる [46]。

9.1 支配方程式と基本解

場の支配方程式には損失を考慮しないスカラー波動方程式を用いる。また、モデルを簡単にするために、ソース分布は \mathbf{r}_s の一点に置く。

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \ddot{u} = v \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s) \quad (9.1)$$

この支配方程式に対する境界積分方程式は (2.37) 式より

$$c_r c_t u(\mathbf{r}_o, t_0) = \int_{t_s}^{t_e} \int_{\Gamma} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right) d\Gamma dt - \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} \left[u^* \dot{u} - u \dot{u}^* \right]_{t_s}^{t_e} d\Omega - \int_{t_s}^{t_e} u^* v dt \quad (9.2)$$

と与えられる。また、 t_s, t_e は厳密には $\mp\infty$ であるが、ソース項の開始時刻および終了時刻と定義できる。(9.2) 式の右辺第一項は空間に関する境界積分の時間積分、第二項は時間に関する境界積分の空間積分、第三項はソース項の時空領域積分 (空間積分はソース項に δ 関数分布を与えたので落ちている) を表す。

波動方程式のグリーン関数 u^* は (2.124) 式で与えられ、その空間・時間偏微分 q^*, \dot{u}^* は以下の通りである。

$$u^* = \frac{c}{2\pi s} \theta(cT - R) \quad (9.3)$$

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \cos \phi \frac{\partial u^*}{\partial R} = \cos \phi \left[\frac{cR}{2\pi s^3} \theta(cT - R) - \frac{c}{2\pi s} \delta(cT - R) \right] \quad (9.4)$$

$$\dot{u}^* = \frac{\partial u^*}{\partial t} = \frac{c^3 T}{2\pi s^3} \theta(cT - R) - \frac{c^2}{2\pi s} \delta(cT - R) \quad (9.5)$$

$$T = t_0 - t \quad (9.6)$$

$$R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}| \quad (9.7)$$

$$s = \sqrt{c^2 (t_0 - t)^2 - R^2} \quad (9.8)$$

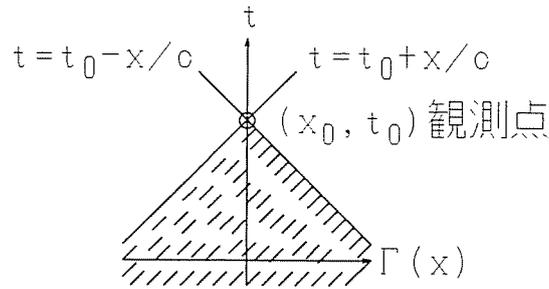


図 9.1: 観測点と世界線

ここで、 δ は Dirac のデルタ関数を、 θ は Heaviside の階段関数を、 ϕ は境界 Γ 上での外向き法線方向単位ベクトル \mathbf{n} と \mathbf{R} のなす角を示す。

(9.3),(9.5) 式の θ, δ の性質により、 u^*, \dot{u}^* は $t = t_e$ で全空間において0とでき、 $t = t_s$ における初期値を $u = 0, \dot{u} = 0$ と置くと、(9.2) 式の右辺第二項は0となり

$$c_r c_t u(\mathbf{r}_0, t_0) = \int_{t_s}^{t_e} \int_{\Gamma} \left(u^* \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right) d\Gamma dt - \int_{t_s}^{t_e} u^* v dt \quad (9.9)$$

が導かれる。

9.2 線形化・離散化

時間・境界のそれぞれに線形要素を適用する。

基本解 u^*, q^* 中の Heaviside の階段関数 θ は因果律に起因しており、図9.1のように観測点 (x_0, t_0) を通り傾きが $\pm 1/c$ である世界線を境にして斜線部のみで値を有する。二次元空間での時空境界要素(時間軸+一次元境界)と観測点 (x_0, t_0) および世界線の関係は図9.2の様に6種類に分類される。(9.9) 式右辺第一項の積分順序を入れ替え時間積分を先に行うと、時間積分は解析的に積分できる。 R を固定した場合、上の6種類に対応する時間積分の区間は、世界線と時間要素の関係により、以下の3通りの組み合わせに帰着する。

1. $t_{j_1} < t_{j_2} < t_0 - R/c$
2. $t_{j_1} < t_0 - R/c \leq t_{j_2}$
3. $t_0 - R/c \leq t_{j_1} < t_{j_2}$

上記の他に、 u^*, q^* 中の特異点を含む場合として

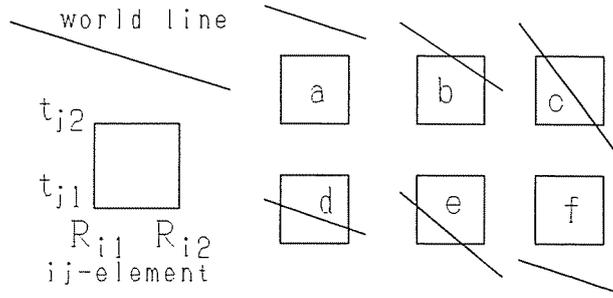


図 9.2: 世界線と時空境界要素

4. $t_{j1} < t_0 - R/c \leq t_{j2}$ かつ $R = 0$ を含む場合

が考えられる。

(9.9) 式の積分を

$$\langle Gq \rangle = \int_{t_s}^{t_e} \int_{\Gamma} u^* \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma dt \quad (9.10)$$

$$\langle Hu \rangle = \int_{t_s}^{t_e} \int_{\Gamma} u \frac{\partial u^*}{\partial n} d\Gamma dt \quad (9.11)$$

$$\langle Pv \rangle = \int_{t_s}^{t_e} u^* v dt \quad (9.12)$$

と定義し、以下にそれぞれの場合の積分計算を示す。

ただし、図 9.2 の a, d, f は上記の 1., 2., 3. のみで計算できるが、b, c, e は個々の合成として表される。この場合、境界 Γ_i をさらに細分化し、各々の積分結果の足した結果を用いる。

以下 1., 2., 3. の非特異要素と 4. の特異要素に分けてそれぞれの場合の要素の計算を行う。

9.2.1 非特異要素

$\langle Gq \rangle$ の非特異要素

$\langle Gq \rangle$ の非特異要素は時間積分のみが解析的に積分できる。時間軸の積分区間に注意すれば容易に計算できる。空間軸については数値積分を用いる。

$$\langle Gq \rangle = \sum_i \int_{\Gamma_i} \sum_j \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} u^* \frac{\partial u}{\partial n} dt d\Gamma = \sum_i \sum_j \langle Gq \rangle_{ij} \quad (9.13)$$

の $\langle Gq \rangle_{ij}$ を時間軸上の積分区間で分類する。

○ $t_{j_1} < t_{j_2} < t_0 - R/c$ の場合 まず、時間要素内の q を積分区間の両端の値で線形要素として定義する。

$$q(t) = \frac{t_2 - t}{\Delta t} q_{j_1} + \frac{t - t_1}{\Delta t} q_{j_2} = \frac{T - T_2}{\Delta t} q_{j_1} + \frac{T_1 - T}{\Delta t} q_{j_2} \quad (9.14)$$

u^* 内の θ は常に 1 なので積分要素 $\langle Gq \rangle$ は

$$\begin{aligned} \langle Gq \rangle_{ij} &= \int_{R_{i_1}}^{R_{i_2}} \int_{t_{j_1}}^{t_{j_2}} \frac{c}{2\pi s} q dt d\Gamma = \int_{R_{i_1}}^{R_{i_2}} \frac{1}{2\pi \Delta t} \left(\int_{T_1}^{T_2} \frac{T_2 - T}{\sqrt{T^2 - \frac{R^2}{c^2}}} dT q_{j_1} + \int_{T_1}^{T_2} \frac{T - T_1}{\sqrt{T^2 - \frac{R^2}{c^2}}} dT q_{j_2} \right) d\Gamma \\ &= \int_{R_{i_1}}^{R_{i_2}} \frac{1}{2\pi \Delta t} \left\{ \left[-T_2 \log \left(T - \frac{s}{c} \right) - \frac{s}{c} \right]_{T_1}^{T_2} q_{j_1} + \left[T_1 \log \left(T - \frac{s}{c} \right) + \frac{s}{c} \right]_{T_1}^{T_2} q_{j_2} \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (9.15)$$

を得る。さらに、 Γ に対して無次元座標 ξ を導入し、境界積分内の q 以外の項を α とおくと次式が得られる。

$$\langle Gq \rangle_{ij} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta R}{2} \int_{-1}^1 \begin{pmatrix} \frac{1-\xi}{2} \alpha_1 & \frac{1-\xi}{2} \alpha_2 & \frac{1+\xi}{2} \alpha_1 & \frac{1+\xi}{2} \alpha_2 \end{pmatrix} d\xi \begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ q_{21} \\ q_{22} \end{pmatrix} \quad (9.16)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \mp \frac{1}{\Delta t} \left\{ \begin{pmatrix} T_2 \\ T_1 \end{pmatrix} \log \frac{cT_2 - s_2}{cT_1 - s_1} + \frac{s_2 - s_1}{c} \right\} \quad (9.17)$$

(9.16) 式中の q_{11} は q_{i_1, j_1} を略したものである。後述の u についても同様とする。

○ $t_{j_1} < t_0 - R/c \leq t_{j_2}$ の場合 積分区間内で、Heaviside の階段関数 θ が 1 になるのは、 $t < t_0 - R/c$ の場合のみなので、上述の場合の積分の上限 t_{j_2} を $t_0 - R/c$ と置き換えれば同様に計算できる。

$$\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{pmatrix} = \mp \frac{1}{\Delta t} \left\{ \begin{pmatrix} T_2 \\ T_1 \end{pmatrix} \log \frac{R}{cT_1 - s_1} - \frac{s_1}{c} \right\} \quad (9.18)$$

○ $t_0 - R/c \leq t_{j_1} < t_{j_2}$ の場合 この範囲では、Heaviside の階段関数 θ は常に零である。

$$\langle Gq \rangle_{ij} = 0 \quad (9.19)$$

$\langle Hu \rangle$ の非特異要素

この積分も場合分けが必要であるが、離散化後に部分積分を行うと境界項の特異性が発生する。これを避けるために、離散化する前に部分積分を行う [2]。

$$\langle Hu \rangle = \int_{\Gamma} \cos \phi \int_{t_s}^{t_e} u \frac{\partial u^*}{\partial R} dt d\Gamma \quad (9.20)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial R} = \frac{cR}{2\pi s^3} \theta(cT - R) - \frac{c}{2\pi s} \delta(cT - R) \quad (9.21)$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{s} \right) &= c^2 T \cdot \frac{1}{s^3} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{s} \frac{\theta u}{T} \right\} &= \frac{c^2}{s^3} \theta u + \frac{1}{s} \frac{\theta \dot{u}}{T^2} - \frac{c \delta u}{s T} + \frac{\theta \dot{u}}{s T} \end{aligned} \quad (9.22)$$

を用いると、(9.20) 式の時間積分は

$$I = \int_{t_s}^{t_e} u \frac{\partial u^*}{\partial R} dt = \left[\frac{cR}{2\pi s} \frac{u\theta}{c^2 T} \right]_{t_s}^{t_e} - \int_{t_s}^{t_e} \left[\frac{cR}{2\pi s} \left\{ \frac{u\theta}{c^2 T^2} - \frac{u\delta}{cT} + \frac{\dot{u}\theta}{c^2 T} \right\} + \frac{cu}{2\pi s} \delta \right] dt \quad (9.23)$$

と表される。上式の第一項は初期値および θ の性質により零になり、積分内の第二項および第四項は δ 関数の性質によりキャンセルされる。よって(9.20) 式は

$$\begin{aligned} \langle Hu \rangle &= \int_{\Gamma} \int_{t_s}^{t_e} R \cos \phi \frac{1}{2\pi s} \left[\frac{-u - T\dot{u}}{cT^2} \right] \theta(cT - R) dt d\Gamma \\ &= \sum_i \int_{\Gamma_i} \sum_j \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \frac{R \cos \phi}{2\pi s} \left[\frac{-u - T\dot{u}}{cT^2} \right] \theta(cT - R) dt d\Gamma \\ &= \sum_i \sum_j \langle Hu \rangle_{ij} \end{aligned} \quad (9.24)$$

と変形できる。なお、時間微分 \dot{u} は、線形要素を用いた場合、

$$\dot{u} = \frac{u_{j2} - u_{j1}}{\Delta t} \quad (9.25)$$

と表される。

○ $t_{j1} < t_{j2} < t_0 - R/c$ の場合 θ は常に1なので積分要素は、(9.24) 式より、

$$\begin{aligned} \langle Hu \rangle_{ij} &= \int_{R_{i1}}^{R_{i2}} \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \frac{R \cos \phi}{2\pi s} \left[-\frac{(t_2 - t)u_{j1} + (t - t_1)u_{j2}}{\Delta t c T^2} + \frac{-\dot{u}}{cT} \right] dt d\Gamma \\ &= \int_{R_{i1}}^{R_{i2}} \frac{R \cos \phi}{2\pi c \Delta t} (T_2 u_{j1} - T_1 u_{j2}) \int_{t_{j1}}^{t_{j2}} \frac{1}{s} \frac{1}{T^2} dt d\Gamma \\ &= \int_{R_{i1}}^{R_{i2}} \left[\frac{s}{T} \cdot \frac{\cos \phi}{2\pi R c \Delta t} \right]_{t_{j1}}^{t_{j2}} (T_2 u_{j1} - T_1 u_{j2}) d\Gamma \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta R}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1-\xi}{2} \beta_1 \quad \frac{1-\xi}{2} \beta_2 \quad \frac{1+\xi}{2} \beta_1 \quad \frac{1+\xi}{2} \beta_2 \right) d\xi \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.26)$$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \mp \frac{\cos \phi}{R c \Delta t} \begin{pmatrix} T_2 \\ T_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 \\ s_1 \end{pmatrix} \quad (9.27)$$

となる。

○ $t_{j_1} < t_0 - R/c \leq t_{j_2}$ の場合 $\langle Gq \rangle$ と同様に次式を得る。

$$\begin{pmatrix} \beta'_1 \\ \beta'_2 \end{pmatrix} = \mp \frac{\cos \phi}{Rc\Delta t} \begin{pmatrix} T_2 \\ T_1 \end{pmatrix} \frac{-s_1}{T_1} \quad (9.28)$$

○ $t_0 - R/c \leq t_{j_1} < t_{j_2}$ の場合 $\langle Gq \rangle$ と同様に次式を得る。

$$\langle Hu \rangle_{ij} = 0 \quad (9.29)$$

$\langle Pv \rangle$ の非特異要素

ソース項の積分は、境界とソース点一致しない場合には非特異積分で表すことが出来る。

$$\langle Pv \rangle = \sum_j \int_{t_{j_1}}^{t_{j_2}} u^* v dt = \sum_j \langle Pv \rangle_j \quad (9.30)$$

この積分は時間のみの関数として表すことが出来、 $\langle Gq \rangle$ に関する空間積分の無い場合に等しく、以下の三通りの結果を得る。

○ $t_{j_1} < t_{j_2} < t_0 - r_s/c$ の場合

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \mp \frac{1}{2\pi\Delta t} \left\{ \begin{pmatrix} T_2 \\ T_1 \end{pmatrix} \log \frac{cT_2 - s_2}{cT_1 - s_1} + \frac{s_2 - s_1}{c} \right\} \quad (9.31)$$

○ $t_{j_1} < t_0 - r_s/c \leq t_{j_2}$ の場合

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \mp \frac{1}{2\pi\Delta t} \left\{ \begin{pmatrix} T_2 \\ T_1 \end{pmatrix} \log \frac{r_s}{cT_1 - s_1} - \frac{s_1}{c} \right\} \quad (9.32)$$

○ $t_0 - r_s/c \leq t_{j_1} < t_{j_2}$ の場合

$$\langle Pv \rangle_j = 0 \quad (9.33)$$

9.2.2 特異積分

時空要素の中に観測点を含む場合は特異要素となる。

この積分にあたり、特異要素のまわりの四節点を用いる通常の線形化方法と、四節点のうち明らかに因果律を満足しない一点を除いた線形化の二通りを考え、それぞれの要素を独立時空線形要素、時空平面要素と呼ぶことにする。

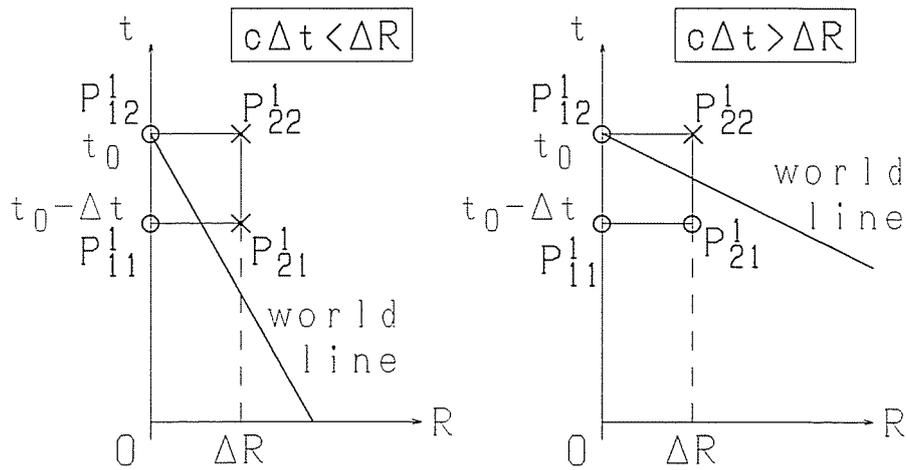


図 9.3: 特異点まわりの時空境界節点と因果律

独立時空線形要素では、時間軸および空間境界のそれぞれを独立に一次近似する。

$$q(R, T) = \frac{(\Delta R - R)T}{\Delta t \Delta R} q_{11} + \frac{RT}{\Delta t \Delta R} q_{21} + \frac{(\Delta R - R)(\Delta t - T)}{\Delta t \Delta R} q_{12} + \frac{R(\Delta t - T)}{\Delta t \Delta R} q_{22} \quad (9.34)$$

図 9.3 に $r_1 = r_0$ とした場合の、各節点と因果律の関係を示す。図中の○印は因果律を満足しており×印は満たしていないことを表す。また、 P の上付添字は特異点と一致する節点の境界節点番号を示し、下付添字は境界節点番号と時間節点番号を示している。この図から明らかなように、 P_{22}^1 点は $c\Delta t$ と ΔR の大小に関わらず因果

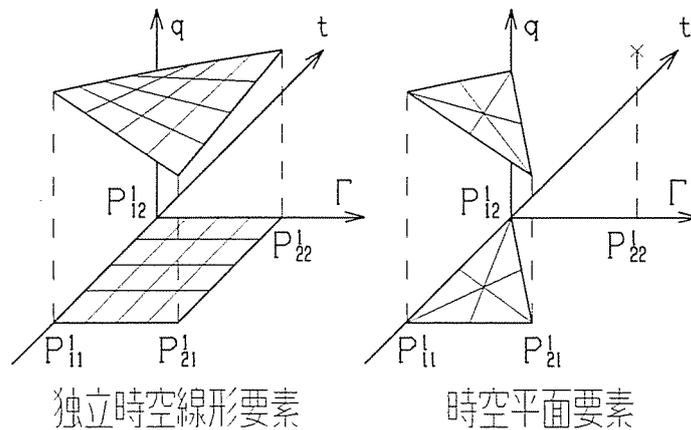


図 9.4: 独立時空線形要素と時空平面要素

律を満足していない。しかし、独立時空線形要素は、この P_{22}^1 点と観測点の結合を許している。また、独立時空線形要素は、時間を固定した場合の空間変化、あるいはその逆は線形であるが、世界線上あるいは世界線と平行な変化は線形ではない。

そこで、因果律を常に満足しない P_{22}^1 点を除き、世界線上あるいは世界線に平行な変化に対して線形となる要素、即ち時空平面要素を考える。この時空平面要素では、内挿関数に q_{11}, q_{21}, q_{12} の三点を通る平面を選び、次式で与える。

$$q(R, T) = \frac{\Delta RT - R\Delta t}{\Delta t \Delta R} q_{11} + \frac{\Delta t - T}{\Delta t} q_{12} + \frac{R}{\Delta R} q_{21} \quad (9.35)$$

独立時空線形要素および時空平面要素に対する要素内の $q(R, T)$ の分布を図 9.4 に示す。

特異要素の場合、 $\langle Hu \rangle$ は観測点から境界上の点を結ぶベクトル \mathbf{R} が、境界の法線ベクトル \mathbf{n} と直交することから、(9.4) 式中の $\cos \phi$ が常に 0 になるので、独立時空線形要素、時空平面要素に関わらず、

$$\langle Hu \rangle_{ij} = 0 \quad (9.36)$$

となる。

観測点 $O_{k\ell} (\ell = 2) (k: \text{空間}, \ell: \text{時刻})$ に対する特異要素の節点 $P_{ij}^k (i: \text{空間}, j: \text{時刻})$ の $\langle Gq \rangle$ に対する特異積分 g_{ij}^k を

$$\begin{aligned} g_{11}^1 &= g_{21}^2 = g_1 \\ g_{12}^1 &= g_{22}^2 = g_2 \\ g_{21}^1 &= g_{11}^2 = g_3 \\ g_{22}^1 &= g_{12}^2 = g_4 \end{aligned} \quad (9.37)$$

と表し、それぞれの要素に対する、 g_n を求める。

独立時空要素の特異積分

$c\Delta t$ と ΔR の関係で積分順序を変更すれば良い。

$c\Delta t < \Delta R$ の場合には先に空間積分を行えば、

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c^2 \Delta t^2}{6\pi \Delta R} + \frac{c\Delta t}{8} \\ -\frac{c^2 \Delta t^2}{12\pi \Delta R} + \frac{c\Delta t}{8} \\ +\frac{c^2 \Delta t^2}{6\pi \Delta R} \\ -\frac{c^2 \Delta t^2}{6\pi \Delta R} + \frac{c^2 \Delta t^2}{4\pi \Delta R} \end{pmatrix} \quad (9.38)$$

を得る。詳細な導出は、文献 [47] に示されている。

逆に $c\Delta t > \Delta R$ の場合には時間積分を先に行う。その結果、

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{12\pi\Delta a\Delta R} \begin{pmatrix} +3\Delta R\Delta a^2 \arcsin \frac{\Delta R}{\Delta a} + (2\Delta a^2 + \Delta R^2)\Delta s - 2\Delta a^3 \\ +3\Delta R\Delta a^2 \arcsin \frac{\Delta R}{\Delta a} + 3\Delta R^2\Delta a \log \frac{\Delta a + \Delta s}{\Delta R} + \Delta s^3 - \Delta a^3 \\ +2\Delta a^3 - 2\Delta s^3 \\ +3\Delta R^2\Delta a \log \frac{\Delta a + \Delta s}{\Delta R} - (2\Delta R^2 + \Delta a^2)\Delta s + \Delta a^3 \end{pmatrix} \quad (9.39)$$

を得る。ここで、 $\Delta s, \Delta a$ は $\Delta s = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta R^2}, \Delta a = c\Delta t$ である。

上式で g_4 は観測時刻の隣接節点 (図 9.3 の P_{22}^1 点) の q_4 に対する係数を示しており、 $g_4 \neq 0$ は因果律を満足しない点からの寄与が、観測点に及んでいることを意味する。

時空平面要素の特異積分

独立時空要素の場合と同様に、 $c\Delta t < \Delta R$ の場合には、

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c\Delta t}{8} - \frac{c^2\Delta t^2}{4\pi\Delta R} \\ \frac{c\Delta t}{8} \\ \frac{c^2\Delta t^2}{4\pi\Delta R} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.40)$$

となり、 $c\Delta t > \Delta R$ の場合には

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi\Delta a\Delta R} \times \begin{pmatrix} \Delta a^2\Delta R \arcsin \frac{\Delta R}{\Delta a} - \Delta a\Delta R^2 \log \frac{\Delta a + \Delta s}{\Delta R} + \Delta a^2\Delta s + \Delta R^2\Delta s - \Delta a^3 \\ \Delta a^2\Delta R \arcsin \frac{\Delta R}{\Delta a} + 2\Delta a\Delta R^2 \log \frac{\Delta a + \Delta s}{\Delta R} - \Delta R^2\Delta s \\ \Delta a\Delta R^2 \log \frac{\Delta a + \Delta s}{\Delta R} - \Delta a^2\Delta s + \Delta a^3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.41)$$

上式は独立時空線形要素とは異なり g_4 は 0 となっている。しかし、 $c\Delta t < \Delta R$ の場合には図 9.3 から判るように、 $g_3 \neq 0$ として、因果律を満足しない点との結合がまだ残っている。但し、 $c\Delta t > \Delta R$ の場合には全ての結合は因果律を満たしている。

9.3 結合行列

前節の離散化の結果により、全時空の節点 (k, ℓ) に対する積分方程式は以下の連立一次方程式に表される。

$$H_{k\ell}^{ij}u_{ij} - G_{k\ell}^{ij}q_{ij} + P_{k\ell}^j v_j = 0 \quad (9.42)$$

ここで、上下に同じ添字が現れているものは Einstein の総和規約を使用している。この式中の H, G, P は境界形状 (時間軸を含む) により決定する量、 v はソース源として与える量で既知である。また u, q の一方、あるいはそれらの一次結合は、境界条件として与えられ全時刻において既知である。 u, q の内の未知数およびそれに掛かる係数行列を x, A とし、既知数を x', A' として、既知数を右辺に未知数を左辺にまとめると

$$A_{k\ell}^{ij}x_{ij} = A_{k\ell}^{\prime ij}x'_{ij} - P_{k\ell}^j v_j \quad (9.43)$$

と表される。空間軸 (添字 k, i) についてベクトル表現し、既知項を一つにまとめると、

$$A_{\ell}^j x_j = A_{\ell}^{\prime j} x'_j - P_{\ell}^j v_j = b_{\ell} \quad (9.44)$$

を得る。境界上の節点数を K とすれば、上式の A_{ℓ}^j は $K \times K$ の行列であり、 x_j, b_{ℓ} は K 次のベクトルを表している。各々の時刻 $\ell (\ell \in [1, L])$ について行列を展開すると次式を得る。

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & 0 & \dots & 0 \\ A_2^1 & A_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_L^1 & A_L^2 & \dots & A_L^L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_L \end{pmatrix} \quad (9.45)$$

上式を解くことにより解は得られるが、着目すべき点は、因果律によって対角の小行列を除く上三角の各小行列が、全て零行列になっていることである。一段目の方程式は他の段に影響されずに一段目のみで解くことができ、その結果を逐次代入することによりすべての解が得られる。よって、連立方程式を解くための行列の寸法は境界の節点数 K のみによって決まり、時間軸上の節点数には影響されない。また、当然のことながら A, A' は観測点の時刻 t_0 と要素の時刻 t の差の関数である。そこで以降は $A_k^j = A_{k-j}$ と表すことにする。

$t_0 = t_L$ に於いて未知数 \boldsymbol{x}_L について解くべき方程式は、(9.45)式の最下段の方程式である。 $t \leq t_{L-1}$ の境界値 $\boldsymbol{x}_\ell (\ell < L)$ は既に解が求められており右辺に移項すると、

$$\boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{x}_L = - \sum_{m=1}^{L-1} \boldsymbol{A}_m \boldsymbol{x}_{L-m} + \boldsymbol{b}_L \quad (9.46)$$

となる。三次元問題の場合は上式の級数和は $m = 1$ の一項のみとなり、 Δt が小さいとすると、その同次方程式の固有値を調べることにより、解の安定性が議論できる [43]。しかし、二次元問題では級数和の各項が互いに相殺あるいは増長しあうので、この評価は無意味である。そこで、より直接的な方法を考える。まず、

$$\overline{\boldsymbol{A}}_m = -\boldsymbol{A}_0^{-1} \boldsymbol{A}_m \quad , \quad \overline{\boldsymbol{b}}_L = +\boldsymbol{A}_0^{-1} \boldsymbol{b}_L \quad (9.47)$$

と行列を定義し、(9.46)式の両辺に \boldsymbol{A}_0^{-1} を掛けると、

$$\boldsymbol{x}_L = \sum_{m=1}^{L-1} \overline{\boldsymbol{A}}_m \boldsymbol{x}_{L-m} + \overline{\boldsymbol{b}}_L \quad (9.48)$$

を得る。さらに、 $\boldsymbol{x}_{L-1}, \boldsymbol{x}_{L-2}, \dots, \boldsymbol{x}_1$ についても同様な関係を求め、これを $\overline{\boldsymbol{b}}_\ell$ について整理しその係数行列を \boldsymbol{C}_m とすると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= \overline{\boldsymbol{b}}_1 = \boldsymbol{I} \overline{\boldsymbol{b}}_1 = \boldsymbol{C}_0 \overline{\boldsymbol{b}}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 &= \overline{\boldsymbol{A}}_1 \boldsymbol{x}_1 + \overline{\boldsymbol{b}}_2 = \overline{\boldsymbol{A}}_1 (\boldsymbol{C}_0 \overline{\boldsymbol{b}}_1) + \overline{\boldsymbol{b}}_2 = (\overline{\boldsymbol{A}}_1 \boldsymbol{C}_0) \overline{\boldsymbol{b}}_1 + \overline{\boldsymbol{b}}_2 \\ &= \boldsymbol{C}_1 \overline{\boldsymbol{b}}_1 + \boldsymbol{C}_0 \overline{\boldsymbol{b}}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 &= \overline{\boldsymbol{A}}_1 \boldsymbol{x}_2 + \overline{\boldsymbol{A}}_2 \boldsymbol{x}_1 + \overline{\boldsymbol{b}}_3 = \overline{\boldsymbol{A}}_1 (\boldsymbol{C}_1 \overline{\boldsymbol{b}}_1 + \boldsymbol{C}_0 \overline{\boldsymbol{b}}_2) + \overline{\boldsymbol{A}}_2 (\boldsymbol{C}_0 \overline{\boldsymbol{b}}_1) + \overline{\boldsymbol{b}}_3 \\ &= (\overline{\boldsymbol{A}}_1 \boldsymbol{C}_1 + \overline{\boldsymbol{A}}_2 \boldsymbol{C}_0) \overline{\boldsymbol{b}}_1 + (\overline{\boldsymbol{A}}_1 \boldsymbol{C}_0) \overline{\boldsymbol{b}}_2 + \boldsymbol{I} \overline{\boldsymbol{b}}_3 \\ &= \boldsymbol{C}_2 \overline{\boldsymbol{b}}_1 + \boldsymbol{C}_1 \overline{\boldsymbol{b}}_2 + \boldsymbol{C}_0 \overline{\boldsymbol{b}}_3 \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (9.49)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_L &= \sum_{m=1}^{L-1} \boldsymbol{C}_m \overline{\boldsymbol{b}}_{L-m} \\ \boldsymbol{C}_m &= \sum_{p=1}^m \overline{\boldsymbol{A}}_p \boldsymbol{C}_{m-p} \quad , \quad \boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{I} \end{aligned} \quad (9.50)$$

が導かれる。この \boldsymbol{C}_m は $t = t_0$ での解 \boldsymbol{x}_L と $t = t_0 - t_m$ に於けるソース \boldsymbol{b} (強制励振項および境界条件項) との間の結合を表しており、この行列を調べることにより解の安定性に関する議論が可能である。以降この行列を結合行列と呼ぶ。

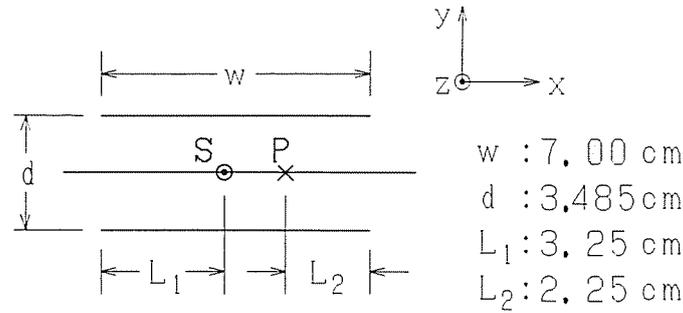


図 9.5: 解析モデル

9.4 解析モデル

二次元多重反射問題での解の安定性を論ずるために、図 9.5 に示す解析モデルを例にとり議論を進める。2枚の金属板を対向させ、その中心軸上の S 点に電流 J_z を流す。解 E_z の時間変化の評価点を、中心軸上の P 点とする。このモデルは二次元であるが $z = \text{const}$ 面に平行な二枚の完全導体板を置いた x 方向に長い矩形導波管に TE モードで励振した結果と等価である。なお、 J_z を流す導体の境界条件は考えないものとする。このとき波動方程式は

$$\nabla^2 E_z - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial J_z}{\partial t} \quad (9.51)$$

で与えられる。

金属板の境界は、図 9.6 のように金属板を有限な厚さ δ の散乱体と考え、その厚さを零にすることにより、境界積分は片側の積分の 2 倍と表され、さらに境界上の任意の点における領域を見込む立体角も 2 倍になる。

$$\int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} = 2 \int_{\Gamma'} \quad , \quad c_r = 2c'_r \quad (9.52)$$

これは、境界が磁気壁の時にも同様なので、(9.42) 式は

$$2Hu' - 2Gq' + Pv = 0 \quad (9.53)$$

と表される。上式は u', q' は v を 1/2 倍したときの解に等しく、境界節点数は半減され計算コストの低減に有効である。

ソース v に関しては高周波成分が発生しにくいように考慮したガウス分布を与える。

$$v' = \frac{v}{2} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial J_z}{\partial t} = \begin{cases} \exp \left\{ -\ln 2 \left(\frac{t-t_c}{t_{w1}} \right)^2 \right\} \cos \left(\pi \frac{t-t_c}{t_{w2}} \right) & (|t-t_c| < \frac{t_{w2}}{2}) \\ 0 & (|t-t_c| \geq \frac{t_{w2}}{2}) \end{cases} \quad (9.54)$$

$(t_c = 0.5\text{nsec}, t_{w1} = 0.12\text{nsec}, t_{w2} = 0.8\text{nsec})$

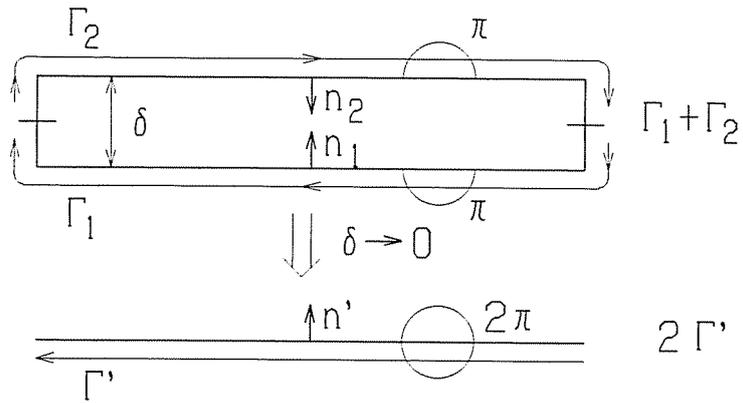


図 9.6: 厚さ零の境界の取扱い

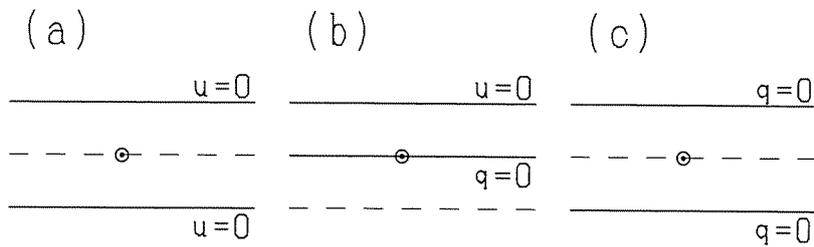


図 9.7: 三種類の境界条件

境界条件には図 9.7 に示すように次の三種類を考える。

- (a) ディリクレ境界: 二枚の金属板上で電界を零とする
- (b) 混合境界: 一枚の金属板を中心軸上の対称面にする
- (c) ノイマン境界: 金属板の代わりに対称面を与える

(a) と (b) は物理的に同じ問題であり、(c) の境界条件は物理的に意味はないが、ディリクレ境界とノイマン境界に対する解の安定性を論ずる上で重要である。なお、(b) では、ソース上に対称面の境界が置かれるが、先ほどと同様に厚みを零とした境界では、(9.2) 式の領域積分は、領域を見込む角度が領域内部のソースと同じ 2π の立体角を有するので、特に考慮する必要はない。

9.5 解析結果

図 9.5 の P 点における解の時間変化と、(9.50) 式の結合行列を求めた。他の文献の結果との議論のため、時空境界要素比 $h = c\Delta t/\Delta R$ ($\Delta R = 0.5\text{cm}$ とする) の値による解の安定性を次の条件のもとで調べる。

- 境界条件 (図 9.7)
- 特異積分要素の二通り線形化モデル (図 9.4: 独立時空線形要素, 時空平面要素)

まず、境界条件の与え方を評価する。図 9.8 にディリクレ境界 (図 9.7(a) に相当)、図 9.9 に混合境界 (図 9.7(b) に相当) のそれぞれの電界の時間変化を示す。図 9.8 では、時空境界要素比 $h = 0.60, h = 1.00$ で明らかな発散が見られ $h = 1.80$ においても $t = 2.8\text{nsec}$ 近傍で発散が始まりかけている。図 9.9 では、 $h = 0.60$ で発散が見られるが他は安定しているように見える。

図 9.10 および図 9.11 にそれぞれの場合の結合行列 C_m を示す。横軸は観測時刻とソースの時刻の差を示しており、横軸が大きくなるほど過去の状態を表す。縦軸は各結合行列 C_m の最大値を対数で示している。対象としているモデルは開放型であるため、結合係数はソースが境界に到達した時間にピークを有しその後は減衰するはずである。これらの図からは混合境界の場合の $h = 1.38$ を除いて全てが発散傾向を示している。図 9.8, 図 9.9 において安定にみえた解も解析時間をより長く取った場合には発散すると考えられる。

図 9.12 に $t = t_c (= 3\text{nsec})$ における h と結合行列の関係を示す。境界条件がディリクレ境界 (a) の場合には h に関わらず安定な解は得られない。また混合境界 (b) の場合には $h \sim 1.4$ と $h \sim 2.2$ 近傍に安定な解が存在する。また、ノイマン境界 (c) の場合には h に関わらず解は常に安定である。

(9.46) 式の A_0 には各条件における特異積分の結果、即ちディリクレ境界の場合には G_0 が、ノイマン境界の場合には H_0 が入る。 H_0 には線形化方法に関わらず領域を見込む角度 $c_r = 0.5$ が対角成分に入り、単位行列を c_r 倍した結果になるのに対し、 G_0 には、特異積分の結果が帯行列として、対角成分およびその隣に分布する。積分は積分時空領域は小さくなる程積分精度が保証されるため、この特異積分は c_r に比べ小さな値を持つ。また、6.2 節で述べた条件数を考慮すれば、単位行列は帯行列に比べ直交性が優れていることが理解できる。これらから、ノイマン境界の方が (9.46) 式の解の精度は良くなると推定される。混合境界の場合には、両者の中間的な結果となる。

次に特異積分の線形化モデルの違いによる結果を示す。図 9.8~図 9.12はすべて、特異積分に対して同時刻の隣の節点を除いた三点による時空平面要素を用いた結果である。図 9.13に (9.34) 式による独立時空線形要素を用いた場合の結果を示す。図 9.12と比べると混合境界の場合でも、図 9.13には安定な解を与える h は見られない。図 9.3で説明したように、独立時空線形要素による離散化は時空平面要素による離散化と比べ、因果律を乱す節点との結合を有しており、これが A_0 に入るため、解全体への誤差を増大していると考えられる。

また、時空平面要素を用いた場合でも、 $c\Delta t < \Delta R (h < 1)$ では因果律を満たさない節点の結合が存在する (図 9.3の P_{21}^1 点)。このため、図 9.12の (a),(b) のように $c\Delta t < \Delta R (h < 1)$ において不安定となり、逆に $c\Delta t > \Delta R (h > 1)$ では安定な傾向を示す。但し、二次元境界要素法でも、(9.46) 式の $m = 1$ の項が大きな値となるため、三次元と等価な安定条件 ($c\Delta t < \Delta R$) [43,44] も必要となり得る。そのため、 $c\Delta t > \Delta R$ を満たしていても常に安定な結果は得られないと考えられる。

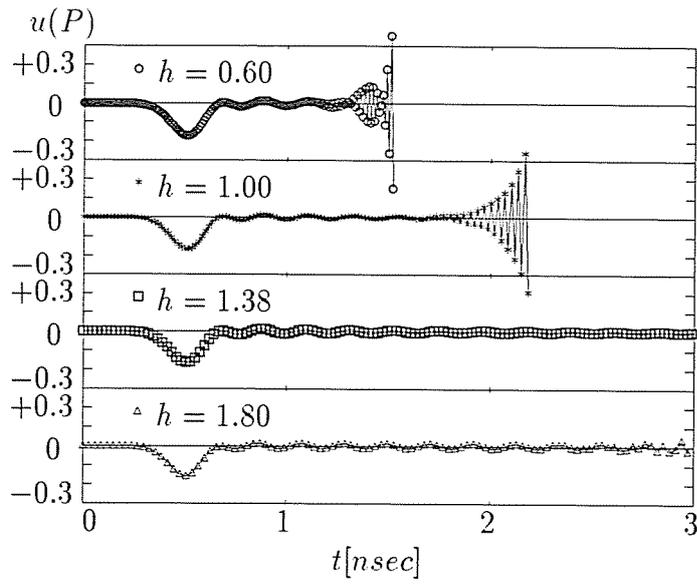


図 9.8: ディリクレ境界時の電界 (時空平面要素を用いた場合)

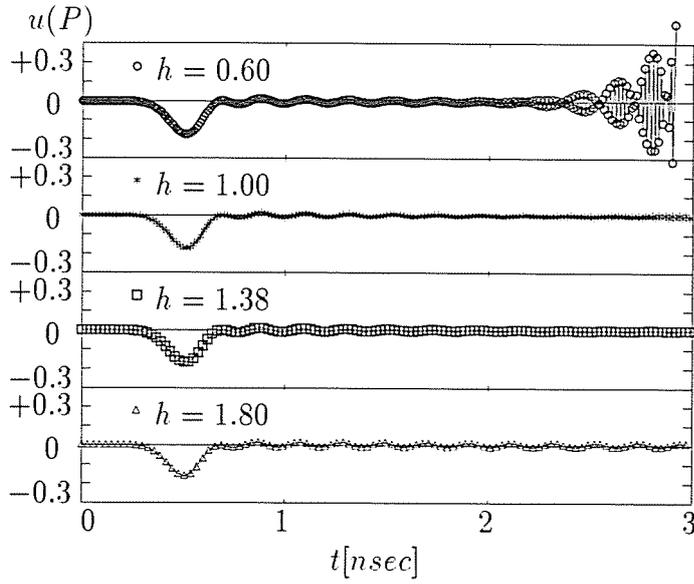


図 9.9: 混合境界時の電界 (時空平面要素を用いた場合)

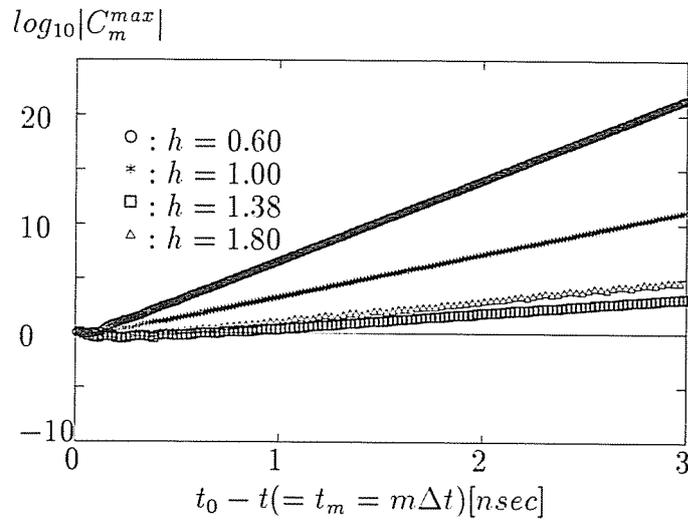


図 9.10: ディリクレ境界時の結合行列 (時空平面要素を用いた場合)

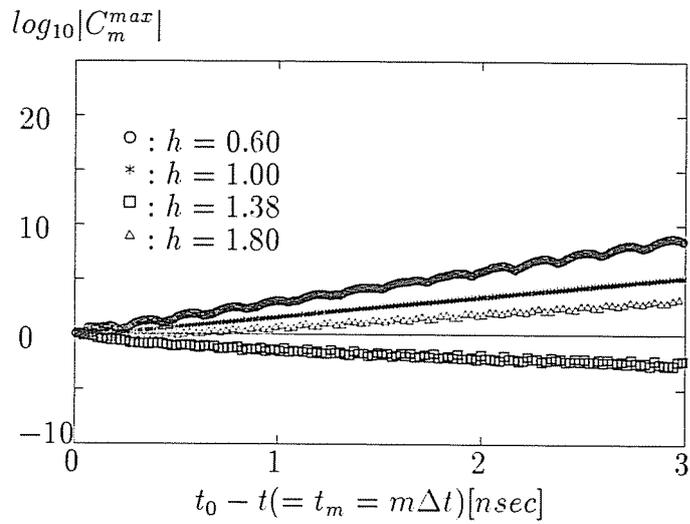


図 9.11: 混合境界時の結合行列 (時空平面要素を用いた場合)

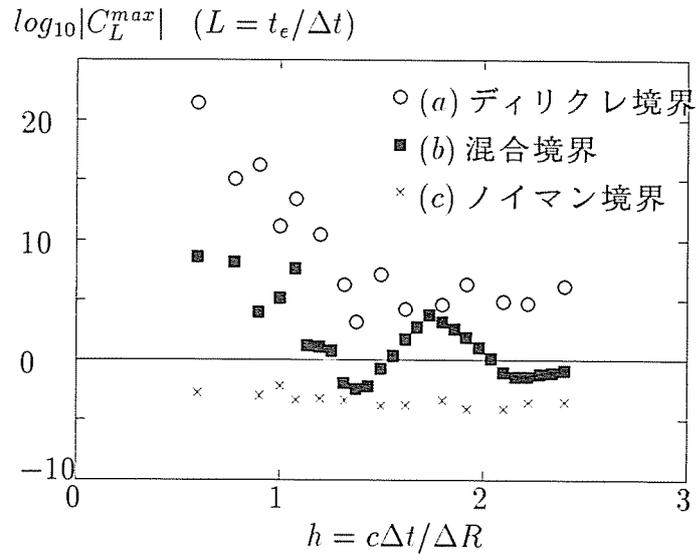


図 9.12: 時空平面要素に対する結合行列

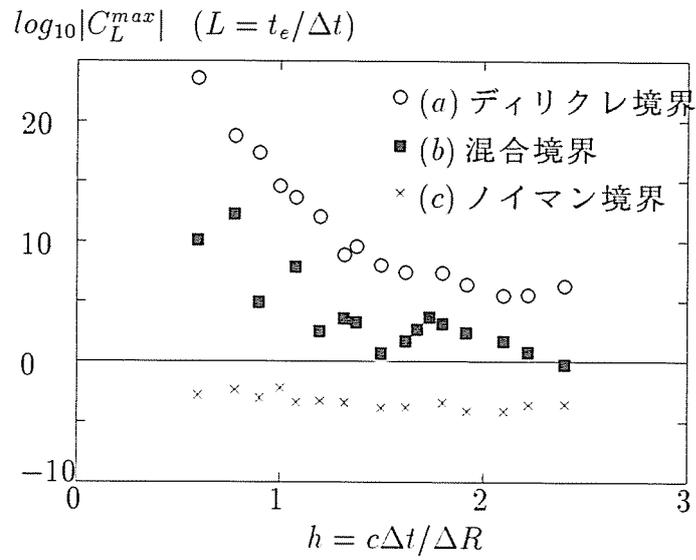


図 9.13: 独立時空線形要素に対する結合行列

9.6 まとめ

本章では、特に解が不安定となり易い多重反射の問題を例に二次元スカラー波動方程式を、二通りの線形(一次)時空要素による離散化を用いた境界要素法によって解析した。積分による誤差を軽減するために、観測点(特異点)まわりは時間・空間の両者に対して、他の要素については時間軸に対して解析的な積分を行った。この積分には、単純に時間軸と境界軸の両者に線形変化を仮定した独立時空線形要素の他に、観測点と同時刻で因果律を満たさない点を除く三点による平面変化を仮定した時空平面要素を新たに提案して計算した。また、安定性を論ずるために、任意の時刻のソースと現時刻の境界値との結合の強さを示す結合行列を新しく定義し、その最大値によって安定性の評価を行った。その結果、以下の結論を得た。

- 全境界がディリクレ型境界の場合: 常に不安定
- 全境界がノイマン型境界の場合: 常に安定
- ディリクレ型境界とノイマン型境界が混在する場合
 - 独立時空線形要素を使用した場合: 不安定
 - 時空平面要素を使用した場合: $c\Delta t > \Delta R$ で安定

但し、混在型の境界条件で時空平面要素使用時の安定条件は、必要条件であり、これを満足していても常に安定な解が得られるとは限らない。

また、一見解が安定に見えてもより、長い時間スケールでは発散する場合があります、本章で採用した結合行列の時間変化による安定性の評価が有効である。

第 10 章

結論

本論文では、共振器法によるプラズマ計測の、境界要素法解析の解析手法の確立を目的とし、幾つかの独創的な手法、変数の導入を行った。

本研究により得た知見を以下に列記する。

- ポアソン方程式の開放型問題に対する境界要素法において、一般に使われている基本解を用いると、誤った解を与えることを示した。これは、基本解が無窮遠で0とならないので、無窮遠の仮想的な境界における積分を無視できないためである。解析体系より十分に大きな仮想的な境界上で、基本解が0になるように、基本解中に残されている未定の積分定数を選ぶことにより、正しい解が得られることを示した。
- 開放型楕円筒ファブリ・ペロー共振器に導波管を結合したモデルについて、共振特性と内部電界分布を、ヘルムホルツ方程式に対する境界要素法により求め、共振状態と反共振状態の定義を行い、開放型共振器の共振のメカニズムを明らかにした。反共振状態は共振器内に単一のモードが形成されている状態であり、反射係数は極大になり、導波管結合面は短絡状態になる。これに対して共振状態はあるモードから別のモードに移行する途中に反射係数が極小になる状態である。この様子は、閉じた共振器と明らかに異なる。つまり、閉じた共振器では、壁面損失が共振の原因であるのに対し、開放型共振器の共振は、開口部からの放射が支配的なため、共振時にはモードが形成されないためである。

なおこの解析にあたり、有限の導電率の金属板に対する境界条件を採用し、その有効性を確認し、開放型共振器には、この境界条件の考慮は不要であるこ

とを導いた。

- 一つの媒質を他の媒質が取り囲む問題の場合、非物理解が発生することを確認した。その発生の条件を条件数の採用により、非物理解の原因は、外側の媒質の境界積分の一部に含まれている、内側媒質と外側媒質との界面の積分であることを明らかにした。

非物理解の除去のために、外側媒質を仮想的な境界により多領域に分割する仮想境界分割法を、提案しその有効性を確かめた。また、この仮想境界分割法は、非物理解の除去のみならず、計算コストの低減に有効な方法であることを示した。

- 仮想境界分割法を用いて、平板状プラズマを含むファブリペロー共振器の解析を行い、共振器法によるプラズマ密度の推定が可能であることを示した。さらに、プラズマに損失を持たせた解析も行い、 Q 値の変化から衝突周波数の推定も、共振器法により可能であることも示した。
- 密度分布を有する不均質プラズマに対して、二種類の境界要素法解析を適用した。一方は、不均質項をソース項とみなす領域積分を含んだ解法であり、これは有限要素法や差分法のような領域法の一つで、正しい解は得られるが、境界法が有する計算コストの低減が損なわれる方法である。他方は、フェルマーの原理に基づき基本解の振幅と位相を補正する近似解法である。この近似解法では、プラズマ内部での散乱を考慮していないにも関わらず、共振特性の位相等において広い密度範囲に亘って有効な手法であることを示し、かつ、低計算コストの利点が失なわれないことを示した。
- 二次元波動方程式の時間増分型境界要素法において、結合行列を新たに定義し、様々な境界条件、特異積分の方法、要素サイズに対する解の安定性について検討した。その結果、ノイマン型境界条件は上記の条件に関わらず常に安定であり、逆にディリクレ型境界条件は不安定であった。ノイマン型とディリクレ型の混合問題の場合には、本論文で新たに提案した時空平面要素を用い、かつ、特定の要素サイズ比(時間要素と空間要素の比)の場合にのみ安定となることを示した。この条件には、従来から言われている安定条件は含まれておらず、従来条件が誤りであることが判明した。

なお、常に安定な条件は得られなかったものの、特定の条件が安定かどうかを決定するには、結合行列を調べることにより、可能であることを示した。

謝辞

本論文を閉じるにあたりまして、北海道大学工学部原子工学科 榎戸 武揚 教授に、心から厚く御礼申し上げます。同大学大学院在学中から始まり、以来十年余りの長きに亘り、懇切丁寧な御指導、御助言を数多くいただき、未熟な学生であった私が本論文を完成に至るまで、導いて下さいました。また、富士通株式会社へ就職により、一旦研究から離れた私に、再度北海道大学での研究の機会を与えて下さいましたことにも、感謝致します。

また、今は亡き同学部旧電気工学科 深井 一郎 教授にも、多くの新たな発想のヒントを御教示いただきました。深く感謝し、御冥福をお祈り致します。

さらに、本論文の作成にあたり、同学部原子工学科の 山科 俊郎 教授、システム情報工学専攻の本間 利久 教授、電子情報工学専攻の小柴 正則 教授には貴重な御指摘、御助言を賜りました。深く感謝致します。

また、幾つかの業績の共同研究者として、忙しい中、絶えず討論に加わってくれたエネルギー変換工学講座の加賀田 誠 君、伊藤 裕康 君、西山 修輔 君をはじめとする学生諸君、同講座の及川 俊一 助教授、北川 広貴 技官に感謝致します。

最後に、本論文が完成するまで、家庭を顧みなかった時期が続いたにも関わらず、寛容を持って接してくれた妻 公子 と長男 駿、長女 杏菜 にも感謝します。

参考文献

- [1] 熊谷 信昭, 森田 長吉 共著: 「電磁波と境界要素法」, 森北出版 (1987)
- [2] C. A. Brebbia 編, 田中 正隆 監訳: 「境界要素法の応用・2」, 企画センター (1983)
- [3] C. A. Brebbia 著, 神谷 紀生・田中 正隆・田中 喜久明 共訳: 「境界要素法入門」, 培風館 (1980)
- [4] C. A. Brebbia, S. Walker 共著, 神谷 紀生・田中 正隆・田中 喜久明 共訳: 「境界要素法の基礎と応用」, 培風館 (1981)
- [5] 佐久間 哲郎: 「工業数学」, 朝倉書店 (1979)
- [6] Roger F. Harrington: “Field Computation by Moment Methods,” The Macmillan Co., N.Y.(1968)
- [7] 今村 勤: 「物理とグリーン関数」, 岩波書店 (1978)
- [8] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun ed.: “HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS(tenth printing),” Dover Publications Inc.(1972)
- [9] P. C. Hammer, O. J. Marlowe and A. H. Stroud: “Numerical Integration over Simplexes and Cones,” *Mathematical Tables and other Aids to Computation*, **10**,130-137(1956)
- [10] Robert E. Collin: “Field theory of guided waves(2nd ed.),” IEEE Press(1991)
- [11] 中島 将光: 「マイクロ波工学—基礎と原理—」, 森北出版 (1975)
- [12] 黒川 兼行: 「マイクロ波回路入門」, 丸善 (1963)
- [13] 堤井 信力: 「プラズマ基礎工学」, 内田老鶴圃 (1986)
- [14] プラズマ・核融合学会 編: 「プラズマ診断の基礎」, 名古屋大学出版会 (1990)

- [15] M. A. Heald, C. B. Wharton : “Plasma diagnostics with microwave,” Robert E. Krieger Publishing Co., New York(1978)
- [16] 林 泉:「プラズマ工学」,朝倉書店(1987)
- [17] S. M. Wolfe, K. J. Button, J. Waldman and D. R. Cohn : “Modulated submillimeter laser interferometer system for plasma density measurements,” *Applied Optics*,**15**,11,2645-2648(1976)
- [18] 福田 武司 : 「プラズマ計測の現状—干渉・放射計測—」, プラズマ・核融合学会誌,**71**,2,127-131(1995)
- [19] 間瀬 純 : 「プラズマのミリ波・サブミリ波帯先端計測技術」, プラズマ・核融合学会誌,**71**,6,532-539(1995)
- [20] B. I. Cohen and B. B. Afeyan : “A one-dimensional numerical study of ultrashort-pulse reflectometry,” *Rev. Sci. Instrum.*,**66**,2,1241-1246(1995)
- [21] R. J. Chaffine : “Plasma diagnostics with a microwave Fabry-Pèrot resonator,” *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, **MTT-16**,1,(Jan.,1968),p.37.
- [22] 弓場, 太田, 牧本 : 「ファブリ・ペロー共振器による複素誘電率の測定」, 電子通信学会雑誌,**50**,10,(昭 42-10)
- [23] 榎戸 武揚, 鈴木 道雄, 松本 正 : 「異方性媒質板をそう入したファブリペロー共振器の解析」, 電子通信学会論文誌 B,**54-B**,4,153-159(昭 46-4)
- [24] 榎戸 武揚, 鈴木 道雄 : 「ファブリ・ペロー共振器によるプラズマ定数の測定について」, 北海道大学工学部研究報告,**59**,107-119(昭 46)
- [25] 榎戸 武揚, 鈴木 道雄, 松本 正, 上村 正雄 : 「無限長だ円筒状反射鏡よりなるファブリ・ペロー共振器の入力アドミタンス」, 電子通信学会論文誌,**51-B**,3,95-101,(昭 43) .
- [26] T. H. Fwazi, M. T. Ahmed, P. E. Bruke : “On the Use of the Impedance Boundary Conditions in Eddy Current Problems,” *IEEE Trans. Magnetics*, **MAG-21**,5,1835-1840(1985)

- [27] S. Ratnajeevan H. Hoole : “The natural finite element formulation of the impedance boundary condition in shielding structures,” *J. Appl. Phys.*, **63**,8,3022-3024(Apr.,1988)
- [28] S. Subramaniam, S. Ratnajeevan H. Hoole : “The Impedance Boundary Conditions in the Boundary Element - Vector Potential Formulation,” *IEEE Trans. Magnetics*, **MAG-24**,6,2503-2505(1988)
- [29] M. T. Ahmed, J. D. Lavers, P. E. Bruke : “On the Use of the Impedance Boundary Conditions with an Indirect Boundary Formulation,” *IEEE Trans. Magnetics*, **MAG-24**,6,2512-2514(1988)
- [30] 富岡, 榎戸, 深井 : 「プラズマを含むファブリ・ペロー共振器の領域分割型境界要素法による解析」, 電気学会研究会資料, **EMT-87-12**(昭 62-4)
- [31] 本間 利久 : 「境界要素法による導波路解析とスプリアス解」, 電気学会研究会資料, **EMT-86-4**(昭 61)
- [32] 富岡 智, 榎戸 武揚 : 「異なる媒質を含むファブリ・ペロー共振器の境界要素法解析におけるスプリアス解除去」, 電気学会論文誌 A, **113A**,572-579(平 5-8)
- [33] S. Kagami, I. Fukai : “Application of Boundary-Element Method to Electromagnetic Field Problems,” *IEEE Trans. Microwave Theory and Tech.*, **MTT-32**,4,(Apr.,1984)
- [34] 小貫, 石山, 小川 : 「境界要素法における 0-1 次混合離散化法について」 電気学会論文誌 A, **102A**,p.541,(昭 57-10)
- [35] 榎戸 武揚 : 「異方性媒質を含む開放型共振器および導波系に関する研究」, 北海道大学大学院工学研究科 学位論文 (昭 46)
- [36] 富岡 智・榎戸 武揚・深井 一郎 : 「分布を持つプラズマを含む開放型共振器に対する境界要素法の適用の試み」, 日本原子力学会北海道支部第 5 回研究発表会,29-30(昭 62-12)
- [37] 富岡 智, 加賀田 誠, 伊藤 裕康, 西山 修輔, 榎戸 武揚 : 「不均質媒質中のヘルムホルツ波動方程式への境界要素法の適用」, 電気学会論文誌 A, **115A**,p.1098-1104(平 7)
- [38] 電子通信学会編: 「電磁界の近代解析法」, コロナ社 (昭 54)

- [39] M. Tsuchimoto, T. Homma and A. Yoneta : “Boundary Element Analysis of Axisymmetric Resonant Cavities,” *IEEE Trans. on Magnetics*, **24**,6,2500-2502(1988)
- [40] N. Kamiya and Y. Sawaki : “The boundary integral formulation for some inhomogeneous differential equations,” *Engineering Analysis*,**1**,4,188-194(1984)
- [41] E. Nishimura, N. Morita and N. Kumagai : “Scattering of Guided Modes Caused by an Arbitrarily Shaped Broken End in a Dielectric Slab Waveguide,” *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, **MTT-31**,11,923-930(1983)
- [42] C. L. Bennett and W. L. Weeks : “Transient Scattering from Conducting Cylinders,” *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*,**AP-18**,5,627-633(1970-9)
- [43] P. D. Smith: “Instabilities in Time Marching Methods for Scattering: Cause and Rectification,” *Electro-magnetics*,**10**,439-451(1990)
- [44] B. P. Rynne and P. D. Smith: “Stability of Time Marching Algorithms for the Electric Field Integral Equation,” *J. of Electromagnetic Waves and Applications*,**4**,12,1181-1205(1990)
- [45] E. Schlemmer, W. M. Rucker and K. R. Richter: “Boundary Element Computations of 3D Transient Scattering from Lossy Dielectric Objects,” *IEEE Trans. on Magnetics*,**29**,2,1524-1527(1993-3)
- [46] 富岡, 加賀田, 伊藤, 榎戸: 「二次元過渡応答境界要素法における解の安定性」, 電気学会論文誌 A,**115A**,9-16(1995)
- [47] 富岡, 西山, 加賀田, 伊藤, 榎戸: 「境界要素法における二次元波動方程式の解の安定性について」, 境界要素法研究会 第 45 回例会研究発表資料,1-23,(1995)