



Title	線形推定理論に基づく画像復元法とその安定性に関する研究
Author(s)	今井, 英幸
Citation	北海道大学. 博士(工学) 乙第5458号
Issue Date	1999-03-25
DOI	10.11501/3151619
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/32688
Type	theses (doctoral)
File Information	5458.pdf



[Instructions for use](#)

線形推定理論に基づく画像復元法とその安定性に関する研究

今井 英幸

目次

第1章 序論	4
第I部 画像復元に用いられる最適復元フィルタ	7
第2章 線形推定理論に基づく画像の観測と復元の定式化	8
2.1 画像観測の定式化	8
2.2 線形劣化と非線形劣化	10
2.3 線形モデルにおける母数推定と画像復元	11
第3章 擬ノルム最小の最小二乗解を与える作用素	13
3.1 はじめに	13
3.2 方程式の解を与える作用素	14
3.3 一般逆	16
3.4 作用素方程式を解くためのいくつかの補題	18
3.5 最小二乗解を与える作用素	20
3.6 擬ノルム最小の最小二乗解を与える作用素	25
第4章 一般逆フィルタと射影フィルタ族	34
4.1 はじめに	34
4.2 一般逆フィルタ	34
4.3 射影フィルタ	35

4.4	部分射影フィルタ	37
4.5	平均射影フィルタ	40
4.6	部分射影フィルタを用いた共通部分を持つ画像の復元	42
4.7	一般逆フィルタと射影フィルタ族の統一理論	52
第5章	パラメトリックフィルタ	54
5.1	はじめに	54
5.2	パラメトリック一般逆フィルタ	55
5.3	パラメトリック射影フィルタ	56
5.4	パラメトリック部分射影フィルタ	56
5.5	パラメトリックウィナーフィルタ	57
5.6	パラメトリック射影フィルタ族の統一理論	58
第II部	摂動に対する最適復元フィルタの性質と正則化パラメトリック射影フィルタ族	62
第6章	観測過程と画像復元	63
6.1	観測過程が未知の場合	64
6.2	観測過程が推定できる場合	64
第7章	摂動に対する射影フィルタ族の性質	66
7.1	はじめに	66
7.2	摂動に対する擬ノルム最小の最小二乗解を与える作用素の性質	70
7.3	摂動に対する一般逆フィルタおよび射影フィルタ族の性質	75
7.4	数値例	78
第8章	摂動に対するパラメトリックフィルタの性質	85
8.1	はじめに	85

8.2	摂動に対するパラメトリック一般逆フィルタの性質	86
8.3	摂動に対するパラメトリック射影フィルタ族の性質	88
8.4	数値例	92
第9章	正則化パラメトリック射影フィルタ族	99
9.1	はじめに	99
9.2	正則化	100
9.3	正則化パラメトリック射影フィルタ族	102
9.4	数値例	108
第10章	結論	120
10.1	本論文により示された結果	120
10.2	今後の課題	122
	謝辞	124
	索引	125
	参考文献	126

第1章 序論

天体写真や CT (Computer Tomography) の画像など、多くの画像は何らかの原因による劣化を受けていると考えられる。天体写真の撮影では大気の擾乱による影響、CT スキャナの投影像では被写体の微小な動きの他に、投影図が有限個の検出器によって構成されることによる離散化も劣化の一つとみなすことができる。さらに、得られた画像は雑音加わったものであることが多い。

このような画像の観測モデルを数学的に定式化し、その定式化の下で、画像の最適な復元を行なう多くの手法が提案されている。その手法は大きく

- (i) 観測画像以外の知識を（ほとんど）仮定しないもの
- (ii) 観測過程（劣化）、雑音などの性質が既知であることを前提とするもの

に分けて考えることができる。得られた観測画像以外に知識を仮定しない手法は、多くの場面に適用が可能である反面、復元に利用できる情報が極めて限られるために、高精度の復元が難しい。一方、観測過程や雑音に関する知識があれば、それらを有効に利用して、より原画像に近い復元画像を得ることができる。しかし、現実の画像観測においては観測過程などが正確にわかっている場合は少ない。したがって、原画像が受けた劣化と画像復元を行なう際に用いた観測過程に関する知識は必ずしも一致しないと考えられる。

観測過程や雑音の性質を既知とする復元手法においては一般逆フィルタ、ウィーナーフィルタ、射影フィルタ族など、前提とする知識や復元する際の基準の設け方によって数多くの復元フィルタが提案されてきた。これらの復元手法においては観測過程などの知識は正確であり、画像観測のモデルは原画像が受けた劣化や加わった雑音の性質を

正しく反映したものであることが前提である。しかし、前述したとおり観測過程に関する知識は原画像が受けた劣化とは一致しないことが多いことから、仮定された観測モデルは真のものとはわずかに異なっていると考えられる。

本論文においては、復元に用いられた観測過程や雑音の性質が真のものとは異なっている場合に、復元画像にどのような影響を及ぼすかを考察し、その結果に基づいて復元に用いられる観測過程や雑音の性質の微小な差異に対して安定な復元手法を提案する。

第2章では本論文で用いる画像の観測過程を数学的に定式化する。

第3章では第2章の定式化の下での復元に必要となる作用素の一般逆に関する諸性質を述べる。ここで述べられる性質は以下の章の基本となるものである。

第4章と第5章では本論文で扱う画像復元手法である一般逆フィルタと射影フィルタ族、パラメトリック射影フィルタ族の導出を行ない、その諸性質を述べる。従来の研究において、射影フィルタ族は、画像復元の枠組の中で議論されてきた。本論文では第3章で述べる作用素の一般逆として統一的に導出できることを示す。また、射影フィルタ族の一つである部分射影フィルタの応用例として、共通部分がある画像を復元する手法について述べる。パラメトリック射影フィルタ族は従来、個別に議論されてきたが、第5章ではある作用素方程式の解として統一的に導出する方法を示す。

第6章では画像観測モデルについて、観測過程や雑音に関する知識がない場合の復元方法と以下の章で前提とする観測過程の性質などをまとめる。

第7章では射影フィルタ族について、画像観測モデルとして仮定した観測過程や雑音の性質が真のものから微小に異なっている場合、そのモデルに基づく復元画像がどのような影響を受けるかを考察する。

第8章ではパラメトリックフィルタ族について同様の考察を行なう。その結果として、これらの手法による画像復元が真の観測過程からの微小な差異によって大きな影響を受け、安定した復元ができない可能性があることを示す。

それらの知見に基づいて第9章において正則化手法を取り入れた手法である正則化パラメトリック射影フィルタ族を用いた画像復元法を提案する。さらに、提案された手法が観測モデルの微小な変動に対して安定であることを示し、その有効性を数値実験に

より検証する.

第10章では本論文の結果をまとめ, さらに, 画像復元問題において今後解決すべき問題について述べる.

第I部

画像復元に用いられる最適復元フィルタ

第2章 線形推定理論に基づく画像の観測と復元の定式化

第2章では画像の観測及び復元過程を函数解析の枠組の中でどのように定式化されるかを述べる。この枠組の中では原画像および観測画像、雑音、復元画像は適当なヒルベルト空間の要素であるとみなす。また、観測過程はヒルベルト空間の作用素として表現する。この定式化によって画像の復元問題だけでなく、平滑化、補間、ニューラルネットの学習なども統一的に扱うことが可能になる(小川[27, 31], 小川・山崎[36], 山崎・小川[57]など)。

2.1 画像観測の定式化

観測の対象となる原画像 f が属する空間を \mathcal{H}_1 、観測画像(劣化画像ともいう) g が属する空間を \mathcal{H}_2 とする。ここで、 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ は共に可分なヒルベルト空間で、それぞれ原画像空間、観測画像空間とよばれる。また、 \mathcal{H}_1 から \mathcal{H}_2 への有界線形作用素の全体を $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ で表す。特に、 $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ の場合を単に $B(\mathcal{H})$ で表す。原画像空間および観測画像空間が有限次元空間か無限次元空間かによって、連続-連続モデル、連続-離散モデル、離散-連続モデル、離散-離散モデルの4通りの組合せがあるが、関数解析を用いることによりこれらを区別せずに扱うことができる。観測画像がデジタル画像であれば、連続-離散モデルと考えることが適当である。また、離散-離散モデルは統計的推測理論においてガウス-マルコフ型モデルとよばれ多くの研究がある(Rao[40])。

雑音の影響がない場合、画像観測のモデルは

$$g = Af, f \in \mathcal{H}_1, g \in \mathcal{H}_2. \quad (2.1)$$

と表され、加法的な雑音がある場合には

$$g = Af + n, f \in \mathcal{H}_1, g, n \in \mathcal{H}_2, \quad (2.2)$$

と表される。ここで A は観測過程を表す作用素で、観測作用素 (または劣化作用素) とよばれる。また、 n は確率分布関数 F_n に従う確率変数である。確率変数 n の平均、相関作用素をそれぞれ

$$E_n(n) = \int n dF_n,$$

$$V_n(n) : \mathcal{H}_2 \ni y \mapsto E_n(((n - E_n(n)) \otimes (n - E_n(n)))y) \in \mathcal{H}_2,$$

で定義する。ここで、 $x \otimes y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ は $x, y \in \mathcal{H}$ に対して

$$(x \otimes y)z = \langle z, y \rangle x, z \in \mathcal{H},$$

で定義される作用素で、シャッテン形式とよばれる。本論文で扱う画像復元問題では、相関作用素は有界作用素であることを仮定する。すなわち、 $Q = V_n(n) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ とする。相関作用素は分散共分散行列の一般化であり、これが有界作用素であるという仮定は2次のモーメントが有限であることに対応する。さらに、確率変数ではない $a \in \mathcal{H}$ に対して、

$$\int \langle a, n \rangle dF_n = \langle a, \int n dF_n \rangle,$$

$$\int \langle a, (n \otimes n)a \rangle dF_n = \langle a, \int (n \otimes n)a dF_n \rangle,$$

などが成り立つものとする。これらの式は有限次元空間において

$$E(\mathbf{a}'X + \mathbf{b}) = \mathbf{a}'E(X) + \mathbf{b},$$

$$V(\mathbf{a}'X) = \mathbf{a}'V(X)\mathbf{a},$$

が成り立つことの自然な拡張である。

観測画像 $g \in \mathcal{H}_2$ が式 (2.1) または式 (2.2) で与えられるとき、観測画像 g に基づいて原画像を推定することを画像復元といい、推定された画像を復元画像という。

2.2 線形劣化と非線形劣化

画像観測モデル (2.1) において、作用素が有界線形作用素の場合には線形な劣化、非線形作用素の場合には非線形な劣化という。本論文には線形な劣化を受けた画像の復元問題のみを扱うが、現実には劣化の多くは非線形であることから、非線形な劣化を受けた画像の復元問題も重要である (小川 [30])。

Youla[60] では原画像のもつ性質が凸集合の共通部分で表される場合に、凸射影を反復することにより与えられた制約を満足する画像が得られることを示している。この方法では反復による収束は弱収束であるが、宮腰他 [23] では Browder の定理を凸射影に適用することにより、収束を強めて強収束する列が得られることを示した。

これらの方法においては不動点定理が基本であり、したがって、作用素は縮小作用素であることが要請される。ただし、作用素 $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ が縮小作用素であるとは

$$\|Ax - Ay\| < \|x - y\|,$$

がすべての $x, y \in \mathcal{H}$ について成り立つことである。Youla[60]、宮腰他 [23] では nonexpansive 写像

$$\|Ax - Ay\| \leq \|x - y\|,$$

を仮定しているが画像観測モデル (2.1) において、観測作用素がこれらの条件を満たす場面は限られる。また、原画像空間 \mathcal{H}_1 と観測画像空間 \mathcal{H}_2 が異なる場合には、不動点定理や反復法そのものが使えない。また、一対の原画像と観測画像が与えられたという条件のもとでボルテラ級数を用いて復元作用素を構成する研究も行なわれている (近藤・松尾 [20]、谷口他 [46])。

推測統計の立場から見ると観測作用素が非線形である画像観測モデル (2.1) は非線形回帰モデルと同等であり、その中で提供されている数多くの手法が適用できると考えられる (Seber and Wild[43]). しかし、非線形回帰モデルのパラメータ推定は最尤法に基づいて行なわれることが多く、原画像空間と観測画像空間の次元が大きい場合には推定のアルゴリズムが問題になる。

2.3 線形モデルにおける母数推定と画像復元

本論文を通じて、劣化は線形であることを仮定し、復元作用素も線形のを考える。第4章以降で扱う画像復元問題では、観測画像は式 (2.2)(加法的な雑音がある場合) で、復元画像は

$$\hat{f} = Bg = B(Af_0 + n), \hat{f} \in \mathcal{H}_1,$$

で得られるものを対象とする。ここで $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ は画像の復元過程を表す有界作用素であり、復元作用素とよばれる。また BAf_0 , Bn をそれぞれ復元画像の画像成分、雑音成分という。

雑音がないモデル (2.1) の場合においても観測画像 g に対して

$$g = Af, g \in \mathcal{H}_2,$$

をみたす解 $f \in \mathcal{H}_1$ は一般には一意に定まらない (第4章参照)。加法的雑音がある場合には原画像が同じであるにもかかわらず、雑音の影響によって観測するたびに異なる観測画像が得られることになる。

これらのことからわかるように、観測画像から唯一つの復元画像を推定するためには (i) 原画像空間での制約条件、(ii) 観測画像空間での雑音の抑制、が必要になる。この二つの条件を適当に設定することによって、その条件をみたす復元画像を唯一つ定めることができる。これらの条件を評価基準とよぶことにする。

原画像空間での評価基準は二通りの立場が考えられる。一つは得られた観測画像の性質だけに関する評価基準を与えるものであり、もう一つは原画像空間の構造を加味し

た評価基準を用いるものである。後者の立場では原画像空間の確率構造に関する事前知識が必要である。この事前情報を適切に用いれば平均的に良い復元画像を得ることができるので、頻繁に現れる画像は精度良く復元できる。しかし、出現確率の小さい画像が原画像である場合、復元画像の精度は相対的に悪くなる。

評価基準は復元画像の優劣を判定するものであることから、ヒルベルト空間の汎関数として表現されることが多い。ここでは汎関数の値が小さいほど良い画像であるとする。複数の評価基準がある場合には両方を同時に最小にすることは一般にはできない。評価基準が二つの場合には (i) 一方の評価基準を最小にするものの中から、他方の評価基準を最小にするものを選ぶ、(ii) 両方の評価基準の重み付きの和を新たな評価基準として、それを最小にするものを選ぶ、の二通りの方法が考えられる。前者をみたとすもの例として、不偏推定量のなかで最小分散をもつ最良線形不偏推定量 BLUE (Best Linear Unbiased Estimator) がある。後者の基準で得られる解は多目的最適化においてパレート解とよばれる (Chankong and Haimes[4])。パレート解は両方の評価基準を同時に改善するような解がないという意味で最適である。本論文では、画像復元において、ある評価基準に関して最適な復元画像を与える作用素をその基準に対する (最適) 復元フィルタとよぶ。第4章で述べる一般逆フィルタおよび射影フィルタ族に属するフィルタは前者の基準をみたとす画像を、第5章で述べる各種のパラメトリックフィルタは後者の基準を満たす画像を与える作用素である。

観測作用素が線形である場合、原画像空間と観測画像空間が共に有限次元であれば、画像観測モデル (2.1) は線形回帰モデルと同等であり、復元画像を求めることは、得られた観測画像 g からの母数推定問題とみなすことができる。したがって、推測統計理論における母数推定に関する膨大な研究結果を利用することが可能である。

原画像空間が共に無限次元である場合でも、観測作用素が適当な条件を満たす場合には、母数推定の方法を拡張することができることを第3章で、また、従来提案されていたの画像復元手法を母数推定の問題として統一的な観点から理解することができることを第4章で示す。このように、観測作用素が線形の場合には既存の枠組を効果的に使えるため、精緻な理論を展開することが可能である。

第3章 擬ノルム最小の最小二乗解を与える作用素

3.1 はじめに

第3章ではヒルベルト空間の作用素の一般逆の基本的な性質について述べる。これらの性質は線形代数の一般逆行列に関する多くの結果 (Rao and Mitra[41], 柳井・竹内[58]) の中の一部をヒルベルト空間の作用素に拡張したものである。

第3章で述べる諸性質は値域が閉部分空間である作用素について成り立つものである。値域が閉部分空間とは限らない一般の作用素の一般逆に関しては Groetsch[7] などに述べられている。

本章以降では、ヒルベルト空間 \mathcal{H}_1 の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1}$ 、この内積から定義されるノルムを $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$ で表す。ただし、前後の関係からどの空間における内積（ノルム）であるかが明確である場合には、単に $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ($\|\cdot\|$) のように表すものとする。また、線形作用素 $A \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ の核および値域をそれぞれ、

$$\ker(A) = \{x \in \mathcal{H}_1 \mid Ax = 0\},$$

$$\text{ran}(A) = \{Ax \in \mathcal{H}_2 \mid x \in \mathcal{H}_1\},$$

と表す。

3.2 方程式の解を与える作用素

未知の $x \in \mathcal{H}_1$ を含む方程式

$$Ax = b, \quad b \in \mathcal{H}_2, \quad (3.1)$$

を考える. ただし, 線形作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ は値域が \mathcal{H}_2 の閉部分空間であるものとする. $\text{ran}(A) = \mathcal{H}_2, \ker(A) = \{0\}$ であれば方程式 (3.1) は任意の $b \in \mathcal{H}_2$ に対してただ一つの解をもつ. $\text{ran}(A) = \mathcal{H}_2, \ker(A) \neq \{0\}$ の場合は $\{x \in \mathcal{H}_1 \mid Ax = b\}$ は空集合ではないが方程式 (3.1) の解は一意にはさまらない. また $\text{ran}(A) \neq \mathcal{H}_2$ の場合には $b \notin \text{ran}(A)$ であれば方程式 (3.1) に解は存在しない

第3章では, $b \in \text{ran}(A)$ のとき方程式 $Ax = b$ の解が $x = Gb$ と表されるような線形作用素 $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ の性質について述べる. このような作用素が存在することは次のようにして確かめることができる.

値域 $\text{ran}(A)$ は可分なヒルベルト空間の (閉) 部分空間であるから, $\text{ran}(A)$ の可算個からなる基底 $\{e_n\}$ に対して $Af_n = e_n$ となる $\{f_n\}$ を選ぶことができる. 値域 $\text{ran}(A)$ が閉部分集合であることから $\text{ran}(A) = \{y \mid y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\}$ である. 任意の $b \in \text{ran}(A)$ を $b = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ と表し, $G : b = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \mapsto x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$ とすれば, $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ で, $Ax = b$ を満たす.

定義 3.2.1. 任意の $b \in \text{ran}(A) \subset \mathcal{H}_2$ に対して $x = Gb$ が方程式 $Ax = b$ の解になるとき $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ を作用素 A の 1 逆といい, A^- で表す.

補題 3.2.1 (Ben-Israel and Greville[2]). 有界作用素 $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ が有界作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ の 1 逆である必要十分条件は

$$AGA = A,$$

である.

定義からわかるように作用素の 1 逆は一般逆行列の拡張である. 作用素の 1 逆も A が可逆である場合を除き, 一意には定まらない. 作用素 A の 1 逆の集合を $A\{1\}$ で表す. 作用素の 1 逆は値域が閉部分空間でなければ定義されないことに注意する.

作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ の 1 逆が存在すれば $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ の 1 逆も存在することが次の補題から導かれる。

補題 3.2.2 (Groetsch[7]). 作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ に対して、値域 $\text{ran}(A)$ が \mathcal{H}_2 の閉部分空間であることと値域 $\text{ran}(A^*)$ が \mathcal{H}_1 の閉部分空間であることは同値である。

作用素の 1 逆は一意には定まらないが、次の定理は 1 逆を含む作用素の積が一意に定まることを示す。

補題 3.2.3. 作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ の 1 逆が存在するとき、

- (i) $A^- \{1\} = \{G^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \mid G \in A\{1\}\},$
- (ii) $A(A^*A)^- A^*A = A,$

である。

[証明]

補題 3.2.2 から作用素 A^* の 1 逆も存在する。(i) は 1 逆の定義から明らかである。また

$$B = A(A^*A)^- A^*A - A,$$

とおくと、 $B^*B = 0$ であるから、任意の $x \in \mathcal{H}_1$ に対して、

$$\langle Bx, Bx \rangle = \langle B^*Bx, x \rangle = 0,$$

が成り立つ。したがって、 $B = 0$ である。□

解をもつ方程式 $Ax = b$ の一般解は 1 逆をもちいて表すことができる。

補題 3.2.4. 値域 $\text{ran}(A)$ が \mathcal{H}_2 の閉部分空間であり、 $b \in \text{ran}(A)$ とする。このとき、方程式 $Ax = b$ の一般解は $A^- \in A\{1\}$ をもちいて

$$x = A^-b + (I - A^-A)z, z \in \mathcal{H}_1,$$

と表される。

[証明]

方程式 $Ax = b$ の任意の解を $\hat{x} \in \mathcal{H}_1$ とすると,

$$\hat{x} = A^-A\hat{x} + (I - A^-A)\hat{x} = A^-b + (I - A^-A)\hat{x},$$

と表すことができる. 逆に

$$x = A^-b + (I - A^-A)z, \quad z \in \mathcal{H}_1,$$

が方程式 $Ax = b$ の解であることは明らか. □

1 逆 A^- が一意に定まらないのは

- (i) $\text{ran}(A)$ の補空間の定め方,
- (ii) $\ker(A^*)$ の補空間の定め方,

に任意性があるためである. したがって $\text{ran}(A)$ の補空間と $\ker(A^*)$ の補空間を指定することにより 1 逆が一意に定まることになる. 第 3.3 節ではそれぞれの直交補空間を指定することにより得られる 1 逆 (一般逆) について述べる.

3.3 一般逆

作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ に対して

$$AGA = A,$$

$$GAG = G,$$

$$(AG)^* = AG,$$

$$(GA)^* = GA,$$

を満たす $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ をそれぞれ作用素 A の 1 逆, 2 逆, 3 逆, 4 逆という. 式を全て満たす G を一般逆または Moore–Penrose 一般逆といい A^\dagger で表す. 一般逆 A^\dagger は一意に定まる.

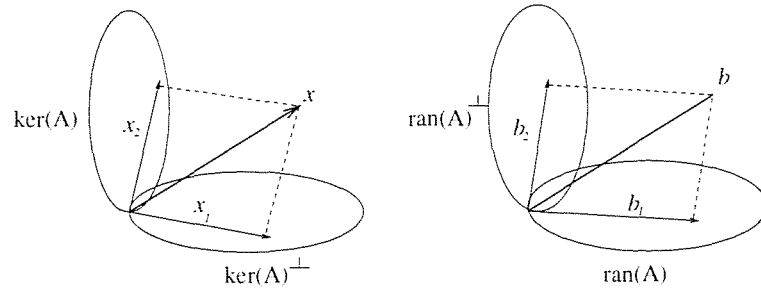


図 3.1: 作用素の値域, 核と一般逆

一般逆の作用素としての性質を以下で述べる. 線形作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ の値域 $\text{ran}(A)$ が閉部分空間であるとき, ヒルベルト空間 \mathcal{H}_1 と \mathcal{H}_2 は直和分解

$$\mathcal{H}_1 = \ker(A)^\perp \oplus \ker(A),$$

$$\mathcal{H}_2 = \text{ran}(A) \oplus \text{ran}(A)^\perp,$$

のように直和分解できる. 任意の $b \in \mathcal{H}_2$ の分解

$$b = b_1 + b_2, \quad b_1 \in \text{ran}(A), \quad b_2 \in \text{ran}(A)^\perp,$$

に対応して $x \in \{x \in \mathcal{H}_1 \mid Ax = b_1\}$, を

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in \ker(A)^\perp, \quad x_2 \in \ker(A),$$

と分解する. 作用素 A の $\ker(A)^\perp$ への制限

$$A_{\ker(A)^\perp} : \ker(A)^\perp \ni x \mapsto b \in \text{ran}(A)$$

が一対一対応であることから $x_1 \in \ker(A)^\perp$ は一意に定まる. 一般逆は対応

$$A^\dagger b = x_1$$

で定義される作用素である (図 3.1).

これらの性質から, 次の補題を得る.

補題 3.3.1 (Ben-Israel and Greville[2]). 作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ の値域 $\text{ran}(A)$ が閉部分空間であれば, 一般逆 $A^\dagger \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ が存在し, 次の (i)~(iv) が成り立つ.

$$(i) \ker(A) = \text{ran}(A)^\perp = \ker(A^*).$$

$$(ii) \text{ran}(A^\dagger) = \ker(A)^\perp = \text{ran}(A^*).$$

$$(iii) P_{\text{ran}(A)} = AA^\dagger.$$

$$(iv) P_{\text{ran}(A^*)} = A^\dagger A.$$

さらに, 一般逆に関する次の定理は重要である.

定理 3.3.1 (Groetsch[7], 柳井・竹内 [58]). $\|Ax - b\|$ を最小にする $x = A^-b$ のうち $\|x\|$ が最小になるような A^- は $A^- = A^\dagger$ に限る.

3.4 作用素方程式を解くためのいくつかの補題

第 3.5 節以降では方程式の解の中である性質をみたす解の一般形とその解を与える作用素の一般形を示す. 一般解の表現は補題 3.2.4 で与えられているので, 第 3.4 節では解を与える作用素の一般形を導くのに必要な補題を述べる.

補題 3.4.1. 作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ に対して,

$$\overline{\text{ran}(A)} = \overline{\text{ran}(AA^*)},$$

である. ここで, \overline{S} は部分集合 S の閉包を表す. したがって, 値域 $\text{ran}(A)$ が閉部分空間であれば

$$\text{ran}(A) = \text{ran}(AA^*),$$

である.

補題 3.4.2 (小川 [26]). 線形作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$ と未知の線形作用素 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ について, 次の各条件は同値である.

- (i) 作用素方程式 $XA = B$ は解を持つ.
- (ii) $\ker(A) \subset \ker(B)$.
- (iii) $BA^-A = B$.

さらに、このいずれかの条件がみたされるとき、作用素方程式 $XA = B$ の一般解は任意の作用素 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ をもちいて

$$X = BA^- + W(I - AA^-),$$

と表される.

補題 3.4.2 から直ちに次の補題を得る.

補題 3.4.3. 線形作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$ と未知の作用素 $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ について、次の各条件は同値である.

- (i) 作用素方程式 $AX = B$ は解を持つ.
- (ii) $\overline{\text{ran}(A)} \supset \overline{\text{ran}(B)}$.
- (iii) $AA^-B = B$.

さらに、このいずれかの条件がみたされるとき、作用素方程式 $AX = B$ の一般解は任意の作用素 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ をもちいて

$$X = A^-B + (I - A^-A)W,$$

と表される.

さらに補題の 3.4.2 から導かれる次の補題も重要である.

補題 3.4.4 (小川 [26]). 作用素 A, B に対して B が半正かつ $\text{ran}(A) \subset \text{ran}(B)$ であれば A^*B^-A は $B \in \mathcal{B}\{1\}$ の選び方によらず一定の半正の作用素となり、

$$\ker(A^*B^-A) = \ker(A),$$

$$\text{ran}(A^*B^-A) = \text{ran}(A^*),$$

となる。ただし、作用素 $A \in B(\mathcal{H}_1)$ が半正であるとは、任意の $x \in \mathcal{H}_1$ に対して、 $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ であることをいう。

3.5 最小二乗解を与える作用素

第3.3節では一般逆が $\|AA^{-1}b - b\|$ を最小にする1逆の中で $\|A^{-1}b\|$ を最小にするものであることを示した。第3.5節では全ての $x \in \mathcal{H}_1$ に対して $\|AGb - b\| \leq \|Ax - b\|, b \in \mathcal{H}_2$ となる作用素 $G \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ について述べる。このような作用素は線形モデルにおける推測理論などにおいて重要な役割を果たす。

定義 3.5.1 (Groetsch [7]). 不等式 $\|A\hat{x} - b\| \leq \|Ax - b\|$ がすべての $x \in \mathcal{H}_1$ について成り立つとき、 $\hat{x} \in \mathcal{H}_1$ を方程式 $Ax = b$ の最小二乗解 (least squares solution) とよぶ。

最小二乗解を与える作用素は次の定理によって特徴づけられる。

定理 3.5.1. 方程式 $Ax = b$ と作用素 $G \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ に対して、次の4条件は同値である。

- (i) $\|AGb - b\| \leq \|Ax - b\|$, for $\forall x \in \mathcal{H}_1$.
- (ii) $AG = P_{\text{ran}(A)}$.
- (iii) $A^*AG = A^*$.
- (iv) $AGA = A, (AG)^* = AG$.

[証明]

(i) \Rightarrow (ii) を示す。

$$\|AGb - b\| \leq \|Ax - b\| = \|y - b\|, y \in \text{ran}(A),$$

から

$$AGb = P_{\text{ran}(A)}b,$$

である。

(ii) \Rightarrow (iii) を示す. $\text{ran}(A)$ が \mathcal{H}_2 の閉部分空間であることから $\text{ran}(A)^\perp = \ker(A^*)$ に注意すると

$$A^*AG = A^*P_{\text{ran}(A)} = A^*(I - P_{\text{ran}(A)^\perp}) = A^*(I - P_{\ker(A^*)}) = A^*,$$

である.

(iii) \Rightarrow (iv) を示す. 任意の一般逆について $A(A^*A)^-A^*A = A$ が成り立つことに注意すると

$$AGA = A(A^*A)^-A^*AGA = A(A^*A)^-A^*A = A,$$

がいえる. また

$$AG = A(A^*A)^-A^*AG = A(A^*A)^-A^*,$$

$$(AG)^* = G^*A^*A(A^*A)^-A^* = A(A^*A)^-A^*,$$

から $AG = (AG)^*$, がいえる.

(iv) \Rightarrow (i) を示す.

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|^2 &= \|AGb - b\|^2 + 2\text{Re}\langle (AG - I)b, A(x - Gb) \rangle + \|A(x - Gb)\|^2 \\ &= \|AGb - b\|^2 + 2\text{Re}\langle A^*(AG - I)b, x - Gb \rangle + \|A(x - Gb)\|^2, \end{aligned}$$

より

$$\|AGb - b\|^2 \leq \|Ax - b\|^2,$$

が成り立つ. □

定理の条件 (iv) から次の系を得る.

系 3.5.1. 線形作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ の値域 $\text{ran}(A)$ が閉部分空間であれば, 方程式 $Ax = b$ の最小二乗解を与える作用素は作用素 A の 1,3 逆である.

これらの定理および系から 1,3 逆を最小二乗型 1 逆とよぶ. 最小二乗解は $\ker(A) = \{0\}$ である場合を除いては一意には定まらないため, 最小二乗型 1 逆も一意には定まらない. しかし, 条件 (ii) より作用素 AG は一意である.

定理 3.5.1 の (iii) および補題 3.2.4, 補題 3.4.3 から最小二乗解および最小二乗型 1 逆の一般形は以下の定理で与えられることがわかる.

定理 3.5.2. 線形作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ の値域 $\text{ran}(A)$ が閉部分空間であれば方程式 $Ax = b$ の最小二乗解を与える作用素は常に存在する. 最小二乗解の一般形は任意の $z \in \mathcal{H}_1$ をもちいて

$$x = (A^*A)^- A^*b + (I - (A^*A)^-(A^*A))z,$$

と表される. さらに, 最小二乗型 1 逆の一般形は任意の作用素 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ をもちいて

$$G = (A^*A)^- A^* + (I - (A^*A)^-(A^*A))W,$$

と表される.

半正の作用素 M に対して, $M = B^2$ となる半正の作用素 B が一意的に存在する. この作用素 B を M の平方根といい, $M^{1/2}$ で表す. 画像復元問題においては半正の自己共役作用素 M による擬ノルム

$$\| M^{1/2}(AGb - b) \|^2 = \langle M^{1/2}(AGb - b), (M^{1/2}AGb - b) \rangle = \langle M(AGb - b), AGb - b \rangle,$$

を最小にする作用素が重要である. この擬ノルムをヒルベルト空間の内積から導かれるノルムと区別して

$$\| y \|_M = \| M^{1/2}y \|_{\mathcal{H}_2} = \sqrt{\langle My, y \rangle_{\mathcal{H}_2}},$$

で表す. 自己共役作用素 M が可逆であれば, $\| \cdot \|_M$ はノルムになる. 線形作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ に対して, $\| A\hat{x} - b \|_M \leq \| Ax - b \|_M$ がすべての $x \in \mathcal{H}_1$ について成り立つとき, \hat{x} を方程式 $Ax = b$ の M -最小二乗解よぶ.

定理 3.5.3. $\hat{x} \in \mathcal{H}_1$ が方程式 $Ax = b$ の M -最小二乗解であるための必要十分条件は

$$A^*MA\hat{x} = A^*Mb, \tag{3.2}$$

である.

[証明]

まず必要性を示す. $\|A\hat{x} - b\|_M$ の \hat{x} についての変分は

$$\|A(\hat{x} + \delta x) - b\|_M^2 = \|A\hat{x} - b\|_M^2 + 2\operatorname{Re}\langle M(A\hat{x} - b), A\delta x \rangle + \|A\delta x\|_M^2,$$

であるから $\operatorname{Re}\langle M(A\hat{x} - b), A\delta x \rangle = 0$ が必要であり, 同様に変分 $\hat{x} + i\delta x$ を与えることにより $\operatorname{Im}\langle M(A\hat{x} - b), A\delta x \rangle = 0$ も必要であるから, 結局 $A^*MA\hat{x} = A^*Mb$ が必要条件であることがわかる.

次に十分性を示す. $A^*MA\hat{x} = A^*Mb$ が成り立つとき, 任意の $x \in \mathcal{H}_1$ に対して

$$\|Ax - b\|_M^2 = \|A\hat{x} - b\|_M^2 + 2\operatorname{Re}\langle MA(x - \hat{x}), A\hat{x} - b \rangle + \|A(x - \hat{x})\|_M^2 \geq \|A\hat{x} - b\|_M^2,$$

が成り立つ. □

定理 3.5.3 より, 方程式の M -最小二乗解を与える作用素は次の系で特徴づけられる.

系 3.5.2. 線形作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ に対して, 作用素 $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ が方程式 $Ax = b$ の M -最小二乗解を与える作用素であるための必要十分条件は

$$A^*MAG = A^*M, \tag{3.3}$$

である.

方程式 $Ax = b$ の M -最小二乗解を与える作用素は必ずしも 1 逆にならない. しかし, 自己共役作用素 M が逆をもつ場合には式 (3.3) から次の系を得る.

系 3.5.3. 値域 $\operatorname{ran}(A^*MA)$ が閉部分空間であるとする. 自己共役作用素 M が可逆である場合, $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ が方程式 $Ax = b$ の M -最小二乗解を与える作用素である必要十分条件は

$$AGA = A, (AG)^*M = MAG, \tag{3.4}$$

である.

[証明]

条件式 (3.4) が式 (3.3) の十分条件であることは容易に確かめられるので, 必要条件であることを示す. 式 (3.3) の両辺に左側から $(M^{1/2}A)\{(M^{1/2}A)^*(M^{1/2}A)\}^{-1}$ をかけて

$$\begin{aligned} (M^{1/2}A)\{(M^{1/2}A)^*(M^{1/2}A)\}^{-1}(M^{1/2}A)^*(M^{1/2}A)G \\ = (M^{1/2}A)\{(M^{1/2}A)^*(M^{1/2}A)\}^{-1}(M^{1/2}A)^*M^{1/2}, \end{aligned}$$

を得る. したがって, 補題 3.2.3 の (ii) より

$$M^{1/2}AG = (M^{1/2}A)\{(M^{1/2}A)^*(M^{1/2}A)\}^{-1}(M^{1/2}A)^*M^{1/2},$$

が成り立つ. 両辺の右側から A をかけて再び補題 3.2.3 の (ii) より $M^{1/2}AGA = M^{1/2}A$ を得る. 自己共役作用素 M が可逆であることから, $AGA = A$ である. また, 両辺の左側から $M^{1/2}$ をかけることで MAG が自己共役作用素であることが導かれる. \square

この系から自己共役作用素 M が可逆である場合には, 方程式 $Ax = b$ の M -最小二乗解を与える作用素は 1 逆であることがわかる. さらに, 観測画像空間 \mathcal{H}_2 をノルム $\|\cdot\|_M$ によって定義されるノルム空間であるとみなせば M -最小二乗解を与える作用素は $1, 3$ 逆である.

定理 3.5.3 および系 3.5.2, 補題 3.2.4, 補題 3.4.3 から次の定理を得る.

定理 3.5.4. 値域 $\text{ran}(A^*MA)$ が閉部分空間であれば方程式 $Ax = b$ の M -最小二乗解を与える作用素は常に存在する. M -最小二乗解の一般形は任意の $z \in \mathcal{H}_1$ をもちいて

$$x = (A^*MA)^{-1}A^*Mb + (I - (A^*MA)^{-1}(A^*MA))z,$$

と表される. さらに, 最小二乗型 1 逆の一般形は任意の作用素 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ をもちいて

$$G = (A^*MA)^{-1}A^*M + (I - (A^*MA)^{-1}(A^*MA))W,$$

と表される.

自己共役作用素 M が可逆であれば, 方程式 $Ax = b$ の M -最小二乗解の一般形の表現は簡略化できる.

系 3.5.4. 自己共役作用素 M が可逆であるとする. 値域 $\text{ran}(A^*MA)$ は閉部分空間, $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ を任意の M -最小二乗解を与える作用素とすると方程式 $Ax = b$ の M -最小二乗解の一般形は任意の $z \in \mathcal{H}_1$ をもちいて

$$x = Gb + (I - GA)z, \quad (3.5)$$

と表される.

[証明]

式 (3.5) を満たす $x \in \mathcal{H}_1$ は系 3.5.2 から

$$A^*MAx = A^*MAGb + A^*MA(I - GA)z = A^*Mb,$$

を満たす. したがって定理 3.5.3 より $x \in \mathcal{H}_1$ は M -最小二乗解である.

逆に自己共役作用素 M が可逆であるから, 系 3.5.3 から

$$GA = GAGA = GM^{-1}(MAG)A = GM^{-1}(AG)^*MA = GM^{-1}G^*A^*MA,$$

が成り立つので, $\hat{x} \in \mathcal{H}_1$ を任意の M -最小二乗解とすると, 式 (3.2) から

$$GA\hat{x} = GM^{-1}G^*A^*MA\hat{x} = GM^{-1}(AG)^*Mb = GAGb,$$

である. したがって,

$$\hat{x} = Gb + (I - GA)(\hat{x} - Gb),$$

と表すことができる. □

3.6 擬ノルム最小の最小二乗解を与える作用素

第 3.5 節では

- $\|AGb - b\| \leq \|Ax - b\|$ がすべての $x \in \mathcal{H}_1$ について成り立つ作用素 $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ の一般形と, その作用素が 1.3 逆であること

- $\|AGb - b\|_M \leq \|Ax - b\|_M$ がすべての $x \in \mathcal{H}_1$ について成り立つ作用素 $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ の一般形

を示した.

第3.6節では M -最小二乗解の中である擬ノルムが最小となる解とその解を与える作用素について述べる. これは, Rao and Mitra[41], Mitra and Rao[22] の諸結果の無限次元空間への拡張である.

定義 3.6.1. 作用素 $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$ を半正の自己共役作用素とすると, M -最小二乗解の中で N による擬ノルム $\|x\|_N$ を最小にする $\hat{x} \in \mathcal{H}_1$ を $Ax = b$ の N -最小の M -最小二乗解とよぶ.

定理 3.3.1 から I -最小の I -最小二乗解は一般逆になる. したがって N -最小の M -最小二乗解は一般逆の拡張と考えられる.

定理 3.6.1. $\hat{x} \in \mathcal{H}_1$ が方程式 $Ax = b$ の N -最小の M -最小二乗解であるための必要十分条件は, ある $\lambda \in \mathcal{H}_1$ が存在して

$$A^*MA\hat{x} = A^*Mb \quad (3.6)$$

$$N\hat{x} + A^*MA\lambda = 0 \quad (3.7)$$

が成り立つことである.

[証明]

$\hat{x} \in \mathcal{H}_1$ が方程式 $Ax = b$ の N -最小の M -最小二乗解であれば, ラグランジェの未定ベクトル λ をもちいて

$$A^*MA\hat{x} = A^*Mb,$$

$$\langle N\hat{x}, \hat{x} \rangle + \operatorname{Re}\langle A^*MA\hat{x} - A^*Mb, \lambda \rangle = 0,$$

が成り立つことが必要条件である. \hat{x} の変分を与えることにより式 (3.7) が導かれる.

逆に (\hat{x}, λ) を式 (3.6), (3.7) の解とする. 任意の M -最小二乗解を $x \in \mathcal{H}_1$ とすると, この x は $A^*MAx = A^*Mb$ を満たす. さらに,

$$\langle N(x - \hat{x}), \hat{x} \rangle = \langle x - \hat{x}, N\hat{x} \rangle = \langle x - \hat{x}, -A^*MA\lambda \rangle = \langle A^*MA(x - \hat{x}), -\lambda \rangle = 0,$$

から,

$$\langle Nx, x \rangle = \langle N(x - \hat{x}) + N\hat{x}, (x - \hat{x}) + \hat{x} \rangle = \langle N(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle + \langle N\hat{x}, \hat{x} \rangle \geq \langle N\hat{x}, \hat{x} \rangle$$

が成り立つ. これは \hat{x} が N -最小の M -最小二乗解であることを示す. \square

定理 3.6.1 から, 作用素 $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ が N -最小の M -最小二乗解を与える作用素になる条件を得る.

系 3.6.1. 作用素 $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ に関する次の (i) と (ii) は同値である.

(i) 作用素 G は方程式 $Ax = b$ の N -最小の M -最小二乗解を与える作用素である.

(ii) ある作用素 $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ が存在して,

$$A^*MAG = A^*M, \tag{3.8}$$

$$NG = A^*MAY, \tag{3.9}$$

が成り立つ.

自己共役作用素 M, N が共に逆をもつ場合には, 作用素 $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ が N -最小の M -最小二乗解を与える作用素になる条件は次の系で与えられる.

系 3.6.2. 自己共役作用素 M, N が共に逆をもつ場合, 次の三条件は同値である.

(i) 作用素 $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ が方程式 $Ax = b$ の N -最小の M -最小二乗解を与える作用素である.

(ii)

$$A^*MAG = A^*M, G^*NGA = G^*N. \tag{3.10}$$

(iii)

$$AGA = A, (AG)^*M = MAG, GAG = G, (GA)^*N = NGA. \quad (3.11)$$

[証明]

(i) \Leftrightarrow (ii) を示す.

自己共役作用素 M が正則である場合には、系 3.5.4 より、 M -最小二乗解 $x \in \mathcal{H}_1$ は $x = Gb + (I - GA)z$, $z \in \mathcal{H}_1$ と表すことができる.

まず、 $G^*NGA = G^*N$ が成り立たないとする. $\langle NGb_1, (I - GA)z_1 \rangle \neq 0$ なる $b_1 \in \mathcal{H}_2$, $z_1 \in \mathcal{H}_1$ が存在するので、 $\|(I - GA)z_1\|_N = 1$ であるように z_1 をとると、

$$\|Gb_1 - (I - GA)(\langle NGb_1, (I - GA)z_1 \rangle z_1)\|_N \leq \|Gb_1\|_N,$$

となる. したがって、 $G^*NGA = G^*N$ が必要であることがわかる.

逆に、 $G^*NGA = G^*N$ が成り立つとき、 $x = Gb + (I - GA)z \in \mathcal{H}_1$ を任意の M -最小二乗解とすると、

$$\begin{aligned} \langle Nx, x \rangle &= \langle N(Gb + (I - GA)z), Gb + (I - GA)z \rangle \\ &= \langle NGb, Gb \rangle + \langle N(I - GA)z, (I - GA)z \rangle \geq \langle NGb, b \rangle, \end{aligned} \quad (3.12)$$

から、作用素 G は N -最小の M -最小二乗解を与える作用素である.

次に (ii) \Leftrightarrow (iii) を示す.

系 3.5.3(式 (3.4)) から (3.10) の第 1 式と (3.11) の第 1, 2 式は同値である. また、(3.11) の第 3, 4 式から、

$$G^*N = G^*(GA)^*N = G^*NGA,$$

を得る. 逆に、(3.10) の第 2 式の両辺に左側から

$$(N^{1/2}G)((N^{1/2}G)^*(N^{1/2}G))^\dagger,$$

を掛けて,

$$\begin{aligned} (N^{1/2}G)((N^{1/2}G)^*(N^{1/2}G))^\dagger(N^{1/2}G)^*(N^{1/2}G)A \\ = (N^{1/2}G)((N^{1/2}G)^*(N^{1/2}G))^\dagger(N^{1/2}G)^*N^{1/2}, \end{aligned}$$

を得る. したがって, 補題 3.2.3 の (ii) より

$$N^{1/2}GA = (N^{1/2}G)((N^{1/2}G)^*(N^{1/2}G))^\dagger(N^{1/2}G)^*N^{1/2},$$

が成り立つ. 両辺の右側から G をかけて再び補題 3.2.3 の (ii) より $N^{1/2}GAG = N^{1/2}G$ を得る. 自己共役作用素 N が正則であることから, $GAG = G$ である. また, 両辺の左側から $N^{1/2}$ をかけることで NGA が自己共役作用素であることが導かれる. \square

この系から自己共役作用素 M, N が共に逆をもつ場合には, N -最小の M -最小二乗解を与える作用素が存在すれば, それは 1, 2 逆になることがわかる. さらに, 原画像空間 \mathcal{H}_1 をノルム $\|\cdot\|_N$ によって定義されるノルム空間, 復元画像空間 \mathcal{H}_2 をノルム $\|\cdot\|_M$ によって定義されるノルム空間であるとみなせば N -最小の M -最小二乗解を与える作用素は一般逆になる.

定理 3.6.2. 値域 $\text{ran}(N + A^*MA), \text{ran}(A^*M)$ が共に \mathcal{H}_1 の閉部分空間であるとき, 方程式 $Ax = b$ の N -最小の M -最小二乗解を与える作用素は常に存在する. N -最小の M -最小二乗解の一般形は任意の $z \in \mathcal{H}_1$ をもちいて

$$x = U^-A^*MV^-A^*Mb + (I - U^-U)z,$$

$$U = N + A^*MA,$$

$$V = A^*MAU^-A^*M,$$

と表される. さらに N -最小の M -最小二乗解を与える作用素の一般形は任意の作用素 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ をもちいて

$$G = U^-A^*MV^-A^*M + (I - U^-U)W,$$

と表される.

[証明]

方程式 $Ax = b$ の N -最小の M -最小二乗解を与える条件式 (3.8), (3.9) は

$$(N + A^*MA)G = A^*M(I + AY),$$

$$A^*MAG = A^*M,$$

と同値である. $U = (N + A^*MA)$ とおくと, $\text{ran}(U) \supset \text{ran}(A^*MA) = \text{ran}(A^*M)$ であるから, 補題 3.4.3 よりこの連立作用素方程式は解をもつ. 一般解は

$$G = U^{-1}A^*M(I + AY) + (I - U^{-1}U)W, \quad \forall W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1),$$

と表され, さらに

$$A^*MU^{-1}U = A^*M,$$

$$A^*MAU^{-1}U = A^*MA,$$

が成り立つ. また, 補題 3.4.4 より作用素 $MAU^{-1}A^*M$ は $U^{-1} \in U\{1\}$ のとり方によらず一意に定まり

$$\text{ran}(MAU^{-1}A^*M) = \text{ran}(MA),$$

である. したがって $V = A^*MAU^{-1}A^*M$ とおくと

$$G = U^{-1}A^*M(I + AY) + (I - U^{-1}U)W,$$

$$A^*M = V(I + AY),$$

となる. $\text{ran}(V) = \text{ran}(A^*MA) = \text{ran}(A^*M)$ から補題 3.4.3 より

$$A^*MV^{-1}V = A^*M,$$

が成り立つことから,

$$G = U^{-1}A^*MV^{-1}A^*M + (I - U^{-1}U)W$$

である. N -最小の M -最小二乗解の一般解も同様に求めることができる. □

系 3.6.3. 値域 $\text{ran}(A^*MA) \subset \text{ran}(N)$ であれば, 方程式 $Ax = b$ の N -最小の M -最小二乗解を与える作用素の一般形は

$$G = N^-A^*MA(A^*MAN^-A^*MA)^-A^*M + (I - N^-N)W,$$

となる. さらに, 自己共役作用素 N が逆をもつとき N -最小の M -最小二乗解を与える作用素は一意に定まる.

[証明]

一般形の証明は定理と同様である. また N が逆をもつとき, $\text{ran}(A^*MA) \subset \text{ran}(N) = \mathcal{H}_1$ であるから $N^- = N^{-1}$ となり, 作用素は一意に定まる. \square

自己共役作用素 N が逆をもてば G は一意に定まるが, N が逆をもたなければ自己共役作用素 M が逆をもつ場合であっても G は必ずしも一意に定まらない. しかし, 値域を適当な部分空間に制限すると N -擬ノルム最小の M -最小二乗解が一意に定まり, この解を与える作用素も一意に定まる.

系 3.6.4. $\hat{x} \in \text{ran}(N + A^*MA)$ であるような N -擬ノルム最小の M -最小二乗解は唯一つである.

[証明]

$U = N + A^*MA$ は,

$$\text{ran}(U) = \text{ran}(N) \cup \text{ran}(A^*MA),$$

$$\ker(U) = \ker(N) \cap \ker(A^*MA),$$

をみたす半正自己共役作用素であることに注意する. $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in \text{ran}(U)$ がともに方程式 $Ax = b$ の N -最小の M -最小二乗解であるとするとき式 (3.2) から

$$A^*MA(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) = 0,$$

が成り立つ. また,

$$\langle N(\hat{x}_1 - \hat{x}_2), \hat{x}_1 - \hat{x}_2 \rangle = \langle \lambda_2 - \lambda_1, A^*MA(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \rangle = 0,$$

も成り立つので,

$$\hat{x}_1 - \hat{x}_2 \in \ker(N) \cap \ker(A^*MA) = \ker(U),$$

である. したがって

$$\hat{x}_1 - \hat{x}_2 \in \text{ran}(U) \cap \ker(U),$$

から, $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$ を得る. □

系 3.6.5. 自己共役作用素 M, N は共に逆をもつものとする. 方程式 $Ax = b$ の N -最小の M -最小二乗解を与える作用素が存在する場合, その一つを G とすると, G^* は方程式 $A^*y = a$ の M^{-1} -最小の N^{-1} -最小二乗解を与える作用素である.

[証明]

作用素 G が方程式 $Ax = b$ の N -最小の M -最小二乗解を与える作用素である必要十分条件は系 3.6.2 から

$$AGA = A, (AG)^*M = MAG, GAG = G, (GA)^*N = NGA,$$

である. M, N は共に逆をもつとき, これらの条件は

$$A^*G^*A^* = A^*, (A^*G^*)^*N^{-1} = N^{-1}A^*G^*, G^*A^*G^* = G^*, (G^*A^*)^*M^{-1} = M^{-1}G^*A^*,$$

と同値である. これらは G^* が方程式 $A^*y = a$ の M^{-1} -最小の N^{-1} -最小二乗解を与える作用素であるための必要十分条件である. □

N -最小の M -最小二乗解を与える作用素は表現が複雑である. 計算機でこのような作用素を計算させるときには, 表現はできるだけ簡単な方がよい. そこで, N -最小の M -最小二乗解を与える作用素がみたす必要十分条件を以下のように書き直す.

補題 3.6.1. 作用素 $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ が方程式 $Ax = b$ の N -最小の M -最小二乗解を与える作用素であるための必要十分条件は作用素 $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ が存在して

$$M^{1/2}AG = P_{\text{ran}(M^{1/2}A)}M^{1/2}, \quad (3.13)$$

$$NG = A^*M^{1/2}Y, \quad (3.14)$$

となることである.

[証明]

式 (3.13), (3.14) が系 3.6.1 の (ii)

$$A^*MAG = A^*M, \quad NG = A^*MAY_1, \quad Y_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1),$$

と同値であることを示す. $A^*MAG = A^*M$ の両辺の左側から $(A^*M^{1/2})^\dagger$ をかけて定理 3.3.1(iii) から $(A^*M^{1/2})^\dagger(A^*M^{1/2}) = P_{\text{ran}(M^{1/2}A)}$ であることをもちいて, (3.13) 式を得る. 逆に式 (3.13) の両辺に左側から $M^{1/2}A^*$ をかけることにより, $A^*MAG = A^*M$ を得る.

また, $\text{ran}(A^*MA) = \text{ran}(A^*M^{1/2})$ から $NG = A^*MAY_1$ が式 (3.14) と同値であることがわかる. □

この補題をもとに N -最小の M -最小二乗解を与える作用素の一般形が以下の定理から求められる.

定理 3.6.3 (小出他 [17]). 式 (3.13), (3.14) をみたす作用素 $G \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ の一般形は任意の作用素 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ をもちいて

$$G = U^-A^*M^{1/2}V^\dagger M^{1/2} + (I - U^-U)W,$$

$$U = N + A^*MA,$$

$$V = M^{1/2}AU^-A^*M^{1/2},$$

と表される.

小出他 [17] によるこの表現は定理 3.6.2 による表現よりも簡単になっている. また V は自己共役作用素であるから, $\text{ran}(M^{1/2}A)$ が実有限次元空間の場合には転置行列になり計算が容易であるという利点がある.

第4章 一般逆フィルタと射影フィルタ族

4.1 はじめに

第4章では一般逆フィルタおよび射影フィルタ族(小川 [29])に属する三種類の最適復元フィルタの定義と導出方法について述べる. 射影フィルタ族に属する復元フィルタとして, 射影フィルタ(中村・小川 [24], Ogawa and Oja [35]) 部分射影フィルタ(小川・原 [33, 34]), 平均射影フィルタ(山下・小川 [53, 52])がある. 一般逆フィルタが観測画像空間での雑音の抑制をしていないのに対して, 射影フィルタ族に属する復元フィルタは, 原画像空間において適当な制約条件をみたす画像の中から, 雑音による影響が最も小さくなるものを選ぶ復元作用素である. 雑音を抑制することで, より精度の高い復元が可能になる. 一方, 一般逆フィルタは観測作用素だけが既知であれば導くことができるのに対して, 射影フィルタ族による復元を行なうには観測作用素に加えて雑音の相関作用素なども既知でなければならないという制約がある.

4.2 一般逆フィルタ

一般逆フィルタは観測画像空間内で観測画像に最も近い画像となる原画像の中で, そのノルムが最小となる復元画像を与える作用素である [1].

定義 4.2.1 (一般逆フィルタ). 観測画像 $g \in \mathcal{H}_2$ に対して

$$\| Af - g \|,$$

を最小にする $f \in \mathcal{H}_1$ の中で、ノルム $\|f\|$ が最小である復元画像を与える作用素 $B_{GIF} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ を一般逆フィルタとよぶ。

一般逆フィルタは、その定義から方程式 $Af = g$ の I -最小の I -最小二乗解を与える作用素である。したがって定理 3.3.1 より、次の定理を得る。

定理 4.2.1. 一般逆フィルタは値域 $\text{ran}(A)$ が閉部分空間であれば存在する。一般逆フィルタは

$$B_{GIF} = A^\dagger,$$

である。

一般逆フィルタの評価基準では観測画像空間内の距離が最小であるものを選ぶことになるが、画像復元では原画像に最も近い復元画像を選ぶべきであると考えられる。またノルム $\|f\|$ が最小という基準は復元画像を一意に定めるための制約であり、画像復元において適切な基準とはいえない場合がある。これらの点を改善し、より精度の高い復元を可能にするために以下で述べる射影フィルタ族が提案された。なお、雑音の相関作用を $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ で表す (第 2 章を参照)。

4.3 射影フィルタ

射影フィルタは復元画像の画像成分が $\text{ran}(A^*)$ への射影であるものの中で、雑音成分の分散が最小になる復元画像を与える作用素である。

定義 4.3.1 (射影フィルタ). 原画像 $f \in \mathcal{H}_1$ に対して

$$\|BAf - f\|,$$

を最小にする作用素の中で、

$$E_n \|Bn\|^2$$

を最小にする作用素 $B_{PF} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ を射影フィルタとよぶ。

定理 4.3.1. 射影フィルタは値域 $\text{ran}(A)$, $\text{ran}(Q + AA^*)$ が共に閉部分空間であれば存在する. 射影フィルタの一般形は任意の作用素 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ をもちいて

$$B_{PF} = V^\dagger A^* U^- + W(I - UU^-), \quad (4.1)$$

ここで

$$U = Q + AA^*,$$

$$V = A^* U^\dagger A,$$

である. また $g \in \text{ran}(U)$ であれば復元画像は一意に定まる.

[証明]

原画像空間 \mathcal{H}_1 の可算個からなる正規直交基底 (CONS) $\{u_i\}$ を用いて

$$\begin{aligned} BAf &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle BAf, u_i \rangle u_i, \\ f &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, u_i \rangle u_i. \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \|BAf - f\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, A^* B^* u_i - u_i \rangle u_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|f\|^2 \|A^* B^* u_i - u_i\|^2, \\ E_n \|Bn\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle Q B^* u_i, B^* u_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \|B^* u_i\|_Q^2, \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって各 i について

$$\|A^* B^* u_i - u_i\|,$$

を最小にするものの中で

$$\|B^* u_i\|_Q,$$

を最小にする $B^* u_i$ を求めればよい. このような作用素 B^* は方程式 $A^* B^* u_i = u_i$ の Q -最小の I -最小二乗解を与える作用素である. その一般形は定理 3.6.3 により任意の

$W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ をもちいて

$$B^* = U^- A V^\dagger + (I - U^- U) W,$$

$$U = Q + A A^*,$$

$$V = A^* U^\dagger A,$$

と表されるから,

$$B_{PF} = V^\dagger A^* U^- + W(I - U U^-), \quad W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1),$$

である. また, 復元画像は

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle g, B^* u_i \rangle u_i = Bg,$$

となる. □

証明の過程からわかるように射影フィルタは原画像空間の CONS $\{u_i\}$ に対して $\langle f, u_i \rangle$ の推定量 $\langle g, b_i \rangle$ を与える作用素であることがわかる. さらに

$$\| A^* b_i - u_i \|^2$$

が最小であるという基準は $\langle f, u_i \rangle$ と $\langle g, b_i \rangle$ のバイアス

$$E_n |\langle f, u_i \rangle - \langle g, b_i \rangle|,$$

を最小にすることに対応している. これは線形モデルの推定論において Rao [40], Rao and Mitra [41] などで述べられている最良線形偏り最小推定量 BLMBE (Best Linear Minimum Bias Estimator) のヒルベルト空間への拡張である.

4.4 部分射影フィルタ

実際の画像復元においては, 原画像に関する何らかの知識を事前に得られる場合が多い. 天体画像の復元では背景が黒いという知識がある. また, ある物体を特性の異なる複数個のセンサーによって観測した場合に得られるマルチチャンネル画像の復元(

Galatsanos and Chin[5], Galatsanos et al.[6], Özkan et al.[38], 菊地他 [16]) も原画像が等しいという条件がある. このように, 原画像がある部分空間に属している場合, その知識を有効に使うことによって, より原画像に近い復元画像を得ることが可能である. \mathcal{K} を原画像空間の部分空間とし, 原画像に関する制約条件

$$f \in \mathcal{K} \subset \mathcal{H}_1, \quad (4.2)$$

があるときには復元画像は式 (4.2) をみたすものの中から選べばよい.

定義 4.4.1 (部分射影フィルタ). 原画像空間の部分空間を \mathcal{K} とする. 画像 $f \in \mathcal{K}$ に対して

$$\|BAf - P_{\text{ran}(P_{\mathcal{K}}A^*)}f\|,$$

を最小にする作用素の中で,

$$E_n(\|Bn\|^2)$$

を最小にする作用素 $B_{PTPF} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ を部分射影フィルタとよぶ.

定理 4.4.1. 部分射影フィルタは値域 $\text{ran}(P_{\mathcal{K}}A^*)$, $\text{ran}(Q + AP_{\mathcal{K}}A^*)$ が共に閉部分空間であれば存在する. 部分射影フィルタの一般形は任意の作用素 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ をもちいて

$$B_{PTPF} = V^\dagger P_{\mathcal{K}}A^*U^- + W(I - UU^-), \quad (4.3)$$

$$U = Q + AP_{\mathcal{K}}A^*,$$

$$V = P_{\mathcal{K}}A^*U^\dagger AP_{\mathcal{K}},$$

である. また $g \in \text{ran}(U)$ であれば復元画像は一意に定まる.

[証明]

$$\|BAf - P_{\text{ran}(P_{\mathcal{K}}A^*)}f\|^2, f \in \mathcal{K} \Leftrightarrow \|BAP_{\mathcal{K}}f - P_{\text{ran}(P_{\mathcal{K}}A^*)}P_{\mathcal{K}}f\|^2, f \in \mathcal{H}_1,$$

と,

$$P_{\text{ran}(P_{\mathcal{K}}A^*)}P_{\mathcal{K}} = P_{\mathcal{K}}P_{\text{ran}(P_{\mathcal{K}}A^*)} = P_{\mathcal{K}},$$

から,

$$\|BAP_{\mathcal{K}}f - P_{\mathcal{K}}f\|^2$$

を最小にする作用素の中で $E_n \|Bn\|^2$ を最小にする作用素 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ を求めればよい. 原画像空間 \mathcal{H}_1 の可算個からなる正規直交基底 (CONS) $\{u_i\}$ を用いて

$$\begin{aligned} BAP_{\mathcal{K}}f &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle BAP_{\mathcal{K}}f, u_i \rangle u_i, \\ P_{\mathcal{K}}f &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle P_{\mathcal{K}}f, u_i \rangle u_i, \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \|BAP_{\mathcal{K}}f - P_{\mathcal{K}}f\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, P_{\mathcal{K}}A^*B^*u_i - P_{\mathcal{K}}u_i \rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|f\|^2 \|A^*B^*u_i - u_i\|_{P_{\mathcal{K}}}^2, \\ E_n \|Bn\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle QB^*u_i, B^*u_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \|B^*u_i\|_Q^2 \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって各 i について擬ノルム

$$\|A^*B^*u_i - u_i\|_{P_{\mathcal{K}}}$$

を最小にするものの中で擬ノルム

$$\|B^*u_i\|_Q$$

を最小にする B^*u_i を求めればよい. したがって求める作用素 B^* は Q -最小の $P_{\mathcal{K}}$ -最小二乗解を与える作用素である. Q -最小の $P_{\mathcal{K}}$ -最小二乗解を与える作用素の一般形は定理 3.6.3 より任意の $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ をもちいて

$$\begin{aligned} B^* &= U^-AP_{\mathcal{K}}V^+P_{\mathcal{K}} + (I - U^-U)W \\ U &= Q + AP_{\mathcal{K}}A^* \\ V &= P_{\mathcal{K}}A^*U^-AP_{\mathcal{K}} \end{aligned}$$

と表されるから,

$$B_{PTPF} = P_K V^\dagger P_K A^* U^- + W(I - U U^-), \quad W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1),$$

である. また, 復元画像は

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle g, B^* u_i \rangle u_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle B_{PTPF} g, u_i \rangle u_i = B_{PTPF} g,$$

となる. □

4.5 平均射影フィルタ

定義 3.1.1 および 3.2.1, 3.3.1 からわかるように, 一般逆フィルタおよび射影フィルタ, 部分射影フィルタの最適基準では一枚の原画像 $f_0 \in \mathcal{H}_1$ に対するものであった. 一方, 原画像空間が確率構造をもつ場合には, 個々の画像ではなく原画像空間全体に関する最適基準を用いることが考えられる. まれにしか現われない画像よりも, 頻繁に現われる画像を忠実に復元したいという場合である. ウィーナーフィルタはこのように目的に用いられるものであるが, 原画像の期待値と雑音成分の分散との関係が明確ではない. 平均射影フィルタはそれぞれの期待値の役割を明らかにした基準をみたす作用素であり, 以下のように定義される.

定義 4.5.1 (平均射影フィルタ (山下・小川 [54, 56])). 原画像の相関作用素を R とする. すなわち

$$R : \mathcal{H}_1 \ni x \mapsto V(f)x,$$

ただし,

$$V(f)x = E_f\{(f - E(f)) \otimes (f - E(f))x\},$$

である. このとき,

$$E_f(\| (BA - I)(f - E(f)) \|^2)$$

を最小にするものの中で

$$E_n(\| Bn \|^2)$$

を最小にする作用素 $B_{APF} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ を平均射影フィルタとよぶ.

定理 4.5.1. 平均射影フィルタは $\text{ran}(R^{1/2}A^*)$, $\text{ran}(Q + ARA^*)$ が共に閉部分空間であれば存在する. 部分射影フィルタの一般形は任意の作用素 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ をもちいて

$$B_{APF} = R^{1/2}V^\dagger R^{1/2}A^*U^- + W(I - UU^-), \quad (4.4)$$

$$U = Q + ARA^*,$$

$$V = R^{1/2}A^*U^\dagger AR^{1/2},$$

である. また $g \in \text{ran}(U)$ であれば復元画像は一意に定まる.

[証明]

原画像空間空間 \mathcal{H}_1 の可算個からなる正規直交基底 (CONS) $\{u_i\}$ を用いて

$$\begin{aligned} & E_f(\langle (BA - I)(f - E(f)), (BA - I)(f - E(f)) \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} E_f(\overline{\langle f - E(f), A^*B^*u_i - u_i \rangle} \langle f - E(f), A^*B^*u_i - u_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} E_f(\langle \langle A^*B^*u_i - u_i, f - E(f) \rangle (f - E(f)), A^*B^*u_i - u_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} E_f(\langle (f - E(f)) \otimes (f - E(f))(A^*B^*u_i - u_i), A^*B^*u_i - u_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \| A^*B^*u_i - u_i \|_R^2. \end{aligned}$$

であるから, 条件をみたす作用素 B^* は方程式 $A^*B^*u_i = u_i$ の Q -最小の R -最小二乗解を与える作用素である. 一般形は定理 3.6.3 により任意の $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ をもちいて

$$B^* = U^- AR^{1/2}V^\dagger R^{1/2} + (I - U^-U)W,$$

$$U = Q + ARA^*,$$

$$V = R^{1/2}A^*U^- AR^{1/2},$$

と表されるから,

$$B_{APF} = R^{1/2}V^\dagger R^{1/2}A^*U^- + W(I - UU^-), \quad W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1),$$

である。また、復元画像は

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle g, B^* u_i \rangle u_i = \sum_{i=1}^{\infty} \langle B_{APF} g, u_i \rangle u_i = B_{APF} g.$$

となる。 □

4.6 部分射影フィルタを用いた共通部分を持つ画像の復元

本節では部分射影フィルタの応用として共通部分をもつ複数個の画像の復元について述べる (Imai et al.[9]). 例えば、航空撮影による連続した写真は周辺が重なっている画像であることが多い。

ここでは画像はデジタル画像であるものとする。したがって原画像、観測画像は実ベクトル、観測作用素、雑音の相関作用素、射影作用素は適当な型の実行列で表現できる。

行列 F_1, \dots, F_P はそれぞれ $(m_1 \times n_1), \dots, (m_P \times n_P)$ 画素の原画像を、行列 G_1, \dots, G_P はそれぞれ $(m'_1 \times n'_1), \dots, (m'_P \times n'_P)$ 画素の観測画像を表すものとする。また、画像観測モデルは

$$\text{vec}(G_i) = A_i \text{vec}(F_i) + \mathbf{n}_i, i = 1, \dots, P,$$

であるものとする。ここで、 A_i は観測作用素を表現する $(m'_i \times n'_i, m_i \times n_i)$ 型行列、 \mathbf{n}_i は雑音を表す $m'_i \times n'_i$ 次元ベクトル、また、 $\text{vec}(A)$ を (m, n) 実行列 $A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$ の列ベクトルを縦に並べた $n \times m$ ベクトルを表すものとする (Magnus and Neudecker[21]). すなわち、

$$\text{vec}(A) = [\mathbf{a}'_1 \cdots \mathbf{a}'_n]'$$

である。また、行列 A の一般逆行列を A^+ で表す。

これら P 個の観測モデルをまとめると、

$$\begin{bmatrix} \text{vec}(G_1) \\ \vdots \\ \text{vec}(G_P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{vec}(F_1) \\ \vdots \\ \text{vec}(F_P) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{n}_P \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

と表すことができる. ここで, 雑音 \mathbf{n}_i と \mathbf{n}_j の共分散行列を $Q_{ij} = E(\mathbf{n}_i \mathbf{n}_j')$ とする. 雑音 \mathbf{n}_i と \mathbf{n}_j が独立であれば $Q_{ij} = 0$ である. 原画像 F_1, \dots, F_P に関する知識がない場合, $i \neq j$ のとき $Q_{ij} = 0$ であれば, 観測モデル (4.5) に基づく射影フィルタ B_{PF} は

$$B_{PF} = \begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_P \end{bmatrix}$$

ここで,

$$B_i = V_i^+ A_i^* U_i^+$$

$$U_i = A_i A_i^* + Q_{ii}$$

$$V_i = A_i^* U_i^+ A_i, \quad i = 1, \dots, P$$

となり, 個々の画像をそれぞれの観測過程に基づく射影フィルタで復元することと同等である. しかし, いくつかの原画像の中に共通部分があるという事前の知識があれば, その知識を有効に利用することにより高精度の復元が可能である.

以下では, 記述を簡単にするために画像が2枚の場合を扱う. これを P 枚の画像復元に拡張するのは容易であるが, 行列が大規模になるために計算機で画像復元を行なうことが難しくなる. 画像の共通部分を線形制約で表現するために次の補題を用いる.

補題 4.6.1 (Magnus and Neudecker[21]). 行列の積 ABC が定義されるような3個の行列 A, B, C について

$$\text{vec}(ABC) = (C' \otimes A) \text{vec}(B),$$

ここで, $A \otimes B$ は行列の Kronecker 積を表す.

2枚の原画像を $F_1 = (f_{1:ij}), 1 \leq i \leq m_1, 1 \leq j \leq n_1, F_2 = (f_{2:ij}), 1 \leq i \leq m_2, 1 \leq j \leq n_2$ とする. まず, 原画像の中の一つの画素が共通である場合の制約について考える. 図 4.1 のように画像 F_1 の画素 $f_{1:i_1 j_1}$ と画像 F_2 の画素 $f_{2:i_2 j_2}$ が共通であるとき,

$$e'_{m_1, i_1} F_1 e_{n_1, j_1} = e'_{m_2, i_2} F_2 e_{n_2, j_2},$$

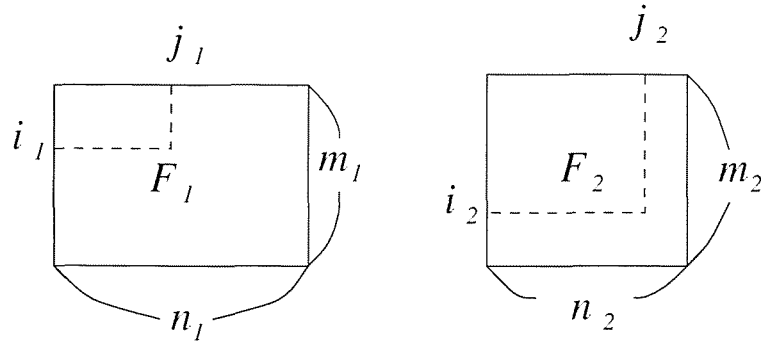


図 4.1: 一画素が共通である 2 枚の画像

が成り立つ. ただし, $e_{n,i}$ は第 i 成分が 1 でその他の成分は 0 である単位ベクトルを表す. 補題 4.6.1 から制約式

$$(e'_{n_1, j_1} \otimes e'_{m_1, i_1}) \text{vec}(F_1) - (e'_{n_2, j_2} \otimes e'_{m_2, i_2}) \text{vec}(F_2) = 0, \quad (4.6)$$

を得る. したがって, F_1 中の l 個の画素 $f_{1:i_{11}j_{11}}, \dots, f_{1:i_{1l}j_{1l}}$ と F_2 中の l 個の画素 $f_{2:i_{21}j_{21}}, \dots, f_{2:i_{2l}j_{2l}}$ が共通であるときは, 式 (4.6) から

$$C_{pix.} \begin{bmatrix} \text{vec}(F_1) \\ \text{vec}(F_2) \end{bmatrix} = 0,$$

である. ここで

$$C_{pix.} = \begin{bmatrix} e'_{n_1, j_{11}} \otimes e'_{m_1, i_{11}} & -e'_{n_2, j_{21}} \otimes e'_{m_2, i_{21}} \\ \vdots & \vdots \\ e'_{n_1, j_{1l}} \otimes e'_{m_1, i_{1l}} & -e'_{n_2, j_{2l}} \otimes e'_{m_2, i_{2l}} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

が成り立つ.

つぎに, 図 4.2 のような 2 枚の原画像の長方形の領域が共通である場合の制約式を求める. デジタル画像の共通部分はいくつかの画素の集合であるから, 式 (4.7) からどのような共通部分の制約式も書くことができるので, この制約式も式 (4.7) の特別な場合になるが, 航空写真の撮影などでは図 4.3 のような共通部分があることが多い. したがって, このような場合の制約式も明示しておく実用上有用である.

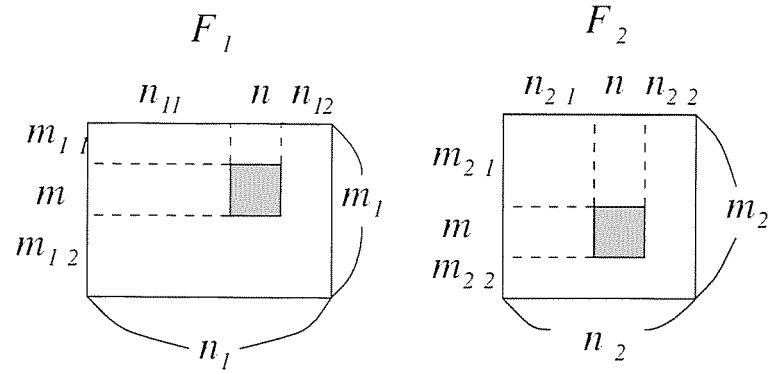


図 4.2: 長方形の共通部分をもつ2枚の画像

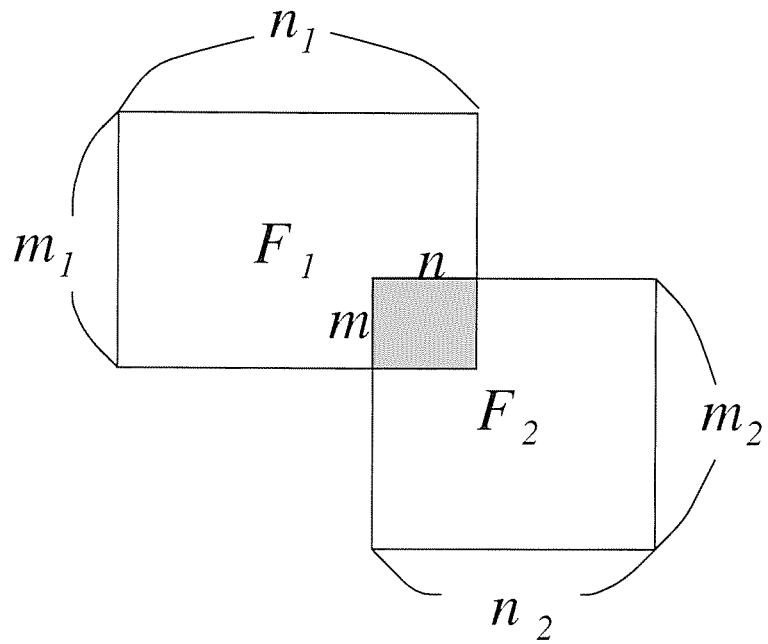


図 4.3: 角が重複している2枚の画像

長方形の領域が共通である場合は、式(4.7)から

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0_{m \times m_{11}} & I_m & 0_{m \times m_{12}} \end{bmatrix} F_1 \begin{bmatrix} 0_{n \times n_{11}} & I_n & 0_{n \times n_{12}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{m \times m_{21}} & I_m & 0_{m \times m_{22}} \end{bmatrix} F_2 \begin{bmatrix} 0_{n \times n_{21}} & I_n & 0_{n \times n_{22}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

である。ここで、行列 $I_n, 0_{m \times n}$ はそれぞれ (n, n) 型単位行列, (m, n) 型零行列を表す。式(4.8)と補題4.6.1から制約条件

$$C_{rec.} \begin{bmatrix} \text{vec}(F_1) \\ \text{vec}(F_2) \end{bmatrix} = 0,$$

を得る。ただし、

$$\begin{aligned} C_{rec.} = & \left[\begin{bmatrix} 0_{n \times n_{11}} & I_n & 0_{n \times n_{12}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0_{m \times m_{11}} & I_m & 0_{m \times m_{12}} \end{bmatrix} \right. \\ & \left. - \begin{bmatrix} 0_{n \times n_{21}} & I_n & 0_{n \times n_{22}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0_{m \times m_{21}} & I_m & 0_{m \times m_{22}} \end{bmatrix} \right], \end{aligned} \quad (4.9)$$

である。図4.3のような共通部分がある場合は特に $n_{12} = m_{12} = n_{21} = m_{21} = 0$ になる。条件

$$C \begin{bmatrix} \text{vec}(F_1) \\ \text{vec}(F_2) \end{bmatrix} = 0,$$

は

$$\begin{bmatrix} \text{vec}(F_1) \\ \text{vec}(F_2) \end{bmatrix} \in \text{ran}(I - C^+C),$$

と表すことができるので、これらの制約式から、共通部分を持つ2枚の画像を部分射影フィルタ

$$\begin{aligned} B &= V^+ A' U^+, \\ U &= A(I - C_*^+ C_*) A' + Q, \\ V &= (I - C_*^+ C_*) A' U^+ A (I - C_*^+ C_*), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix},$$

を用いて復元することができる。ここで C_* は画素が共通である場合は $C_{pir.}$ 、長方形が共通である場合は $C_{rec.}$ である。また、部分射影フィルタは一般式 (4.3) において一般逆として Moore-Penrose 一般逆行列を用い、 $W = 0$ としたものである。

射影行列 $(I - C_*^+ C_*)$ の計算は特異値、特異ベクトルによって求めるのが普通であるが、 $(I - C_{rec.}^+ C_{rec.})$ は $C_{rec.} C_{rec.}^+ = 2I_{mn}$ であることから、簡単に計算することができる。実際に、

$$P_{\text{ran}((I - C_{rec.}^+ C_{rec.}))} = I - C_{rec.}^+ C_{rec.} = I - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

ここで、

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{bmatrix} 0_{a_{11} \times a_{11}} & 0_{n_{11} \times n} & 0_{a_{11} \times a_{12}} \\ 0_{n \times n_{11}} & I_n & 0_{n \times n_{12}} \\ 0_{a_{12} \times a_{11}} & 0_{n_{12} \times n} & 0_{a_{12} \times a_{12}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0_{m_{11} \times m_{11}} & 0_{m_{11} \times m} & 0_{m_{11} \times m_{12}} \\ 0_{m \times m_{11}} & I_m & 0_{m \times m_{12}} \\ 0_{m_{12} \times m_{11}} & 0_{m_{12} \times m} & 0_{m_{12} \times m_{12}} \end{bmatrix} \\ M_{12} &= \begin{bmatrix} 0_{a_{11} \times a_{21}} & 0_{n_{11} \times n} & 0_{a_{11} \times a_{22}} \\ 0_{n \times n_{21}} & I_n & 0_{n \times n_{22}} \\ 0_{a_{12} \times a_{21}} & 0_{n_{12} \times n} & 0_{a_{12} \times a_{22}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0_{m_{11} \times m_{21}} & 0_{m_{11} \times m} & 0_{m_{11} \times m_{22}} \\ 0_{m \times m_{21}} & I_m & 0_{m \times m_{22}} \\ 0_{m_{12} \times m_{21}} & 0_{m_{12} \times m} & 0_{m_{12} \times m_{22}} \end{bmatrix} \\ M_{21} &= \begin{bmatrix} 0_{a_{21} \times a_{11}} & 0_{n_{21} \times n} & 0_{a_{21} \times a_{12}} \\ 0_{n \times n_{11}} & I_n & 0_{n \times n_{12}} \\ 0_{a_{22} \times a_{11}} & 0_{n_{22} \times n} & 0_{a_{22} \times a_{12}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0_{m_{21} \times m_{11}} & 0_{m_{21} \times m} & 0_{m_{21} \times m_{12}} \\ 0_{m \times m_{11}} & I_m & 0_{m \times m_{12}} \\ 0_{m_{22} \times m_{11}} & 0_{m_{22} \times m} & 0_{m_{22} \times m_{12}} \end{bmatrix} \\ M_{22} &= \begin{bmatrix} 0_{n_{21} \times n_{21}} & 0_{n_{21} \times n} & 0_{n_{21} \times n_{22}} \\ 0_{n \times n_{21}} & I_n & 0_{n \times n_{22}} \\ 0_{n_{22} \times n_{21}} & 0_{n_{22} \times n} & 0_{n_{22} \times n_{22}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0_{m_{21} \times m_{21}} & 0_{m_{21} \times m} & 0_{m_{21} \times m_{22}} \\ 0_{m \times m_{21}} & I_m & 0_{m \times m_{22}} \\ 0_{m_{22} \times m_{21}} & 0_{m_{22} \times m} & 0_{m_{22} \times m_{22}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。

サイズの小さい画像を用いて、本節で述べた手法の有効性を確認する。図 4.4(a), (b)

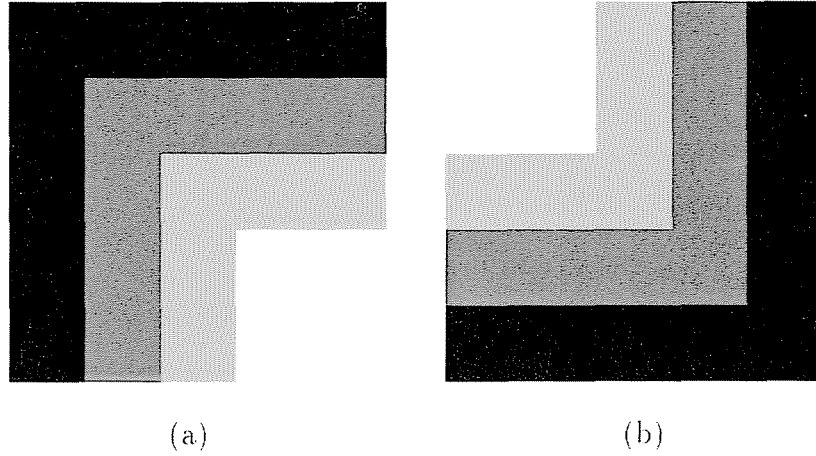


図 4.4: 原画像

は、ともに縦、横とも 10 画素の 256 階調モノクローム画像である。図 4.4(a) の右下 4×4 画素と図 4.4(b) の左上 4×4 画素が共通である。これらを原画像 F_1, F_2 とする。

観測モデルは観測画像を G_1, G_2 として

$$G_i = C_4 F_i C_4 + \mathcal{E}, \quad i = 1, 2,$$

とする。ただし、

$$C_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \cdots & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

、加法雑音を表す $(10, 10)$ 型行列 \mathcal{E} の各要素は互いに独立に正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うものとする。この行列 C_4 は縦方向（横方向）に 4 画素を平均する観測作用素の表現であるから、この観測過程は斜め方向の流れ画像に雑音加わったものである。補題 4.6.1 から

$$\begin{bmatrix} \text{vec}(G_1) \\ \text{vec}(G_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{vec}(F_1) \\ \text{vec}(F_2) \end{bmatrix} + \mathbf{n},$$

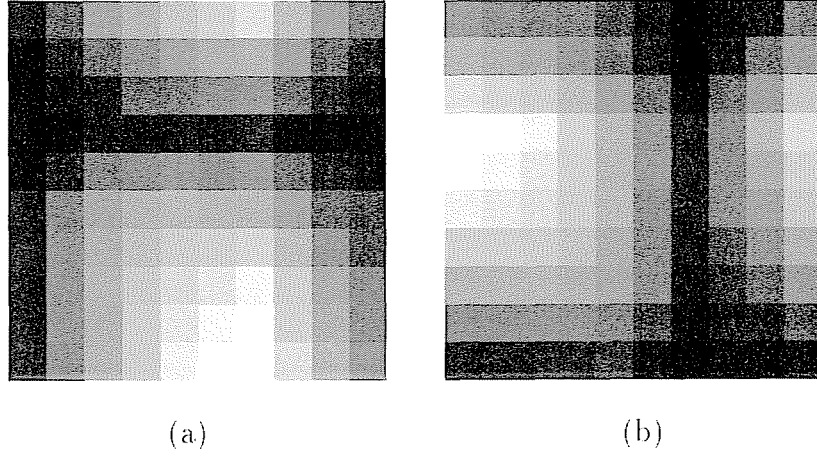


図 4.5: 観測画像

で, $\mathbf{n} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I_{200})$ である. 図 4.5(a), (b) は $\sigma^2 = 3$ としたときの観測画像である.

二枚の原画像の共通部分の制約条件は式 (4.9) から

$$C_1 \begin{bmatrix} \text{vec}(F_1) \\ \text{vec}(F_2) \end{bmatrix} = 0,$$

である. ここで,

$$C_1 = \left[\begin{bmatrix} 0_{4 \times 6} & I_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0_{4 \times 6} & I_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_4 & 0_{4 \times 6} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} I_4 & 0_{4 \times 6} \end{bmatrix} \right]$$

である. したがって式 (4.11) から

$$P_{\text{ran}(I - C_1^+ C_1)} = I - C_1^+ C_1 = I - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{22} \end{bmatrix},$$

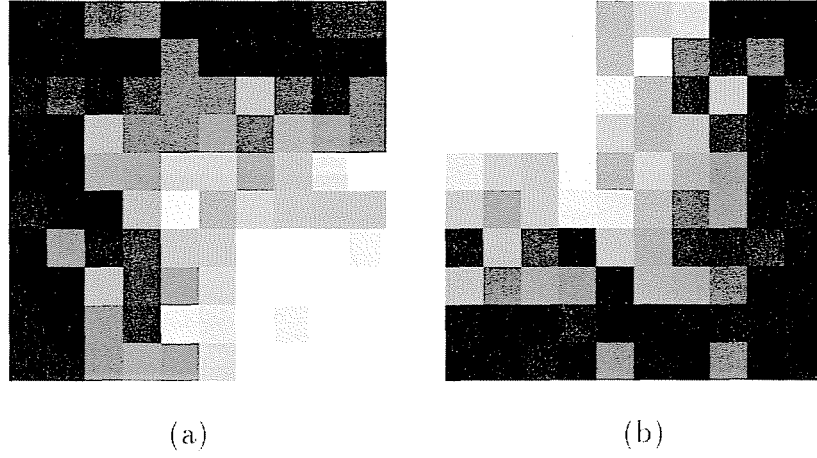


図 4.6: 部分射影フィルタによる復元画像

ここで,

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & 0_{6 \times 4} \\ 0_{4 \times 6} & I_4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & 0_{6 \times 4} \\ 0_{4 \times 6} & I_4 \end{bmatrix}, \\
 M_{12} &= \begin{bmatrix} 0_{6 \times 4} & 0_{6 \times 6} \\ I_4 & 0_{4 \times 6} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0_{6 \times 4} & 0_{6 \times 6} \\ I_4 & 0_{4 \times 6} \end{bmatrix}, \\
 M_{21} &= \begin{bmatrix} 0_{4 \times 6} & I_4 \\ 0_{6 \times 6} & 0_{6 \times 4} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0_{4 \times 6} & I_4 \\ 0_{6 \times 6} & 0_{6 \times 4} \end{bmatrix}, \\
 M_{22} &= \begin{bmatrix} I_4 & 0_{4 \times 6} \\ 0_{6 \times 4} & 0_{6 \times 6} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} I_4 & 0_{4 \times 6} \\ 0_{6 \times 4} & 0_{6 \times 6} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

である. この制約条件を用いた部分射影フィルタ (4.10) による復元画像が図 4.6 である. 比較のため, それぞれの観測画像を個別に射影フィルタで復元したものが図 4.7 である.

図 4.6 と図 4.7 の違いを明確にするために, $\sigma^2 = 1, 3, 5$ の 3 通りについて, 原画像 F_1, F_2 と復元画像 \hat{F}_1, \hat{F}_2 との差 $E = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^2 (\text{vec}(\hat{F}_i) - \text{vec}(F_i))' (\text{vec}(\hat{F}_i) - \text{vec}(F_i))$ を計算したものが表 4.1 である. この表から本節で述べた部分射影フィルタを用いた復元画像の方がより原画像に近いことがわかる.

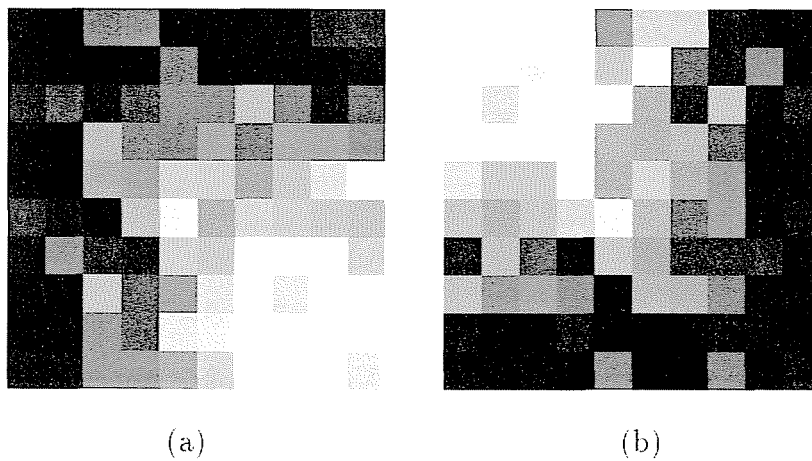


図 4.7: 射影フィルタによる復元画像

表 4.1: 原画像と復元画像の差

E	部分射影フィルタ	射影フィルタ
$\sigma^2 = 1$	150.4826	187.0025
$\sigma^2 = 3$	410.1746	475.7393
$\sigma^2 = 5$	693.0462	860.7648

4.7 一般逆フィルタと射影フィルタ族の統一理論

各種の最適復元フィルタを統一的に扱うことはフィルタ間の相互関係をより詳細に知る上で重要である. 小川 [26], 小出他 [17] では射影フィルタ族をある作用素方程式の解として統一的に導くことができることを示し, その表現を与えている. 山下・小川 [55] では一般逆フィルタ及び射影フィルタ族, 第5章で述べるパラメトリックフィルタ族の相互関係が研究されている.

また, 山下・小川 [56] では一般逆フィルタ及び射影フィルタ族と観測作用素の1逆との関係について詳しく述べられている.

第4章では一般逆フィルタ及び射影フィルタ族をある方程式の N -最小の M -最小二乗解を与える作用素として統一的に理解できることを示した. 結果を整理すると表4.2 のようになる. ただし, $\{u_i\}$ は原画像空間 \mathcal{H}_1 の完全正規直交基底である.

この結果をまとめて, 次の定理を得る.

定理 4.7.1. 射影フィルタ族の一般形は, 任意の作用素 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ をもちいて

$$\begin{aligned} B_{PF_s} &= R_F V^\dagger R_F A^* U^- + W(I - U U^-), \\ U &= Q + A R_F^2 A^*, \\ V &= R_F A^* U^- A R_F, \end{aligned}$$

と表される. ここで,

$$\begin{cases} R_F = P_{\text{ran}(A^*)} \text{ のとき射影フィルタ,} \\ R_F = P_K \text{ のとき部分射影フィルタ,} \\ R_F = R^{1/2} \text{ のとき平均射影フィルタ,} \end{cases}$$

である. また, $g \in \text{ran}(U)$ であれば, 復元画像 $B_{PF_s} g$ は一般逆および作用素 W の選び方によらず一意に定まる.

この定理から次の系を得る.

表 4.2: 一般逆フィルタ及び射影フィルタ族の相互関係

最適復元フィルタ	方程式	M	N
一般逆フィルタ	$Af = g$	I	I
射影フィルタ	$A^*b_i = u_i$	I	Q
部分射影フィルタ	$A^*b_i = u_i$	P_K	Q
平均射影フィルタ	$A^*b_i = u_i$	R	Q

系 4.7.1 (山下・小川 [55]). 射影フィルタ族に属する最適復元フィルタについて次の (i)~(iii) が成り立つ.

- (i) $R = I$ であれば平均射影フィルタは射影フィルタに等しい.
- (ii) $K = \mathcal{H}_1$ であれば部分射影フィルタは射影フィルタに等しい.
- (iii) $Q = I$ であれば射影フィルタは一般逆フィルタに等しい.

[証明]

(i), (ii) は表 4.2 から明らかである. 定理 3.3.1 から一般逆フィルタは I -最小の I -最小二乗解を与える作用素であり, 系 3.6.5 からその作用素は A^* の I -最小の I -最小二乗解を与える作用素に等しい. したがって (iii) が成り立つ. \square

定理 4.7.1 および系 4.7.1 は山下・小川 [55], 小出他 [17] でも示されている. 山下・小川 [55] では具体的な復元フィルタの式から, また小出他 [17] では射影フィルタ族が満たすべき作用素方程式からこれらの性質を得ている. 一方, 本章では一般逆フィルタおよび射影フィルタ族を M -最小の N -最小二乗解として統一的に導出できることを示した.

第5章 パラメトリックフィルタ

5.1 はじめに

第4章ではある制約条件を満たすものの中から他方の基準を最小にする画像を与える作用素について述べた。これらの作用素はいずれも第3で述べた N -最小の M -最小二乗解を与える作用素として統一的に扱うことができた。

第5章で述べるパラメトリックフィルタは二つの最適基準の重み付きの和を新たな最適基準とし、それを満たす画像を与える作用素である。一つの汎関数を最小にする解を求めればよいので、作用素の表現は比較的簡単になる。また、二つの最適基準の重みを適当に与えることによって、どちらの基準をより重視するかを主観的に決めることができる。

パラメトリックフィルタの最適基準においては作用素のノルムを以下のように定義する。

定義 5.1.1 (ヒルベルト・シュミットノルム). 作用素 A に対して

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle A^* A u_i, u_i \rangle \right)^{1/2},$$

を作用素 A のヒルベルト・シュミットノルムという。ここで $\{u_i\}$ は \mathcal{H}_1 の任意の正規直交基底である。

作用素 A が半正であれば

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle A u_i, u_i \rangle,$$

は正規直交基底の選び方によらず一定である。したがってヒルベルト・シュミットノルムも矛盾なく定義される。

5.2 パラメトリック一般逆フィルタ

第4.2節で述べたように, 一般逆フィルタは $\|ABg - g\|$ を最小にするものの中で $\|Bg\|$ を最小にする作用素である. パラメトリック一般逆フィルタはパラメータ γ を用いて二つの基準の重みつき和

$$\|ABg - g\|^2 + \gamma\|Bg\|^2,$$

を最小にする作用素 $B_{PGIF}(\gamma) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ である.

定理 5.2.1 (山下・小川 [55]). 任意の作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ に対してパラメトリック一般逆フィルタ $B_{PGIF}(\gamma)$ が存在し,

$$B_{PGIF}(\gamma) = (A^*A + \gamma I)^{-1}A^*,$$

である.

パラメトリック一般逆フィルタと一般逆フィルタの関係は以下の定理により得られる.

定理 5.2.2 (田中他 [45]). 作用素 A がコンパクト作用素で $g \in \text{ran}(A) \oplus \text{ran}(A)^\perp$ であれば

$$\|B_{PGIF}(\gamma)g - B_{GIF}g\| \longrightarrow 0, \quad \gamma \rightarrow 0,$$

である.

作用素 A が有限階でないコンパクト作用素の場合は, 一般逆

$$A^\dagger : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1,$$

は定義域が $\text{ran}(A) \oplus \text{ran}(A)^\perp (\subset \mathcal{H}_2)$, である閉作用素になり, 定理 5.2.2 は A^\dagger の定義域に属する $g \in \mathcal{H}_2$ に関する収束を保証している. \mathcal{H}_2 全体に対してこの性質が成り立つのはコンパクト作用素 A の値域 $\text{ran}(A)$ が有限次元部分空間である場合に限られる. このような作用素を有限階であるという.

有限階の作用素に関して次の補題が成り立つ.

補題 5.2.1 (Riesz and Nagy[42]). 作用素 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ が有限階であれば, 作用素 $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ が有限階である.

5.3 パラメトリック射影フィルタ

第4.3節で述べた射影フィルタは $\|BAf - f\|$ を最小にするものの中で $E_n\|Bn\|$ を最小にする作用素である。パラメトリック射影フィルタはパラメータ γ を用いて二つの基準の重みつき和

$$\|BA - P_{\text{ran}(A^*)}\|_2^2 + \gamma E_n \|Bn\|^2, \quad (5.1)$$

を最小にする作用素 $B_{PPF}(\gamma) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ である。

パラメトリック射影フィルタは復元画像の画像成分が原画像の射影になるという射影フィルタの条件を少しゆるめることによって、雑音を大きく抑制することを目的としている。

定理 5.3.1 (Oja and Ogawa[37]). 値域 $\text{ran}(\gamma Q + AA^*)$ が閉部分空間であればパラメトリック射影フィルタは存在し、その一般形は任意の作用素 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ を用いて

$$\begin{aligned} B_{PPF}(\gamma) &= A^*U(\gamma)^\dagger + W(I - U(\gamma)U(\gamma)^-), \\ U(\gamma) &= \gamma Q + AA^*, \end{aligned} \quad (5.2)$$

である。また、 $g \in \text{ran}(U(\gamma))$ であれば、復元画像は一逆および作用素 W の選び方に依らず、一意に定まる。

パラメトリック射影フィルタと射影フィルタの関係は以下の定理により得られる。

定理 5.3.2 (山下・小川 [55]). 作用素 $U(\gamma) = \gamma Q + AA^*$ が有限階であるとき、

$$\|B_{PPF}(\gamma) - B_{PF}\| \rightarrow 0, \quad \gamma \rightarrow 0,$$

である。

5.4 パラメトリック部分射影フィルタ

第4.4節で述べた部分射影フィルタは $\|BAf - P_{\text{ran}(P_X A^*)}f\|$ を最小にするものの中で $E_n\|Bn\|$ を最小にする作用素である。パラメトリック部分射影フィルタはパラメータ γ

を用いて二つの基準の重みつき和

$$\| BA - P_{\text{ran}(P_{\mathcal{K}}A^*)} \|_2^2 + \gamma E_n \| Bn \|^2, \quad (5.3)$$

を最小にする作用素 $B_{PPTPF}(\gamma) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ である.

パラメトリック部分射影フィルタは復元画像の画像成分が原画像の $\text{ran}(P_{\mathcal{K}}A^*)$ への射影になるという部分射影フィルタの条件を少しゆるめることによって、雑音を大きく抑制することを目的としている.

定理 5.4.1 (杉山・小川 [44]). 値域 $\text{ran}(\gamma Q + AP_{\mathcal{K}}A^*)$ が閉部分空間であればパラメトリック部分射影フィルタは存在し、その一般形は任意の作用素 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ を用いて

$$\begin{aligned} B_{PPTPF}(\gamma) &= P_{\mathcal{K}}A^*U(\gamma)^\dagger + W(I - U(\gamma)U(\gamma)^-), \\ U(\gamma) &= \gamma Q + AP_{\mathcal{K}}A^*, \end{aligned} \quad (5.4)$$

である. また, $g \in \text{ran}(U(\gamma))$ であれば, 復元画像は一逆および作用素 W の選び方に依らず, 一意に定まる.

パラメトリック部分射影フィルタと部分射影フィルタの関係は以下の定理により得られる.

定理 5.4.2 (山下・小川 [55]). 作用素 $U(\gamma) = \gamma Q + AP_{\mathcal{K}}A^*$ が有限階であるとき,

$$\| B_{PPTPF}(\gamma) - B_{PTPF} \| \rightarrow 0, \quad \gamma \rightarrow 0,$$

である.

5.5 パラメトリックウィーナーフィルタ

第 4.5 節で述べた平均射影フィルタは $V_f(\| BAf - f \|)$ を最小にするものの中で $E_n \| Bn \|$ を最小にする作用素である. パラメトリックウィーナーフィルタはパラメータ γ を用いて二つの基準の重みつき和

$$V_f(\| BAf - f \|^2) + \gamma E_n \| Bn \|^2, \quad (5.5)$$

を最小にする作用素 $B_{PWF}(\gamma) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ である.

実数 $\gamma = 1$ のときパラメトリック ウィーナー フィルタはウィーナー フィルタ [51] になる.

定理 5.5.1 (小川 [28]). 値域 $\text{ran}(\gamma Q + ARA^*)$ が閉部分空間であればパラメトリック ウィーナーフィルタは存在し, その一般形は任意の作用素 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ を用いて

$$\begin{aligned} B_{PWF}(\gamma) &= RA^*U(\gamma)^\dagger + W(I - U(\gamma)U(\gamma)^-), \\ U(\gamma) &= \gamma Q + ARA^*. \end{aligned} \quad (5.6)$$

である. また, $g \in \text{ran}(U(\gamma))$ であれば, 復元画像は一逆および作用素 W の選び方に依らず, 一意に定まる.

パラメトリックウィーナーフィルタと平均射影フィルタの関係は以下の定理により得られる.

定理 5.5.2 (山下・小川 [55]). 作用素 $\text{ran}(\gamma Q + ARA^*)$ が有限階であるとき,

$$\| B_{PWF}(\gamma) - B_{APF} \| \longrightarrow 0, \quad \gamma \rightarrow 0,$$

である.

5.6 パラメトリック射影フィルタ族の統一理論

パラメトリック射影フィルタおよびパラメトリック部分射影フィルタ, パラメトリックウィーナーフィルタはいずれも射影フィルタ族に属する最適復元フィルタの最適基準の重み付きの和を最小にする作用素であることから, パラメトリック射影フィルタ族という.

Imai et al.[12] ではパラメトリック射影フィルタ族をある汎関数の最小値を与える作用素として統一的に導くことができることを示し, その表現を与えている.

補題 5.6.1 (Imai et al.[12]). パラメトリック射影フィルタ族は

$$(BA - R_T)R_F^2 A^* + \gamma BQ = 0, \quad (5.7)$$

の解として与えられる. ここで,

$$\begin{cases} R_F = P_{\text{ran}(A^*)}, R_T = I \text{ のとき } B_{PPF}(\gamma), \\ R_F = P_{\mathcal{K}}, R_T = P_{\text{ran}(P_{\mathcal{K}}A^*)} \text{ のとき } B_{PPTPF}(\gamma), \\ R_F = R^{1/2}, R_T = I \text{ のとき } B_{PWF}(\gamma), \end{cases} \quad (5.8)$$

である.

[証明]

パラメトリック射影フィルタ族の最適基準である式 (5.1),(5.3),(5.5) からこれらの作用素は

$$J(\gamma) = \text{tr}((BA - R_T)R_F^2 (BA - R_T)^* + \gamma E_n \| B_n \|^2),$$

をみtas. ただし作用素 R_M, R_T は式 (5.8) で定義されたものである. 作用素 B に変分 δB を与えることにより $J(\gamma)$ の変分 $\delta J(\gamma)$ は

$$\delta J(\gamma) = 2\text{Re}(\text{tr}((BA - R_T)R_F^2 A^* \delta B + \gamma BQ \delta B)) = 0,$$

となる. 変分 δB は任意の作用素であるから,

$$\text{Re}(\text{tr}((BA - R_T)R_F^2 A^* + \gamma BQ)) = 0,$$

となる. 変分 $i\delta B$ を与えることにより, 同様にして

$$\text{Im}(\text{tr}((BA - R_T)R_F^2 A^* + \gamma BQ)) = 0,$$

が成り立つ. したがって作用素 B は

$$(BA - R_T)R_F^2 A^* + \gamma BQ = 0,$$

の解である. □

この補題からパラメトリック射影フィルタ族の統一的な表現として次の定理を得る.

定理 5.6.1 (Imai et al.[12]). 式 (5.7) を満たす作用素は常に存在する. その一般形は任意の作用素 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ を用いて

$$\begin{aligned} B_{PPFs}(\gamma) &= R_F^2 A^* U(\gamma)^- + W(I - U(\gamma)U(\gamma)^-), \\ U(\gamma) &= AR_F^2 A^* + \gamma Q, \end{aligned}$$

である.

[証明]

式 (5.7) から

$$\begin{aligned} BU(\gamma) &= R_T R_F^2 A^*, \\ U(\gamma) &= AR_F^2 A^* + \gamma Q, \end{aligned}$$

である. 式 (5.8) より $R_T R_F^2 = R_F^2$ であるから任意の $\gamma > 0$ に対して

$$\ker(U(\gamma)) \subset \ker(R_F^2 A^*),$$

が成り立つ. したがって補題 3.4.1 により方程式 (5.7) は解をもち, その一般解は任意の作用素 $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ を用いて

$$\begin{aligned} B_{PPFs}(\gamma) &= R_F^2 A^* U(\gamma)^- + W(I - U(\gamma)U(\gamma)^-), \\ U(\gamma) &= AR_F^2 A^* + \gamma Q. \end{aligned}$$

となる. □

結果を整理すると表 5.1 のようになる. この結果から次の定理を得る.

系 5.6.1. パラメトリック射影フィルタ族に属する最適復元フィルタについて次の (i), (ii) が成り立つ.

- (i) $R = I$ であればパラメトリックウィーナーフィルタはパラメトリック射影フィルタに等しい.

表 5.1: パラメトリック射影フィルタ族の相互関係

最適復元フィルタ	R_F
パラメトリック射影フィルタ	$P_{\text{ran}(A^*)}$
パラメトリック部分射影フィルタ	$P_{\mathcal{K}}$
パラメトリックウィーナーフィルタ	$R^{1/2}$

(ii) $\mathcal{K} = \mathcal{H}_1$ であればパラメトリック部分射影フィルタはパラメトリック射影フィルタに等しい.

定理 5.3.2, 5.4.2, 5.5.2 と定理 5.6.1 をまとめて, 射影フィルタ族とパラメトリック射影フィルタ族に関する次の定理を得る.

定理 5.6.2. 作用素 $U(\gamma) = AR_P^2 A^* + \gamma Q$ が有限階であるとき,

$$\|B_{PPFs}(\gamma) - B_{PFs}\| \longrightarrow 0, \gamma \rightarrow 0,$$

が成り立つ. ただし, 作用素 R_F は式 (5.8) で定義されるものとする.

第II部

摂動に対する最適復元フィルタの性質と
正則化パラメトリック射影フィルタ族

第6章 観測過程と画像復元

第2章で述べたように、画像観測および画像復元のモデルはそれぞれ

$$\begin{aligned}g &= Af + n, \quad f \in \mathcal{H}_1, g, n \in \mathcal{H}_2, \\ \hat{f} &= Bg, \quad \hat{f} \in \mathcal{H}_1,\end{aligned}$$

と表される。ここで、復元作用素 B はある最適基準を満たす復元画像を与える作用素であり、最適化基準の設定によって種々の最適復元フィルタが得られることを第4章および第5章で示した。

これらの最適復元フィルタは観測作用素および雑音の相関作用素、原画像の相関作用素から構成される。つまり、第4章および第5章で示した復元フィルタは原画像と雑音の統計的性質および観測過程がすべて既知であるという前提の下で構成されたものである。しかし、カメラの一樣な移動（横への等速運動など）による観測や大気の擾乱のように劣化の要因が物理的に明確なもので、観測作用素がそれに基づいて求められる場合や、天文学においてぼやけた星の像から観測過程を推定できる場合を除けば観測作用素の正確な推定は通常困難である。したがって、現実の画像復元においては観測過程や画像空間の統計的性質は未知であるか、あるいは経験的知識や観測の繰り返しによって近似的に得られているか、のいずれかであると考えられる。

6.1 観測過程が未知の場合

観測過程や画像空間の統計的性質が未知の場合には、観測作用素と復元画像を同時に推定することになる。加法的雑音がないと仮定すると、観測モデルは

$$g = Af, f \in \mathcal{H}_1, g \in \mathcal{H}_2,$$

で、観測画像 g のみが既知である。このモデルの下で A と f を同時に推定するためには何らかの先験的知識あるいは仮定が必要になる。Chan and Wang[3] では観測作用素の対称性を仮定してブラインド・デコンボリューション法 (BD 法) と正則化を組み合わせた復元手法を提案している。また、梅山 [49, 50] ではぼけた画像を様々な方向にずらした画像を用意し、それらの画像に対して ICA (Independent Component Analysis) を適用することにより復元する手法を提案している。

BD 法、ICA のいずれの手法においても、ある評価関数の最小値 (あるいは最大値) を求めるために非線形最適化を行なう必要がある。このため、効率的なアルゴリズムに関する研究も多い (Chan and Wong[3], Hyvärinen and Oja[8])。

6.2 観測過程が推定できる場合

観測過程が推定できる場合には、推定による精度が復元画像に及ぼす影響を評価する必要がある。観測作用素および雑音、原画像の相関作用素などが推定されたものであれば、それらは真の作用素とは微小に異なっていると考えられる。また、ヒルベルト空間論を画像復元理論に用いる場合、原画像空間および観測画像空間の内積も既知でなければならない。しかし、画像間の距離には心理的な要素も含まれており、それがヒルベルト空間の内積から定まるノルムと一致する保証はない (小川ら [32])。ヒルベルト空間の内積を変更したときに最適復元フィルタにどのような影響を与えるかは山下・小川 [54] で検討されている。その結果として、異なる最適基準に基づいて構成された最適復元フィルタが、内積の選び方によって同等のものになる可能性があることを示している。

第6章以降では、観測過程に現れる作用素が真のものと微小に異なる場合、その差異が復元画像に及ぼす影響について考察する。第I部において画像観測および画像復元を一般のヒルベルト空間論を用いてモデル化し、種々の最適復元フィルタを導出した。第II部においては観測作用素として値域が閉集合であるコンパクト作用素を用いる。そのため、原画像空間と観測画像空間が共に有限次元ベクトル空間であることを仮定する。したがって、有限次元の実ヒルベルト空間として $\mathcal{H}_1 = \mathbf{R}^n, \mathcal{H}_2 = \mathbf{R}^m$ 、を用いることにより、画像観測および画像復元のモデルは、

$$\mathbf{g} = A\mathbf{f} + \mathbf{n}, \quad \mathbf{f} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{g}, \mathbf{n} \in \mathbf{R}^m,$$

$$\mathbf{f}_0 = B\mathbf{g}, \quad \mathbf{f}_0 \in \mathbf{R}^n,$$

と表される。ここで、 A, B はそれぞれ (m, n) 型および (n, m) 型行列である。いま、同一の観測過程に対して、 N 組 ($N \geq 1$) の原画像と観測画像の組 $(\mathbf{f}_i, \mathbf{g}_i), i = 1, \dots, N$ 、が与えられたとき、これらの画像の組から A, Q, R を推定することを考える。推定量 $\hat{A}, \hat{Q}, \hat{R}$ として一致性を満たすものを選べば、 $N \rightarrow \infty$ のとき (すなわち $\frac{1}{N} \rightarrow 0$ のとき) $\hat{A} \rightarrow A, \hat{Q} \rightarrow Q, \hat{R} \rightarrow R$ が成り立つ。このようにして A, Q, R を推定した後に、原画像が未知の観測画像を \mathbf{g} からの復元問題を想定する。これを以下のように定式化する。

原点を含む領域 $D \subset \mathbf{R}^k$ の上で定義された連続な行列関数 $A(\mathbf{s}), Q(\mathbf{s}), R(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in D$ が条件

$$A(\mathbf{0}) = A, Q(\mathbf{0}) = Q, R(\mathbf{0}) = R,$$

を満たすものとする。ただし、 (m, n) 型行列関数 $A(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x}))$ の連続性は $a_{ij}(\mathbf{x})$ を \mathbf{R}^{mn} の点とみなし、その点列の収束性によって定義する。

この $A(\mathbf{s}), Q(\mathbf{s}), R(\mathbf{s})$ から得られる最適復元フィルタ $B(\mathbf{s})$ による復元画像 $B(\mathbf{s})\mathbf{g}$ は、 $\mathbf{s} \rightarrow 0$ のとき、真の作用素 A, Q, R から得られる最適復元フィルタ B による復元画像 $B\mathbf{g}$ に収束するかが問題になる。

次章以降で一般逆フィルタおよび射影フィルタ族、パラメトリック射影フィルタ族についてこの問題を考察する。

第7章 摂動に対する射影フィルタ族の性質

7.1 はじめに

本章では、第7章での定式化のもとで、観測過程に表れる作用素の摂動が一般逆フィルタおよび射影フィルタ族に与える影響について考察する。第4で述べたように、一般逆フィルタおよび射影フィルタ族は M -最小の N -最小二乗解を与える作用素として統一的に表現できる。本章では M -最小の N -最小二乗解を与える作用素の摂動に対する性質を述べてから、それを個々の最適復元フィルタに適用する。まず、次の補題を示す。

補題 7.1.1. 行列 A と原点の近傍を含む領域 D で定義された連続な行列関数 $A(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in D$ がともに (m, n) 型で

$$A(\mathbf{s}) \rightarrow A, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

あるとき、次の (i), (ii) が成り立つ。

(i) 原点の近傍で

$$\text{rank}(A(\mathbf{s})) \geq \text{rank}(A).$$

(ii) 原点の近傍で $\text{rank}(A(\mathbf{s})) > \text{rank}(A)$ であれば

$$A^*(\mathbf{s})\mathbf{b}(\mathbf{s}) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

となる単位ベクトル $\mathbf{b}(\mathbf{s}) \in \text{ran}(A(\mathbf{s})) \cap \text{ran}(A)^\perp$ が存在する。

ここで、 $\text{rank}(A)$ は行列 A の階数を表す。すなわち、 $\text{rank}(A) = \dim(\text{ran}(A))$ である。

[証明]

$\text{rank}(A) = r$ とすると、行列 A の n 個の列ベクトルの中から r 個の一次独立なベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ を選ぶことができる。これらを持ちいて、

$$A_r = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r]$$

とする。さらに、 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ に対応する $A(\mathbf{s})$ の r 個の列ベクトル $\mathbf{a}_1(\mathbf{s}), \dots, \mathbf{a}_r(\mathbf{s})$ によって

$$A_r(\mathbf{s}) = [\mathbf{a}_1(\mathbf{s}), \dots, \mathbf{a}_r(\mathbf{s})],$$

とする。

((i) の証明)

ベクトル $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ が一次独立であることから、

$$\det(A_r A_r^*) \neq 0.$$

行列式の連続性から

$$\det(A_r(\mathbf{s}) A_r^*(\mathbf{s})) \rightarrow \det(A_r A_r^*) \neq 0, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}.$$

したがって、原点の近傍では $\det(A_r(\mathbf{s}) A_r^*(\mathbf{s})) \neq 0$ となり、原点の近傍で r 個の一次独立なベクトル $\mathbf{a}_1(\mathbf{s}), \dots, \mathbf{a}_r(\mathbf{s})$ が存在する。

((ii) の証明)

原点の近傍で単位ベクトル $\mathbf{b}(\mathbf{s}) \in \text{ran}(A(\mathbf{s})) \cap \text{ran}(A_r(\mathbf{s}))^\perp$ が存在する。したがって $\langle \mathbf{a}_j(\mathbf{s}), \mathbf{b}(\mathbf{s}) \rangle = 0$ 。ゆえに、 $1 \leq j \leq r$ に対して、

$$|\mathbf{a}_j^* \mathbf{b}(\mathbf{s})| \leq |\mathbf{a}_j^*(\mathbf{s}) \mathbf{b}(\mathbf{s})| + |(\mathbf{a}_j(\mathbf{s}) - \mathbf{a}_j)^* \mathbf{b}(\mathbf{s})| \rightarrow 0$$

が成り立つ。

□

補題 7.1.2 (Magnus and Neudecker[21]). 行列 A と原点の近傍を含む領域 D で定義された連続な行列関数 $A(\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in D$ がともに (m, n) 型であるとする.

$$\|A(\mathbf{s}) - A\| \rightarrow 0, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

のとき, 次の (i)~(iii) は同値である.

(i)

$$A^+(\mathbf{s}) \rightarrow A^+, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

(ii)

$$P_{\text{ran}(A(\mathbf{s}))} \rightarrow P_{\text{ran}(A)}, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

(iii) 原点の近傍で $\text{rank}(A(\mathbf{s})) = \text{rank}(A)$.

[証明]

((i) \Rightarrow (ii) の証明) 行列関数 $A(\mathbf{s})$ の原点での連続性から $\|A(\mathbf{s})\|$ は原点の近傍で有界であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} \|P_{\text{ran}(A(\mathbf{s}))} - P_{\text{ran}(A)}\| &= \|A(\mathbf{s})A^+(\mathbf{s}) - AA^+\| \\ &\leq \|A(\mathbf{s})\| \|A^+(\mathbf{s}) - A^+\| + \|A(\mathbf{s}) - A\| \|A^+\| \rightarrow 0, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}, \end{aligned}$$

である.

((ii) \Rightarrow (iii) の証明)

対偶を示す. 原点のいかなる近傍においても $\text{rank}(A(\mathbf{s})) \neq \text{rank}(A)$ とする. 補題 7.1.1 から $\text{rank}(A(\mathbf{s})) \geq \text{rank}(A)$ であるから,

$$\mathbf{a}(\mathbf{s}) \in \text{ran}(A(\mathbf{s})) \cap \text{ran}(A)^\perp,$$

なる単位ベクトル $\mathbf{a}(\mathbf{s}) \in \mathbf{R}^m$ が存在する.

$$\|(P_{\text{ran}(A(\mathbf{s}))} - P_{\text{ran}(A)})\mathbf{a}(\mathbf{s})\| = \|\mathbf{a}(\mathbf{s})\| = 1,$$

であるから、原点の近傍で $\|P_{\text{ran}(A(\mathbf{s}))} - P_{\text{ran}(A)}\| \geq 1$ となり、 $P_{\text{ran}(A(\mathbf{s}))}$ は $P_{\text{ran}(A)}$ には収束しない。

((iii) \Rightarrow (i) の証明)

任意の $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ に対して、 $A^+(\mathbf{s})$ の特異値 $\mu_j(\mathbf{s})$ と特異ベクトル $\mathbf{u}_j(\mathbf{s}), \mathbf{v}_j(\mathbf{s})$ を用いて、

$$A^+(\mathbf{s})\mathbf{b} = \sum_{j=1}^r \frac{1}{\mu_j(\mathbf{s})} (\mathbf{b}^* \mathbf{v}_j(\mathbf{s})) \mathbf{u}_j(\mathbf{s}).$$

ここで、 $\{\mathbf{v}_1(\mathbf{s}), \dots, \mathbf{v}_r(\mathbf{s})\}$ は部分空間 $\text{ran}(A(\mathbf{s}))$ の正規直交基底、 $\{\mathbf{u}_1(\mathbf{s}), \dots, \mathbf{u}_r(\mathbf{s})\}$ は部分空間 $\text{ker}(A(\mathbf{s}))^\perp$ の正規直交基底で、 $\mu_j(\mathbf{s}) > 0$ である。行列 A^+ に関しても同様に

$$A^+\mathbf{b} = \sum_{j=1}^r \frac{1}{\mu_j} (\mathbf{b}^* \mathbf{v}_j) \mathbf{u}_j.$$

とかける。ここで、 $r = \text{rank}(A) = \text{rank}(A(\mathbf{s}))$ である。条件 $A(\mathbf{s}) \rightarrow A, \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ から

$$\mu_j(\mathbf{s}) \rightarrow \mu_j.$$

$$\mathbf{v}_j(\mathbf{s}) \rightarrow \mathbf{v}_j.$$

$$\mathbf{u}_j(\mathbf{s}) \rightarrow \mathbf{u}_j.$$

が成り立つ [14]。したがって任意の $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ に対して

$$A^+(\mathbf{s})\mathbf{b} \rightarrow A^+\mathbf{b}, \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

である。

7.2 摂動に対する擬ノルム最小の最小二乗解を与える作用素の性質

第 3.6 節で述べたとおり, N -最小の M -最小二乗解を与える作用素 G の一般形は定理 3.6.3 より

$$\begin{aligned} G &= U^- A^* M^{1/2} V^+ M^{1/2} + (I - U^- U) W, \\ U &= N + A^* M A, \\ V &= M^{1/2} A U^- A^* M^{1/2}, \end{aligned}$$

である. 行列 G は一般逆と任意の作用素 W の選び方に任意性があるため, 一意には定まらない. しかし, 系 3.6.3 で述べたとおり, $\hat{x} \in \text{ran}(N + A^* M A)$ であるような N -最小の M -最小二乗解はこれらの選び方には依らずに一意に定まる. この場合, 行列 G は一般逆と W の選び方に依らず同一の解を与えることから, 一般逆として Moore-Penrose 一般逆行列をとり, また, $W = 0$ とする. したがって

$$\begin{aligned} G &= U^- A^* M^{1/2} V^+ M^{1/2}, \\ U &= N + A^* M A, \\ V &= M^{1/2} A U^- A^* M^{1/2}, \end{aligned} \tag{7.1}$$

である. これからは混乱がない限り行列関数の積 $A(\mathbf{s})B(\mathbf{s})C(\mathbf{s})$ を $(ABC)(\mathbf{s})$ のように表す.

定理 7.2.1 (今井他 [11]). 原点を含む領域 $D \subset \mathbf{R}^k$ 上で定義された連続な行列関数 $A(\mathbf{s}), M(\mathbf{s}), N(\mathbf{s})$ が条件

$$A(\mathbf{0}) = A, M(\mathbf{0}) = M, N(\mathbf{0}) = N,$$

を満たすとする. 行列 G を式 (7.1) で表される (n, m) 型行列, 行列関数 $G(\mathbf{s})$ を

$$G(\mathbf{s}) = (U^- A^* M^{1/2} V^+ M^{1/2})(\mathbf{s}),$$

$$U(\mathbf{s}) = N(\mathbf{s}) + (A^* M A)(\mathbf{s}),$$

$$V(\mathbf{s}) = (M^{1/2} A U^- A^* M^{1/2})(\mathbf{s}),$$

とする. このとき, 次の (i), (ii) は同値である.

(i)

$$G(\mathbf{s}) \rightarrow G, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

(ii) 原点の近傍で

$$\text{rank}((MA)(\mathbf{s})) = \text{rank}(MA), \tag{7.2}$$

かつ

$$(U^+ A^* M^{1/2})(\mathbf{s}) \rightarrow U^+ A^* M^{1/2}. \tag{7.3}$$

[証明]

((i)⇒(ii) の証明)

対偶を示す.

まず, 原点のいかなる近傍においても式 (7.2) が成り立たないとする. このとき, 補題 7.1.1(ii) から

$$(A^* M)(\mathbf{s})y(\mathbf{s}) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

となる単位ベクトル

$$\mathbf{y}(\mathbf{s}) \in \text{ran}((MA)(\mathbf{s})) \cap \ker(A^* M),$$

が存在する. 式 (7.1) から $\ker(G) \supset \ker(A^* M)$ が成り立つので,

$$G\mathbf{y}(\mathbf{s}) = \mathbf{0}.$$

一方、行列 $G(\mathbf{s})$ が方程式 $A(\mathbf{s})\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の $N(\mathbf{s})$ -最小の $M(\mathbf{s})$ -最小二乗解を与える行列であるから、系 3.6.1 により

$$(G^*A^*MA)(\mathbf{s}) = (MA)(\mathbf{s}),$$

を満たすことと、適当な $\mathbf{x}(\mathbf{s}) \in \mathbf{R}^n$ を用いて

$$\mathbf{y}(\mathbf{s}) = (MA)(\mathbf{s})\mathbf{x}(\mathbf{s}), \quad (7.4)$$

であることから、

$$(G^*A^*)(\mathbf{s})\mathbf{y}(\mathbf{s}) = \mathbf{y}(\mathbf{s}),$$

が成り立つ。したがって

$$\langle A^*(\mathbf{s})\mathbf{y}(\mathbf{s}), G(\mathbf{s})\mathbf{y}(\mathbf{s}) \rangle = \langle (G^*A^*)(\mathbf{s})\mathbf{y}(\mathbf{s}), \mathbf{y}(\mathbf{s}) \rangle = 1,$$

より、条件 (7.2) が $G(\mathbf{s}) \rightarrow G, \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ の必要条件であることがわかる。

次に条件 (7.2) は成り立つが条件 (7.3) は成り立たない場合を考える。性質

$$\text{rank}(MA) = \text{rank}(M^{1/2}A) = \text{rank}(A^*M^{1/2}),$$

と条件 (7.2) から、原点の近傍で

$$\text{rank}(A^*M^{1/2}) = \text{rank}(A^*M^{1/2}(\mathbf{s})),$$

が成り立つ。したがって補題 7.1.2 から

$$(M^{1/2}V^+)(\mathbf{s}) \rightarrow M^{1/2}V^+, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

を得る。また、条件 (7.3) が成り立たないので、原点の近傍で

$$(M^{1/2}AU^+)(\mathbf{s})\mathbf{x}(\mathbf{s}) \rightarrow \mathbf{x}_1,$$

$$M^{1/2}AU^+\mathbf{x}(\mathbf{s}) \rightarrow \mathbf{x}_2$$

かつ $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$ となる単位ベクトル $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s}) \in \mathbf{R}^n$ が存在する. もし, $M^{1/2}V^+$ が $\text{ran}(M^{1/2}A)$ 上で単射であれば,

$$\begin{aligned} & \| M^{1/2}V^+M^{1/2}AU^+\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s}) - (M^{1/2}V^+)(\boldsymbol{s})(M^{1/2}AU^+)(\boldsymbol{s})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s}) \| \\ & \geq \| M^{1/2}V^+\{M^{1/2}AU^+\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s}) - (M^{1/2}AU^+)(\boldsymbol{s})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s})\} \| \\ & \quad - \| (M^{1/2}V^+M^{1/2}AU^+)(\boldsymbol{s})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s}) - M^{1/2}V^+(M^{1/2}AU^+)(\boldsymbol{s})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s}) \|. \end{aligned}$$

から $G(\boldsymbol{s}) \neq G$ が示される. 実際,

$$\begin{aligned} \text{ran}(V) &= \text{ran}(M^{1/2}A), \\ A^*M^{1/2}V^+V &= A^*M^{1/2}, \end{aligned}$$

が成り立つので,

$$M^{1/2}V^+(V\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n.$$

とすると,

$$A^*M^{1/2}V^+V\boldsymbol{x} = A^*M^{1/2}\boldsymbol{x} = 0,$$

から

$$\boldsymbol{x} \in \ker(A^*M^{1/2}) = \text{ran}(M^{1/2}A)^\perp = \text{ran}(V)^\perp = \ker(V),$$

となり, $V\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ から $M^{1/2}V^+$ が $\text{ran}(M^{1/2}A)$ 上での単射となる. 以上により (i) \Rightarrow (ii) が示された.

((ii) \Rightarrow (i) の証明) 性質

$$\begin{aligned} \text{ran}(MA) &= \text{ran}(M^{1/2}A), \\ \text{ran}(V) &= \text{ran}(M^{1/2}A), \end{aligned}$$

から, 原点の近傍で

$$\text{rank}(V) = \text{rank}(V(\boldsymbol{s})),$$

が成り立つ。したがって、条件 (7.2) と補題 7.1.2 より

$$V^+(\mathbf{s}) \rightarrow V^+,$$

を得る。さらに条件 (7.3) により、

$$G(\mathbf{s}) \rightarrow G, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

が成り立つ。 □

系 7.2.1 (今井他 [11]). 行列関数 $A(\mathbf{s}), M(\mathbf{s}), N(\mathbf{s}), G(\mathbf{s})$ および行列 A, M, N, G を定理 7.2.1 と同様のものとする。行列 N が正則であれば次の条件 (i) と (ii) は同値である。

(i) 原点の近傍で

$$\text{rank}((MA)(\mathbf{s})) = \text{rank}(MA).$$

(ii)

$$G(\mathbf{s}) \rightarrow G, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}.$$

[証明]

行列 N の正則性と行列関数 $N(\mathbf{s})$ の連続性から $N(\mathbf{s})$ は原点の近傍で正則である。したがって

$$\text{ran}(U(\mathbf{s})) = \text{ran}((A^*M)(\mathbf{s})) \oplus \text{ran}(N(\mathbf{s})),$$

より、 $U(\mathbf{s})$ は原点の近傍で正則であり、

$$U^+(\mathbf{s}) = U^{-1}(\mathbf{s}) \rightarrow U^+ = U^{-1}, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

が成り立つ。ゆえに、 N が正則であれば定理 7.2.1 の条件 (ii) は満たされる。よって条件 (7.2) が $G(\mathbf{s}) \rightarrow G, \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ であるための必要十分条件である。 □

7.3 摂動に対する一般逆フィルタおよび射影フィルタ族の性質

定理 7.2.1 および系 7.2.1 から、真のものから微小に異なる作用素に基づく一般逆フィルタおよび射影フィルタ族の性質を導くことができる。ただし、一般逆フィルタおよび射影フィルタ族は

$$B_{GIF} = A^+, \quad (7.5)$$

$$B_{PFs} = R_F V^+ R_F A^* U^+, \quad (7.6)$$

$$U = Q + AR_F^2 A^*,$$

$$V = R_F A^* U^+ R_F,$$

とする。射影フィルタ族については

$$\left\{ \begin{array}{l} R_F = I_n \text{ のとき射影フィルタ,} \\ R_F = P_K \text{ のとき部分射影フィルタ,} \\ R_F = R^{1/2} \text{ のとき平均射影フィルタ} \end{array} \right.$$

を表す。これらは射影フィルタ族の一般形である式 (4.1), (4.3), (4.4) において一般逆として Moore-Penrose 一般逆行列を用い、 $W = 0$ としたものである。射影フィルタ族の場合、画像観測モデル (6.1) のもとでは、観測画像 \mathbf{g} は $\text{ran}(U) = \text{ran}(AR_F) \oplus \text{ran}(Q)$ の元であるから、定理 4.3.1, 定理 4.4.1, 定理 4.5.1 で示したように、復元画像は一般逆および作用素 W の選び方によらない。したがって、射影フィルタ族として特に式 (7.6) としてよい。

射影フィルタ族は方程式 $A^* \mathbf{x} = \mathbf{b}$ の Q -最小の R_F^2 -最小二乗解を与える作用素であることから次の定理を得る。

定理 7.3.1. 行列 A, R_F, Q をそれぞれ (m, n) 型, (n, n) 型, (m, m) 型の行列、原点を含む領域 $D \subset \mathbf{R}^k$ で定義された行列関数 $A(\mathbf{s}), R_F(\mathbf{s}), Q(\mathbf{s})$ をそれぞれ行列 A, R_F, Q と同

じ型で、

$$A(\mathbf{0}) = A, R_F(\mathbf{0}) = R_F, Q(\mathbf{0}) = Q,$$

をみたすものとする。さらに、行列関数 $A(\mathbf{s}), R_F(\mathbf{s}), Q(\mathbf{s})$ に基づく一般逆フィルタおよび射影フィルタ族を

$$B_{GIF}(\mathbf{s}) = A^+(\mathbf{s}),$$

$$B_{PFs}(\mathbf{s}) = (R_F V^+ R_F A^* U^+)(\mathbf{s}),$$

$$U(\mathbf{s}) = Q(\mathbf{s}) + (A R_F^2 A^*)(\mathbf{s}),$$

$$V(\mathbf{s}) = (R_F A^* U^+ R_F)(\mathbf{s}),$$

とする。このとき、次の (i), (ii) が成り立つ。

(i) 一般逆フィルタに関して

$$B_{GIF}(\mathbf{s}) \rightarrow B_{GIF}, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

となる必要十分条件は、原点の近傍で

$$\text{rank}(A(\mathbf{s})) = \text{rank}(A),$$

が成り立つことである。

(ii) 射影フィルタ族に関して

$$B_{PFs}(\mathbf{s}) \rightarrow B_{PFs}, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

となる必要十分条件は、原点の近傍で

$$\text{rank}((R_F A^*)(\mathbf{s})) = \text{rank}(R_F A^*), \quad (7.7)$$

かつ

$$(R_F A^* U^+)(\mathbf{s}) \rightarrow R_F A^* U^+, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}, \quad (7.8)$$

が成り立つことである。

[証明]

(i) は補題 7.1.2 より明らかである. (ii) は射影フィルタ族が $A^* \mathbf{x} = \mathbf{b}$ の Q -最小の R_F^2 -最小二乗解を与える作用素であることと

$$\text{rank}(R_F A^*) = \text{rank}(R_F^2 A^*),$$

が成り立つことに注意すれば定理 7.2.1 を用いて示される. \square

定理 7.3.1 から, 推定された作用素 $\hat{A}, \hat{R}, \hat{Q}$ が真の作用素 A, R, Q に十分に近い場合でも, $\hat{A}, \hat{R}, \hat{Q}$ に基づく一般逆フィルタおよび射影フィルタ族 $\hat{B}_{GIF}, \hat{B}_{PF_s}$ は B_{GIF}, B_{PF_s} に近いとは限らないことを示している.

定理 7.3.1 と補題 7.1.2 から次の系を得る.

系 7.3.1. 原点の近傍で

$$\text{rank}((R_F A^*)(\mathbf{s})) = \text{rank}(R_F A^*),$$

$$\text{rank}(U(\mathbf{s})) = \text{rank}(U),$$

が共に成り立つとき,

$$B_{PF_s}(\mathbf{s}) \rightarrow B_{PF_s}, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

である.

現実の画像復元においては雑音の相関作用素 (分散共分散行列) は正則であることが多い. この場合には次の系が成り立つ.

系 7.3.2 (今井他 [10]). 行列 Q が正則である場合, 次の (i) と (ii) は同値である.

(i) 原点の近傍で

$$\text{rank}((R_F A^*)(\mathbf{s})) = \text{rank}(R_F A^*),$$

(ii)

$$B_{PF_s}(\mathbf{s}) \rightarrow B_{PF_s}, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}.$$

7.4 数値例

本節では摂動が射影フィルタ族に与える影響を数値例によって検証する. 以下の数値実験では, 最適復元フィルタとして射影フィルタを用いる. したがって, 定理 4.3.1 から

$$B_{PF} = V^+ A^* U^+,$$

$$U = Q + A A^*,$$

$$V = A^* U^+ A,$$

である. 本章以降の数値例で用いられる $(16, 16)$ 型行列 C_n を次のように定義する.

$$C_n = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{16} \\ c_{16} & c_1 & \cdots & c_{15} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{bmatrix},$$

ここで,

$$c_i = \begin{cases} \frac{1}{n}, & i = 1, \dots, n, \\ 0, & i = n + 1, \dots, 16, \end{cases}$$

とする.

以下の数値実験では, 真の観測作用素は C_4 であるものとする. この観測作用素は縦方向の 4 画素を平均するものであり, 縦方向の流れ画像が観測画像として得られる. また, 雑音の相関作用素は $C_2 C_2^*$ とする.

実験 7.1. 実験 7.1 においては

$$\begin{cases} A_1(s) = C_4 + s(C_8 - C_4), s \in \mathbf{R}, \\ Q_1(s) = Q, \end{cases}$$

とする. 実数 s が 0 に近づくとき, 行列 $A_1(s)$ も A に近づく. また,

$$\text{ran}(C_8) \subset \text{ran}(C_4),$$

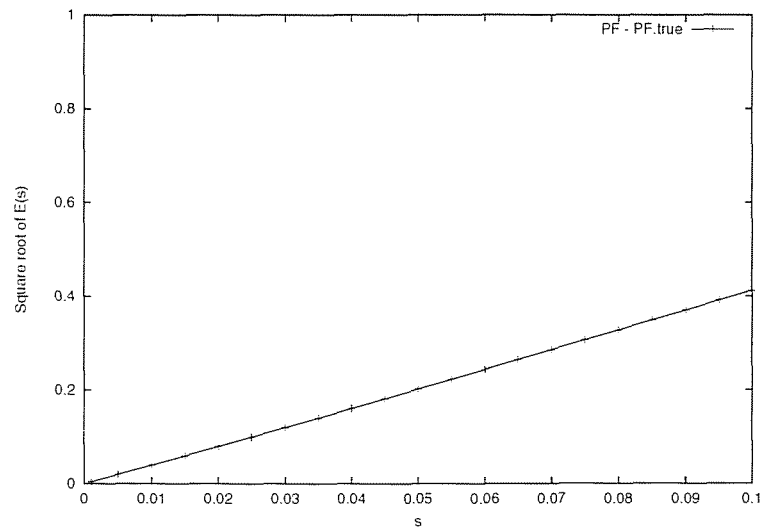


図 7.1: 摂動が射影フィルタに与える影響 (実験 7.1)

から、原点の近傍で、

$$\text{rank}(A_1(s)) = \text{rank}(A),$$

が成り立つので、系 7.3.1 から

$$B_{PF}(s) \rightarrow B_{PF}, \quad s \rightarrow 0.$$

が成り立つ。

摂動の影響を

$$E(s) = \text{tr}(B_{PF}(s) - B_{PF})(B_{PF}(s) - B_{PF})^* / (16 \times 16),$$

で評価する。

図 7.1 の横軸は s 、縦軸は $\sqrt{E(s)}$ の値を表す。このグラフから、原点の近傍では $E(s)$ の値はほぼ s^2 のオーダーであることがわかる。

実験 7.2. 実験 7.2 においては、

$$\begin{cases} A_2(s) = C_4 + s(C_3 - C_4), s \in \mathbf{R}, \\ Q_2(s) = Q. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_3(s) = C_4 + sD, s \in \mathbf{R}, \\ Q_3(s) = (Q + s(C_6 - C_2))(Q + s(C_6 - C_2))^*, \end{cases}$$

とする。ただし、

$$D = (d_{ij}),$$

で

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & i = 1, j = 5, 6, 7, 8, \\ 0, & \text{その他,} \end{cases}$$

である。

実数 s が 0 に近づくとき、行列 $A_2(s)$, $A_3(s)$ とともに A に近づく。しかし、 $A_2(s)$ は定理 7.3.1 の条件式 (7.8) を満たすが、条件式 (7.7) を満たさない。また、 $A_3(s)$ は定理 7.3.1 の条件式 (7.7) を満たすが、条件式 (7.8) を満たさない。したがって、いずれの場合も s が 0 に近づいても $B_{PF}(s)$ は B_{PF} には近付かない。このことを実験 7.1 と同様に

$$E(s) = \text{tr}(B_{PF}(s) - B_{PF})(B_{PF}(s) - B_{PF})^*/(16 \times 16),$$

の振舞いによって確かめる。

図 7.2 の横軸は s 、縦軸は $\sqrt{E(s)}$ の値を表す。このグラフからもわかるとおり、原点の近傍においてどちらの場合も $B_{PF}(s)$ と B_{PF} の値は大きく異なっており、 $B_{PF}(s) \rightarrow B_{PF}$ とはならない。

縦軸を $1/\sqrt{E(s)}$ としたグラフを描くことにより、原点の近傍では $E(s)$ の値はほぼ s^{-2} のオーダーであることがわかる。

実験 7.3. ここでは実際の画像を用いて、観測作用素の微小な差異が復元画像に与える影響についての数値実験を行なう。

図 7.3 が実験に用いる原画像、図 7.4 は観測作用素 $A = C_4$ と相関作用素 $C_2 C_2^*$ をもつ加法雑音による観測画像である。それぞれ、縦、横とも 16 画素の 256 階調モノクローム画像である。

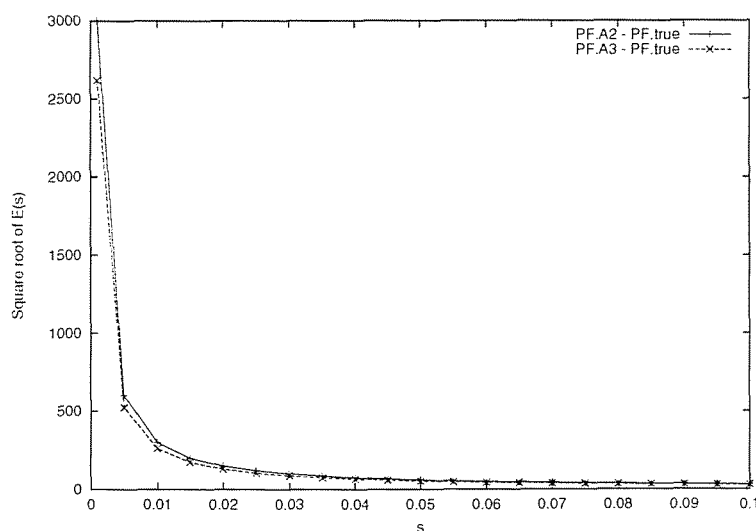


図 7.2: 摂動が射影フィルタに与える影響 (実験 7.2)

最適復元フィルタとして、真の観測作用素および雑音の相関作用素に基づく射影フィルタ B_{PF} を用いて復元した復元画像が図 7.5 である。

次に、真の観測作用素と微小にことなる行列を観測作用素として構成したパラメトリック射影フィルタによる画像復元を行なう。

図 7.6 は実験 7.1 で用いた $A_1(0.01), Q_1(0.01)$ に基づく射影フィルタによる復元画像である。図 7.5 と図 7.6 を比べてみるとわかるとおり、二つの復元画像にはほとんど差がない。

一方、図 7.7 は実験 7.2 で用いた $A_2(0.01), Q_2(0.01)$ に基づく射影フィルタによる復元画像である。二つの復元画像、図 7.5 と図 7.7 は大きく異なっていることが確かめられる。この実験において、 s の値を更に小さくすると、復元画像の差は更に大きくなる。

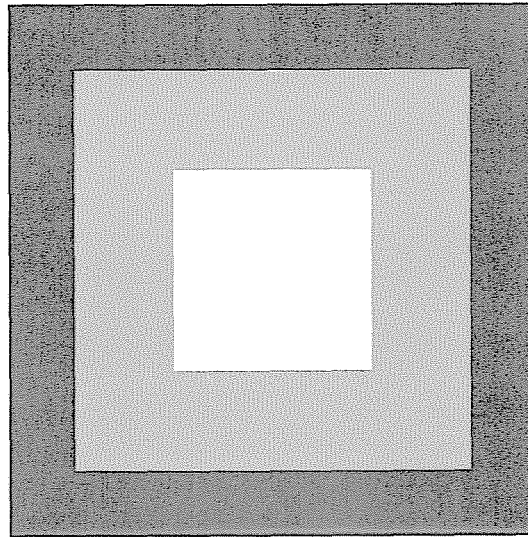


図 7.3: 原画像 (16 × 16 ピクセル, 256 階調)

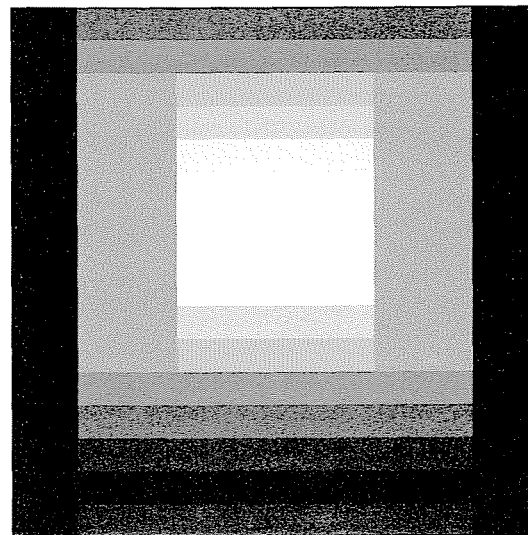
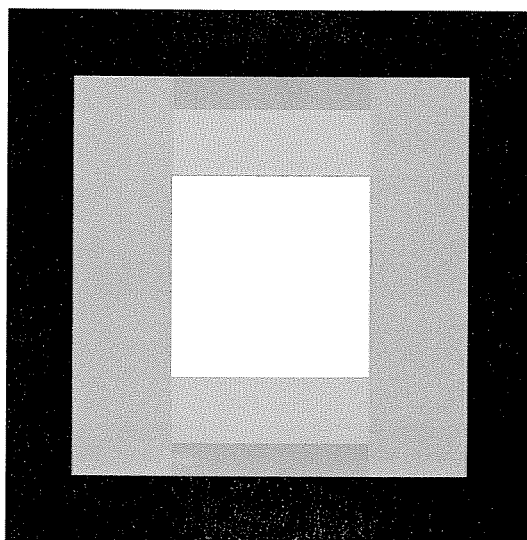
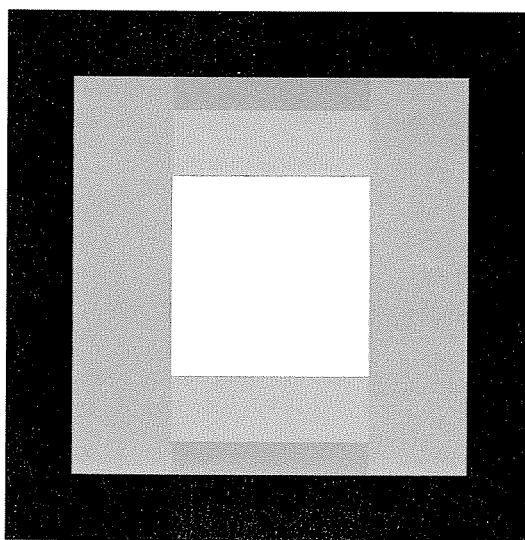


図 7.4: 観測画像 (16 × 16 ピクセル, 256 階調)

図 7.5: 射影フィルタ B_{PF} による復元画像図 7.6: $A_1(0.01)$ に基づく射影フィルタ \hat{B}_{PF} による復元画像

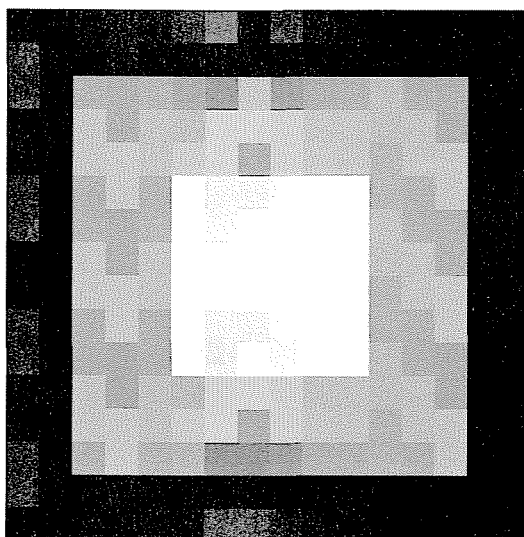


図 7.7: $A_2(0.01)$ に基づく射影フィルタ \hat{B}_{PF} による復元画像

第8章 摂動に対するパラメトリック フィルタの性質

8.1 はじめに

本章では第5章で述べたパラメトリックフィルタ族の摂動に対する性質について述べる。以下で、パラメトリックフィルタ族をパラメトリック一般逆フィルタとパラメトリック射影フィルタに分けて考察する。

ここで、第7章、第8章を通じて用いられる基本的な補題を示す。

補題 8.1.1. 行列 A, B が共に (m, m) 型の非負定値行列とすると、実数 $0 < \delta \leq 1$ に対して

$$\|(A + \delta B)^+\| \leq \frac{1}{\delta} \|(A + B)^+\|,$$

である。

[証明]

任意のベクトル $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ に対して

$$\mathbf{x}^*(A + \delta B)\mathbf{x} = \delta \mathbf{x}^*(A + B)\mathbf{x} - (1 - \delta)\mathbf{x}^*A\mathbf{x} \geq \delta \mathbf{x}^*(A + B)\mathbf{x},$$

が成り立つ。

$$\ker(A + \delta B) = \ker(A + B) = \ker(A) \cap \ker(B),$$

から、

$$\mathbf{x}^*(A + \delta B)\mathbf{x} \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}^*(A + B)\mathbf{x} \neq 0$$

であるから, $\|A\|$ が行列 A の 0 でない最小特異値であることに注意すると,

$$\|(A + \delta B)^+\| \leq \frac{1}{\delta} \|(A + B)^+\|,$$

である. □

補題 8.1.2. 行列 A が (m, m) 型の非負定値行列であるとき,

$$\|(A + I_m)^{-1}\| \leq 1,$$

である. ここで, I_m は (m, m) 型単位行列である.

[証明]

$$\mathbf{x}^*(A + I_m)\mathbf{x} \geq \mathbf{x}^*\mathbf{x}$$

から $(A + I_m)$ の最小特異値は 1 より大きい. したがって,

$$\|(A + I_m)^{-1}\| \leq 1,$$

である. □

8.2 摂動に対するパラメトリック一般逆フィルタの性質

第 5.2 節で述べたとおり, パラメトリック一般逆フィルタは観測作用素のみで構成される. その摂動に対する性質は次の補題から導かれる.

補題 8.2.1 (Imai et al.[13]). 行列 A, \tilde{A} を共に (m, n) 型で, $\|\tilde{A} - A\| < \varepsilon$ を満たすものとする. 実数 $0 < \delta \leq 1$ に対して

$$\|(\tilde{A}^* \tilde{A} + \delta I_n)^{-1} \tilde{A}^* - (A^* A + \delta I_n)^{-1} A^*\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} + 2 \frac{\varepsilon}{\delta^2} \|A\|^2 + o\left(\frac{\varepsilon}{\delta^2}\right), \quad \frac{\varepsilon}{\delta} \rightarrow 0.$$

である.

[証明]

$$(\hat{A}^* \hat{A} + \delta I_n) - (A^* A + \delta I_n) = \Delta A,$$

ただし

$$\Delta A = A^*(\hat{A} - A) + (\hat{A} - A)^* A + (\hat{A} - A)^*(\hat{A} - A),$$

とおくと,

$$\|\Delta A\| \leq 2 \|A\| \varepsilon + \varepsilon^2,$$

である。したがって

$$\begin{aligned} & \|(\hat{A}^* \hat{A} + \delta I_n)^{-1} \hat{A}^* - (A^* A + \delta I_n)^{-1} A^*\| \\ & \leq \| (A^* A + \delta I_n + \Delta A)^{-1} A^* - (A^* A + \delta I_n)^{-1} A^* \| \\ & \quad + \| (A^* A + \delta I_n + \Delta A)^{-1} \| \| (\hat{A} - A)^* \| \\ & \leq \| (A^* A + \delta I_n)^{-1} \| \| \hat{A} - A \| + \| (A^* A + \delta I_n)^{-1} \|^2 \| \Delta A \| \| \hat{A} - A \| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{\delta} + 2 \frac{\varepsilon}{\delta^2} \|A\|^2 + o\left(\frac{\varepsilon}{\delta^2}\right), \quad \frac{\varepsilon}{\delta} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

観測作用素 A および $A(\mathbf{s})$ に基づくパラメトリック一般逆フィルタをそれぞれ

$$B_{PGIF}(\gamma) = (A^* A + \gamma I_n)^{-1} A^*,$$

$$B_{PGIF}(\gamma, \mathbf{s}) = (A(\mathbf{s})^* A(\mathbf{s}) + \gamma I_n)^{-1} A(\mathbf{s})^*$$

とするとき, 次の定理が成り立つ.

定理 8.2.1. 行列 A を (m, n) 型, 行列関数 $A(\mathbf{s})$ を原点の近傍を含む領域 $D \in \mathbf{R}^k$ で定義された (m, n) 型行列関数で $A(\mathbf{0}) = A$ を満たすものとするとき, 実数 $0 < \gamma \leq 1$ に対して,

$$B_{PGIF}(\gamma, \mathbf{s}) \rightarrow B_{PGIF}(\gamma), \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

である.

[証明]

条件から

$$\|A(\mathbf{s}) - A\| \rightarrow 0$$

であるから, 補題 8.2.1 において, 実数 $0 < \gamma \leq 1$ を固定することにより

$$B_{PGIF}(\gamma, \mathbf{s}) \rightarrow B_{PGIF}(\gamma), \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

を得る. □

したがって, 推定された観測作用素 \hat{A} が真のものに十分に近ければ, \hat{A} に基づくパラメトリック一般逆フィルタによる復元画像は真の観測作用素に基づくパラメトリック射影フィルタによるものに十分に近いといえる.

8.3 摂動に対するパラメトリック射影フィルタ族の性質

本節ではパラメトリック射影フィルタは

$$B_{PPFs}(\gamma) = R_F^2 A^* U(\gamma)^+, \tag{8.1}$$

$$U(\gamma) = AR_F A^* + \gamma Q$$

とし,

$$\begin{cases} R_F = P_{\text{ran}(A^*)} \text{ のときパラメトリック射影フィルタ,} \\ R_F = P_{\mathcal{K}} \text{ のときパラメトリック部分射影フィルタ,} \\ R_F = R^{1/2} \text{ のときパラメトリックウィーナフィルタ} \end{cases}$$

を表す. これらはパラメトリック射影フィルタ族の一般形である式 (5.2), (5.4), (5.6) において一般逆として Moore-Penrose 一般逆行列を用い, $W = 0$ としたものである. 第 7.3 節でも述べたとおり, 画像観測モデル (6.1) のもとでは, 観測画像 \mathbf{g} は $\text{ran}(U(\gamma)) = \text{ran}(AR_F) \oplus \text{ran}(Q)$ の元であるから, 定理 5.3.1 および定理 5.4.1, 定理 5.5.1 で示したように, 復元画像は一般逆および作用素 W の選び方によらない. したがって, パラメトリック射影フィルタ族として特に式 (8.1) としてよい.

原点の近傍を含む領域 $D \subset \mathbf{R}^k$ で定義された連続な行列関数 $A(\mathbf{s}), R_F(\mathbf{s}), Q(\mathbf{s}), \mathbf{s} \in D$ をそれぞれ (m, n) 型, (n, n) 型, (m, m) 型で $A(\mathbf{0}) = A, R_F(\mathbf{0}) = R_F, Q(\mathbf{0}) = Q$ を満たすものとし,

$$U(\gamma, \mathbf{s}) = (AR_F^2 A^*)(\mathbf{s}) + \gamma Q(\mathbf{s}).$$

とおく. また, $U(\gamma), U(\gamma, \mathbf{s})$ がそれぞれ

$$U(\gamma) = \sum_{\alpha}^{N_1} \lambda_{\alpha} \phi_{\alpha} \phi_{\alpha}^*, \quad \lambda_{\alpha} > 0, \phi_{\alpha} \in \mathbf{R}^m, \quad (8.2)$$

$$U(\gamma, \mathbf{s}) = \sum_{\alpha}^{N_2} \lambda_{\alpha}(\mathbf{s}) \phi_{\alpha}(\mathbf{s}) \phi_{\alpha}^*(\mathbf{s}), \quad \lambda_{\alpha}(\mathbf{s}) > 0, \phi_{\alpha}(\mathbf{s}) \in \mathbf{R}^m, \quad (8.3)$$

と展開できるとする. ここで, $N_1 = \text{rank}(U(\gamma)), N_2 = \text{rank}(U(\gamma, \mathbf{s}))$ であり, N_2 の値は $\mathbf{s} \in D$ に依存して決まる. この展開に関して以下の仮定をおく.

仮定 1. $\lambda_{\alpha}(\mathbf{s}), \phi_{\alpha}(\mathbf{s})$ は D 上で連続

仮定 2. $\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ のとき

$$\lambda_{\alpha}(\mathbf{s}) \rightarrow \lambda_{\alpha},$$

$$\phi_{\alpha}(\mathbf{s}) \rightarrow \phi_{\alpha}.$$

これらの仮定の下で, 次の定理が成り立つ.

定理 8.3.1. 行列 $U(\gamma), U(\gamma, \mathbf{s})$ が式 (8.2), (8.3) のように展開され, 仮定 1, 2 が成り立つとき, 次の (i) と (ii) は同値である.

(i)

$$\| B_{PPFs}(\gamma, \mathbf{s}) \rightarrow B_{PPFs}(\gamma) \| \rightarrow 0, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

(ii) $\lambda_{\alpha}(\mathbf{s}) \rightarrow 0, \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}$ なる $N_1 + 1 \leq \alpha \leq N_2$ に対して

$$\frac{1}{\lambda_{\alpha}(\mathbf{s})} (R_F^2 A^*)(\mathbf{s}) \phi_{\alpha}(\mathbf{s}) \rightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}.$$

ここで,

$$\begin{aligned} B_{PPFs}(\gamma, \mathbf{s}) &= (R_F^2 A^*)(\mathbf{s})U(\gamma, \mathbf{s})^+, \\ U(\gamma, \mathbf{s}) &= (AR_P^2 A^*)(\mathbf{s}) + \gamma Q(\mathbf{s}), \end{aligned}$$

である.

[証明]

行列 $U(\gamma)$ の N_1 個の固有ベクトル $\{\phi_1, \dots, \phi_{N_1}\}$ に適当な $(m - N_1)$ 個の単位ベクトル $\{\phi_{N_1+1}, \dots, \phi_m\}$ を加えて \mathbf{R}^m の正規直交基底を構成することができる.

まず (i) \Rightarrow (ii) の対偶を示す.

条件 (ii) が満たされないとする. ある $\epsilon > 0$ と $\alpha_1 \in \{N_1 + 1, \dots, N_2\}$ が存在して, 任意の $\mathbf{s} \in D$ に対して

$$\lambda_{\alpha_1}(\mathbf{s}) \rightarrow 0$$

かつ

$$\left\| \frac{1}{\lambda_{\alpha_1}(\mathbf{s})} (R_F^2 A^*)(\mathbf{s}) \phi_{\alpha_1}(\mathbf{s}) \right\| > \epsilon,$$

が成り立つ. したがって

$$\begin{aligned} \| B_{PPFs}(\gamma, \mathbf{s}) - B_{PPFs}(\gamma) \| &\geq \| B_{PPFs}(\gamma, \mathbf{s}) \phi_{\alpha_1}(\mathbf{s}) - B_{PPFs}(\gamma) \phi_{\alpha_1}(\mathbf{s}) \| \\ &\geq \left\| \frac{1}{\lambda_{\alpha_1}(\mathbf{s})} (R_F^2 A^*)(\mathbf{s}) \phi_{\alpha_1}(\mathbf{s}) \right\| - \left\| \sum_{\alpha=1}^{N_1} \frac{1}{\lambda_{\alpha}(\mathbf{s})} (R_F^2 A^*)(\phi_{\alpha_1}^*(\mathbf{s}) \phi_{\alpha}) \phi_{\alpha} \right\|. \end{aligned}$$

を得る. 各 $\alpha = 1, \dots, N_1$ に対して

$$\phi_{\alpha_1}^*(\mathbf{s}) \phi_{\alpha} \rightarrow 0, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

より,

$$\| B_{PPFs}(\gamma, \mathbf{s}) - B_{PPFs}(\gamma) \| \geq \epsilon$$

である.

次に (ii) \Rightarrow (i) を示す.

任意の $\mathbf{g} = \sum_{i=1}^m a_i \phi_i \in \mathbf{R}^m$, に対して

$$\begin{aligned} \| B(\lambda, \mathbf{s})\mathbf{g} - B(\lambda)\mathbf{g} \| &= \| (R_F^2 A^*)(\mathbf{s})U(\gamma, \mathbf{s})^+ \mathbf{g} - R_F^2 A^* U(\gamma)^+ \mathbf{g} \| \\ &= \| \sum_{i=1}^m a_i \left\{ \sum_{\alpha=1}^{N_2} \frac{1}{\lambda_\alpha(\mathbf{s})} (R_F^2 A^*)(\mathbf{s}) \phi_\alpha(\mathbf{s}) \phi_\alpha^*(\mathbf{s}) \phi_i - \sum_{\alpha=1}^{N_1} \frac{1}{\lambda_\alpha} R_F^2 A^* \phi_\alpha \phi_\alpha^* \phi_i \right\} \| \\ &\leq \| \sum_{i=1}^m a_i \sum_{\alpha=1}^{N_1} \left\{ \frac{1}{\lambda_\alpha(\mathbf{s})} (R_F^2 A^*)(\mathbf{s}) (\phi_\alpha^*(\mathbf{s}) \phi_i) \phi_\alpha(\mathbf{s}) - \frac{1}{\lambda_\alpha} R_F^2 A^* (\phi_\alpha^* \phi_i) \phi_\alpha \right\} \| \\ &\quad + \| \sum_{i=1}^m a_i \left\{ \sum_{\alpha=N_1+1}^{N_2} \frac{1}{\lambda_\alpha(\mathbf{s})} (R_F^2 A^*)(\mathbf{s}) \phi_\alpha(\mathbf{s}) \right\} \| \rightarrow 0, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0}, \end{aligned}$$

から,

$$\| B_{PPF_s}(\gamma, \mathbf{s}) - B_{PPF_s}(\gamma) \| \rightarrow 0, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

である. □

定理 8.3.1 から, 推定された作用素 $\hat{A}, \hat{R}, \hat{Q}$ が真の作用素 A, R, Q に十分に近い場合でも, $\hat{A}, \hat{R}, \hat{Q}$ に基づくパラメトリック射影フィルタ族 \hat{B}_{PPF_s} は B_{PPF_s} に近いとは限らないことを示している. 定理 8.3.1 の条件 (ii) は

$$U(\gamma, \mathbf{s})^+ \rightarrow U(\gamma)^+, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

であれば成り立つ. したがって, 補題 7.1.2 から次の系を得る.

系 8.3.1. 原点の近傍を含む領域 $D \in \mathbf{R}^m$ において

$$\text{rank}(U(\gamma, \mathbf{s})) = \text{rank}(U(\gamma)),$$

が成り立つ場合,

$$\| B_{PPF_s}(\gamma, \mathbf{s}) \rightarrow B_{PPF_s}(\gamma) \| \rightarrow 0, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

である.

現実の画像復元においては雑音の相関作用素 (分散共分散行列) は正則であることが多い. この場合には原点の近傍で $U(\gamma, \mathbf{s})$ も正則である. したがって系 8.3.1 から次の系が成り立つ.

系 8.3.2. 行列 Q が正則である場合,

$$\| B_{PPFs}(\gamma, \mathbf{s}) - B_{PPFs}(\gamma) \| \rightarrow 0, \quad \mathbf{s} \rightarrow \mathbf{0},$$

である.

8.4 数値例

本節では摂動がパラメトリック射影フィルタ族に与える影響を数値例によって検証する. 数値実験では, 最適復元フィルタとしてパラメトリック射影フィルタを用いる. したがって, 定理 5.3.1 から

$$B_{PPF}(\gamma) = A^*U(\gamma)^+,$$

$$U(\gamma) = \gamma Q + AA^*,$$

である. 実験 8.1, 8.2, 8.3 においては, 真の観測作用素は式 (7.9) で定義された (16, 16) 型巡回行列 C_4 であるものとする. この観測作用素は縦方向の 4 画素を平均するものであり, 縦方向の流れ画像が観測画像として得られる. また, 雑音の相関作用素は $C_{16}C_{16}^*$ とする.

実験 8.1. 実験 8.1 においては,

$$\begin{cases} A_1(s) &= C_4 + s(C_8 - C_4), s \in \mathbf{R}, \\ Q(s) &= Q, \end{cases}$$

とする. 実数 s が 0 に近づくとき, 行列 $A_1(s)$ も A に近づく. また,

$$\text{ran}(C_{16}) \subset \text{ran}(C_8) \subset \text{ran}(C_4),$$

から, $U(\gamma, s) = A(s)A(s)^* + \gamma Q(s)$ とすると,

$$\text{ran}(U(\gamma, s)) = \text{ran}(C_4) \oplus \text{ran}(C_{16}) = \text{ran}(U(\gamma)),$$

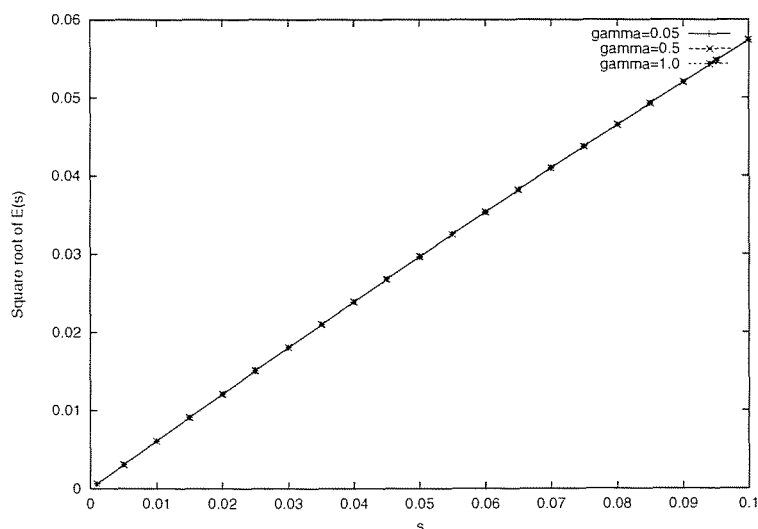


図 8.1: 摂動がパラメトリック射影フィルタに与える影響 (実験 8.1)

が成り立つので、原点の近傍で

$$\text{rank}(U(\gamma, s)) = \text{rank}(U(\gamma))$$

である。したがって、この場合には系 8.3.1 から

$$B_{PPF}(\gamma, s) \rightarrow B_{PPF}(\gamma), \quad s \rightarrow 0,$$

が成り立つ。

摂動の影響を

$$E(\gamma, s) = \text{tr}(B_{PPF}(\gamma, s) - B_{PPF}(\gamma))(B_{PPF}(\gamma, s) - B_{PPF}(\gamma))^* / (16 \times 16),$$

で評価する。

図 8.1 の横軸は s 、縦軸は $\sqrt{E(\gamma, s)}$ の値を表す。また、実数 γ として 0.05, 0.5, 1.0 の三種類を用いた ($E(\gamma, s)$ の値が γ を変えてもそれほど変わらないためグラフが重なっている)。このグラフから、原点の近傍では $E(\gamma, s)$ の値はほぼ s^2 のオーダーであることがわかる。

実験 8.2. 実験 8.2 においては,

$$\begin{cases} A_2(s) = C_4 + s(C_5 - C_4), s \in \mathbf{R}, \\ Q(s) = Q. \end{cases}$$

とする. 実数 s が 0 に近付くとき, 行列 $A_2(s)$ も A に近付くが, 定理 8.3.1 の条件 (ii) は満たさない.

したがって, この場合には s が 0 に近付いても $B_{PPF}(\gamma, s)$ は $B_{PPF}(\gamma)$ には近付かない. このことを実験 8.1 と同様に

$$E(\gamma, s) = \text{tr}(B_{PPF}(\gamma, s) - B_{PPF}(\gamma))(B_{PPF}(\gamma, s) - B_{PPF}(\gamma))^* / (16 \times 16),$$

の振舞いによって確かめる.

図 8.2 の横軸は s , 縦軸は $\sqrt{E(\gamma, s)}$ の値を表す. また, 実数 γ として実験 8.1 と同様に 0.05, 0.5, 1.0 の三種類を用いた ($E(\gamma, s)$ の値が γ を変えてもそれほど変わらないためグラフが重なっている). このグラフからもわかるとおり, 原点の近傍において $B_{PPF}(\gamma, s)$ と $B_{PPF}(\gamma)$ の値は大きく異なっており, $B_{PPF}(\gamma, s) \rightarrow B_{PPF}(\gamma)$ とはならない.

縦軸を $1/\sqrt{E(\gamma, s)}$ としたグラフを描くことにより, 原点の近傍では $E(\gamma, s)$ の値はほぼ s^{-2} のオーダーであることがわかる.

実験 8.3. ここでは実際の画像を用いて, 観測作用素の微小な差異が復元画像に与える影響についての数値実験を行なう.

図 8.3 が実験に用いる原画像, 図 8.4 は観測作用素 $A = C_4$ と相関作用素 $C_{16}C_{16}^*$ をもつ加法雑音による観測画像である. それぞれ, 縦, 横とも 16 画素の 256 階調モノクローム画像である.

最適復元フィルタとして, 真の観測作用素および雑音の相関作用素に基づく $\gamma = 0.05$ のパラメトリック射影フィルタ B_{PPF} を用いて復元した復元画像が図 8.5 である.

次に, 真の観測作用素と微小にことなる行列を観測作用素として構成したパラメトリック射影フィルタによる画像復元を行なう.

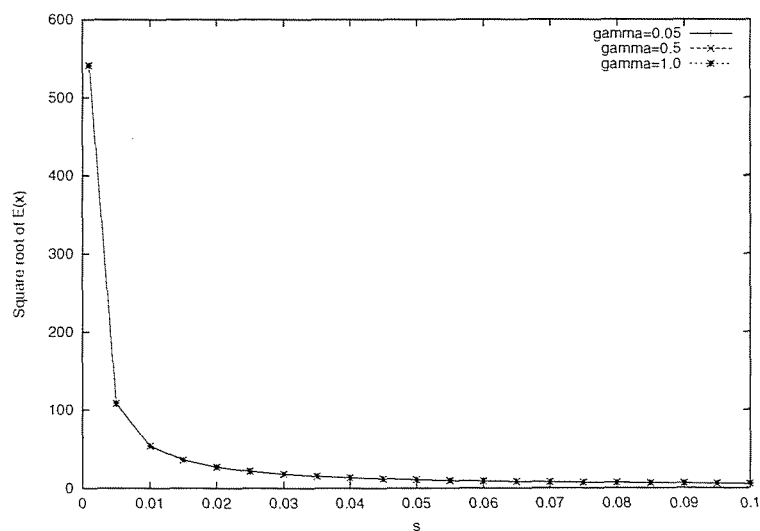


図 8.2: 摂動がパラメトリック射影フィルタに与える影響 (実験 8.2)

図 8.6 は実験 8.1 で用いた $A_1(0.01)$ に基づく $\gamma = 0.05$ パラメトリック射影フィルタによる復元画像である。図 8.5 と図 8.6 を比べてみるとわかるとおり、二つの復元画像にはほとんど差がない。

一方、図 8.7 は実験 8.2 で用いた $A_2(0.01)$ に基づく $\gamma = 0.05$ パラメトリック射影フィルタによる復元画像である。二つの復元画像、図 8.6 と図 8.7 は大きく異なっていることが確かめられる。

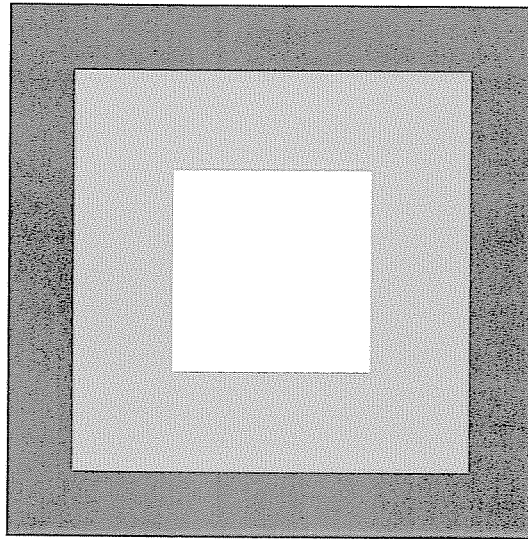


図 8.3: 原画像 (16 × 16 ピクセル, 256 階調)

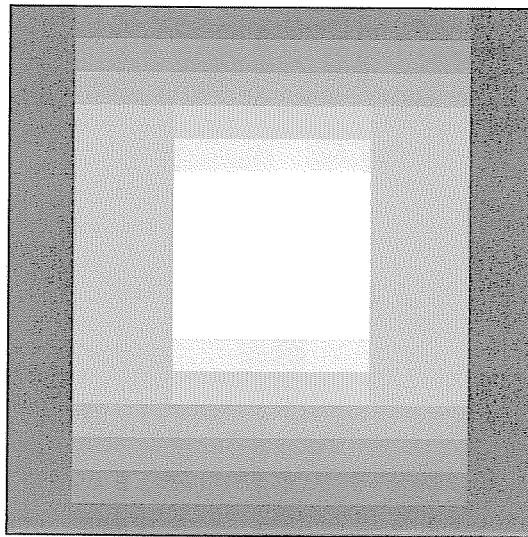


図 8.4: 観測画像 (16 × 16 ピクセル, 256 階調)

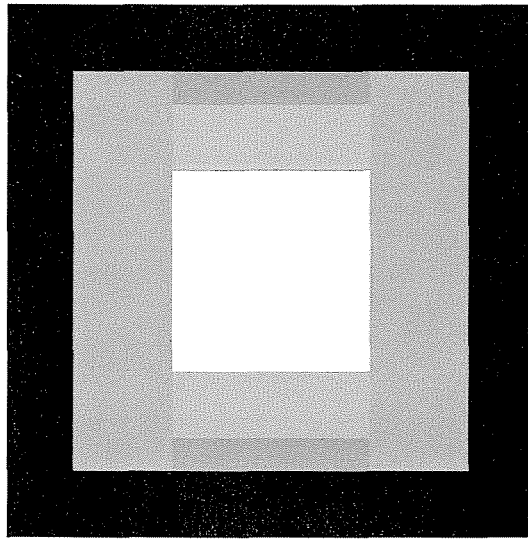


図 8.5: パラメトリック射影フィルタ $B_{PPF}(0.05)$ による復元画像

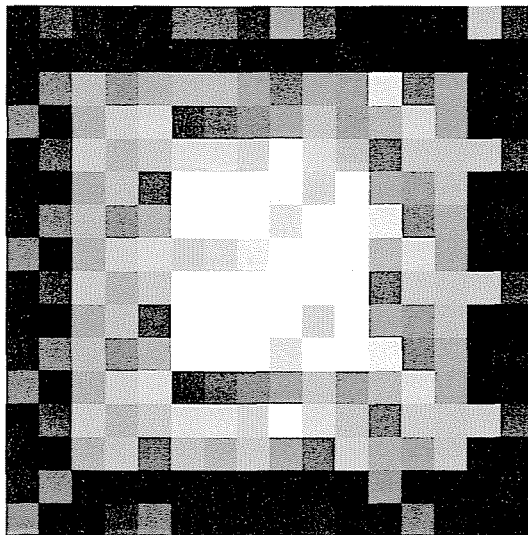


図 8.6: $A_1(0.01)$ に基づくパラメトリック射影フィルタ $\hat{B}_{PPF}(0.05)$ による復元画像

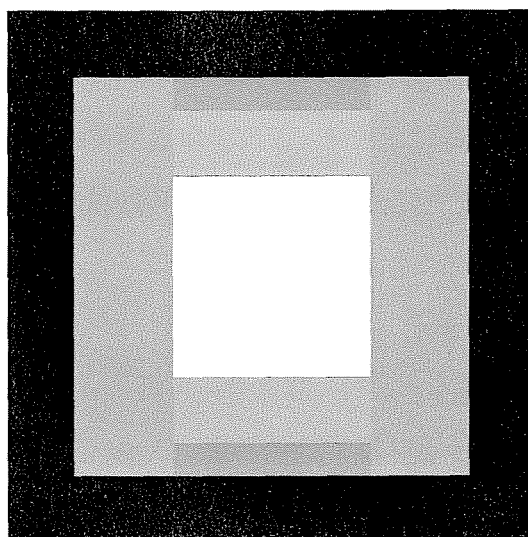


図 8.7: $A_2(0.01)$ に基づくパラメトリック射影フィルタ $\hat{B}_{PPF}(0.05)$ による復元画像

第9章 正則化パラメトリック射影フィルタ族

9.1 はじめに

第7章および第8章で述べたとおり、多くの最適復元フィルタは推定された観測作用素などが真のものとわずかに異なる場合にも、大きな影響を受ける可能性がある。実際の画像復元においてはこれらの作用素が経験的な知識や事前の実験に基づいて決められることが多いことを考えると、この性質は決して望ましいものではない。

さらに、この性質が計算機を用いた画像復元を行なう場合にも悪影響を及ぼすことが考えられる。一般逆フィルタ、射影フィルタ族、パラメトリック射影フィルタ族を構成するためには行列の Moore-Penrose 一般逆行列を求める必要がある。Moore-Penrose 一般逆行列を数値的に求めるためには特異値分解を用いてすべての (0 でない) 特異値と特異ベクトルを求めなければならない。特異値が 0 であるか否かの判断は、行列の大きさなどを考慮して適切な閾値を設定し、その閾値以下であれば 0 であるとみなすことが普通である。しかし、画像復元においては観測作用素は大規模で疎な行列になることが多く、0 でない最小の特異値は極めて小さい値になることも少なくない。一般逆フィルタによる復元を考えると、そのような場合は、画像観測モデルを真の観測作用素 A に近い作用素 \hat{A} によって、

$$g = \hat{A}f, f \in \mathcal{H}_1, g \in \mathcal{H}_2.$$

とみなしていることと同様であり、一般逆フィルタに及ぼす影響が大きいことが考えられる。したがって、作用素の微小な摂動に対して安定な最適復元フィルタの構成は、計算機内部の数値誤差に対する頑健性の観点からも重要である。

9.2 正則化

正則化手法を画像復元に採り入れた研究は数多い (Poggio et al.[39], 近藤・熱田 [18, 19], Katsaggelos et al.[15], Thompson et al.[47], 横矢・坂上 [59], 中田他 [25] など). また, パラメトリック射影フィルタ族も射影フィルタ族の正則化とみることができる.

(m, n) 型行列 A に対して, 汎関数

$$J(\mathbf{x}) = \| A\mathbf{x} - \mathbf{b} \|^2,$$

を最小にするベクトル \mathbf{x} を求める問題の代わりに, 汎関数汎関数

$$J_\delta(\mathbf{x}) = \| A\mathbf{x} - \mathbf{b} \|^2 + \delta \| \mathbf{x} \|^2,$$

を考える方法を Tikhonov 正則化という (Tikhonov and Arsenin[48], 田中他 [45]).

汎関数 $J(\mathbf{x})$ および $J_\delta(\mathbf{x})$ を最小にする \mathbf{x} および \mathbf{x}_δ はそれぞれ

$$\mathbf{x} = A^+\mathbf{b},$$

$$\mathbf{x}_\delta = (A^*A + \delta I_n)^{-1}A^*\mathbf{b},$$

である. この \mathbf{x}_δ を $A^+\mathbf{b}$ の Tikhonov 近似という. 本章で述べる正則化パラメトリック射影フィルタ族もこの正則化を用いている. Tikhonov 近似の精度を評価する補題を示す.

補題 9.2.1 (Imai et al.[13]). 行列 A を (m, n) 型. 実数 $0 < \delta \leq 1$ とする. このとき,

$$\| (A^*A + \delta I_n)^{-1}A^* - A^+ \| \leq 2\delta \| A^+ \| \| (AA^*)^+ \|.$$

[証明]

$$A^* = A^*(AA^+),$$

$$A^+ = A^*(AA^*)^+.$$

から

$$\begin{aligned}
(A^*A + \delta I_n)^{-1}A^* &= (A^*A + \delta I_n)^{-1}A^*(AA^+)^+ \\
&= (A^*A + \delta I_n)^{-1}(A^*A + \delta I_n)A^+ - \delta(A^*A + \delta I_n)^{-1}A^+ \\
&= A^+ - \delta(A^*A + \delta I_n)^{-1}A^+ \\
&= A^+ - \delta(A^*A + \delta I_n)^{-1}A^*(AA^*)^+ \\
&= A^+ - \delta(A^*A + \delta I_n)^{-1}A^*AA^+(AA^*)^+ \\
&= A^+ - \delta(A^*A + \delta I_n)^{-1}(A^*A + \delta I_n)A^+(AA^*)^+ + \delta^2(A^*A + \delta I_n)^{-1}A^+(AA^*)^+ \\
&= A^+ - \delta A^+(AA^*)^+ + \delta^2(A^*A + \delta I_n)^{-1}A^+(AA^*)^+,
\end{aligned}$$

である. したがって補題 8.1.2 から

$$\begin{aligned}
&\| (A^*A + \delta I_n)^{-1}A^* - A^+ \| \\
&\leq \delta \| A^+ \| \| (AA^*)^+ \| + \delta^2 \| (A^*A + \delta I_n)^{-1} \| \| A^+ \| \| (AA^*)^+ \| \\
&\leq \delta \| A^+ \| \| (AA^*)^+ \| + \delta \| (A^*A + I_n)^{-1} \| \| A^+ \| \| (AA^*)^+ \| \\
&\leq 2\delta \| A^+ \| \| (AA^*)^+ \|.
\end{aligned}$$

□

補題 8.2.1 と補題 9.2.1 から次の定理を得る.

定理 9.2.1. 行列 A, \hat{A} を共に (m, n) 型で, $\| \hat{A} - A \| < \varepsilon$ を満たすものとする. 実数 $0 < \delta \leq 1$ に対して

$$\| (\hat{A}^*\hat{A} + \delta I_n)^{-1}\hat{A}^* - A^+ \| \leq \frac{\varepsilon}{\delta} + 2\frac{\varepsilon}{\delta^2} \| A \|^2 + 2\delta \| A^+ \| \| (AA^*)^+ \| + o\left(\frac{\varepsilon}{\delta^2}\right).$$

系 9.2.1. 関数 $\gamma(\varepsilon)$ が $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき条件

(i)

$$\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0,$$

(ii)

$$\frac{\varepsilon}{\gamma^2(\varepsilon)} \rightarrow 0,$$

を満たすとき, $\|\hat{A} - A\| < \varepsilon$ であれば

$$\|\hat{B}_{PGIF}(\gamma(\varepsilon)) - B_{GIF}\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

である. ただし,

$$\hat{B}_{PGIF}(\gamma) = (\hat{A}^* \hat{A} + \gamma I_n)^{-1} \hat{A}^*,$$

である.

この系によれば, 関数 $\gamma(\varepsilon)$ が適当な条件を満たせば, 推定された観測作用素 \hat{A} によるパラメトリック一般逆フィルタが真の観測作用素 A による一般逆フィルタの十分に良い近似になることがわかる. しかし, $\|\hat{A} - A\|$ の値は一般に未知であり, 最適なパラメータ γ を決定する方法はない. 個々の問題に応じて交差確認法 (Cross Validation) などを用いて適当な γ を選択するのが一般的である.

9.3 正則化パラメトリック射影フィルタ族

正則化パラメトリック射影フィルタ族はパラメトリック射影フィルタ族の Moore-Penrose 一般逆行列を Tikhonov 近似で置き換えたものである. したがって一般形は

$$\begin{aligned} B_{RPPFs}(\gamma, \delta) &= B_{RPPFs}^0(\gamma, \delta) + W(I_m - U(\gamma)T(\gamma, \delta)), \\ B_{RPPFs}^0(\gamma, \delta) &= R_F^2 A^* T(\gamma, \delta), \\ U(\gamma) &= AR_F^2 A^* + \gamma Q, \\ T(\gamma, \delta) &= \{U(\gamma)^2 + \delta I_m\}^{-1} U(\gamma), \end{aligned} \tag{9.1}$$

で, $0 < \gamma, \delta \leq 1$, W は任意の (n, m) 型行列である. 一般形 (9.1) において, (n, n) 型行列

R_F を以下のように選ぶことにより最適復元フィルタを得る.

$$\begin{cases} R_F = P_{\text{ran}(A^*)} \text{ のとき正則化パラメトリック射影フィルタ,} \\ R_F = P_{\kappa} \text{ のとき正則化パラメトリック部分射影フィルタ,} \\ R_F = R^{1/2} \text{ のとき正則化パラメトリックウィーナフィルタ.} \end{cases}$$

行列 $\hat{A}, \hat{R}_F, \hat{Q}$ をそれぞれ (m, n) 型, (n, n) 型, (m, m) 型とし,

$$\max(\|\hat{A} - A\|, \|\hat{R}_F - R_F\|, \|\hat{Q} - Q\|) = \varepsilon,$$

とする. さらに, 式 (9.1) において A, R_F, Q をそれぞれ $\hat{A}, \hat{R}_F, \hat{Q}$ に置き換えたものを $\hat{T}(\gamma, \delta), \hat{U}(\gamma), \hat{B}_{RPPFs}^0(\gamma, \delta), \hat{B}_{RPPFs}(\gamma, \delta)$ とおく. 以下で, 正則化パラメトリック射影フィルタ族 $\hat{B}_{RPPFs}(\gamma, \delta)$ と射影フィルタ族 B_{PFs} , パラメトリック射影フィルタ族 $B_{PPFs}(\gamma)$ との関係について述べる. まず次の補題を示す.

補題 9.3.1. 実数 $0 < \gamma, \delta \leq 1$ に対して

$$\max(\|\hat{A} - A\|, \|\hat{R}_F - R_F\|, \|\hat{Q} - Q\|) = \varepsilon, \tag{9.2}$$

であれば

$$\|\hat{T}(\gamma, \delta) - U(\gamma)^+\| \leq M_1 \frac{\varepsilon}{\delta} + M_2 \frac{\varepsilon}{\delta^2} + M_3 \frac{\delta}{\gamma^3} + o\left(\frac{\varepsilon}{\delta^2}\right), \quad \frac{\varepsilon}{\delta} \rightarrow 0,$$

が成り立つ. ここで,

$$M_1 = 2 \|R_F\| \|A\| + 1,$$

$$M_2 = 4 \|U\| \|R_F\| \|A\| + 2 \|U\|^2,$$

$$M_3 = 2 \|U^+\|^2$$

である.

[証明]

式(9.2)と

$$\begin{aligned}\Delta U(\gamma) &= \tilde{U}(\gamma) - U(\gamma) = (\tilde{A}\tilde{R}_F^2\tilde{A}^* - AR_F^2A^*) + (\tilde{Q} - Q) \\ &= (\tilde{A}\tilde{R}_F - AR_F^2)(\tilde{A}\tilde{R}_F - AR_F^2)^* + AR_F(\tilde{A}\tilde{R}_F - AR_F^2)^* \\ &\quad + (\tilde{A}\tilde{R}_F - AR_F^2)(AR_F)^* + (\tilde{Q} - Q)\end{aligned}$$

から,

$$\|\Delta U(\gamma)\| = \|\tilde{U}(\gamma) - U(\gamma)\| \leq \varepsilon^2 + 2\varepsilon \|R_F\| \|A\| + \varepsilon,$$

である. また, 補題 8.1.1 から

$$\|U(\gamma)^+\| = \|(AR_F^2A^* + \gamma Q)^+\| \leq \frac{1}{\gamma} \|(AR_F^2A^* + Q)^+\| = \frac{1}{\gamma} \|U^+\|,$$

であるので, 定理 9.2.1 を用いると,

$$\begin{aligned}\|\hat{T}(\gamma, \delta) - U(\gamma)^+\| &= \|(\hat{U}^2(\gamma) + \delta I_m)^{-1}\hat{U} - U(\gamma)^+\| \\ &\leq \frac{\|\Delta U(\gamma)\|}{\delta} + 2\frac{\|\Delta U(\gamma)\|}{\delta^2} \|U(\gamma)\|^2 + 2\delta \|U(\gamma)^+\| \| (U(\gamma)^2)^+ \| + o\left(\frac{\varepsilon}{\delta^2}\right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{\delta} (2\|R_F\| \|A\| + \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\delta^2} (4\|R_F\| \|A\| + 2\varepsilon) \|U\|^2 \\ &\quad + \frac{\delta}{\gamma^3} (2\|U^+\|^3) + o\left(\frac{\varepsilon}{\delta^2}\right), \quad \frac{\varepsilon}{\delta} \rightarrow 0.\end{aligned}$$

を得る. □

補題 9.3.1 は, 適当なパラメータ δ によって $U(\gamma)^+$ は $\hat{T}(\gamma, \delta)$ によって近似できることを示している. この補題から次の補題を得る. これは正則化パラメトリック射影フィルタ族 $B_{RPPF}(\gamma, \delta)$ の第 2 項 $W(I_m - U(\gamma)\hat{T}(\gamma, \delta))$ の収束に用いられる.

補題 9.3.2. 実数 $0 < \gamma \leq 1$ に対して 関数 $\delta(\varepsilon)$ が $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき,

(i)

$$\delta(\varepsilon) \rightarrow 0,$$

(ii)

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \rightarrow 0,$$

を満たせば,

$$\hat{U}(\gamma)\hat{T}(\gamma, \delta(\varepsilon)) \rightarrow U(\gamma)U(\gamma)^+ = UU^+.$$

[証明]

補題 8.2.1 と補題 9.3.1 から条件

$$\begin{aligned} & \| \hat{U}(\gamma)\hat{T}(\gamma, \delta(\varepsilon)) - U(\gamma)U(\gamma)^+ \| \\ & \leq \| U(\gamma) \| \| \hat{T}(\gamma, \delta(\varepsilon)) - U(\gamma)^+ \| + \| \hat{U}(\gamma) - U(\gamma) \| \| \hat{T}(\gamma, \delta(\varepsilon)) - T(\gamma, \delta(\varepsilon)) \| \\ & \quad + \| \hat{U}(\gamma) - U(\gamma) \| \| T(\gamma, \delta(\varepsilon)) \| \\ & \leq \| U \| \| \hat{T}(\gamma, \delta(\varepsilon)) - U(\gamma)^+ \| + (\varepsilon^2 + 2\varepsilon \| R_F \| \| A \| + \varepsilon) \| \hat{T}(\gamma, \delta(\varepsilon)) - T(\gamma, \delta(\varepsilon)) \| \\ & \quad + (\varepsilon^2 + 2\varepsilon \| R_F \| \| A \| + \varepsilon) \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \| U \| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

を得る. □

定理 9.3.1 (Imai et al.). 実数 $0 < \gamma \leq 1$ に対して 関数 $\delta(\varepsilon)$ が $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき,

(i)

$$\delta(\varepsilon) \rightarrow 0,$$

(ii)

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \rightarrow 0,$$

を満たせば,

$$\| \hat{B}_{RPPFs}(\gamma, \delta(\varepsilon)) - B_{PPFs}(\gamma) \| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

である. ただし,

$$\varepsilon = \max(\| \hat{R}_F \hat{A}^* - R_F A^* \|, \| \hat{Q} - Q \|, \| \hat{R}_F - R_F \|).$$

[証明]

補題 9.3.2 から条件 (i), (ii) の下では

$$W(I_m - \tilde{U}(\gamma)\tilde{T}(\gamma, \delta(\varepsilon))) \rightarrow W(I_m - U(\gamma)U(\gamma)^+), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

であるから, 式 (9.1) の第 2 項の収束

$$\dot{B}_{RPPFs}^0(\gamma, \delta(\varepsilon)) = \dot{R}_F^2 \dot{A}^* \dot{T}(\gamma, \delta(\varepsilon)) \rightarrow B_{RPPFs}^0(\gamma) = R_F^2 A^* U(\gamma)^+$$

を示せばよい. まず,

$$\begin{aligned} \|\dot{R}_F^2 \dot{A}^* - R_F^2 A^*\| &\leq \|(\dot{R}_F - R_F)(\dot{R}_F \dot{A}^* - R_F A^*)\| \\ &\quad + \|(\dot{R}_F - R_F)R_F A^*\| + \|R_F(\dot{R}_F \dot{A}^* - R_F A^*)\| \\ &\leq \varepsilon^2 + (\|R_F\| + \|R_F A^*\|)\varepsilon \end{aligned}$$

から,

$$\dot{R}_F^2 \dot{A}^* \rightarrow R_F^2 A^*, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

を得る. これと補題 9.2.1 より, 条件 (i), (ii) の下で

$$\begin{aligned} \|\dot{B}_{RPPFs}^0(\gamma, \delta(\varepsilon)) - B_{RPPFs}^0(\gamma)\| &\leq \|(\dot{R}_F^2 \dot{A}^* - R_F^2 A^*)(\dot{T}(\gamma, \delta(\varepsilon)) - U(\gamma)^+)\| \\ &\quad + \|R_F^2 A^*(\dot{T}(\gamma, \delta(\varepsilon)) - U(\gamma)^+)\| \\ &\quad + \|(\dot{R}_F^2 \dot{A}^* - R_F^2 A^*)U(\gamma)^+\| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

である. □

正則化パラメトリック射影フィルタ族と射影フィルタ族との関係は以下の定理により得られる.

定理 9.3.2. 関数 $\gamma(\varepsilon), \delta(\varepsilon)$ が $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき

(i)

$$\gamma(\varepsilon) \rightarrow 0,$$

(ii)

$$\delta(\varepsilon) \rightarrow 0,$$

(iii)

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \rightarrow 0,$$

(iv)

$$\frac{\delta(\varepsilon)}{\gamma^3(\varepsilon)} \rightarrow 0,$$

を満たせば,

$$\| \dot{B}_{RPPFs}(\gamma(\varepsilon), \delta(\varepsilon)) - B_{PFs} \| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

である。ただし,

$$\varepsilon = \max(\| \dot{R}_F \dot{A}^* - R_F A^* \|, \| \dot{Q} - Q \|, \| \dot{R}_F - R_F \|).$$

[証明]

条件 (i), (ii), (iii), (iv) が満たされるとき, 定理 9.3.1 より,

$$\| \dot{B}_{RPPFs}^0(\gamma(\varepsilon), \delta(\varepsilon)) - B_{PPFs}^0(\gamma(\varepsilon)) \| \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

である。したがって, これらの条件の下で,

$$\begin{aligned} \| \dot{B}_{RPPFs}^0(\gamma(\varepsilon), \delta(\varepsilon)) - B_{PFs}^0 \| &\leq \| \dot{B}_{RPPFs}^0(\gamma(\varepsilon), \delta(\varepsilon)) - B_{PPFs}^0(\gamma(\varepsilon)) \| \\ &\quad + \| B_{PPFs}^0(\gamma(\varepsilon)) - B_{PFs} \| \rightarrow 0 \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

が成り立つ。

この定理によれば, 関数 $\gamma(\varepsilon), \delta(\varepsilon)$ が条件 (i)~(iv) をみたせば $\dot{A}, \dot{R}_F, \dot{Q}$ に基づく正則化パラメトリック射影フィルタ族による復元画像 $\dot{B}_{RPPFs} \mathbf{g}$ は真の作用素 A, R_F, Q に基づく射影フィルタ族による復元画像 $B_{RPPFs} \mathbf{g}$ に十分に近いものになることを示している。これらの条件を満たす関数として, たとえば

$$\gamma(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{10}}, \quad \delta(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{3}},$$

がある。しかし、 ε の値は一般に未知であり、実際の画像復元において最適なパラメータ γ, δ を決定することは困難である。

9.4 数値例

本節では正則化パラメトリック射影フィルタ族の摂動に性質を数値例によって検証する。数値実験では、最適復元フィルタとして射影フィルタ B_{PF} 、パラメトリック射影フィルタ B_{PPF} 、正則化パラメトリック射影フィルタ B_{RPPF} を用いる。これらのフィルタはしたがって、定理5.3.1から

$$\begin{aligned} B_{PF} &= V^+ A^* U^+, \\ B_{PPF}(\gamma) &= A^* U(\gamma)^+, \\ B_{RPPF} &= A^* T(\gamma, \delta), \\ V &= A^* U^+ A, \\ U &= A A^* + Q, \\ U(\gamma) &= \gamma Q + A A^*, \\ T(\gamma, \delta) &= (U(\gamma)^2 + \delta I_m)^{-1} U(\gamma), \end{aligned}$$

である。実験9.1, 9.2, 9.3においては、真の観測作用素は式(7.9)で定義された(16,16)型巡回行列 C_4 、雑音の相関作用素は $C_2 C_2^*$ であるものとする。この観測作用素は縦方向の4画素を平均するものであり、縦方向の流れ画像が観測画像として得られる。

また、摂動を与えた作用素を

$$\begin{cases} A(s) &= C_4 + s(C_3 - C_4), \\ Q(s) &= C_2 C_2^*, s \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

とし、これらの作用素に基づく射影フィルタ、パラメトリック射影フィルタ、正則化パラメトリック射影フィルタをそれぞれ \hat{B}_{PF} 、 $\hat{B}_{PPF}(\gamma)$ 、 $\hat{B}_{RPPF}(\gamma, \delta)$ とする。

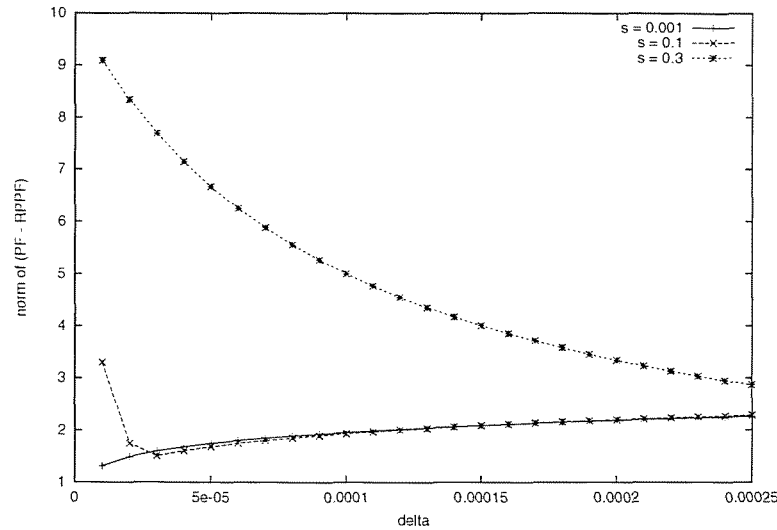


図 9.1: 正則化射影フィルタと射影フィルタ

実験 9.1. ここでは、正則化パラメトリック射影フィルタの $\gamma = \delta = 0$ の近傍における振舞いについての実験を行なう。パラメータ γ, δ が定理 9.3.1 および定理 9.3.2 の条件を満たせば、 \hat{B}_{RPPF} は $B_{PPF}(\gamma)$ と B_{PF} に近づくはずである。実数 s として 0.001, 0.1, 0.3 の三種類について実験を行なった。

図 9.1 は定理 9.3.2 の条件 (iv) を満たすパラメータとして $\gamma = \delta^{1/4}$ を用いた。図の横軸は δ 、縦軸は正則化パラメトリック射影フィルタと射影フィルタの差 $\|\hat{B}_{RPPF}(\delta^{1/4}, \delta) - B_{PF}\|$ の値を表す。

図 9.2 の横軸は s 、縦軸は正則化パラメトリック射影フィルタとパラメトリック射影フィルタの差 $\|\hat{B}_{RPPF}(0.01, \delta) - B_{PPF}(0.01)\|$ の値を表す。

実数 $s = 0.001$ の場合は δ の値が小さくなるにしたがって正則化パラメトリック射影フィルタは射影フィルタ、パラメトリック射影フィルタのいずれにも近づく。しかし、 $s = 0.1$ の場合は $\delta = 0$ の近傍では差は逆に増えている。また、 $s = 0.3$ の場合には実験の δ の範囲では単調増加している。これらの場合には $\varepsilon = s \|C_3 - C_4\|$ の値が大きいために $\frac{\varepsilon}{\delta^2}$ の値が無視できないためであると考えられる。

実験 9.2. ここでは、実数 s の原点の近傍での射影フィルタ、パラメトリック射影フィル

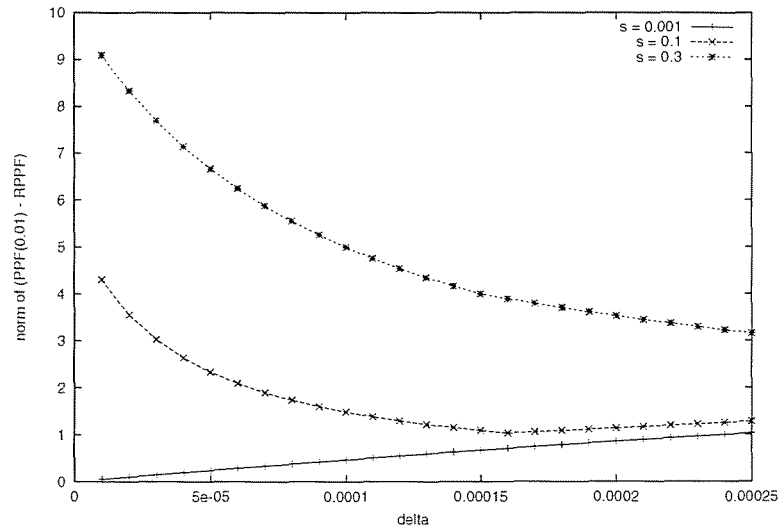


図 9.2: 正則化パラメトリック射影フィルタとパラメトリック射影フィルタ

タ, 正則化パラメトリック射影フィルタの振舞いに関する実験を行なう.

まず, 実数 s の原点の近傍での $\hat{B}_{RPPF}(\gamma, \delta)$ と B_{PF} の差および \hat{B}_{PF} と B_{PF} の差を示す.

図 9.3 の横軸は s , 縦軸は真の作用素に基づく射影フィルタからの差を表す. 正則化パラメトリック射影フィルタのパラメータは $\gamma = 0.01, \delta = 0.00001$ とした. このグラフから, 原点の近傍では B_{PF} と \hat{B}_{PF} の差は増えているのに対して B_{PF} と $\hat{B}_{RPPF}(0.01, 0.00001)$ の差はそれほど大きくないことがわかる. これは正則化パラメトリック射影フィルタが作用素の摂動に対して射影フィルタの安定した近似であることを示している.

次に, 実数 s の原点の近傍での $\hat{B}_{RPPF}(\gamma, \delta)$ と $B_{PPF}(\delta)$ の差および $\hat{B}_{PF}(\delta)$ と $B_{PPF}(\delta)$ の差を示す.

図 9.4 の横軸は s , 縦軸は真の作用素に基づくパラメトリック射影フィルタからの差を表す. パラメトリック射影フィルタおよび正則化パラメトリック射影フィルタのパラメータは $\gamma = 0.01, \delta = 0.00001$ とした. このグラフから, 原点の近傍では $\hat{B}_{PPF}(0.01)$ と $B_{PPF}(0.01)$ の差は増えているのに対して $\hat{B}_{RPPF}(0.01, 0.00001)$ と $B_{PPF}(0.01)$ の差はそれほど大きくないことがわかる. これは正則化パラメトリック射影フィルタが作用

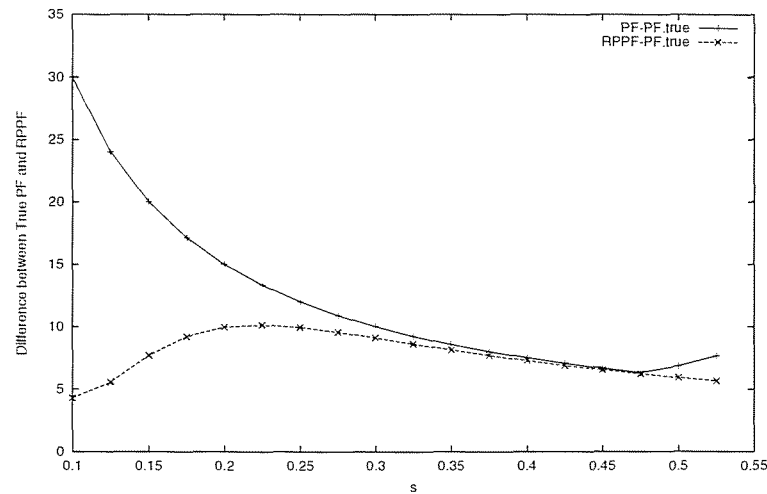


図 9.3: 正則化パラメトリック射影フィルタと射影フィルタの摂動に対する性質

素の摂動に対してパラメトリック射影フィルタに対しても安定した近似になっていることを示している。

実験 9.3. ここでは実際の画像を用いて、正則化パラメトリック射影フィルタの作用素の摂動に対する影響を実験によって確かめる。

図 9.5 が実験に用いる原画像、図 9.6 が観測作用素 $A = C_4$ と相関作用素 $C_2 C_2^T$ を持つ加法雑音による観測画像である。それぞれ、縦、横とも 16 画素の 256 階調モノクローム画像である。

最適復元フィルタとして、真の観測作用素および雑音の相関作用素に基づく射影フィルタ B_{PF} を用いて復元した復元画像が図 9.7 である。また、図 9.8 は $A_1(0.001)$ と $Q(0.001)$ に基づく射影フィルタによる復元画像、図 9.9 は $A_1(0.001)$ と $Q(0.001)$ に基づくパラメトリック射影フィルタによる復元画像である。パラメータは $\gamma = 0.1$ とした。いずれの画像も、真の作用素に基づく射影フィルタによる復元画像とは大きく異なる。

それに対して、 $A_1(0.001)$ と $Q(0.001)$ に基づく正則化パラメトリック射影フィルタによる復元画像が図 9.10 である。パラメータは $\gamma = 0.1, \delta = 0.00001$ とした。図 9.7 と図 9.10 にはほとんど差がないことが確認できる。

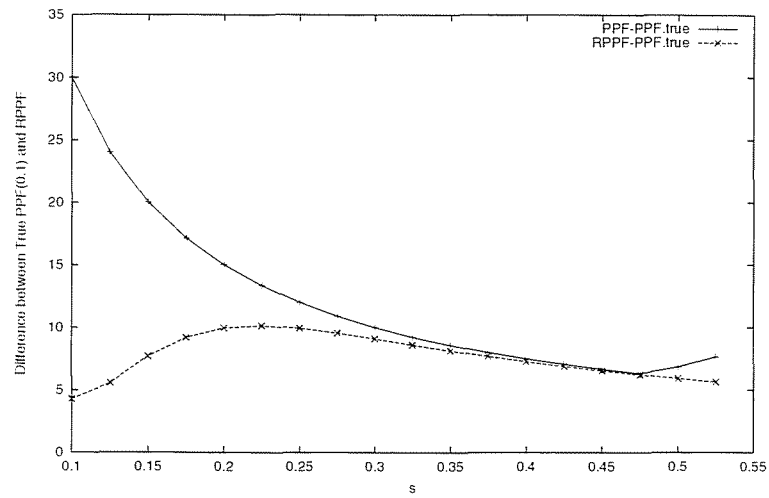


図 9.4: 正則化パラメトリック射影フィルタとパラメトリック射影フィルタの摂動に対する性質

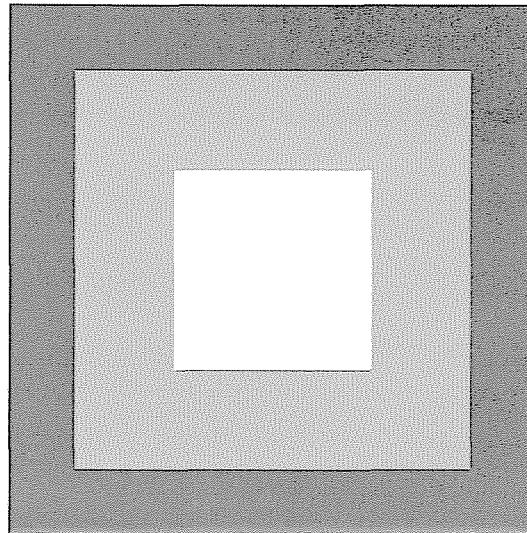


図 9.5: 原画像 (16 × 16 ピクセル, 256 階調)

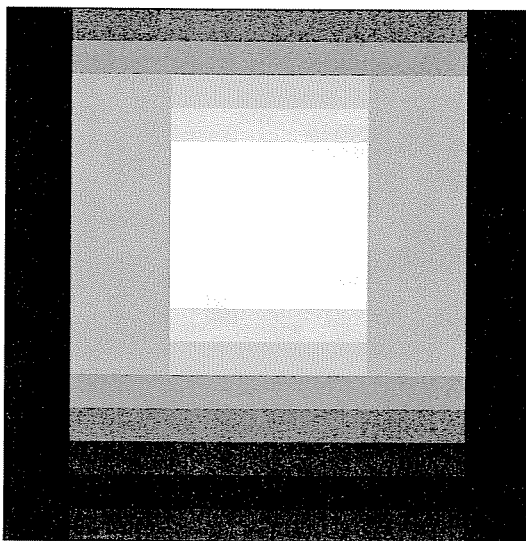


図 9.6: 観測画像 (16×16 ピクセル, 256 階調)

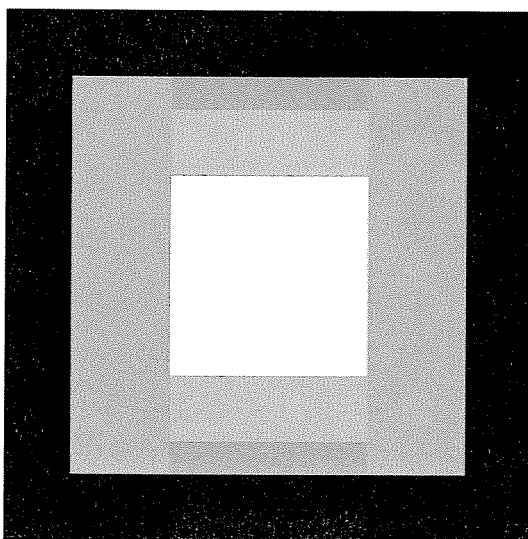


図 9.7: 射影フィルタ B_{PF} による復元画像

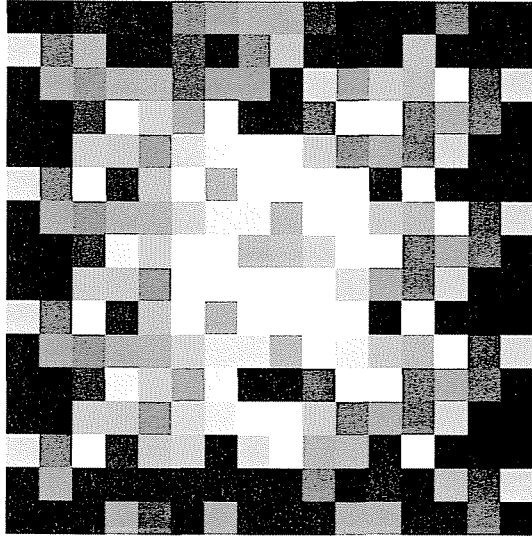


図 9.8: $A_1(0.01), Q(0.01)$ に基づく射影フィルタ \hat{B}_{PF} による復元画像

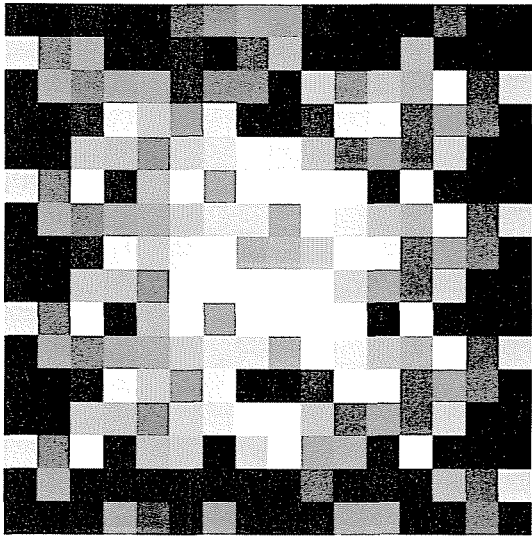


図 9.9: $A_1(0.01), Q(0.01)$ に基づくパラメトリック射影フィルタ $\hat{B}_{PPF}(0.1)$ による復元画像

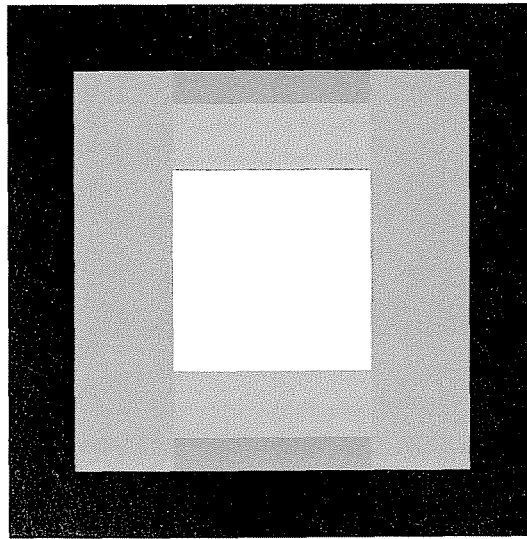


図 9.10: $A_1(0.01), Q(0.01)$ に基づく正規化パラメトリック射影フィルタ $\hat{B}_{RPPF}(0.1, 10^{-5})$ による復元画像

実験 9.4. ここでは、画像データベース SIDBA にある画像を用いて、現実の画像について復元を行ない、正規化パラメトリック射影フィルタの作用素の摂動に対する影響を確かめる。

図 9.11 は縦、横とも 128 画素の 256 階調モノクローム画像である。これを実験に用いる原画像とする。観測作用素 A は、縦方向の 16 画素を平均する 128×128 行列 A_{16} とし、雑音は平均 0、標準偏差が σ_i で、各画素に対して独立に分布する正規乱数とする。ただし、

$$A_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{128} \\ a_{128} & a_1 & \dots & a_{128} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{bmatrix},$$

ここで.

$$a_i = \begin{cases} \frac{1}{n}, & i = 1, \dots, n, \\ 0, & i = n + 1, \dots, 128. \end{cases}$$

$$\sigma_i = \begin{cases} 0.3 + \frac{2.7(33-i)}{32}, & 1 \leq i \leq 32, \\ 0.3, & 33 \leq i \leq 96, \\ 0.3 + \frac{2.7(i-96)}{32}, & 97 \leq i \leq 128, \end{cases}$$

である. したがって,

$$Q = \text{diag}[\sigma_1^2, \dots, \sigma_{128}^2],$$

となる. 図 9.12 はこれらの観測作用素と加法的雑音による観測画像である. 観測作用素 A と相関作用素 Q に基づく射影フィルタを用いて復元したものが図 9.13 である.

次に, 真の観測過程とは異なる観測モデル

$$\hat{A} = 0.95A_{16} + 0.05A_{17}$$

$$\hat{Q} = Q$$

に基づく復元を行なった結果を示す. 行列 $\hat{A} - A$ の最大固有値を求めることにより $\varepsilon = \|\hat{A} - A\| = 0.00382$ であることがわかる.

このモデルに基づく射影フィルタを用いて復元した画像が図 9.14 である. 真の観測過程に基づく復元画像とは大きく異なる. 一方, このモデルに基づく正則化パラメトリック射影フィルタを用いて復元した画像が図 9.15 である. パラメータは $\gamma = 10^{-2}, \delta = 10^{-5}$ とした. 正則化パラメトリック射影フィルタによる復元画像は, 鮮明でない部分は見られるが, 図 9.14 と比較すると真の観測過程に基づく復元画像である図 9.13 に近い画像であるといえる.

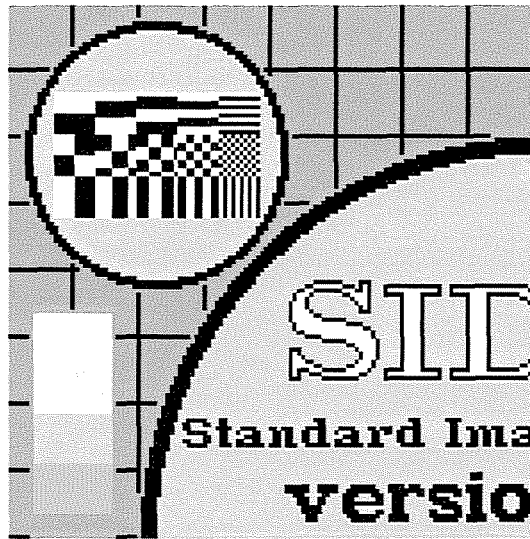


図 9.11: 原画像 (128 × 128 ピクセル, 256 階調)

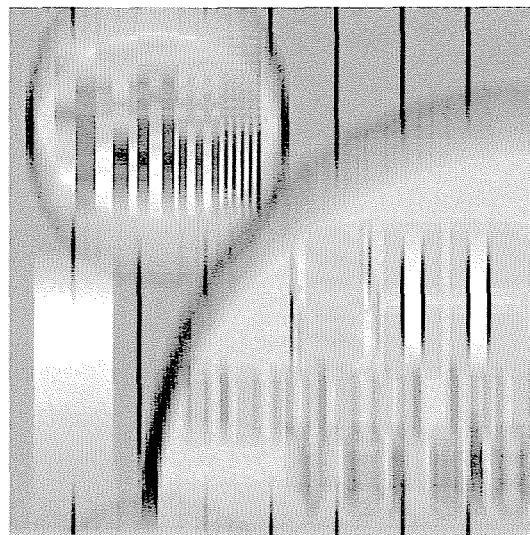


図 9.12: 観測画像 (128 × 128 ピクセル, 256 階調)

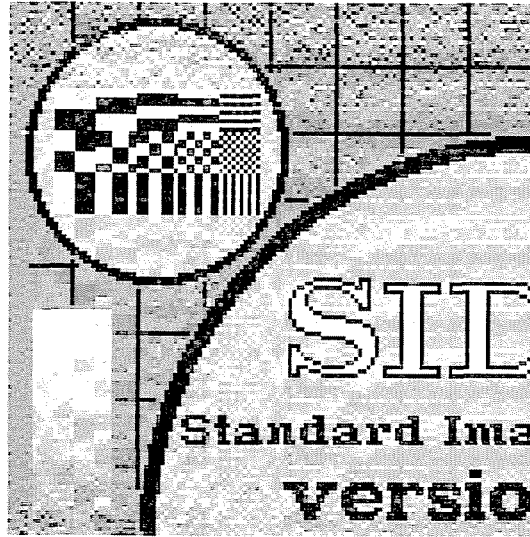


図 9.13: 射影フィルタ B_{PF} による復元画像

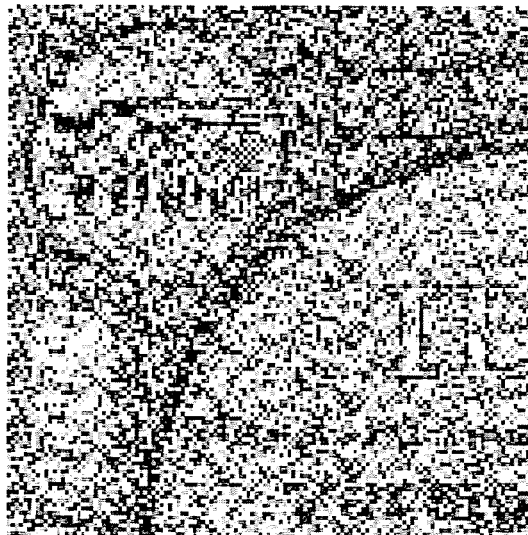


図 9.14: \hat{A}, \hat{Q} に基づく射影フィルタによる復元画像

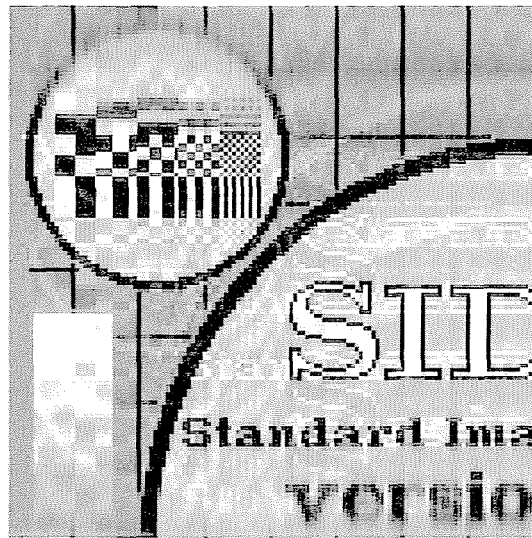


図 9.15: \hat{A}, \hat{Q} に基づく正規化パラメトリック射影フィルタによる復元画像

第10章 結論

10.1 本論文により示された結果

本論文の第I部においては、画像復元に用いられる最適復元フィルタのうち、一般逆フィルタおよび射影フィルタ族を方程式の擬ノルム最小の最小二乗解を与える作用素として統一的に導かれることを示した。従来の研究においては、射影フィルタおよび部分射影フィルタ、平均射影フィルタ満たす作用素方程式の観点からの射影フィルタ族の統一的な議論は行なわれていたが、射影フィルタ族を擬ノルム最小の最小二乗解を与える作用素として理解することにより、より詳細な性質を導くことができると思われる。また、共通部分をもつ複数の画像の復元問題に部分射影フィルタを適用できることを示した。複数の画像のなかに共通部分があることは実用上少なくないので、部分射影フィルタにより高い精度で復元できることが示されたことは応用上有用である。

さらに、パラメトリック射影フィルタおよびパラメトリック部分射影フィルタ、パラメトリックウィナーフィルタをパラメトリック射影フィルタ族として統一的に導出できることを示した。この導出はこれらの復元フィルタが満たすべき作用素方程式を統一的に構成したものである。三種類の最適復元フィルタを統一的に導出することにより、射影フィルタ族とパラメトリック射影フィルタ族の相互関係をより簡明に示すことができる。

第I部で述べた各種の最適復元フィルタは観測作用素および画像の相関作用素、雑音の相関作用素などを基にして構成されるものであり、画像観測モデルは観測過程を正確に表現していることを前提にしている。しかし、現実の画像復元問題においては、これらの作用素は経験的な知識や事前の実験から推定されるものであることが多い。この

ようにして得られた作用素を用いた画像観測モデルは真の観測過程とは異なっていると考えられる。そこで、第II部では、観測作用素および画像の相関作用素、雑音の相関作用素に微小な摂動が加わった場合に、それらの作用素から構成される最適復元フィルタに摂動が与える影響に関する考察を行なった。第7章および第8章において第I部で述べた各種の最適復元フィルタが摂動に対して安定である必要十分条件を求め、これらの最適復元フィルタが作用素の摂動に対して大きな影響を受ける可能性があることを示した。また、摂動を与えた作用素に基づく最適復元フィルタによる復元画像が真の観測モデルに基づく最適復元フィルタによる復元画像とは大きく異なる場合があることを、実際の画像を用いての数値実験により示した。

現実の画像復元問題においては、画像観測モデルは真の観測過程とは微小に異なっていること、また、計算機を用いた画像復元では、丸め誤差などによる数値計算上の誤差が避けられないことから、第7章および第8章で示した最適復元フィルタの性質は望ましいものではない。

そこで、第9章では、非適切問題に用いられる正則化法に基づく新たな復元フィルタである正則化パラメトリック射影フィルタ族について述べた。この復元フィルタ族はパラメータを適切に選ぶことにより、射影フィルタ族、パラメトリック射影フィルタ族の近似になることを示した。また、観測作用素および画像の相関作用素、雑音の相関作用素に微小な摂動が加わった場合でも、摂動の大きさに応じて適切なパラメータを選べば、射影フィルタ族およびパラメトリック射影フィルタ族の十分に良い近似となることを示した。さらに、これらの性質を確認するための数値実験を行なった。その結果、観測作用素および画像の相関作用素、雑音の相関作用素に微小な摂動が加わり、射影フィルタ族およびパラメトリック射影フィルタ族では望ましい復元画像がえられない場合にも適切なパラメータを用いた正則化パラメトリック射影フィルタ族により、真の観測過程に基づくものに十分に近い復元が可能であることを示した。

10.2 今後の課題

本論文においては観測過程はある程度既知であり、その観測作用素は線形であることを仮定した。線形作用素のみを扱うことで、統計学や関数解析の既存の膨大な知見を利用することができる反面、この仮定が極めてきついものであることから、現実の多くの画像観測にそのまま適応することは難しいという問題がある。したがって、非線形作用素による画像復元手法の開発が大きな課題である。非線形作用素による復元においても、局所的には線形近似が可能である場合が多く、漸近的な性質などに本論文で示した線形作用素による画像復元の結果が適用できると考えられる。

また、作用素の摂動に対する最適復元フィルタの性質は離散-離散モデルの場合に限って示した。これは値域が閉部分空間であるコンパクト作用素を仮定するための要請である。これを一般の連続-連続モデルに拡張することも今後の課題である。この場合には、復元画像が存在する部分空間を限定して議論することが必要になる。また、有限階でないコンパクト作用素については第II節で用いた不等式の評価を直接は使えないため、新たな近似式を求める必要がある。

正則化パラメトリック射影フィルタは、作用素の摂動に対して安定した近似を与えるが、それは摂動の大きさに応じた適切なパラメータを用いることが条件である。これは、正則化全般に関わる問題であり、これまでも Morozov の相変原理など、多くの結果がある。正則化パラメトリック射影フィルタに関する相変原理がどのようになるかは今後の課題である。また、非適切問題の対処法には正則化だけでなく、離散化法など多くの方法が提案されている。それらの手法を射影フィルタ族やパラメトリック射影フィルタ族に適応することも可能であり、正則化パラメトリック射影フィルタ族との比較検討を行なうことも重要であると思われる。

さらに、画像間の差を測る尺度の問題も重要である。本論文では画像間の距離の基準として最小二乗基準を用いている。この基準が距離空間を定義する場合であれば、二乗距離が十分に小さければ画像間の差は小さいので、原画像を忠実に復元しているといえる。しかし、本論文では逆をもたない観測過程も含めて考察しているため、復元された

画像と原画像との距離は近くない場合が多い。第6章でも述べたとおり、このような状況では最小二乗基準により最良と判断された復元画像が人間の主観的な評価からみて最も良いとは限らない。実用的な観点からは、「人間の目を見た」良さが重要であり、本来であればそれを画像間の尺度として採用すべきであるが、本論文では全く考慮に入れていない。

これらの点が今後解決すべき問題として残されている。

謝辞

本論文の作成にあたり、主査として細かい御指導をいただいた北海道大学大学院工学研究科システム情報工学専攻 宮腰政明教授、副査として貴重な御助言をいただいた同専攻 新保 勝 教授、伊達 惇 教授、電子情報工学専攻 北島秀夫 教授に深く感謝致します。また、システム情報工学専攻博士課程在学中の田中 章氏には共同研究を通じて様々な御協力をいただきました。ここに感謝致します。

索引

- 1 逆, 14
- 一般逆フィルタ, 35
- 一般逆, 16
- 観測画像, 8
- 観測画像空間, 8
- 観測作用素, 9
- 画像成分, 11
- 画像復元, 10
- 原画像, 8
- 原画像空間, 8
- 最小二乗解, 20
- 最小二乗型 1 逆, 21
- 雑音成分, 11
- 射影フィルタ, 35
- 射影フィルタ族, 34
- シャッテン形式, 9
- 正則化パラメトリック射影フィルタ族,
102
- 相関作用素, 9
- パラメトリック一般逆フィルタ, 55
- パラメトリックウィーナーフィルタ, 57
- パラメトリック射影フィルタ, 56
- パラメトリック射影フィルタ族, 58
- パラメトリック部分射影フィルタ, 56
- 復元画像, 10
- 復元作用素, 11
- 復元フィルタ, 12
- 部分射影フィルタ, 38
- 平均, 9
- 平均射影フィルタ, 41
- 平方根, 22
- 劣化画像, *see* 観測画像
- 劣化作用素, *see* 観測作用素
- ヒルベルト・シュミットノルム, 54
- M -最小二乗解, 22
- M -最小の N -最小二乗解, 26
- Moore–Penrose 一般逆, *see* 一般逆
- Tikhonov 正則化, 100

参考文献

- [1] H. C. Andrews and B. R. Hunt. *Digital Image Restoration*. Prentice Hall, 1977.
- [2] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville. *Generalized Inverse : Thoery and Applications*. John Wiley & Sons, Ltd., 1974.
- [3] T. F. Chan and C. K. Wong. Total variation blind deconvolution. *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 7, No. 1, pp. 370–375, Mar. 1998.
- [4] V. Chankong and Y.Y. Haimes. *Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology*. North-Holland, New York, 1983.
- [5] N. P. Galatsanos and R. T. Chin. Digital restoration of multichannel images. *IEEE Transactions on Acoustic, Speech & Signal Processing*, Vol. ASSP-37, No. 3, pp. 415–421, 1989.
- [6] N. P. Galatsanos, A. K. Katsaggelos, R. T. Chin, and A. D. Hillery. Least squares restoration of multichannel images. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 39, No. 10, pp. 2222–2236, Oct. 1991.
- [7] C. W. Groetsch. *Generalized Inverses of Linear Operators : Representation and Approximation*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1977.
- [8] A. Hyvärinen and E. Oja. Independent component analysis by general non-linear Hebbian-like rules. *Signal Processing*, Vol. 64, No. 3, pp. 301–313, 1998.
- [9] H. Imai, Y. Nakata, and M. Miyakoshi. On restoration of overlapping images. *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E80-D, No. 12, pp. 1190–1194, Dec. 1997.
- [10] 今井英幸, 田中章, 宮腰政明. 摂動法を用いた最適復元フィルタの評価. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J80-D-II, No. 3, pp. 754–761, March 1997.

-
- [11] 今井英幸, 田中章, 宮腰政明. 摂動に対する射影フィルタ族の性質. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J80-D-II, No. 5, pp. 1128-1135, May 1997.
- [12] H. Imai, A. Tanaka, and M. Miyakoshi. The family of Parametric Projection Filters and its properties for perturbation. *IEICE Transactions on Information and Systems*, Vol. E80-D, No. 8, pp. 788-794, Aug. 1997.
- [13] H. Imai, A. Tanaka, and M. Miyakoshi. The family of regularized parametric projection filters for digital image restoration. *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*. in press.
- [14] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 Edition.
- [15] A. K. Katsaggelos, J. Biemond, R. W. Shafer, and R. M. Mersereau. A regularized iterative image restoration algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 39, No. 4, pp. 914-929, Apr. 1991.
- [16] 菊池学, 長谷山美紀, 北島秀夫. マルチフレーム射影フィルタによる画像復元法. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J79-D-II, No. 9, pp. 1516-1524, Sep. 1996.
- [17] 小出裕司, 山下幸彦, 小川英光. 信号・画像復元のための射影フィルタ族の統一理論. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J77-D-II, No. 7, pp. 1293-1301, July 1994.
- [18] 近藤正三, 熱田清明. 新しい拘束条件付最小2乗フィルタによるデジタル画像の復元法. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J68-D, No. 4, pp. 496-501, Apr. 1985.
- [19] 近藤正三, 熱田清明. 付加雑音を考慮した拘束条件付一般逆行列による画像の復元法. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J68-D, No. 4, pp. 502-507, Apr. 1985.
- [20] 近藤正三, 松尾守之. パターンに対する非線形情報処理機能の解析. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J63-D, No. 10, pp. 867-874, Oct. 1988.

- [21] J. R. Magnus and H. Neudecker. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1988.
- [22] S. K. Mitra and C. R. Rao. Projections under seminorms and generalized Moore-Penrose inverses. *Linear Algebra and Its Applications*, Vol. 9, pp. 155-167, 1974.
- [23] 宮腰政明, 黒田浩之, 新保勝. Browder の強収束定理の凸射影法への応用. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J78-D-II, No. 2, pp. 205-212, May 1995.
- [24] 中村伸隆, 小川英光. 加法性ノイズを考慮した最適画像復元. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J67-D, No. 5, pp. 563-570, May 1984.
- [25] 中田靖久, 今井英幸, 宮腰政明. 正則化を用いた共通部分を持つ画像の復元. 第12回デジタル信号処理シンポジウム講演論文集, pp. 431-434, Nov. 1997.
- [26] 小川英光. 画像復元問題に現われる作用素方程式について. 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. PRU 86-60, pp. 9-16, Nov. 1986.
- [27] 小川英光. [講座] 信号と画像の復元 [I] - 復元問題の普遍性. 電子情報通信学会誌, Vol. 71, No. 5, pp. 491-497, May 1988.
- [28] 小川英光. [講座] 信号と画像の復元 [II] - 古典的最適復元フィルタ. 電子情報通信学会誌, Vol. 71, No. 6, pp. 593-601, Jun. 1988.
- [29] 小川英光. [講座] 信号と画像の復元 [III] - 最適復元のための射影フィルタ族. 電子情報通信学会誌, Vol. 71, No. 7, pp. 739-748, July 1988.
- [30] 小川英光. [講座] 信号と画像の復元 [IV] - 非線形復元. 電子情報通信学会誌, Vol. 71, No. 8, pp. 828-835, Aug. 1988.
- [31] 小川英光. 逆問題としてのニューラルネット理論. 電子情報通信学会誌, Vol. 73, No. 7, pp. 690-695, July 1990.

-
- [32] 小川英光 (編) . パターン認識・理解の新たな展開. 電子情報通信学会, 東京, 1994.
- [33] 小川英光, 原昌司. 部分射影フィルタによる画像復元. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J71-A, No. 2, pp. 519-526, Feb. 1988.
- [34] 小川英光, 原昌司. 部分射影フィルタの諸性質. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J71-A, No. 2, pp. 527-534, Feb. 1988.
- [35] H. Ogawa and E. Oja. Projection Filter, Wiener Filter and Karhunen-Loève subspaces in digital image restoration. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 114, No. 1, pp. 37-51, 1986.
- [36] 小川英光, 山崎一孝. 過学習の理論. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J76-D-II, No. 6, pp. 1280-1287, Jun. 1993.
- [37] E. Oja and H. Ogawa. Parametric Projection Filter for image and signal restoration. *IEEE Transactions on Acoustic, Speech & Signal Processing*, Vol. ASSP-34, No. 6, pp. 1643-1653, Dec. 1986.
- [38] M. K. Özkan, A. T. Erdemi, M. I. Sezan, and A. M. Tekalp. Efficient multiframe Wiener restoration of blurred and noisy image sequences. *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 1, No. 4, pp. 453-476, Oct. 1991.
- [39] T. Poggio, V. Torre, and C. Koch. Computational vision and regularization theory. *Nature*, Vol. 317, No. 6035, pp. 314-319, Sep. 1985.
- [40] C. R. Rao. *Linear Statistical Inference and Its Application*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1977.
- [41] C. R. Rao and S. K. Mitra. *Generalized Inverse of Matrices and Its Application*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1971.

-
- [42] F. Riesz and B. Sz. Nagy. *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968.
- [43] G. A. F. Seber and C. J. Wild. *Nonlinear Regression*. John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [44] 杉山博史, 小川英光. パラメトリック部分射影フィルタによる画像復元. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J72-D-II, No. 10, pp. 1618–1626, Oct. 1989.
- [45] 田中博, 岡部政之, 鈴木貴. 岩波講座 応用数学 [方法 6] 逆問題. 岩波書店, 東京, 1993.
- [46] 谷口雅彦, 工藤峰一, 宮腰政明, 新保勝. ボルテラ級数を用いた非線形画像復元. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J78-D-II, No. 2, pp. 378–384, Feb. 1995.
- [47] A. M. Thompson, J. C. Brown, J. W. Kay, and D. M. Titterton. A study of method of choosing the smoothing parameter in image restoration by regularization. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 13, No. 4, pp. 326–339, Apr. 1991.
- [48] A. N. Tikhonov and Y. Y. Arsenin. *Solutions of Ill-posed Problem*. John Wiley & Sons, New York, 1977.
- [49] 梅山伸二. ICA の画像処理への応用について. 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. NC 98-7, pp. 47–54, May 1998.
- [50] 梅山伸二. Independent Component Analysis を用いたぼけ過程不明のぼけ画像の復元について. 電子情報通信学会技術研究報告, Vol. PRMU 98-27, pp. 9–16, Jun. 1998.
- [51] N. Wiener. *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series, with Engineering Applications*. John Wiley & Sons, New York, 1949.

- [52] 山下幸彦, 小川英光. 平均射影フィルタによる画像復元. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J74-D-II, No. 2, pp. 150-157, Feb. 1991.
- [53] 山下幸彦, 小川英光. 平均射影フィルタの諸性質. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J74-D-II, No. 2, pp. 142-149, Feb. 1991.
- [54] 山下幸彦, 小川英光. 画像空間の位相と最適画像復元フィルタ. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J75-D-II, No. 2, pp. 306-313, Feb. 1992.
- [55] 山下幸彦, 小川英光. 各種最適復元フィルタの相互関係. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J75-DII, No. 5, pp. 890-898, May 1992.
- [56] 山下幸彦, 小川英光. 最適画像復元フィルタと一般逆. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J75-DII, No. 5, pp. 883-889, May 1992.
- [57] 山崎一孝, 小川英光. 雑音を考慮した過学習の理論. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J76-D-II, No. 11, pp. 2411-2418, Nov. 1993.
- [58] 柳井晴夫, 竹内啓. 射影行列・一般逆行列・特異値分解. 東京大学出版会, 東京, 1983.
- [59] 横矢直和, 坂上勝彦. 画像理解と最適化原理. 電子情報通信学会誌, Vol. 74, No. 4, pp. 326-334, Apr. 1991.
- [60] D. C. Youla. Mathematical theory of image restoration by the method of convex projections. In H. Stark, editor, *Image Recovery Theory and Application*, pp. 29-77. Academic Press, 1987.