選　列　と　論　理 I

―直観主義解析学における連続性原理―[1]

金　子　洋　之

目　　次

1. 序　　論

われわれが直観主義について何事かを学ぶとき，まず第一に耳にすることは，直観主義では排中律が認められない，ということであろう。ブラウワー (L. E. J. Brouwer) によるこの主張は，本来，数学の論理学的再編（例えば，論理主義やヒルベルト流の形式主義）への抵抗という脈絡で理解されるべきものだが，現在ではそうした背景抜きに語られることが多い。ハイティング (A. Heyting) による形式化以来，直観主義の論理は排中律や二重否定律の成立しない，古典論理の部分系としてかなり明瞭な形を与えられてきた。そして排中律の拒否がその背景にある二値原理の拒否を含意し，ひいては反実在論に結び付くことがダメット (M. Dummet) によって指摘されるに及んで，直観主義は意味論的構成主義[2] としてその面目を新たにしたのである。

直観主義を巡るこのような動向は，ブラウワーの著作につきまといかん

ともし難い独我論や神秘性を除去し，ある程度見通しのよい定式化を与えてくれるという点で，きわめて重要な前進であった。だが，オリジナルな直観主義の立場からすれば，このような動向は，直観主義が持つネガティブな側面に重点を置きすぎているように思われる。つまり，既成の数学に対する批判として持ち出された排中律の拒否という側面にあまりにも強調が置かれ過ぎているのではないか。もちろん直観主義に意味論的構成主義の側面がないというわけではない。それはそれで直観主義の抜き難い特質の一つを成している。そしてまた，意味論的構成主義の立場自体が多くの問題を抱えていることも事実であり，この立場をさらに解明して行くことが重要な哲学的課題であることに疑いはない。だが，直観主義には意味論的構成主義と規定するだけでは捉えきれない多くの側面がある。たとえブラウワー個人に由来する特異な哲学的主張を除いたとしても，新たな数学を建設しようという直観主義のポジティヴな側面に注目するならば，このことは明かである。

以下の考察は，そうした直観主義数学の建設過程に登場する「選列 (choice sequence)」の概念に向けられる。通常の直観主義論理では，排中律は認められないものの，その二重否定は証明可能である。つまり，積極的な意味で排中律の否定が証明されるわけではない。ところが，選列を規定する原理の一つが承認されたならば，排中律型のある命題の否定が証明されるのである。われわれはこの原理がどのように正当化されるのかに眼を向けたい[3]。

これまでかなり錯綜した議論がこの定理を巡って展開されてきた。議論が錯綜する理由の一つは，この定理に含まれる量化子が選列という完結しない対象上を走るからである。選列は，時間と共に生成して行くが決して完結することのない数列のごとき「対象」に他ならない。そのような未完の対象から成る領域を量化するとはいったいどのようなことなのか。そのような対象間の同一性はどのように定義されるのか。自由選列のようなものがそもそも対象として認められるのだろうか。こうしたたちどころに生じて来る数々の問いに直観主義者がいかに答えうるのか，しかもできるかぎり直観主義者でない者にも理解可能な仕方でいかに答えうるのか，を探ることが以下の課題である。こうした課題の追求なしに，単なる論理のレベルでの特徴に基づい

て「直観主義」の性格規定を云々するのは片手落ちであろうと考えるからである。

予め本稿の構成を述べておこう。まず最初に，自然数論の範囲を越え出た地点において直観主義者が連続性をどう規定してきたか，を回顧する。その上で選列概念を定式化することにしたい。構成主義的な「連続体」概念の変遷に関する歴史的・文献的追跡はここでは行われない[4)]。こうした準備作業に基づいて，次に自由選列に関する連続性原理の正当化を巡る議論を扱い，われわれがこの原理をどのように理解すればよいのかを考察するであろう。さらに，この原理を仮定した上で，排中律の反証を行う。この反証を詳しく分析することから，選列概念に含まれる問題点とこの概念の特異な性格とが露わになると期待されるからである。

2. 自然数から実数へ

直観主義数学の建設は自然数の構成から始まる。自然数の構成がどのように始まるかに関するブラウワーの記述についてはここでは深く立ち入らない。彼は，一切の分節化が生ずる以前の意識状態の記述から始め，ある心的事象が意識内における事象として孤立化され客観化される様を入念に叙述する。こうして獲得された各事象からそれら固有の特性を捨象し，いわば形式としての事象，同質的で識別不可能な事象の継起へと進むのが第一のステップである。ただし事象の固有性を捨象するとは言っても，各事象の生起する時間的継起まで捨て去るわけではない。むしろ，時間的継起こそが数学的構成の遂行を可能にするための条件であるとして，直観主義者はこれを積極的に利用するのである。この段階での心的活動を支える枠組みがカント的時間直観に他ならない。「直観主義」という名称はこの点に由来するのである。ここから先の構成は有限主義の場合とほぼ変わらない。ある事象と時間系列上でその次に来る事象とを取りまとめ，それらが二つの事象であることを承認しつつ，同時に一つの事象として認識することが自然数2の構成である。ストロークを継ぎ足すことによって自然数を構成する有限主義の場合と形式上は同様な自然数の系列が得られるのである。ただし有限主義とは異なり，

構成されるものは飽くまでも心的なものであり，また「構成」も外的な操作ではなく，心的な操作・心的行為であるという点には注意する必要があろう。

このように構成された個々の自然数は，心的な構成物ではあるが，完結した対象と見なされる。そして古典数学の場合と同様に自然数から構成される整数，有理数も個々に考える限り，完結した対象である。これに対して自然数全体からなる集合や有理数全体の集合のようなものは完結した対象とは見なされない。それゆえ，有理数の無限集合や無限系列を前提とする実数を構成するに当たっては，古典的な方法や概念をそのまま利用することはできない。そこで個々の実数を構成するために直観主義者が採った道は，実数を完結した対象としてではなく，絶えず生成途上にある未完の対象として扱うことであった。実数の構成法には様々なものがあり，例えば Brouwer〔1918〕では区間縮小法が用いられているが，ここでは基本列またはコーシー列による実数の導入を考察する。

直観主義数学では，実数を有理数からなるコーシー列の同値類として定義することができる。例えば，

$\langle r_n \rangle$は実数生成子 (real number generator) である　*iff*

$$\forall k \exists n \forall m_{m>n} \quad |r_m - r_n| < 2^{-k}$$

は実数生成子のひとつの定義を与える。この定義に基づいて，さらに，

$$\langle r_n \rangle \sim \langle s_n \rangle \quad iff \quad \forall k \exists n \forall m_{m>n} |r_m - s_m| < 2^{-k}$$

と定義するならば，$\sim$が同値関係であることは容易に証明でき，この同値関係によって実数が定義されるのである[5]。

しかしここで注意しなくてはならないのは，実数生成子の規定が外見上古典数学での規定と同じだとしても，論理定項は直観主義的に解釈されねばならないという点である。任意の k が与えられたとき，n の値が存在するということが保証されるだけではなく，値そのものが構成されねばならない。その意味で，実数を生成する有理数列は，「各項を計算するための実行可能な規則によって」[6] 与えられねばならないのである。従って，古典的にはコー

シー列でありながら，直観主義的には許容されないものがある。例えば，次の定義はそのような列の一例を与えてくれる。

$$r_n = \begin{cases} 1 & \text{もし}\pi\text{の十進法展開において小数点以下}n\text{番目の数字} \\ & \text{がその展開中に最初に現れる列 0123456789 の 9 で} \\ & \text{ある場合} \\ 2^{-n} & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

この$<r_n>$は，例えば$<p_n>=2^{-n}$とは高々一個所でしか違わない。従って古典的な意味では$<r_n>$は明らかにコーシー列である。ところがπの十進法展開中に 0123456789 が現れるか否かを知らない限り，われわれは$<r_n>$の「各項を計算するための実行可能な規則」を持ってはいない。かくしてこの$<r_n>$は直観主義的な意味でコーシー列ではない。

以上から明らかなように，直観主義において構成される実数は完結した対象ではなく，必要に応じて各項を幾らでも計算して行くことのできるコーシー列に他ならない。古典的な実数と区別するために，これらを「計算可能な実数 (Computable real number)」と呼ぶこともできるであろう。(ただし，ここで言う「計算可能」を一般帰納的と解釈することは必ずしもできない。) 計算可能な実数に基づいて直観主義算術を展開する作業にはここでは立ち入らず[7]，後との関係で若干の特徴を指摘するにとどめたい。まず，実数どうしの加減乗除は古典数学の場合とほぼ同様に定義される。しかし実数間の同一性，非同一性に関しては新たな概念が生じて来る。α, βを有理数列とし，$\alpha(n)$によって有理数列αのn番目の項を表わすとすれば，

$$\alpha=\beta \quad iff \quad \forall n\Big(\alpha(n)=\beta(n)\Big)$$

は通常の (外延的) 同一性の規定に他ならない。この同一性の否定，すなわち，

$$\alpha\neq\beta \quad iff \quad \exists n\Big(\alpha(n)\neq\beta(n)\Big)$$

はもちろんここでも成立するが，これに加えてさらに次のような離別性 (apartness relation) の関係が成立する。

$\#$は離別性関係である　*iff*　すべての $x, y, z \in S$ に対して

$\#$が次の (i)-(iii) を満たす。

(i)　$x \# y \to y \# x$

(ii)$\neg (x \# y) \longleftrightarrow x = y$

(iii)　$x \# y \to x \# z \vee y \# z$

例えば実数生成子に関するこの離別性は次のように定義される。

$$<r_n> \# <s_n> \quad iff \quad \forall k \exists n \forall m_{m>n} |r_m - s_m| > 2^{-k}$$

直観主義数学ではこの離別性関係に基づいて一定の算術が展開されているが，本稿ではその詳細には立ち入らない[8]。(同一性については，上で述べたような外延的同一性の他に内包的同一性が導入されるが，それは選列の規定後に改めて論じられるであろう。) ここで注意すべきことは，数学の直観主義的な改編が単に古典数学を弱める方向に進むというだけではなく，概念の分離，概念の新たな分節化を惹き起こすという点である。この事実は (直観主義の哲学的主張とは独立に) 構成主義が古典数学に対してもちうる意義の一つと考えられている[9]。

さて，以上では自然数から実数までの構成をごく簡単に概観したのであるが，このように形成された直観主義数学の内に連続体の占める余地がないのは明かである。実数生成子の定義を振り返ってみると，任意に与えられた k に対して，収束条件を満たすようなある n が構成されねばならなかった。このことは，実数生成子そのものが，独立変数として任意の k に対してある n を与えるような「関数」によって，あるいはブラウワーの用語を用いるならば「法則」，によって構成されねばならないということを意味する。ここでいう「関数」ないし「法則」が構成的なものでなければならないことは言うまでもない。では「構成的」ということでわれわれは何を理解すべきであろうか。直ちに考えられる方策はこの「構成的」を「一般帰納的 (general recursive)」と解することである。すると，上で考察された実数生成子は帰納的実数生成子であることになり，それらの同値類として定義される実数は帰納的実数だということになる。だが，このような帰納的実数全体の集合 (種)

を考えたとしても，それは古典的な意味での連続体を成すわけではない。古典的連続体の点には，先に見た古典的には認められるが直観主義的には認められないコーシー列によって定義されるような実数も明らかに含まれている。従って，「連続体」を字義通り連続体として捉え，その上でブラウワーの定理「閉区間上で定義されるすべての実関数は一様連続である」が証明されるような連続体としての区間を構成するには，これまでの議論だけでは不十分なのである。

こうした困難を克服するためにブラウワーが導入したのが「選列」に他ならない。選列がどのようなものであるのか，そしてそれによって連続体の概念がどのように構成されるのかを見るのにあたって，最初にブラウワー自身の説明を引用しておこう。彼は，直観主義の第二の活動（つまり直観主義数学の建設という活動。これに対し，第一の活動は古典数学や古典論理への批判的活動を指す。）の出発点を次のように規定する。すなわち，

「新たな数学的対象 (entities) を創造する二つの方法を承認すること。第一に，前もって獲得された数学的諸対象から成る，多かれ少なかれ自由に進行する無限系列という形で。(その結果，例えば，無限小数が正確な値をもつということも認められないし，いつか正確な値を入手するという保証さえも与えられない。)」

(Brouwer [1981] p. 8)

ここで「多かれ少なかれ自由に進行する無限系列」と言われているのが選列である[10]。

いま「前もって獲得された数学的諸対象」として自然数のみを考えることにすると，選列を自然数の無限系列と見なすことができる。しかしながら直観主義では完結した無限というものを考えることはできないのであるから，選列もまた完結した無限系列とは見なされない。そこでブラウワーは，選列を規定するに当って，まず自然数の選択という際限のない行為の継続を考えるのである。この選択行為は際限なく続くのであるから，われわれがある時点でどのような系列が構成されたかを知ろうとしても，知ることができるの

はその時点までに構成された自然数の有限列でしかない。つまり選列とは，つねに完結した有限列としてしかわれわれに提示されないにもかかわらず，幾らでも拡張できるような数学的対象に他ならない。

（ここで選択行為の主体は何かという疑問が生じるかもしれない。それは自然数列を構成するわれわれ自身だと言ってもよいが，ブラウワーは「理念的数学者 (idealized mathematician)」なる概念を導入する。「理念的」というのは，例えば既に構成されたものを決して忘却しないといった理念化を意味するのであって，実在論の復活を許すような超越的存在を意味するわけではない。このような「理念的数学者」の概念の導入はブラウワーを「創造主体の理論 (theory of creative subject)」へと導いたのであるが，本稿ではこの理論には立ち入らない。最近では「選択」の行為的側面を捨象し，主体概念を消し去ろうという傾向が強い[11]。しかしそうした消去が最終的に可能かどうかについては疑問がある。ここではとりあえず「主体は何か」という疑問を曖昧にしたままで議論を進めたい。）

ところで選列の各項を成す対象（ここでは自然数）の選択はいかなる規準に基づいて行われるのであろうか。この規準を巡ってわれわれは選列を三つに分類できる。まず第一に，合法則列 (lawlike sequence)。これは先に見た実数生成子によって代表されるような系列である（ただしこの場合は各項が自然数ではなく，有理数ではあるが)。すなわち，合法則列とは，その系列の n 番目の項として何を選択すべきかが，予め一定の法則によって定まっているような系列に他ならない。第二に，系列の各項の選択に関して一切の制約も課されていない無法則列 (lawless sequence)。この種の系列としては，例えば各項をサイコロ投げによって決めて行くような系列を考えればよい（この場合，選択の可能性が1から6に限られるという制約は残されているが)。最後に，第三番目の種として合法則列と無法則列の中間に位置すると考えられる系列。例えば系列の n 番目の項まではある法則に従い，それ以降は一切の制約が課されないような系列がそれに当たる。選列とはこれら三種の系列の総称である。

では，選列という新たな対象を導入することによってどのように連続体が

構成されるのか。これを正確に述べるためには，選列が数学的にどう取り扱われるのかを明らかにしなければならない。この作業は次章以降に譲る。ここでは，例えば [0, 1] の実数全体が非可算であることを示すために通常用いられる対角線論法が，選列によって実数を表現する場合には使用できないことを示すにとどめよう。対角線論法の核心は，小数表示された各実数が一列に並べられたと仮定し（自然数との一対一対応がつけられたと仮定し），その上で矛盾を導くという点にある。しかしながら，コンマ以下の小数の無限系列を選列と見なすとき，そもそも各実数を一列に並べることさえできないことが解る。いくつかの選列を並べたとしよう。（この仮定には特に問題はない。例えば合法則列 $\lambda x.0$（独立変数の任意の値に対してつねに 0 を出力する関数。ここでは [0000…] のようなすべての項が 0 である列を示す。）を指定することによって，コンマ以下がすべて 0 になる選列を一つ並べたとすることができる。）次に一つの選列を任意に取ったとき，われわれはそれを並べるに当たって既に並べられた選列と比較しなければならない。問題の選列に関してわれわれが入手できる情報はその有限の初切片，つまりその選列の初項から n 番目までの有限列でしかない。一方，既に並べられた選列に関して入手できる情報もまた有限の初切片でしかない。n 番目まではどちらの系列も同一の項から構成されていることが解ったとしよう。$n+1$ 番目の項もまた同一項であった……。では，これらの系列は同一の系列なのか。有限列が与えられたとき，われわれはそれによって一つの選列を表示することはできない。有限列によって表示できるのはその有限列を共有する選列全体の集合でしかないのである。（この点については次節の「種」に関する例を参照されたい。）この場合，古典的には排中律を適用すればよい。その選列は既に並べられた選列と等しいか等しくないかのいずれかである。だが直観主義的にはそのような論法をここで用いることはできない。結局の所，われわれは実数を並べたと仮定することさえできないのである。ゆえに実数を選列によって表示するとき，それらの選列に対して対角線論法を適用することはきでない。

こうした論法を提示されて直ちにはいそうですかと納得できる人はそれほ

ど多くはあるまい。選列としての実数が一列に並べられないというこの論法は，選列のような無限の対象についてわれわれの知識がつねに有限にとどまざるを得ないという事実に基づいている。そしてさらに言えば，知識の有限性と同時に合法則列と無法則列とを同時に許容することによって生ずるある種のテンションにも基づいている。このような知識の有限性および選列概念の抱えるテンションとは，後に連続性を扱う場合にも肯定的に利用されることになるであろう。それゆえ，この論法についての評価はそのときまで先送りすることにしたい。

3.　域―用語と表記法

選列の理論を中心とした直観主義解析学の概要を検討するのに先立って，本節では，以下で用いられる用語と表記法の定義を，主として Dummet [1977] に依拠してまとめておくことにする。

a, b, c, … を，自然数からなる lawlike 列の上を走る文字とする。

α, β, γ, … を，自然数からなる (lawlike 列をも含めた) 選列上を走る文字とする。

$\bar{a}(n)$ は，選列 α の最初の n 項からなる有限列である。すなわち，

$\bar{a}(n)=<\alpha(0), \cdots, \alpha(n-1)>$

ただし，$\bar{a}(0)=<>$ である。$<>$ は空列を意味する。

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, … は，自然数からなる有限列を表す変数文字とする。

$\vec{u}$ の長さ，つまり $\vec{u}$ の項の数を $lh(\vec{u})$ で表す。もし $\vec{u}=<u_0, \cdots, u_n>$ ならば，$lh(\vec{u})=n+1$。さらに $lh(<>)=0$。

有限列どうしの連接 (concatenation) および有限列と自然数の連接はそれぞれ次のように定義される。

もし $\vec{u}=<u_0, \cdots, u_{k-1}>$ かつ $\vec{v}=<v_0, \cdots, v_{m-1}>$ ならば，

$\vec{u}*\vec{v}=<u_0, \cdots, u_{k-1}, v_0, \cdots, v_{m-1}>$ である。

もし n が自然数ならば，$\vec{u}\frown n=u*<n>$。

このとき，任意の n に関して $\vec{u}^\frown n$ は $\vec{u}$ の後続列，$\vec{u}$ は $\vec{u}^\frown n$ の先行列と呼ばれる。

有限列間の順序関係として「$\vec{v}$ は $\vec{u}$ の拡張である $(\vec{v} \ll \vec{u})$」が次のように定義される。

$$\vec{v} \ll \vec{u} \longleftrightarrow \exists \vec{w}(\vec{v} = \vec{u} * \vec{w})$$

以上が主要な用語および表記法であるが，ここではさらに「域 (spread)」という概念の規定を与えておこう。(spread という語に関して決まった訳語はない。「拡張」という語が当てられる場合もあるが，以下で見るように，spread はある構造を持った集合に近い概念であるから，そのニュアンスを汲んで本稿では「域」を採用する。)「域」は，自然数からなる有限列の集まりを定義域とし，{0, 1} を値域とするような関数に他ならない。つまり，域は任意に与えられた有限列に関してその列が許容可能 (admissible) であるか否かを定める関数である。しかしながら，同時にわれわれは域を無限の長さの枝(またはパス (path)) を持った樹 (tree) と見なすこともできる。この場合，樹のパスが選列に対応し，各ノード (node) はそのノードから枝別れして行く各選列の共通の初切片 (initial segment) を表現することになる。われわれは次に域のより詳細な規定を与えるが，その際，関数としての域と樹としての域とを状況に応じて使い分けるであろう。

まず域を関数として捉え，任意の選列のある初切片，つまり任意の有限列が与えられたときに，その有限列が許容可能か否かを定める「域法則 (spread-law)」を次のように定める。

$$s(\vec{u}) = \begin{cases} 0 & \vec{u}\text{ が許容可能のとき} \\ 1 & \text{それ以外の場合} \end{cases}$$

従って，域法則とは有限列全体からなるユニバースの中から，ある制限もしくは限定条件を満たす有限列を許容可能として取り出し，ひとつの集合あるいは種 (species) を定める法則に他ならない。このとき域はそうした種を規定する限定条件そのものと考えることができるであろう。例えば，0と1からなる有限列のみを許容可能とする域法則が与えられれば，この法則によ

って列の各項が0か1であるような有限列の集まり＝域が構成されるのである。

ところで域を樹として捉えた場合，その樹は無限の長さの枝を持った樹でなくてはならない。それゆえある $\vec{u}$ が許容可能であるならば，$\vec{u}$ の拡張 $\vec{u}*k$ の少なくとも一つが許容可能でなければならない。(この場合，途中で terminate するパスはないと考える。域には様々な規定があって，途中で terminate するパスを許すような規定もあるが (例えば，Kleene & Vesley [1964] 6.1)，ここでは Dummett [1977] に従う。) また許容可能でない初切片があるノードより先で新たに許容可能となることもない。さらに域法則が独立変数としてとるものは有限列であるから，任意の有限列に関してそれが許容可能か否かは決定可能だと考えられる。ここで域に関する以上の条件を改めて列挙しておくことにしたい。

(1) 空列＜＞は許容可能であるとする。すなわち域は空虚 (empty) ではないとする。

(2) あらゆる許容可能な有限列は少なくとも一つの許容可能な拡張を持つ。

(3) 許容可能でない有限列に許容可能な拡張はない。

(4) 任意の有限列に関して，それが許容可能かどうかは決定可能である。

これら四つの条件が域の定義を与えてくれる。

域の定義

$$
\begin{aligned}
\mathrm{spr}(s) \longleftrightarrow\ & s(\langle\,\rangle) = 0\ \& \\
& \forall \vec{u}(s(\vec{u}) = 0 \to \exists k s(\vec{u}^\frown k) = 0)\ \& \\
& \forall \vec{u} \forall \vec{v}(\vec{u} \ll \vec{v}\ \&\ s(\vec{u}) = 0 \to s(\vec{v}) = 0)\ \& \\
& \forall \vec{u}(s(\vec{u}) = 0 \vee s(\vec{u}) = 1).
\end{aligned}
$$

例えば，$\forall \vec{u} s(\vec{u})=0$ を満たすような s によって与えられる域は普遍域 (universal spread) と呼ばれる。また，

$$
\begin{aligned}
& \forall \vec{u}[(s(\vec{u}) = 0 \longleftrightarrow \forall i_{i<lh(\vec{u})} u_i < 2)\ \& \\
& \quad (s(\vec{u}) = 1 \longleftrightarrow \exists i_{i \leq lh(\vec{u})} u_i \geqq 2)]
\end{aligned}
$$

によって与えられる域は先に見た0と1のみからなる有限列の域を表す。これまでわれわれは有限列について語ってきたが，その有限列の各項を構成す

る対象については全く規定してこなかった。ブラウワーによれば，そのような項として自然数，有理数，端点として有理数をとる区間などを採用することができる。通常，そのような対象を各有限列に割り当てるための相関法則 (correlation law) が定義されるのであるが，これらの対象はいずれも可算クラスを成すのであるから，議論を自然数だけに限っても一般性は失われない。それゆえ以下の議論では，自然数からなる有限列だけを考察する。また域としては上に示した普遍域のみを考察することにしたい。(ただし，普遍域は図示できないので，場合によっては0と1からなる有限列の域 (binary-spread) を考慮することもある。)

4. 選列と連続性 —非形式的概説—

本節では，選列の理論を構成する主要な二つの直観主義的原理——連続性の原理と Bar 帰納法——のうち連続性原理を提示し，それから帰結する幾つかの定理を提示することにしたい。

選列の理論を述べる場合には，予め若干の留保をつけておく必要があるように思われる。まず第一に，選列に関する諸原理についてブラウワー自身の著述の内にも様々な異同や歴史的に変化があるということ[12]，第二にブラウワーの論証にインプリシットに含まれている原理を顕在化させるに当たって，その定式化が一意には決まらないこと，の二点である。これらの問題にここで立ち入る余裕はない。それゆえ，以下では原則として Dummett [1977] の定式化にのみ依存することとし，ブラウワーの叙述へ立ち戻ることはしない。

さて，周知のように直観主義者はペアノの公理によって自然数が規定されるとは考えていない (もちろん現実に直観主義数学の形式化を行うときには，そうした公理系を採用するのであるが)。むしろわれわれによって行われる自然数の構成の結果として，ペアノの公理の妥当性がわれわれに認識される，と彼らは考えるのである。では，選列という数学的対象の構成からはいかなる数学的原理の妥当性を導き出すことができるであろうか。

最初に，普遍域の上で選列の種 (species) がどのように規定されるかを考

えてみたい。「種」は通常の集合というよりも，そうした集合を定義する性質 (property) そのものを意味し，ある種 S に x が帰属するのは $(x \in S)$, x が性質 S を持つ場合である。従って，選列の種を定めるには，その種に帰属する選列に共通のある性質を定めてやればよい。そのような性質の例としては，既に見たように，「各項が0と1のみから成る」という性質を考えてもよい。明らかにこの性質を満たす選列は普遍域上の部分域，つまり選列の一つの種を成すであろう。あるいは，「$\bar{\alpha}(n) = <\alpha(0), \cdots, \alpha(n-1)> * n$」という性質を考えることもできる。この性質を持つ選列は $\alpha = 12345678\cdots$ だけであり，この性質によって定められるのはただ一つの選列からなる種である。しかしながら，われわれはこれらの性質とは幾分異なる特徴をもった性質をも考えたい。そこで次のような選列 β を考えてみよう[13)]。ただし β_n は選列 β の n 番目の項を表すとする。

$$\beta_1 = 3,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 4,\ \beta_4 = 3,\ \beta_5 = 5,\ \cdots$$

いま「有限の初切片の和が素数である」という性質を考えると，選列 β は明かにこの性質を満足する。というのも，初切片 β_1 から β_4 の和が素数となっているからである。しかしこの性質を満足する選列はなにも β だけではない。無数に多くの他の選列もこの性質を満たすであろう。特に，初切片 β_1 から β_4 を共有する全ての選列がこの性質を持たねばならない。ここで注意を喚起したいことは，一つの初切片を定めることによって，換言すれば（域を無限のパスを持つ樹と考えたとき，各ノードはある初切片に対応するのだから）一つのノードを定めることによって，一つの種を定義することができるということである。それゆえ選列 α の n 番目までの項から成る初切片（選列 α の n 番目のノード）を単に $\bar{\alpha}(n)$ と書き，この $\bar{\alpha}(n)$ が定める種に選列 β が帰属することを $\beta \in \bar{\alpha}(n)$ と表記することにしたい。

最初に挙げた二つの性質は，選列の構成のいわばどの場面においても課されている制約条件に他ならない。もしわれわれが合法則列の様なものだけを考察するならば，そのような性質だけを考慮すれば十分であるかもしれない。だが，無法則列を取り扱う場合，そうした列についてわれわれが入手しうる情報は，有限段階までの項選択に関する情報，つまりその有限の段階ま

でにどのような項が選択されたか＝その選列の初切片，に関する情報でしかないのである。この意味で，最後に述べられた型の性質は選列理論において極めて重要な役割を果たしている。

域と種に関する以上のような特質に注意を払いつつ，次に選列理論における連続性の原理を定式化し，その意味を考えてみたい。

4.1 連続性の原理 (the continuity principle)

連続性の原理には幾つかの形が考えられる。ここでは弱い連続性原理 (weak continuity principle), すなわち WC を提示することから始めよう[14)]。(ただし以下の C(α, n) は α と n の間の任意の関係とする。それゆえ WC は具体的な原理ではなく図式に他ならない。)

$$\text{WC}\quad \forall\alpha\exists nC(\alpha, n)\rightarrow\forall\alpha\exists n\exists m\beta[\bar{a}(m)=\beta(m)\rightarrow C(\beta, n)]$$

この原理の意味を明らかにするために，既に例として用いた「有限の初切片の和が素数である」という性質を再び用いることにする。この性質を A で表し，次の式を考えてみよう。

$$(1)\qquad A(\alpha)\longleftrightarrow\exists n\forall\beta\in\bar{a}(n)A(\beta)$$

われわれは α, β によって選列を考えているのだから，これらについてある場面で入手できる情報は，その場面までに構成された有限の初切片でしかない。それゆえ，$A(\alpha)$ が主張できるとすれば，それは α の有限の初切片 $\bar{a}(n)=<\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}>$ に基づいてのみ主張できるのである。とすると，α と初切片を共有するどの選列 β ($\beta\in\bar{\alpha}(n)$) もまた性質 A を持つはずである。このことは性質「有限の初切片の和が素数である」を考えてみれば一層明白になるであろう。この性質を B とし，$\alpha=<3, 1, 4, 3, 5, \cdots>$ とすると，この選列の4番目の項までからなる初切片に基づいて，$B(\alpha)$ を主張することができる。そして同様の主張は，5番目以降の項がどのように選ばれた選列であっても，4番目までの項を α と共有してさえいれば，成り立つ。従って，(1) は選列という数学的対象のもつ特質のみに依拠することによって正当化されるのである。(この場面では通常 α の「個体性」ないし「同一性」が問題になる。性質 A がパラメータとして α 以外の選列を含まないことが保証されない限り，(1)

は正しくない。それを示すための反例と (1) のより一般的な形については Troelstra [1969] p. 36 を参照。)

以上と全く同様の考察に基づいて，次に性質 A ではなく選列から自然数の上への汎関数 Φ (Φ: $N^N \to N$) を問題とするならば，(1) は次のように変形されるであろう。

(2) $\qquad \Phi(\alpha) = n \longleftrightarrow \exists m \forall \beta \in \bar{\alpha}(m)(\Phi(\beta) = n)$

あるいは，

(2)′ $\qquad \forall \alpha \exists m \forall \beta \in \bar{\alpha}(m)[\Phi(\beta) = \Phi(\alpha)]$

直観主義者はこの (2) または (2)′ を，選列から自然数の上への汎関数 Φ が連続であるための条件と解釈する。しかも WC は (2) の一般化以外の何ものでもない。まさにこの点に WC が連続性の原理と呼ばれるゆえんがある。だが，いかにしてそのような解釈が (2) について可能かを検討することは後回しにして，まず (2) から WC を導出する方法を考えたい。通常，連続性のための条件は (2)′ の形で与えられいてる。これを (2) のように変形しておくことは WC との関係を見やすくする上で重要と思われる。残された問題は量化子の扱いでしかない。そこで次のような選択公理を考えよう。

$$\forall \alpha \exists n C(\alpha, n) \to \exists \Phi \forall \alpha C(\alpha, \Phi(\alpha))$$

これと (2) を組み合わせることによってわれわれは WC を導くことができるのである (WC が飽くまで図式である点には注意する必要があろう)[15]。

Dummett [1977] での WC の定式化はここでの定式化とは異なっている。ダメットは (2) に現れる Φ を自然数の有限列上の合法則的関数 (lawlike function) によって表現しようとする。この合法則的関数は次のような近傍関数 (neighbourhood function) e に他ならない。

e $(\bar{\alpha}(n) = 0 \longleftrightarrow \bar{\alpha}(n)$ が $\Phi(\alpha)$ の値を計算するのに充分なほど長くない
(充分な情報を与えてくれない)

e $(\bar{\alpha}(n)) = m+1 \longleftrightarrow \bar{\alpha}(n)$ が $\Phi(\alpha)$ の値を計算するのに充分なほど長く，
かつ $\Phi(\alpha) = m$

このような近傍関数 e が

(i) $\forall\alpha\exists n\,(e(\bar{\alpha}(n))\neq 0)$

(ii) $\forall n\forall m\,(e(\bar{\alpha}(n))\neq 0\rightarrow e\,(\bar{\alpha}(n))=e\,(\bar{\alpha}(n)*m))$

を満足することは明かである。(i) は Φ がいたるところ定義されていることを意味し，(ii) はある段階で Φ の値が計算されたならば，その後さらに情報が増えてもその値は変わらない，ということを意味する。(さきに $e(\bar{\alpha}(n))=m+1$ と定義した理由は，Φ が値 0 を取ることもありうるからである。ただ m としただけでは値が 0 なのか，それとも値が計算できなかったのかを識別することはできない。) そこで，

$$\Phi(\alpha)=m \quad iff \quad \exists n\,(e(\bar{\alpha}(n)=m+1)$$

と定義した上で，今度は逆に (i) と (ii) を満足するような e によって連続的な Φ を定めることができる。ダメットはこのような e を用いて連続性の原理を定式化した。この方法を取るに当たっては，予め近傍関数 e のクラス K_0 を定めてやらなければならない。またこのクラス K_0 を用いることによって強い連続性の定義もできるのだが，これらの問題にはここでは関わらないことにする。

4.2 位相空間による解釈

さて，残された問題は上の WC がいかにして連続性の条件と解釈されるのか，そして弱い連続性の原理からどのような帰結が得られるのか，ということである。まず (2) の解釈から始めよう。ここでは位相空間を用いて連続性を解釈することにしたい。基本的な考え方は，普遍域を位相空間，一種のベール空間 (Baire space)[16] と見なすことである。その際，(i) 普遍域の無限の枝 (選列) をその位相空間の点とし，(ii) ある初切片を共有する選列の種を開近傍 (open neighbourhood) と考え，そうした開近傍が位相のための基 (base) または開基 (open base) を与える，とすることである。(i) と (ii) によって位相空間が定義されるかどうかを確かめてみよう。

位相空間の定義　集合 X において，部分集合の族 O が与えられて次の三つの条件を満たしているとき，X は位相空間と呼ばれる。

(I) $X\in O$, $\phi\in O$,

(II) $G_1, G_2 \in O$ ならば $G_1 \cap G_2 \in O$

(III) 任意個の $G_i \in O$ に対して $\cup_i G_i \in O$

基 (開基) の定義　X の上の位相 O (位相空間 (X, O)) の基とは，次のような条件を満たす，O の部分集合 O_0 のことである。

$\forall U\,[U \in O \rightarrow \exists S\ (S \subset O_0 \wedge U = \cup S)]$

基の公理

(B 1) $\forall x\,[x \in X \rightarrow \exists U\,(U \in O_0 \wedge x \in U)]$

(B 2) $\forall U_1, U_2 \in O_0, \forall x \in U_1 \cap U_2 \rightarrow \exists U_3 (U_3 \in O_0 \wedge x \in U_3 \wedge U_3 \subset U_1 \cap U_2)$

例えば距離空間 (X, O) では，X の開集合が近傍 $U(x, \varepsilon)$ (ただし $\varepsilon > 0$, $x \in X$ とする。) の和集合として表される。そこで，この型の近傍の全体を与えることによって，X の位相を与えることができるであろう。この近傍全体が基と呼ばれ，上の定義では O_0 によって表現されている。つまり，O の任意の元 U が O_0 の部分集合の和集合によって表されている。このことを域 T の上で表現するにはどのような方策を取ればよいのであろうか。まず域 T の点として選列を取ろう。その上で選列の種を開近傍と見なすことによって，域 T の上の基を定義しなければならない。そこで，

各 $\vec{u} \in T$ に関して，$V_{\vec{u}} = \{\alpha : \alpha \in \vec{u} \wedge \alpha \in T\}$

とおき，このような集合 $V_{\vec{u}}$ の全体からなる族 V を基とする。さらに基の元の任意の和を開集合と定義し，そのように定義された開集合の全体を O とすることによって T に位相を導入することにしよう。(ここで $\vec{u}$ は自然数の有限列であることに注意されたい。従って，$V_{\vec{u}}$ は初切片 $\vec{u}$ を共有する選列の種にほかならない。) このことを開基の定義に合わせて書くならば次のようになる。

$\forall U\,(U \in O \rightarrow \exists V'(\,V' \in V \wedge U = \cup V'))$

このとき V が基の公理を満足することは容易に証明できる。

(B 1) の証明，すなわち，

$\forall \alpha\,(\alpha \in T \rightarrow \exists V_{\vec{u}}\,(V_{\vec{u}} \in V \wedge \alpha \in V_{\vec{u}}))$

の証明。$\alpha\in T$ であるような任意の選列 α が与えられたとき，α の任意の初切片 $\vec{u}$ を取り $V_{\vec{u}}$ を作れば，$V_{\vec{u}}\in V\wedge\alpha\in V_{\vec{u}}$ となることは明かである。

(B 2) の証明。$V_{\vec{u}}$, $V_{\vec{u}}\in V$, $\alpha\in V_{\vec{v}}\cap V_{\vec{u}}$ とするとき，$lh(\vec{u})<lh(\vec{v})$ ならば，$V_{\vec{u}}\subset V_{\vec{v}}$ このとき $V_{\vec{v}}=V_{\vec{u}}\cap V_{\vec{v}}$ である。(つまり，$\alpha\in V_{\vec{v}}\cap V_{\vec{v}}$ であれば，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は有限の初切片を共有しているはずであるから，$\vec{u}$, $\vec{v}$ の長い方をとればそれが条件を満足することは明かである。)

さて，基 V の元 $V_{\vec{v}}$ の任意の和を開集合と定義し，それらの開集合族を

$$O=\{U\in\mathscr{D}(T)\colon \exists V_{\vec{u}}\,(V_{\vec{u}}\subset V\wedge U=\cup V_{\vec{u}})\}$$

とおくことにする。次にこのように定義された開集合の全体 O が，先の位相空間の定義を満足することを確かめよう。

まず T を考える。このとき $T=\cup\{V\langle\rangle\}=V\langle\rangle$ であるから，$T\in O$ が言える。また V からゼロ個の $V_{\vec{u}}$ をとり，それらの和を考えればそれは ϕ となるから $\phi\in O$ も成立する。従って，これで (I) が証明された。

次に (II) を証明しよう。$U=\cup V'$, $W=\cup V''$ とする。$V'=\{X_a\colon a\in\Lambda\}$, $V''=\{z_b\colon b\in\Gamma\}$ とおけば，

$$U\cap W=(\bigcup_{a\in\Lambda}X_a)\cap(\bigcup_{b\in\Gamma}Z_b)=\bigcup_{a\in\Lambda}\bigcup_{b\in\Gamma}(X_a\cap Z_b)$$

$\alpha\in X_a\cap Z_b$ であるような任意の α について，$\alpha\in Y^{\alpha}_{x,z}\subseteq X_a\cap Z_b$ となるような $Y^{\alpha}_{x,z}$ が各 α について存在する。従って，

$$U\cap W=\bigcup_{b\in X_a\cap Z_b}Y_{x,z}=\cup(\bigcup_{b\in X_a\cap Z_b}Y_{x,z})\in O_0$$

(III) の証明も同様である。

かくして，われわれは位相空間 $(T,\ O)$ を手に入れたことになる。だが，出発点として考えた写像 Φ は N^N (すなわち T) から N への写像であった。この写像が連続であることを言うには，予め N の上の位相を定義してやらねばならない。そこで N の最も強い離散位相，すなわち，$S\in\mathscr{D}(N)$ であるような任意の S に関して $S\in O$ となるような位相 $(N,\ O)$ を定義する。

このとき先の (2),

$$\Phi(\alpha)=n \longleftrightarrow \exists m \forall \beta \in \bar{\alpha}(m)(\Phi(\beta)=n)$$

の Φ に関してその逆写像 Φ^{-1} を考える。Φ が連続であることを示すには $\forall S \subseteq N$: $\Phi^{-1}(S) \in O$ を証明すればよい。そのためには $\forall n \in N(\Phi^{-1}(\{n\}) \in O)$ を示せば十分である。

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(\{n\}) &= \{\alpha \in T: \Phi(\alpha)=n\} \\ &= \{\alpha \in T: \exists m \forall \beta \in \bar{\alpha}(m)(\Phi(\beta)=n)\}\end{aligned}$$

ここで $V_{\bar{\alpha}(m)}=\{\beta \in T: \beta \in \bar{\alpha}(m)\}$ とおけば,

$$\Phi^{-1}(\{n\})=\cup V_{\bar{\alpha}(m)} \in O$$

これによって Φ の連続性が示された。

4.3 直観主義における連続性

以上は，連続性の原理 (2) の位相空間による解釈に他ならない。では，連続性のより直観的な解釈はどのようなものとなるであろうか。ここで改めてブラウワーの定理「閉区間上で定義されるすべての実関数は一様連続である」を考えてみたい[17]。この定理は明らかに古典的には成立しない。そのことを示すには，$[-1, 1]$ 上の不連続関数，例えば,

$$f(x)=\begin{cases}0 & x \leqq 0 \\ 1 & x>0\end{cases}$$

を考えればよい。そもそもこの関数は不連続なのだから，一様連続であるわけがないのである。だが，この例はブラウワーの定理に対する反例とはならない。直観主義では，$x_0<0 \vee x_0=0 \vee x_0>0$ のいずれかであることが知られていないような実数 x_0 を定義することができるのであるから，そのような x_0 に関して $f(x_0)$ が定義されたということを証明することはできない。従ってこの事実から逆に，実数値関数 f がいたるところで定義されているためには「(関数 f の) 値を指定された正確度で近似するのに (f の) 独立変数の近似値で充分である」[18] ことが必要なのである。言い換えれば，上例のような不連続関数を考えたとき，不連続点では関数 f が定義されていない，つまり独立変数の有限の近似から関数値を算出することができないのであり，逆にもしある点で関数が定義されるならば，すなわち独立変数の有限の近似から

関数値を計算できるならば，関数はその点で不連続ではないのである。

このような直観主義者の議論を踏まえて，選列 α を近似と見なそう。(こうした選列と近似系列との重ね合わせには問題はない。ブラウワー自身，有理端点をもつ入れ子型の区間系列を成す選列を考察しており，自然数からなる域に有理端点をもつ区間を割り当てる相関法則は容易に構成可能である。)繰り返すが，選列という無限の系列は完結した全体としてわれわれに提示されているわけではない。それゆえ汎関数 Φ が選列 α に適用されて値 n を算出するならば，そうした算出は α の値の無限系列に依存することはできない。しかも α が無法則列である場合には α の各項の生成規則のようなものに依存することもできないのである。一般に，任意の選列が与えられたとき利用できる情報は，その選列の有限の初切片でしかない。従って，もし α の初切片 $\bar{\alpha}(m)$ に基づいて $\Phi(\alpha)$ の値 n が計算できたならば，初切片 $\bar{\alpha}(m)$ を共有する任意の選列 β に関しても $\Phi(\beta)=n$ でなければならないであろう。これはまさに (2) が示していることであり，選列を近似値の系列と読むならば，$\Phi(\alpha)=n$ は独立変数 α のある有限の近似値が n を計算するのに充分だということを意味するのである。Φ は点 α において連続なのであり，もしすべての α に関して Φ が値を持つならば，Φ: $N^N \to N$ は連続である。

こうしてわれわれは (2) あるいは WC が担っている直観主義的な連続性の意味を一応明らかにすることができた。以上の議論では細部にわたる議論をかなり省いてある。例えば選列に適用される述語の決定可能性の問題などは選列という「数学的対象」を考察する場合にはどうしても論ずる必要があるであろう。それらの問題はある程度後節で取り扱うことになる。むしろここで重要なことは，「連続性」が再び知識の有限性に基づいて規定されているという点である。上の議論の要点を改めてまとめると次のようになるであろう。

(1) われわれは任意の選列に関してその有限初切片の値しか知ることはできない。

(2) 従って，選列によって表現される区間 $[a, b]$ の各点に関して関数が定義されているためには，各点（各選列）の有限初切片からその関数値の近

似値を算出できなければならない。

(3) そこで区間 $[a, b]$ からある一点（一つの選列）を取り出したと想定しよう。たとえその点が合法則列によって表されていたとしても（その列の各項が予め法則によって決まっているとしても），われわれの考えている点の中には無法則列によって表現される点も含まれている以上，問題の点と他の任意の点とが最終的に一致するか一致しないかが決定できるという保証はどこにもない。

(4) そもそも区間からある一点を抜き出す（ある一点を指定する）ことは直観主義的にはいつでも可能な訳ではない。もしその点が合法則列ならば，その法則を指定することによって点の指定も可能であろう。だが，無法則列の場合それによって一点が指定できるとすることは，その点を完結した無限の全体として扱うことに他ならない。

(5) 以上から明らかなように，選列への量化が見かけ上選列そのものの上を走っているにしても，実際は選列に関する有限情報（つまり有限の初切片）にしか関与してはいないのである。

(6) ところが上例の不連続関数の定義には選列に関する有限情報を超えた量化が含まれている。従ってそのような関数によって定められる不連続点は直観主義的には定義されないのである。

ここからも読み取れるように，連続性を巡る直観主義の論法は，非可算性の論法と同様に，明らかにわれわれの知識の有限性にその基礎をおいている。ここでさらに注意したいことは，直観主義論理の意味論において排中律を拒否するための論法もまた知識の有限性に基礎をおいているという点である。ところが，直観主義論理においては排中律はつねに妥当な原理ではないということが主張されるだけであり，排中律そのものが反証されるわけではない（なにしろ排中律の二重否定が証明されるのだから)。一方，直観主義解析学では連続性の原理を用いることによって排中律に対する反例が証明されるのである。従ってここから推定されることは，一見，論理と解析では同様な形で「知識の有限性」が論拠とされていながらも，その意味付けや用い方にある種の差異があるのではないかということである。(このことはクリプキ

(Kripke) モデルが論理により適合するにも関わらず，解析のモデルとしてよりよく適合するのはベート (Beth) モデルの方だという事情と相まって極めて興味深い論点を示している。) だが，本稿ではこの問題に立ち入ることはできない。ここではそうした論点をより明確にするための予備作業という意味で，「排中律の反証」を含めた連続性原理からの帰結の幾つかを見てみたいと思う。

4.4 排中律の反証

ここでは連続性の原理（正確に言えば上述の弱い連続性原理）が古典論理と両立しないこと，つまり連続性原理によって古典論理のある法則が反証されることを示そう。そのような法則の一例として次のような型の排中律を取り上げたい。

(TND) $\forall\alpha\,[\forall n(\bar{\alpha}(n)=0)\vee\neg\,\forall n(\bar{\alpha}(n)=0)]$

しかしながら，この反証を示す前に予め選言を含む連続性原理を導いておくのが得策である。

$$\forall\alpha(A(\alpha)\vee B(\alpha))\rightarrow\forall\alpha\exists x\,[\forall\beta\in\bar{\alpha}(x)\,A(\beta)\vee\forall\beta\in\bar{\alpha}(x)\,B(\beta)]$$

選言を含む連続性原理の証明 $\forall\alpha(A(\alpha)\vee B(\alpha))\longleftrightarrow\exists x\,[(x=0\wedge A(\alpha)\vee(x\neq 0\wedge B(\alpha))]$ は容易に証明できる。この式に WC を適用すれば上式が帰結する[19]。

($\neg$ TND) の証明，すなわち上の排中律を反証するには，

$$\neg\,\forall\alpha\,[\forall n(\bar{\alpha}(n)=0)\vee\neg\,\forall n(\bar{\alpha}(n)=0)]$$

を示せばよい。そこでまず，

$$\forall\alpha\,[\forall n(\bar{\alpha}(n)=0)\vee\neg\,\forall n(\bar{\alpha}(n)=0)]$$

と仮定する。このとき選言を含む連続原理により，

$$\forall\alpha\exists y\,[(\forall\beta\in\bar{\alpha}(y)\,\forall x(\beta(x)=0))\vee(\forall\beta\in\bar{\alpha}(y)\neg\,\forall x(\beta(x)=0))]$$

を得る。ここで α として $\lambda x.0.$ すなわちすべての項が 0 であるような「0000……」という選列を取り，その選列の y 番目までの有限列を n とすると，つまり $\bar{\alpha}(y)=n$ とすると，

$$(\forall\beta\in n\forall x(\beta(x)=0))\vee(\forall\beta\in n\neg\,\forall x(\beta(x)=0))$$

この選言の第一の選言肢は偽である。$\beta \in n * \langle 1 \rangle$ であるような β を取ればそれは明らかである。そして第二の選言肢も偽であることが解る。$\beta = \lambda x. 0.$ とおけばよい。従って,

$$\neg \forall \alpha \, [\forall n(\bar{\alpha}(n) = 0) \vee \neg \forall n(\bar{\alpha}(n) = 0)]$$

が証明された。

WC を直観主義的な原理として承認することの帰結は，排中律の反証にとどまらない。これ以外にも様々な古典論理の法則が反証されるのである。更に注目すべきことは，WC と「チャーチの提唱」とが両立しないという点である。さきに「法則」や「構成」を一般帰納的と解釈することが必ずしもできないことに注意したのはこのような事情を配慮してのことであった。しかしこれ以上 WC からの帰結の問題には立ち入らないことにしよう。むしろここでは上述の排中律の反証に再度立ち戻り，その証明を詳しく分析することによって選列の概念のいかなる特質がそうした反証において用いられているのかを明らかにしたい。そのために以下では節を改めて Heyting [1956] における非形式的な排中律反証の要点を再構成し，上記の証明との対応づけを行おうと思う。

5. 排中律の反証再考

Heyting [1956] pp. 108–109 の議論には，排中律の反証に関する直接の言及があるわけではないが，インプリシットにはその論証がほぼ完全な形で含まれている。最初にその論証を再構成することから始めたい[20]

まず，3節で見た各項が0と1のみからなる域 (binary spread) を考え，その特殊ケースとして次の条件を満たすような域 M を取り上げる。

(1) M はその各項が0と1のみからなる域である。

(2) もし $\alpha \in M$ であるような α に関して $S(\bar{\alpha}(n))=0$ であり，かつ $\alpha_n=0$ ならば，$\alpha_{n+1}=0$ または1，もし $\alpha_n=1$ ならば $\alpha_{n+1}=1$ である。

すなわち，ある有限列が M において許容可能であるのは，M の元である各選列が0と1のみからなる選列であり，さらに一度1が現れるとそれ以降の項がすべて1であるような選列の場合である。つまり，次のような選列の集

まりを考えればよい。

11111……
01111……
00111……
00011……

このような M の元に対して自然数を対応させる規則 Ξ を次のように定める。

$$\Xi(\alpha)=\begin{cases}1 & \alpha\text{のすべての項が}0\text{であるような}\alpha\text{に対して,}\\ 2 & \alpha\text{のすべての項が}1\text{であるとき,}\\ n+2 & \alpha\text{が}n\text{個の}0\text{とそれに続く}1\text{からなるとき。}\end{cases}$$

つまり，Ξ は M の元である各選列に次のような自然数を対応づけるのである。

$$\begin{array}{ll} 0000\cdots\cdots & \to 1\\ 1111\cdots\cdots & \to 2\\ 0111\cdots\cdots & \to 3\\ 0011\cdots\cdots & \to 4\\ \vdots & \\ \underbrace{0\cdots0}_{n}111\cdots & \to n+2 \end{array}$$

以上のような準備の上で，述語 P を次のように定めよう。

$P(x)$: Ξ は x にひとつの自然数を割り当てる。

ただし x は域 M の上を走るものとする。このとき排中律の否定，

$(\neg\ \mathrm{TND}\ *)\qquad \neg\forall x(P(x)\vee\neg P(x))$

が証明される[21]。

$(\neg\ \mathrm{TND}\ *)$ の証明。

以上のようなハイティングのセッティングのもとで $(\neg\ \mathrm{TND}\ *)$ の証明を考えてみたい。そこでまず，

$\forall x(P(x)\vee\neg P(x))$

と仮定する。再び選言に関する連続性原理,

$$\forall\alpha(P(\alpha)\vee\neg P(\alpha))\rightarrow\forall\alpha\exists x[\forall\beta\in\bar{\alpha}(x)P(\beta)\vee\forall\beta\in\bar{\alpha}(x)\neg P(\beta)]$$

を用い,この原理の後件が矛盾を含むことを示せばよい。ここで α として再び $\lambda x.0$. つまりその各項がすべて0であるような選列をとり,その x 番目までの有限列を n とおく,すなわち $\bar{\alpha}(x)=n$ とおくと,選言を含む連続性原理の後件は次のようになる。

$$\forall\beta\in nP(\beta)\vee\forall\beta\in n\neg P(\beta)$$

この命題の第二の選言肢,$\forall\beta\in n\neg P(\beta)$ は明らかに偽である。β として $n*1$ をとればよい。このとき β は Ξ により $n+2$ を割り当てられるであろう。第一の選言肢が偽であることを示すのはいささか厄介である。$\beta\in n$ であるような β は無数にある。従って,再び連続性原理によって n 以降の有限切片から,β に割り当てられる値が知られねばならない。しかしそれは不可能である。なぜなら有限切片 m が与えられたとき,$\beta\in m$ であるような β は無数に存在するからである。それゆえ,第一の選言肢もまた反証された。よって,$(\neg\,\mathrm{TND}*)$ が証明された。

上の証明に関する註　実は第一の選言肢を証明する際に,Heyting [1956] では「ファン定理」というものが用いられている。「ファン定理」は上の対応規則 Ξ が任意の選列の有限初切片から値を算出できることを保証する定理であるが,これは有限分岐域 (finitary spread),つまり任意のノードから分岐するパスが有限個であるような域に関する連続性原理に他ならない。WC を仮定するならば,この「ファン定理」は WC の系として容易に導出することができる。しかし最近の文献で「ファン定理」として言及されているのは連続性原理の系としてのファン定理ではなく,Bar 定理の系として導かれる定理の方である。従って,誤解を避けるために上の証明では「ファン定理」への言及を行わなかった。

さてこうした排中律の反証に関して,最近,内井惣七氏により反論が提出された[22]。以下ではまず氏の反論をまとめ,その上で直観主義者がそうした反論にどう答えるかを考えてみたい。もとより内井氏の反論は筆者が理解し

まとめ得た限りの反論であって，その責任が筆者にあることは言うまでもない。

反論の核心は，「0000……」という対象が域 M の元として許容可能であるとしても，M の任意の元をとってそれとの同一・不同一が確定できない以上，「0000……」を M の中で一つの確定した対象と見なすことはできない，という点にある。つまり，「M の中で，他の元と（直観主義的に）必ずしも識別できない元に一義性を仮定し，それに数1を割り当てられるというのは，直観主義者の他の重要な主張と首尾一貫しない。」というわけである。そして直観主義的な方法の規範としての連続性の原理（内井氏の本および Heyting [1956] では「ファン定理」），すなわち「M の任意の元について Ξ が値 n を割り当てるとすれば，その元の有限の初切片に基づいて値 n が決定されねばならない」を認めるとすれば，Ξ による「0000……」への値の割当は明らかに連続性原理を超越するものであり，まさにこの点に理想化が入り込んでいる，というのが批判の眼目であろう。

しかしながらこの批判は直観主義者の真意を捉え損ねているように思われる。まず第一に，前節での排中律反証からも明らかなように，対応規則 Ξ なしにも反証は可能なのである。従って，連続性原理と対応規則 Ξ の間の乖離を指摘することは直観主義者に対する批判とはならないのである。しかし，このように言うことは，なにも Heyting [1956] の対応規則 Ξ がある種の理想化を含むと言っているわけではない。それを明らかにするために，まず M の元には二種の対象が含まれていることに注意しなくてはならない。M には，

(1) $\lambda x.0$.（すなわち任意の独立変数 $n \in N$ に対してつねに0を出力するような関数または法則）によって表現されるような合法則列

(2) ある場面までは無法則だが（但し各項は0か1しか取れないが），いったん1が出現すれば以降は1のみを出力する合法則列になるようなもの（しかし任意の列を取ったときそれがいつ合法則列になるのかは予め決定できない）[23)]

が含ままれている。反論の中で内井氏が「0000……」は特別な対象であると言っているのはある意味で正しい。というのも「0000……」は完全な合法則

列だからである。しかし M には合法則列だけではなく，(2) 型の列も含まれているのである。それゆえ，もし M に属する任意の元について何事かを主張しようとすれば，その場合われわれは直観主義の規範としての連続性原理に従わなければならないのである。そして対応規則 E が「$\forall\alpha$」(ただし α は M に属する選列) を冠頭にもつような規則であるならば，連続性原理に従う限り，明らかに「0000……」に値を割り当てることはできないであろう。だが，規則 E はそのような全称形にはなっていないのである。規則 E は「0000……」とは異なる M の元に値を次々と割当て，その極限として「0000……」に値1を割り当てているわけではない。E はまず完全な合法則列 $\lambda x.0.$ に一つの値を割当て (このとき $\lambda x.0.$ の法則性を利用することには全く問題がない，なぜなら，M の任意の元に言及しているわけではないのであるから)，その上で M の他の元に帰納的に値を割り当てているのである。従って，対応規則にも (直観主義的に見て) 全く問題はない。

以上のような議論にも関わらず，なお疑念が残るとすれば，それはおそらく合法則列とそれ以外の列との同居を許すような域を直観主義的に構成できる，という点にあるのではないだろうか。実際これまで見てきた幾つかの帰結，例えば連続性の概念や自然数列全体が並べられないことの論証，排中律の反証はいずれも「合法則列と無法則列 (あるいはその中間の列) の両方を含む域」のもつ特殊な性格—さきに合法則列と無法則列のテンションとして示唆したこと—に依拠していた。このことは逆に見るならば，合法則列のみもしくは無法則列のみからなる域を考えるのではなく，両者をともに含む域を考えるという点に直観主義解析学の基盤があるとも言えるであろう。従って，選列からなる域を考えたときにそのような域として合法則列だけを含む域や無法則列だけからなる域しか構成できず，両者が共存する域を構成することが不可能だとすると直観主義数学はそもそも存立し得ないであろう。

だが，域という概念と合法則列・無法則列の概念とは互いに独立に他ならない。域はその域の元全体を規定する条件のみによって生成される。例えば域 M は (1) 元である選列の各項は0もしくは1であること，(2) いったん1が現れればその後続の項はすべて1であること，の二つの条件に基づいて生

成される。これ以外の一切の条件はないのであるから，域 M の許容可能な元の一つを $\lambda x.0$ という法則によって指定することに何も問題はない。このとき，域 M を構成する前に予め一つの法則があって，その法則によって M の一つの元が構成されたというわけではない。話はむしろ逆なのである。(何が M の元として許容可能かについての条件が与えられた後で) M の一つの元を法則を介して指定することは，その法則から当の元が M で許容可能であることが判定できさえすればいつでも可能なのである。しかし M の任意の元をある法則によって指定することは可能であろうか。これを可能だと承認することは「任意の法則」を認めることに等しい。具体的に構成されない法則の全体を考えることは直観主義的にはほとんど認め難いことである。そこで「任意の法則」という概念に頼ることなく域の任意の元を扱うために，一つの極として無法則列が持ち出されるのである。

かくして，無法則列は域の任意の元に言及するためのいわば「言い回し」に他ならない。しかも無法則列がもつとされる情報はある段階において既に確定きた有限の初切片だけでしかない。従ってこの概念には直観主義の規範を超えるような理想化はいっさい含まれていないのである。一方，域のある元を具体的に構成された法則によって指定することにもまた何も問題はない。ところが，合法則列は構成済みの有限初切片という情報以外に，その後の各項を算出するためのアルゴリズムという情報をも持っている。そして両者におけるこのような情報量の差が排中律反証を可能にしたのである。この意味で，先の証明には直観主義者の禁欲を破るような理想化は含まれていないように思われる。

6. 結　　語

しかしながら，以上の議論は排中律の反証に対して提出された疑義を晴らそうという試みであって，これだけの議論から選列の概念が完全に明確になったと主張するつもりはまったくないことを付け加えておきたい。既に述べたように，論理法則の解釈レベルで持ち出される「知識の有限性」の論法が，排中律反証へは導かないのに対し，有限情報しか持ち得ない「対象」の

導入によって排中律の反証が可能になるのはどうしてなのか，等の問題は依然として明らかではない。これ以外にも選列に関してはなお多くの問題が残されている。

とはいえ，選列を中心にすえた直観主義解析学が「直観主義」の見落とされがちな側面に照明を当てていることは明らかであろう。その側面とは数学的対象の側面である。「問題は数学的対象の存在ではなく，その客観性だ」というクライゼルの主張からも窺えるように，ダメット以降の直観主義は意味論的構成主義としての側面が強調され，直観主義の存在論的側面が余りにも軽視されてきたのではないだろうか。意味論的構成主義の観点から，さきにわれわれは「知識の有限性」の論法という命名を行った。しかしこのことは，われわれとは独立の対象領域があって，そうした領域についてわれわれが何事かを知る際の限界を意味していたわけではない。むしろそれは，われわれの対象構成能力の有限性に言及していたのである。さらに，直観主義タイプ理論における $x \in N$ の証明が x という対象の構成そのものによって与えられることを想起してもよい。直観主義数学においては数学的対象の構成抜きには何も始まらない。そして証明されることはすべて構成された対象から引き出される性質に他ならない。この意味で「直観主義」は直観主義数学というそれ自体で完結した世界を形作っている。他方，ダメットの意味論的構成主義は，反実在論という形で「直観主義」の極めて広範な適用領域を用意したにもかかわらず，直観主義の対象構成の側面を捉えきれてはいないように思われる。直観主義数学では，言明の正当化はすべて自然数の構成に帰着させられており，しかも自然数そのものが数学的対象に他ならない。ところが，直観主義の立場を数学的領域を越えた領域の言明へと拡大することにともなって，「対象の構成」という側面が随分と見にくくなってしまったように思われる。まさにこの点に直観主義の意味論的構成主義としては捉えきれない側面があるのではないだろうか。

〈註〉

1) 当初の予定では，直観主義解析学の中心となる二つの原理—連続性原理と Bar 帰納

法の原理—との関連において「選列」概念の解明を試みるつもりであったが，「連続性原理」を巡る諸問題の扱いだけで予想をはるかに越える紙数に達したため，「Bar帰納法」については別稿を充てることにした。

2) この用語 (semantical constructivism) は，MacCarty, C. 'Intuitionism: an introduction to a seminer' 1983, *J. Philosophical Logic* 12 より借用した。

3) 誤解のないように言っておけば，ここで言及されている「原理」は連続性の原理のことである。しかしながら，排中律型命題の否定は，連続性原理に基づいて証明されるだけでなく，「Bar—定理」(または「Bar—帰納法」) によっても証明される。「Bar—定理」に基づく排中律反証については本稿の続編「選列と論理 II」で扱う予定である。なお，「連続性原理」と「Bar—定理」における「原理」,「定理」は共に特定の公理系を前提とした概念ではない。「選列」として導入された新たな数学的対象の持つ性質に基づいてこの「原理」及び「定理」はブラウワーによって正当化され「証明」された。本稿で問題としたいのはこの正当化や「証明」である。)

4) 「連続体」を巡る Brouwer 自身の考え方の変遷や前期直観主義 (pre-intuitionism) に属する人々，例えば Borel 等からの Brouwer への影響関係については，Troelstra & van Dalen [1982] に含まれる Troelstra の論文 'On the origin and development of Brouwer's concept of choice sequence' が詳しい。

5) 同値関係から実数の定義へと進むためには，厳密に言うと同値関係から同値類を構成する手続きが構成されていなくてはならない。そのために通常「種 (species)」という概念が導入されるのであるが，ここでは「種」を集合構成のための「性質 (property)」のようなものとだけ規定し，それ以上の考察を行わない。

6) Dummett [1977].

7) この点の詳細な展開については Dummett [1977] と Martin-Löf [1963] を参照されたい。

8) これについては例えば Dummett [1977] と Trolestra [1969] にある程度の解説がある。

9) 例えば直観主義以外の構成主義 (その代表例は Bishop の構成主義数学であるが) では，非構成的存在証明を構成化することによってより多くの情報を獲得できるようになることと同時に，古典的には分節化されない概念の分節化を構成主義の一つの利点だとしている。

10) 予め用語上の注意を述べておきたい。「選列」は choice sequence, Wahlfolge の訳である。ブラウワーはこの他に arrow や proceeding infinite sequence といった語を用いており，ハイティング以降，infinity proceeding sequence (ips) もまた多く用いられるようになったが，本稿では一貫して「選列」を用いることとする。

11) 例えば Troelstra の一連の文献にはこの傾向が強く現れている。van Dalen はその点に関して Troelstra よりも幾分慎重である。

12) この点については先の Troelstra & van Dalen [1982] に含まれる Troelstra の論文および Parsons [1967] を参照されたい。

13) 以下の例は van Dalen [1986] に基づいている。

14) 連続性原理を以下のような形で最初に定式化したのは Kreisel である。Kreisel [1958] を参照。

15) ここでさらに WC よりもさらに弱い WC！を定式化することもできる。しかし WC！からはチャーチの提唱を反証することはできない。これについては Troelstra & van Dalen [1988] の4章を参照。

16) X を位相空間とするとき，$U \subset X$ であるような U がたかだか可算個の疎な集合の合併として表せるとき，U を第一類集合と呼ぶ。ここで $U = \cup A$ となる A が疎であるとは，$A^i = \phi$ を意味する。このとき位相空間 X がベール空間であるとは，「U が第一類の集合であれば，U^c が X で至るところ稠密となること」をいう。

17) 実際のところ，この定理は連続性原理を前提とすることによって初めて証明される。(その証明はここでは行わない。Dummett [1977] や Troelstra & van Dalen [1988] 等を参照。) ここでは直観主義における連続性をいかに理解すべきかという観点から，論理的導出関係を逆転させているのである。なお，この例証は Troelstra [1977] での非形式的な議論に負っている。

18) Troelstra [1977] p. 1005.

19) 本文には証明は容易と書いたが，それほど自明とは思われないので以下にその証明を記す。まず，

(*) $A \vee B \Leftrightarrow \exists x\, [(x=0 \wedge A) \vee (x \neq 0 \vee B)]$

を示す。証明 (1) A が成り立っている場合。A と仮定する。このとき $A \vee 0 = 0$ である。従って，$\vee$-導入則により，$(A \wedge 0=0) \vee (0=1 \wedge B)$ が成り立つ。$\exists$-導入則により，$\exists x\, [x=0 \wedge A) \vee (x=1 \wedge B]$，それゆえ $\exists x\, [(x=0 \wedge A) \vee (x \neq 0 \wedge B]$。

(2) B が成り立つ場合も同様。

つぎに選言に関する連続性を証明する。

証明　$\forall \alpha (A(\alpha) \vee B(\alpha)))$ と仮定する。(*) により，

$\forall \alpha \exists x\, [(x=0 \wedge A(\alpha)) \vee (x=1 \wedge B(\alpha))]$

が成り立つ。ここで選択原理を用いて，

$\exists \Phi \forall \alpha\, [(\Phi(\alpha)=0 \wedge A(\alpha)) \vee \Phi(\alpha)=1 \wedge B(\alpha))]$

この Φ としてある特定の関数 e (これは先に本文で定義された e にほかならない) をとる。Φ としてこのような e をとることができることを保証しているのが WC である。ただし，e を用いた WC の定式化はここでは与えられていない。Dummett [1977] pp. 80–83. を参照されたい。

$\forall \alpha\, [e(\alpha) = 0 \wedge A(\alpha)) \vee (e(\alpha)=1 \wedge B(\alpha))]$

このとき，e の定義から $(e(\alpha)=0 \wedge A(\alpha))$ は，ある m に関して，

$\forall \beta \in \overline{\alpha}(m)\, A(\beta)$

を意味する。同様に，$\forall \beta \in \overline{\alpha}(k)\, B(\beta)$ であるから，m と k の大きい方をとってそれを n とおけば，

$\forall \alpha \exists n\, [\forall \beta \in \overline{\alpha}(n(\, A(\beta)) \vee (\forall \beta \in \overline{\alpha}(n)\, B(\beta)]$

が得られる。

20) 以下における Heyting の議論の再構成は，内井 [1988] および内井氏からの私信に多くを負っている。

21) この命題を証明する前に，ハイティングが実際に行っている証明を一瞥しておこう。

ハイティングが以上のような装置のもとで実際に証明しているのは，次の二つの命題である。

$$\forall x \neg\neg P(x),\ \neg \forall x P(x)$$

ただし $\forall x \neg\neg P(x)$ に関して彼はその同値命題 $\neg \exists x \neg P(x)$ を証明している。これら二つの命題から彼が直接証明しているのは，$\forall x \neg\neg P(x) \rightarrow \neg\neg \forall x P(x)$ が直観主義的には証明できないということである。

ところが，上の二つの命題からはさらに，次の命題が証明されるように思われる。

$$\neg(\forall x P(x) \vee \neg \forall x P(x))$$

まず，上の選言肢の第一項は偽でなければならない。というのも，$\neg \forall x P(x)$ が証明されるのであるから，他方，第二の選言肢もまた成立しない。なぜなら，$\neg \forall x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg\neg P(x)$ であるがが，$\forall x \neg\neg P(x)$ 証明される以上，これは矛盾であり，従って，$\neg\neg \forall x P(x)$が証明されるからである。(ただし，Heyting がこのような証明を行っている訳ではない。)

しかし，この証明にはどこかおかしいところがある。直観主義命題論理では，$\neg(P \vee \neg P)$ は証明されず，$\neg\neg(P \vee \neg P)$ が証明されるからである。もし上のような排中律が証明されるならば，直観主義命題論理は直観主義述語論理の命題部分を成さないことになろう。では，上の証明のどこに誤りがあるのだろうか。まず第一に，選言肢の第一項を反証するために用いられた，$\neg \forall x P(x)$ がもし実際に証明されるならば，それによって既に選言肢の第二項が証明されたことになるはずである。にもかかわらず，その第二項が再び反証されているのであるから，そもそも第一項は反証されていないことになる。問題は $\neg \forall x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg\neg P(x)$ にあるように思われる。確かに命題論理においては，$P \rightarrow \neg\neg P$ は証明可能だが，$\neg \forall x P(x) \rightarrow \neg \forall x \neg\neg P(x)$ は述語論理では証明できない。この命題が誤りであることは，実は内容的にはハイティングの元来の証明と同値である。というのも，ハイティングの証明により，$\neg \forall x P(x)$ は証明可能，つまり真である。一方，$\forall x \neg\neg P(x)$ が証明できることから，明らかに $\neg \forall x \neg\neg P(x)$ は偽だからである。従って，以上のような型の排中律反証は明らかに認められない。またこの型の排中律反証と先の ($\neg$ TND *) の証明はまったく別の証明であることに注意しなくてはならない。

22) 内井 [1988] p. 46–48 参照。

23) Troelstra & van Dalen [1988] において，このような列は hesitant sequence と呼ばれている。

* 謝辞　内井氏の疑問と反論が本稿を執筆するための大きな刺激となった。記して感謝したい。また，内容とやっかいな証明をチェックして下さったことに関して石垣寿郎氏と野矢茂樹氏にも感謝したい。

—引用文献—

Beeson, M.: 1985, *Foundations of Constructive Mathematics.* Metamathematical

Studies, Springer-Verlag, Berlin.

Bridges, D. and Richman, F.: 1986, *Varieties of Constructive Mathematics*, London Mathematical Society Lecture Notes Series 97, Cambridge University Press, Cambridge.

Brouwer, L. E. J.: 1927, 'On the domain of definition of function' in Brouwer [1975].

Brouwer, L. E. J.: 1975, *Collected Works I*, (ed.) A. Heyting, North Holland, Amsterdam.

Brouwer, L. E. J.: 1981, *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, (ed.) D. van Daren, Cambridge University Press, Cambridge.

van Dalen, D.: 1978, 'An interpretation of intuitionistic analysis', *Ann. Math. Logic* 13, 1–43.

van Dalen, D.: 1986, 'Intuitionistic logic', in *Handbook of Philosophical Logic Vol III*, (eds.) D. Gabby and F. Guenthner, D. Reidel, Dordrechit.

Dagalin, A. G.: 1987, *Mathematical Intuitionism. Introduction to Proof Theory*, Translations of Mathematical Monographs, Vol 67, American Mathematical society.

Dummett, M.: 1977, *Elements of Intuitionism*, Oxford University Press, Oxford.

Heyting, A.: 1956, *Intuitionism. An Introduction*, North Holland, Amsterdam.

Kleene, S. C. and Vesley, R. E.: 1965, *The Foundations of Intuitionistic Mathematics*, North Holland, Amsterdam.

Kreisel, G.: 1958, 'A remarks on free choice sequence and the topological completeness proofs', *J. S. L. 23*, 369–388.

Kreisel, G.: 'Lawless sequence of natural numbers', *Compos. Math. 20*, 222–248.

Martin-Loef. P.: 1963, *Notes on Constructive Mathematics*,

Parsons, C.: 1967, 'Introduction to Brouwer [1927]', in *From Frege to Godel.* A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931. Harverd Univ. Press. Cambridge, Massachusetts.

Troelstra, A. S.: 1969, *Principles of Intuitionism*, Springer-Verlag, Berlin.

Troelstra, A. S.: 1977, *Choice Sequence. A Chapter of Intuitionistic Mathematics*, Oxford Univ. Press, Oxford.

Troelstra, A. S.: 1983, 'Analysing choice sequence', *J. Philosophical Logic* 12, 197–260.

Treolstra, A. S. and van Dalen, D.: 1982, *The Brouwer Centenary Symposium*, North Holland, Amsterdam.

Troelstra, A. S. and van Dalen, D.: 1988, *Constructivism in Mathematics I*, North Holland, Amsterdam.

Treolstra, A. S.: 'Aspects of constructive mathematics' in *Handbook of Mathematical Logic*, (ed.) J. Barwise. North Holland, Amsterdam.

内井惣七: 1988,「論理, 数学, 言語」, 内井惣七・小林道夫編:『科学と哲学』昭和堂 1988, 所収, I, 3–51.