北大文学部紀要 47-3 (1998)

ブール代数分析における簡単化
——クヮイン・マクラスキー法による論理関数の簡単化——

鹿 又 伸 夫

1．ブール代数分析と簡単化

C. レイガン(Ragin, 1987)によって提唱されたブール代数分析は，おもに事例データや歴史比較データを対象とした質的比較分析を体系的，論理的におこなうものである。QCA (Qualitative Comparative Analysis) は，これを実行するプログラムであり，ドラス (Drass, 1988) によって開発された。ブール代数分析およびQCAは，スイッチング理論や論理回路の分野でもちいられる論理関数（論理式，論理回路）の簡単化 (minimization) を利用するものである。

論理関数の簡単化は，公式を利用する代数的方法[1)]，カルノー図(Karnaugh map) による図解的方法，クヮイン・マクラスキー法 (Quine-McCluskey minimization technique) による表解法などがある。しかし，代数的方法は計算が煩雑になり効率が悪い。また，カルノー図による方法も変数が多いと（とくに5変数以上になると）演算がきわめて複雑になる。

他方で，クヮイン・マクラスキー法は，定まった手順の繰り返しによって機械的に演算ができるため，簡単化をおこなう場合の一般的方法となっている。クヮイン・マクラスキー法は，クヮイン (W.V. Quine) が提案し，マクラスキー(E.J. McCluskey) が発展させたものであり，QCAもこの方法を使用している。しかし，レイガン(Ragin, 1987)はこの名称にいっさい言及していない。またドラスは，QCAがクヮイン・マクラスキー法による繰り返し

演算をもちいていると記しているが (Drass, 1988：13), この方法についてそれ以上の詳しい説明はおこなっていない。そこで本稿では，永田 (1972), 宮田 (1987), 藤井 (1987), 清水・曽和 (1979), 田丸 (1989), 浅川 (1991), 細井 (1992), 小島 (1997), 日高 (1997) などを参考に，QCA が採用しているクワイン・マクラスキー法のアルゴリズムを説明する。

2．ブール代数の公式と最小化定理

ブール代数による論理関数の記述は，2つの状態つまり「真 (true)」と「偽 (false)」をあらわす2値の論理変数 (logical variable) と，論理記号とでなされる。論理変数は，ブール変数 (Boolean variable) とも呼ばれる。論理変数は，A, B などの文字であらわし，真と偽の2つの状態はそれぞれ数字〝1〟と〝0〟に対応させられる。論理記号は，論理積 AND を積で，論理和 OR を和(＋)で，否定 NOT (補元)を $\overline{A}$ などと表記する。レイガン(Ragin, 1987)および QCA では，否定 NOT を小文字で表記しているが，あまり一般的ではないので，ここでは前者の $\overline{A}$ という表記法にしたがう。論理変数と論理記号から記述される式は論理関数 (logical function)，論理式 (logical equation)，ブール代数式 (Boolean equation)，ブール関数 (Boolean function) などと呼ばれる。また，論理式のなかでもちいられる数字〝1〟と〝0〟は，論理定数 (logical constant) といわれる。

ブール代数による論理式の演算規則には，次のような公式がもちいられる。二重否定をのぞく各公式は，論理積 (・) と論理和 (＋) (そしてそれと同時に論理定数の〝1〟と〝0〟) を入れ換えても成立する双対定理 (duality theorem) が証明されている。

基本演算	$A+0=A$	$A \cdot 1=A$
	$A+1=1$	$A \cdot 0=0$
交換則	$A+B=B+A$	$A \cdot B=B \cdot A$
結合則	$A+B+C=(A+B)+C$	$A \cdot B \cdot C=(A \cdot B) \cdot C=A \cdot (B \cdot C)$

分配則	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$	$A+B\cdot C=(A+B)\cdot(A+C)$
べき等則	$A+A+\cdots\cdots+A=A$	$A\cdot A\cdot\cdots\cdots\cdot A=A$
吸収則	$A+A\cdot B=A$	$A\cdot(A+B)=A$
二重否定（対合則）	$\overline{\overline{A}}=A$	
相補則（補元則）	$A+\overline{A}=1$	$A\cdot\overline{A}=0$
ド・モルガンの法則	$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$	$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$

ブール代数をもちいた論理関数の簡単化では，次の最小化定理，とくに左の式をもちいる。これらの式は，上記の公式から導出される[2)]。

最小化定理	$A\cdot B+A\cdot\overline{B}=A$	$(A+B)\cdot(A+\overline{B})=A$

3．標準形と簡単化

論理変数の値の組み合せそして論理関数の値を表にあらわしたものは，真理表または真理値表（truth table）と呼ばれる。表1はその例をしめしたもので，論理変数 A, B, C の3変数と論理関数 F つまり $F(A, B, C)$ がしめされている。論理回路の分野では，論理変数を入力（input），論理関数を出力（output）と呼ぶ場合もある。真理表全体の論理関係を論理関数（論理式）に

表1　真理表の例

論理変数			論理関数
A	B	C	F
0	0	0	0
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

あらわすには，最小項あるいは最大項をもちいる2つの表記法がある。すべての変数が論理積（logical product）で含まれている項を最小項（minterm）と呼び，他方ですべての変数が論理和（logical sum）で含まれている項を最大項(maxterm)という。なお，QCAでは，最小項を第1次項(primary term)と呼んでいるので留意されたい。

論理積の和の形であらわされた式を積和式（sum of products form)，他方で論理和の積であらわされた式を和積式（product of sums form）という。そして，積和式で，論理積の各項にすべての論理変数が含まれている形を加法標準形（disjunctive canonical form)，または標準積和形（standard sum of products form）という。他方で，和積式で，論理和の各項にすべての変数が含まれている形を乗法標準形（conjunctive canonical form)，または標準和積形（standard product of sums form）という。表1の論理関数 F をあらわす加法標準形は［1］式であり，乗法標準形は［2］式である。加法標準形は，真理表で論理関数の値が真(1)の各行を論理積であらわし，その論理積の和の形にした式である。なお，論理関数 $\overline{F}$ を，真理表で論理関数の値が偽(0)の各行から加法標準形であらわすこともできる。しかし，$\overline{F}$ は F にド・モルガンの法則を適用することでかんたんにもとめられるので，以下では真の論理関数をとりあげる。

$$F = AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC \qquad [1]$$

$$F = (A + B + \overline{C})(A + \overline{B} + C)(\overline{A} + B + C)(A + B + C) \qquad [2]$$

簡単化は，加法標準形および乗法標準形の論理式をより簡単な式に縮約することをさす。加法標準形にたいする簡単化するほうが，乗法標準形へのそれよりも演算がおこないやすいので，多用される。クヮイン・マクラスキー法も，加法標準形にたいして簡単化するものである。以下では，加法標準形の簡単化について述べる。ただし，論理積と論理和の双対性があるので，乗法標準形にたいしておこなうこともできる[3)]。

真理表を加法標準形であらわした論理式は，より簡単な式に縮約すること

ができる。表1の真理表をあらわす［1］式は，べき等則，相補則（または最小化定理）から，次のように簡潔な式に変換できる[4)]。

$$
\begin{aligned}
F &= AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC \\
&= (AB\overline{C}+ABC)+(A\overline{B}C+ABC)+(\overline{A}BC+ABC) \\
&= AB(\overline{C}+C)+AC(\overline{B}+B)+BC(\overline{A}+A) \\
&= AB+AC+BC \qquad [3]
\end{aligned}
$$

［1］式は，［3］式にくらべると冗長 (redundant) である。無冗長 (irredundant) な論理式をもとめることを簡単化という。［3］式の AB，AC，BC のように，論理式をあらわすための，最少個数の変数に縮約された論理積項を主項または素項 (prime implicant) という。当該の論理式をあらわすために不可欠な主項を必須項 (essential term) または必須主項 (essential prime implicant) という。［3］式は必須項だけで構成されている。

しかし，当該の論理関数をあらわす無冗長な論理式は，必須項だけで構成されているとは限らず，また1つの式だけが解になるとは限らない。そこで，無冗長な論理式のなかで，主項の数が最少のもの，主項数が最少の式が複数ある場合は論理変数の数が最少のものをもとめる。このようにもとめられた積和形を最小積和形または最小論理和形，最簡形という。

いいかえると，簡単化とは，所与の論理式（論理関数）にたいして，その最小積和形をもとめることである。なお，レイガン (Ragin, 1987) の翻訳では，簡単化に「最小化」，主項に「素数的条件」という訳語があたえられているが，これらは論理回路やブール代数に不慣れな読者を想定してつけられたものである。

ところでクワイン・マクラスキー法による簡単化は，最小化定理をもちいて主項をもとめるクワイン部と，えられた主項から最小積和形をもとめるマクラスキー部にわけられる。前者では「主項の導出」，後者では「最小積和形の導出」をおこなう。次節以降では，まず主項の導出，次に最小積和形の導出にかんしてその手順を説明する。

4．主項の導出

表2は，レイガンの作成した，農民暴動の事例データにかんする真理表(Ragin，1987：107[訳書，1993：154])に手をくわえたものである。真理表では，農民暴動の原因条件 A, B, C, D は論理変数，そして事例データの結果変数を論理関数 R としている。R には「事例なし」という結果があるが，簡単化のアルゴリズムを説明するために，まずここでは「事例なし」がすべて結果＝1つまり真で農民暴動があったことにする。その修正をくわえたのがSである。まず，論理関数 S を例に主項の導出方法を説明する。

表2 真理表の例

A	B	C	D	R	S
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	事例なし	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	事例なし	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	事例なし	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	事例なし	1
1	1	0	0	事例なし	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	事例なし	1
1	1	1	1	1	1

手順 1　論理関数が真(1)の各行をそれぞれ最小項として，加法標準形であらわす。

このとき，各最小項をその真(1)の個数にしたがって並べるとよい。表 2 の論理関数 S の場合は，次のような加法標準形であらわされる。

$$S=\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}CD+\overline{A}BC\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}D+ABC\overline{C}\,\overline{D}+$$

$$\overline{A}BCD+A\overline{B}CD+AB\overline{C}D+ABC\overline{D}+ABCD \qquad [4]$$

手順 2　論理積項を，それに含まれる真(1)の個数にしたがって並べた表を作成する。

手順 3　真(1)の個数が 1 つだけ違う論理積項を総当たりで比較し，最小化定理を適用できる対の論理積項すべてに適用して変数を減らす。

手順 4　最小化定理で変数を減らした論理積項にたいして，手順 2 と手順 3 を再度おこなう。手順 2 から 4 まで，最小化定理が適用できなくなるまで繰り返しおこなう。

手順 2 で作成する表は様々な形式のものがあるが，表 3 は筆者が考案したものである。表 3 の最小項の欄には，[4]式の最小項が真(1)の個数にしたがって各列に並べられている。

次に，手順 3 で最小化定理 $A\cdot B+A\cdot\overline{B}=A$ を適用する。真(1)の個数が 0 個と 1 個，1 個と 2 個，2 個と 3 個，……というように，最小化定理が適用できる対すべてに適用する[5]。表 3 では真(1)の個数が 0 個の項がなく，1 個と 2 個の論理積項のあいだで最小化定理を適用できる対は 2 組なので，これからはじめる。たとえば，この 2 組については，次の 2 つの式のように変数を減らす。

$$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}CD=\overline{A}\,\overline{B}C$$

$$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}BC\overline{D}=\overline{A}C\overline{D}$$

表 3　主項の導出用の表

最小項	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$	$\overline{A}\,\overline{B}CD$	$\overline{A}BCD$	$ABCD$
		$\overline{A}BC\overline{D}$	$A\overline{B}CD$	
		$A\overline{B}\,\overline{C}D$	$AB\overline{C}D$	
		$AB\overline{C}\,\overline{D}$	$ABC\overline{D}$	
第 1 次縮約による項	$\overline{A}\,\overline{B}C$	$\overline{A}CD$	BCD	
	$\overline{A}C\overline{D}$	$\overline{B}CD$	ACD	
		$\overline{A}BC$	ABD	
		$BC\overline{D}$	ABC	
		$A\overline{B}D$		
		$A\overline{C}D$		
		$AB\overline{C}$		
		$AB\overline{D}$		
第 2 次縮約による項	$\overline{A}C$	CD		
		BC		
		AD		
		AB		

表 3 の斜線は，最小化定理を適用した対の論理積項を結んである。その結果，変数を減らした論理積項が第 1 次縮約の欄にしめしてある。

次に，手順 4 にしたがって，第 1 次縮約の結果えられた論理積項も，手順 2 にもどって真(1)の個数にしたがって各列に並べ，手順 3 で最小化定理を適用する。表 3 では，変数を減らした論理積項をもとの 2 つの論理積項のあいだの列に書いてあるので，並べかえる必要はない。ここで最小化定理の適用からえられた論理積項が，第 2 次縮約の欄にしめされている。これらは，これ以上最小化定理を適用できないので，[5] 式にしめされた各項が主項となる。この例では，すべての項が最後の縮約まで最小化定理が適用できたが，場合によっては最後の縮約前の段階で適用できない項があらわれる場合がある。そうした場合，適用できなくなった項も論理式に含めなければならない。最後の縮約以前に最小化定理を適用できなくなった項については，線で囲んでおくなどして何かの印を付けておくとよい。

$$S = AB + \overline{A}C + AD + BC + CD \qquad [5]$$

5．最小積和形の導出

前節の方法で導出した主項による論理式は，必ずしも無冗長ではなく，冗長な主項が含まれている場合がある。導出された主項に冗長な項が含まれていないか確認するため，そして含まれている場合にその冗長な主項を省くため，表4のような主項選択表あるいは主項表（prime implicant chart）をもちいる。[5] 式の場合も冗長項（redundant term）が含まれている。

表4は，例としてとりあげた論理関数 S の主項選択表である。主項選択表では，主項と最小項をそれぞれ行と列におき，主項に含まれる最小項に何らかの印をつける。表4では，○または◎印をつけてある。◎印は必須項につけてある。それぞれの最小項を縦にみて，1つしか○がつけられないものが必須項になる。この例では，3つの必須項を選べば，すべての最小項を含むことができるので，次の [6] 式が最小積和形になる。

$$S = AB + \overline{A}C + AD \qquad [6]$$

表4　主項選択表

主項	最小項									
	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$	$\overline{A}\,\overline{B}CD$	$\overline{A}BC\overline{D}$	$A\overline{B}\,\overline{C}D$	$AB\overline{C}\,\overline{D}$	$\overline{A}BCD$	$A\overline{B}CD$	$AB\overline{C}D$	$ABC\overline{D}$	$ABCD$
AB					◎			○	○	○
$\overline{A}C$	◎	○	○			○				
AD				◎			○	○		○
BC			○			○			○	○
CD		○				○	○			○

主項選択表から視覚的に判断して最小積和形をもとめる方法は，主項選択表が複雑な場合に間違いをおかしやすい。そこで，さらにブール代数を応用して最小積和形をもとめる方法もある（田丸，1989：56−60)。

表 5　主項選択表（表 4 ）の簡略化

主　項	最				小				項	
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}
α_1					◎			○	○	○
α_2	◎	○	○			○				
α_3				◎			○	○		○
α_4			○			○			○	○
α_5		○				○	○			○

ブール代数を応用して最小積和形をもとめるには，まず，主項選択表を簡単に表記しなおす。たとえば，表 4 を表 5 のように簡略化する。このとき，m_1〜m_{10}，α_1〜α_5 はそれぞれ次の式ように規定して最小項と主項をあらわすものとする。

$$
\begin{aligned}
m_1 &= \overline{A}\,\overline{B}C\overline{D} & \alpha_1 &= AB \\
m_2 &= \overline{A}\,\overline{B}CD & \alpha_2 &= \overline{A}C \\
m_3 &= \overline{A}BC\overline{D} & \alpha_3 &= AD \\
m_4 &= A\overline{B}\,\overline{C}D & \alpha_4 &= BC \\
m_5 &= AB\overline{C}\,\overline{D} & \alpha_5 &= CD \\
m_6 &= \overline{A}BCD \\
m_7 &= A\overline{B}CD \\
m_8 &= AB\overline{C}D \\
m_9 &= ABC\overline{D} \\
m_{10} &= ABCD
\end{aligned}
$$

次に，各最小項を含む主項を論理和としてあらわし，その論理和すべての積とした和積形の論理関数を作成する。この論理関数は，最小項すべてをあらわすために必要な主項を論理式にしたものである。次に，この和積形を展開して積和形になおし，ブール代数の公式を利用して変数を省く。表 5 の場合，最小項すべてを主項であらわす論理関数を T とすると，m_1 を含む α_2，

m_2 を含む（$\alpha_2+\alpha_5$），m_3 を含む（$\alpha_2+\alpha_4$）などの論理和の積となる。m_1 を含むためには，α_2 が必須項である。m_2 を含むためには，α_2 または $\alpha_5[(\alpha_2+\alpha_5)]$ が必要である（以下同様）。[7] 式には，この和積形，そして吸収則 $A\cdot(A+B)=A$ によって論理変数を減らして簡潔な形にした結果がしめされている。

$$
\begin{aligned}
T &= \alpha_2(\alpha_2+\alpha_5)(\alpha_2+\alpha_4)\alpha_3\alpha_1(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)(\alpha_3+\alpha_5) \\
&\quad (\alpha_1+\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_4)(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5) \\
&= \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \qquad [7]
\end{aligned}
$$

論理関数 $T=\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ は，すべての最小項を含むために，上述の規定式より AB かつ $\overline{A}C$ かつ AD の主項が必要であることを意味する。論理関数 $T=\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ は，帰結として１つの積になったが，あくまでも「主項選択表における最小項と主項の関係をあらわしたもの」であり，論理関数 S における主項どうしの関係は論理和のままである。したがって，論理関数 T における「AB かつ $\overline{A}C$ かつ AD が必要である」という帰結は，論理関数 S において「たがいに論理和の関係をもつ主項としての AB，$\overline{A}C$，そして AD が同時に選択されるべきである」ことを意味し，論理関数 S の簡単化の結果は [6] 式と同じになる。

例としてとりあげた論理関数 T では，最小積和式が１つの積になったが，たとえば次式のようになる場合もある。この場合，$\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_5$ は論理変数の個数が他より多くなるので除かれる。$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ と $\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ のそれぞれに該当する主項の論理和式が，簡単化の結果となる。つまり，$S=AB+A\overline{C}+AD$ とともに $S=\overline{A}C+AD+BC$ も最小積和式となる。この場合には，すべての最小項を含むためには「AB かつ $\overline{AC}$ かつ AD」または「$\overline{A}C$ かつ AD かつ BC」の各主項が必要である。

$$
T=\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_5
$$

論理関数 S の例では３つの必須項が最小項をすべて網羅していた。しかし，上記のような最小和積形の導出においては，次のような場合もあることに注意されたい。それは，必須項だけでは最小項を網羅できない場合，必須項がない場合，論理積項や論理変数の数がたがいに同じ複数の最小積和形が導出される場合である。最後の同等の簡潔さをもった複数の式があらわれた場合は，そのいずれを選択してもよく，研究課題にかんする理論や実態にそくした式を選択すべきであろう。

５．ドント・ケア項の利用

レイガンは，次の２つの場合にドント・ケア（don't care）項を導入可能であるとしており，QCA でも実行できるようになっている（Ragin，1987：104－118［訳書，1993：149－168］；Drass，1988：11－14．また鹿又，1993：112－121．参照)。⑴論理変数値の特定の組み合せ（真理表の行）に該当する事例がなく，その論理関数の値を決められない「限られた多様性（limited diversity)」の場合。⑵論理変数値の特定の組み合せに該当する複数事例における結果が矛盾して，その論理関数値を決められない「矛盾（contradiction）を含む行」の場合[6)]。

ドント・ケア項は禁止項（forbidden combination）ともいわれるが，論理変数値の特定の組み合わせにおける論理関数の値を確定できない場合をさす[7)]。ドント・ケア項は論理関数の式に含んでも，含まなくともよい。このドント・ケア項が存在する場合も，簡単化の手続きは，主項の導出と最小和積形の導出の２つの段階にわけておこなう。

まず，主項を導出する。

手順Ⅰ　ドント・ケア項を最小項として含んだ加法標準形であらわす。
手順Ⅱ　上述の手順2～4 にしたがって，主項を導く。

例としてきた表２は，前節まで「事例なし」の行を真⑴とみなしてきたが，

ここからは「事例なし」(または上述の(2)矛盾のある行) として扱い，この各行をドント・ケア項として論理関数 R を取りあげる。手順Ⅰにおいては，ドント・ケア項の論理関数値を真(1)とみなして最小項に含ませた加法標準形とする。手順ⅠおよびⅡにしたがって主項を導くと，[5] 式と同じ主項が導かれ，論理関数 R は，次の [8] 式となる。

$$R = AB + \overline{A}C + AD + BC + CD \qquad [8]$$

表 6　ドント・ケア項がある場合の主項選択表

主項	最小項									
	真(1)の項				ドント・ケア項					
	$\overline{A}\,\overline{B}CD$	$\overline{A}BCD$	$AB\overline{C}D$	$ABCD$	$\overline{A}\,\overline{B}C\overline{D}$	$\overline{A}BC\overline{D}$	$A\overline{B}\,\overline{C}D$	$AB\overline{C}\,\overline{D}$	$A\overline{B}CD$	$ABC\overline{D}$
AB			○	○				○		○
$\overline{A}C$	○	○			○	○				
AD			○	○			○		○	
BC		○		○		○				○
CD	○	○		○					○	

次に，主項選択表で最小和積形をもとめる。このとき主項選択表の最小項を，表 6 のように，論理関数値が真(1)の項とドント・ケア項にわけて並べる。最小積和形は，次の手順ⅢおよびⅣにしたがってもとめる。

手順Ⅲ　真(1)の最小項のすべてを含むように，主項を選択する。

手順Ⅳ　複数の式がえられる場合は，論理積項および論理変数の数が少なく，より簡潔な式を選ぶ。

論理関数 R の場合，主項の選択方法として次の 4 つがある。

$$R_1 = AB + \overline{A}C$$
$$R_2 = AB + CD$$
$$R_3 = \overline{A}C + AD$$

$$R_4 = AD + CD$$

これらの式は，論理積項の数はすべて2つで同等である。しかし，論理変数の数は R_2 式が他より多く，式の簡潔さからするとこれを選択すべきではない。また，補元が含まれるないほうが簡潔だとするなら，R_1 式と R_3 式より，R_4 式が簡潔である。

R_4 式の主項 AD と CD は，表6のドント・ケア項 $A\overline{B}\,\overline{C}D$ と $A\overline{B}CD$ を含んでいる。これらのドント・ケア項は，R_4 式を主項の導出(手順1～4)によって直接もとめるための単純化の仮定（simplifying assumption）となる(Ragin，1987：110－111[訳書，1993：157－158]；Drass，1988：14；鹿又，1993：114－115.)。論理関数の値が真(1)の最小項とドント・ケア項から構成される加法標準形について，主項を導出すると，R_4 式が直接えられるからである。他の式の場合も同様に，その式内の主項が含むドント・ケア項は，その式を主項の導出によって直接にもとめるための単純化の仮定になる。いいかえれば，単純化の仮定は，それに該当するドント・ケア項について「採用する最小積和形をえるためにその論理関数値が真(1)であると仮定する」ことを意味している。

7．複雑さと簡潔さ

ブール代数分析は，多元因果（multiple causation）を論理和，結合因果（conjunctural causation）を論理積，多元結合因果（multiple conjunctural causation）を積和形であらわせるようにして，これらの複雑な因果関係を許容しながら，その複雑さをより簡潔な論理式にあらわす簡単化を利用するものである。ここでは，論理回路などの分野における簡単化の手法にしたがって，より簡潔な論理式の導出を優先して説明してきた。しかし，レイガン（Ragin，1987）が注意深く指摘するように，研究課題によっては，より簡潔な式をもとめることだけを優先すべきでない場合もある。

前節では，補元もなくもっとも簡潔な R_4 式を選択したが，他の式を選択し

ても論理的には誤りではなく，それぞれの意義もある。R_1 式と R_3 式は，変数 A が真(1)でも偽(0)でも他の変数と結合して結果の生起(論理関数 $R=1$)をもたらしており，コンテクストによって変数 A が2つの状態のいずれであっても結果を左右することを指摘できる。R_2 式は，変数の数が4で他より多いが，異なる変数から構成される複数の結合因果(AB と CD)を指摘できる。R_4 式は，変数 A の真(1)の状態が結果の生起にとって必要条件であることが指摘できる。

これらの式のいずれを選択するか，あるいはすべての式を取りあげて検討するかは，理論仮説や現象の実態によって判断されるべきであろう。たとえば，この例にそくしていえば，コンテクストの相違をあらわす複雑な多元結合因果，それぞれ異なる変数から構成される複数の結合因果，そして必要条件としての特定変数の真または偽の状態など，これらのいずれを優先すべきかが，考慮すべき点になるだろう。簡単化によってえられる式の選択は，各式に対応する理論的，実態的根拠があるかどうかによって判断されるべきであろう。

注

1）代数的方法は，カット・アンド・トライ法（cut and try method）とかトライアル・アンド・エラー法（trial and error method）と呼ばれる。

2）左の式については，分配則，補元則，基本演算より次のようになる。

$$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A(B+\overline{B}) = A \cdot 1 = A$$

また，右の式については，分配則，吸収則，基本演算より次のようになる。

$$\begin{aligned}(A+B)\cdot(A+\overline{B}) &= A(A+\overline{B}) + B(A+\overline{B}) = A + A\cdot B + B\cdot\overline{B} = A + B\cdot\overline{B}\\ &= A+0 = A\end{aligned}$$

3）乗法標準形 P があった場合，この否定 $\overline{P}$ はド・モルガンの法則から加法標準形となる。この加法標準形 $\overline{P}$ を簡単化し，その結果えられた式の否定つまり $\overline{\overline{P}}$ をもう一度ド・モルガンの法則からもとめることで乗法標準形 P の簡単化された結果がもとめられる。

4）べき等則より $ABC=ABC+ABC+ABC$ であることを利用し，相補則または最小化定理を適用して［3］式がえられる。

5）最小化定理が適用できる対は，ハミング距離(Hamming's distance)が1の対である。ハミング距離とは，同じ長さの記号列間で記号が異なっている数をいう。たがいに同じ論理変数から構成される2つの論理積項の場合，対応する記号が異なっている数をさす。

たとえば，ABC と $AB\overline{C}$ のハミング距離は1で，ABC と $A\overline{B}\,\overline{C}$ は2である。(小島，1997：66－84；宮田，1987：19；廣瀬，1985：95．などを参照)

6）矛盾を含む行の場合は，区切り値 (cutoff value) などをもちいて分析する方法もある (Ragin，1987：113－118[訳書，1993：161－168]；Drass，1988：23－24；鹿又，1993：110－111)。

7）論理回路の分野では，論理変数値の特定の組み合わせが起きないので，その変数値の組み合わせが許されない場合とされている。

文　献

浅川　毅．1991．『図解　やさしい論理回路の設計』オーム社．

Drass, K. 1988. *QCA 2.02: Qualitative Comparative Analysis*, manual for the computer program QCA.

日高　達．1997．『情報論理学』昭晃堂．

廣瀬　健．1985．『情報数学』コロナ社．

細井　勉．1992．『情報科学のための論理数学』日本評論社．

藤井信生．1987．『ディジタル電子回路』昭晃堂．

鹿又伸夫．1993．「質的比較分析プログラム QCA について」『立命館産業社会論集』第29巻第2号：85－132．

小島紀男．1997．『現代工学のためのブール代数と組合せ回路』現代工学社．

宮田武雄．1987．『速解　論理回路』コロナ社．

永田博義．1972．『ブール代数とディジタル回路』啓学出版．

Ragin, C.C. 1987. *The Comparative Method: Moving Beyond Qualitative and Quantitativ Strategies*, University of California Press. (鹿又伸夫監訳．1993．『社会科学における比較研究 ── 質的分析と計量的分析の統合にむけて ──』ミネルヴァ書房．

清水賢資・曽和将容．1979．『ディジタル回路の考え方』オーム社．

田丸啓吉．1989．『論理回路の基礎』工学図書．

[付記] 本稿は，鹿又伸夫．1998．「ブール代数アプローチにおける簡単化」平成8～9年度科学研究費補助金 [基盤研究 (B) (1)「ブール代数アプローチによる質的比較」(研究課題番号08301011，研究代表者　鹿又伸夫)] 研究成果報告書『ブール代数アプローチによる質的比較』：1－13．に修正をくわえたものである。