HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	分配標準形について
Author(s)	大畑, 甚一
Citation	北海道大学人文科学論集, 5, 1-21
Issue Date	1967-07-10
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/34286
Type	bulletin (article)
File Information	5_PL1-21.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

分配標準形について

大畑甚一

§1　一階述語論理の任意の式には, clear cut な構造をもつ分配標準形 (distributive normal forms) の存在することが知られている [とくに Hintikka (1)]. この標準形は, 命題論理の完全標準形 (complete or perfect normal forms) の一般化である. 後者の依存する真理函数の分配諸則のほか, とくに, 存在 (普遍) 量化記号の選言 (連言) に関する分配則に依存してえられる標準形であるため, その名がある.

命題論理の整合的な任意の式は, 完全選言標準形をもつ. この選言項——構成素 (constituent) という——は, k 個の異なる原子式が与えられれば, その各原子式かその否定のいずれか (両者ではない) を連言項として含む連言からなる. 原子式かその否定のいずれかを $(\pm)P_i^0(i=0, 1, \cdots\cdots, k-1)$ であらわせば, 構成素は次のように書ける.

$$(1.1)\qquad (\pm)P_0^0 \ \& \ (\pm)P_1^0 \ \& \ \cdots\cdots \ \& \ (\pm)P_i^0$$

これを略記号 Π を用いて:

$$(1.2)\qquad \prod_{i=0}^{k-1} P_i^0$$

と書いてもよい. これらの各構成素は, 相互に排除的で, exhaustive な 2^k 個の条件を作る.

ところで, ある解釈された体系を考察しているとすると, 完全選言標準形の各構成素は, いわゆる《状態記述》(state-description) である. 各構成素——連言式——によって表現される連言命題それ自身は, 原子式によって表現される命題に関する《可能的世界》といえる. ある解釈された一階述語論理の体系において, その任意の式の分配標準形——ここではその選言形を考

える——の選言項（構成素）についてもまた同様に考えることの出来る．例えば，閉鎖言明型で命題変項及び個体常項を含まない式の分配（選言）標準形は与えられた個体変項と述語に関して，その存在量化の連言を選言項としてもつからである．

ところで，《任意の文の情報的な内容は，可能な代案を排除する程度に応じて高い》と K. Popper 流に考えれば——すべての可能的な代案を枚挙したものは情報内容ゼロである——ある形式的な議論の範囲で，その文の分配標準形は，その文の情報内容の明確度について尺度を与えることになるかもしれない．もちろん，分配標準形は，標準形の一つとして，論理式の証明論的考察のテクニックであることにかわりがない．しかし，それに終らないで，むしろ，その技術が前置標準形 (prenex normal form) と異なった《思想（アイデイア）》から生れたものではないかと考えられる点もある [cf. Hintikka (3)].

以下において，このようなアイディアを憶測しながら，量化理論についてまず，単項述語論理式の例を中心に，その分配標準形を調べる．内容として新しいことを含まず解説的である．

§2　以下で扱う表現は通常の一階述語論理の記号ならびに形成規則からなる．記号は，(i) 論理記号として否定 '$\sim$'，連言 '&'，選言 '$\vee$'，条件 '$\rightarrow$' の各記号（真理函数記号）と存在量化 'E'，普遍量化 'U' の各記号（量化記号），(ii) 個体記号の可付番集合は 'x_1', 'x_2', ……，文記号のそれは 'P^0_0', 'P^0_1', ……，m 項述語 (m＝1, 2, ……) 記号のそれは 'P^1_0', 'P^1_1', ……，'P^2_0', 'P^2_1', ……，'P^m_0', 'P^m_1', ……によって指示される．但し見易くするためその都度適当な指示が与えられる．又，補助記号，括弧 '(', ')' を用いる．論理式（あるいは簡単にいって式）は，次の形成規則による．(1) 'P^0_i' (i＝0, 1, ……) は式である．(2) '$P^1_i x_1$', '$P^2_i x_1 x_2$', …… (i＝0, 1, ……), は式である．(3) 任意の式を 'A', 'B' で示せば，'$\sim$A', 'A & B', 'A$\vee$B', 'A$\rightarrow$B' は式である．(4) A に 'x_n' (n＝1, 2, ……) が《自由》(free) にあらわれれば，'(Ex_n) A', '(Ux_n) A' は式である．(1), (2) の形のものを原子式という．式は，このように，一般に，真理函数と量化によって原

子式から作られる．なお式の《深さ》(depth) について言及されるときは，次の規定による．すなわち，(i) 式の《深さ》はその構成要素 (component) の《深さ》で最高のものである．(ii) 原子式は《深さ》ゼロである．(iii) '$(Ex_n)A$', '$(Ux_n)A$' は 'A' の《深さ》よりも一つだけ高い．《構成要素》という用語については通常の規定に従って用いる．個体記号の《自由》あるいは《束縛》(bound) についても同様に通常の規定で用いる．

公理，変形規則については特記しない．通常の命題論理の諸定理では，整合的な式を完全標準形に変形するに必要な等値関係，例えば，(i) 二重否定則，(ii) ド・モルガン則，(iii) 連言（選言）の選言（連言）への分配則が重要である．述語論理の諸定理では，次の等値関係が重要である．(iv) ('$(Ux_n)A$' と '$\sim(Ex_n)\sim A$', (v) 'A', 'B' に 'x_n' が自由にあらわれるとき，'$(Ex_n)(A \vee B)$' と '$(Ex_n)A \,\&\, (Ex_n)B$', '$(Ux_n)(A \,\&\, B)$' と '$(Ux_n)A \,\&\, (Ux_n)B$' は等値である．(vi) 'B' が 'X_n' の自由なあらわれを含まなければ，'$(Ex_n)(A \vee B)$' と '$(Ex_n)A \vee B$', '$(Ex_n)(A \,\&\, B)$' と '$(Ex_n)A \,\&\, B$', '$(Ux_n)A \,\&\, B$' と '$(Ux_n)A \,\&\, B$', '$(Ux_n)(A \vee B)$' と '$(Ux_n)A \vee B$' は等値である．

§3　分配標準形は，一つの標準形として，ある構造的条件を万足するものである．この構造的条件は，その構成素が万足すべき条件である．この条件は，述語論理にあらわれる個体記号の数，述語記号の数，論理式の《深さ》を特定すること，そしてそれに依存する．

もっとも単純な単項述語論理式を考えよう．詳しくいえば，'(Ex_1)' あるいは '(Ux_1)' の次には，'$P^1_0x_1$', '$P^1_1x_1$', ……の真理函数のみがくる式を考える．見易いため 'x_1' を 'x', 'P^1_0', 'P^1_1',……を 'P', 'Q', ……であらわすことにする．この式は，'$(Ux)A$' と '$\sim(Ex)\sim A$' とが等値であることと，'A' は，ある原子式 'B_1', 'B_2', ……('Px', 'Qx', ……) の真理函数であることから，もとの式は単に $(Ex)A$ と書いてよい．この論理式では，個体記号の数は 1，述語記号の数はその集合 {P, Q, ……} の要素の数である．《深さ》は 1 である（以下 'A' 等にあらわれる引用符をなるべく省略することにする）．

いま，述語記号の集合を {P, Q} とする． すると A について，Px, Qx と，論理記号‘&’とによって，個体領域を 2^2 個の異なった種類に分割しうる．すなわち ∼Px & ∼Qx, ∼Px & Qx, Px &∼Qx, Px & Qx である．これらを前記 (1.1) の記法を用いて書くと，(±) Px & (±) Qx である．また，上記各連言をそれぞれ $Ct_3(x)$, $Ct_2(x)$, $Ct_1(x)$, $Ct_0(x)$ で略記すれば， 任意の A 式，たとえば，Px∨Qx は $Ct_2(x) \vee Ct_1(x) \vee Ct_0(x)$ に，Px は $Ct_1(x) \vee Ct_0(x)$ に変形しうる．これは真理函数記号の働きから周知のことがらである．

一般に述語記号の集合を $\{P^1_0, P^1_1, \cdots\cdots, P^1_i\}$ $(i=0, 1, \cdots\cdots, k-1)$, 他の条件をそのままにすれば：

$$(3.1) \qquad (\pm)\, P^1_0 x \;\&\; (\pm)\, P^1_1 x \;\&\; \cdots\cdots\; (\pm)\, P^1_i x$$

これら異なる分割を $Ct^0_j(x)$ (Ct 右肩の 0 は depth) と書けば，(3.1) は：

$$(3.2) \qquad Ct^0_j(x) = \prod_{i=0}^{k-1}{}_j P^1_i(x) \qquad (j = 0, 1, \cdots\cdots, 2^k - 1)\,.$$

任意の式 A は，k 項連言 $Ct^0_j(x)$ の 0 項，1 項……，2^k 項の選言に変形される．0 項選言は，$P_i x$ & $\sim P_i x$ 等の不整合な式を，2^k 項選言は $P_i x \vee \sim P_i x$ 等の恒真式を意味する．一般に 0 項選言は A &∼A, 2^k 項選言は A∨∼A を意味するとすれば， 式 A は不整合のときをも含め $Ct^0_j(x)$ の選言に変形されることになる．

$Ct^0_j(x)$ すなわち，$Ct^0_0(x)$, $Ct^0_1(x)$, ……, $Ct_{2^k-1}(x)$ によって，述語の集合 $\{P_0, P_1, \cdots\cdots, P_{k-1}\}$ に関して，個体のすべての可能な種類のリストが記述される．すると，可能な種類の世界は，そのリストを見渡した上で，その種類の個体の存否を指定すればよい．すなわち：

$$(3.3) \qquad (\pm)\,(Ex)\, Ct^0_0(x) \;\&\; (\pm)\,(Ex)\, Ct^0_1(x) \;\&\; \cdots\cdots \;\&\; (\pm)\,(Ex)\, Ct^0_{2^k-1}(x)$$

これは，原子式あるいはその否定のいずれかの連言を存在量化したもの，あるいはその否定のいずれかを連言項とする連言である．

例 1　(Ex) (Px ∨ Qx)

次の表によって，{P, Q} に関して 2^2 項 (±) (Ex) Ct^0_j(x) 連言の 14 項選言に変形される．但し，この表では肯定の場合を 1，否定のときを 0 とする．

行ナンバー	(Ex) Ct^0_0(x)	(Ex) Ct^0_1(x)	(Ex) Ct^0_2(x)	(Ex) Ct^0_3(x)
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	0
3	0	0	1	1
4	0	1	0	0
5	0	1	0	1
6	0	1	1	0
7	0	1	1	1
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0
15	1	1	1	1

表中点線以上の行を除いた 14 項選言に，もとの式は等値である．この表は明かに，真理（値）表の特殊なものである．なお，各行の配列を適当にとったのは，(Ex) Ct^0_j(x) の肯定のあらわれ方と，行ナンバーをあらわす整数 (0, 1, 2, ……, 15) とを対応させるためである．もちろん，この整数の 2 進法表記がそのまま各行になるように配列してある．

例 2　(Ex) Px

同様の表により 4 項 (±) (Ex) Ct^0_j(x) 連言の 12 項選言である．又 (Ex)(Px & Qx) は 4 項連言の 8 項選言であることが確められる．

例 3　(Ux) (Px→Qx)

これは，∼(Ex)∼(Px→Qx)，次いで ∼(Ex) (Px &∼Qx) に等値である．まず否定記号を除いた (Ex) (Px &∼Qx) の表をつくる．この表は成立しないから，その行を除いた代案部分のいずれかの行が成立する．この方法によって同様 8 項選言をうる．この場合, (Ex) Ct^0_j(x)がすべて否定：0 である行も含まれる．

以上は述語記号の集合 {P, Q} についてであったが，述語記号の集合 {P, Q, R} に関して，2^3 項 (±) (Ex) Ct_j^0(x) 連言 (j=0, 1, ……, 2^3-1) の 64 項選言で書ける．これは，上と同様，等値形 ～(Ex) (Px &～Qx) をえてから，等値形 ～(Ex) ((Px &～Qx &～Rx)∨(Px &～Qx & Rx)) に移り，ついで {P, Q, R} に関する (Ex) Ct_j^0(x) について同様の手続によってえられる．ちなみに否定記号を除いた式は，2^{2^3} 行のうち 192 行のいずれかについて成立つことが示される．もちろん，(Ex) の選言に関する分配則により ～((Ex) (Px &～ Qx &～Rx)∨(Ex) (Px &～ Qx & Rx)) をえてもよく，又，ド・モルガン則で，等値形 ～(Ex) (Px &～Qx &～Rx) &～(Ex) (Px &～Qx & Rx) をえてからでもよい．

これらを式の変形で求める手続きは容易にえられる．これについては後にふれる．なおこの例は，いわゆる定言的三段論の決定問題を解決する一つの方法を与えることに関連している [von Wright (2)].

例 4　(Ux) Fx→(Ex) (Fx∨Gx)

(Ex)～Fx∨(Ex) (Fx∨Gx)

(Ex) (～Fx & Gx)∨(Ex) (～Fx &～Gx)
∨(Ex) (Fx & Gx)∨(Ex) (Fx &～Gx)∨(Ex) (～Fx & Gx)

(Ex) (～Fx &～Gx)∨(Ex) (～Fx & Gx)
∨(Ex) (Fx &～Gx)∨(Ex) (Fx & Gx)

これについて (Ex) Ct_j^0(x) に関する分配選言標準形は，上式の選言記号の働きから 4 項 (±) (Ex) Ct_j^0(x) 連言の 15 項選言である．(Ex) Ct_j^0(x) が全部否定であらわれる場合を除く (それは empty な世界で真となるが，もとの式は偽となるから).

上例で 3 行目への変形は，命題論理において完全標準形をつくるときの一つの変形技術にすぎない．今，P_0^0 について，それは恒真式 (P_1^0∨～P_1^0) との連言に等値である．さらにそれは選言と連言との分配則で展開したものに等値である．すなわち P_0^0 & (P_1^0∨～P_1^0) は (P_0^0 & P_1^0)∨(P_0^0 &～P_1^0) と等値である．そして，この技術と，再び，存在記号と選言に関する分配則が加わるだけである．

一般に depth 1 の式は $(\pm)(Ex)Ct_0^0(x) \& (\pm)(Ex)Ct_1^0(x) \& \cdots\cdots \& (\pm)(Ex)Ct_j^0(x)$ $(j=0, 1, \cdots\cdots, 2^k-1)$ の選言に等値である（解釈された体系の下では，この各選言項は，2 の $j+1=2^k$ 乗個の異なった可能な世界を記述している）．従って，もとの depth 1 の式は，k 個の述語記号と，'x' という個体記号に関して，存在量化の 2^k 項連言の 0 項，1 項，……，2^{2^k} 項選言に等しい．

今，$(\pm)(Ex)Ct_0^0(x) \& (\pm)(Ex)Ct_1^0(x) \& \cdots\cdots \& (\pm)(Ex)Ct_j^0(x)$ を $Ct^1(x)$ とかく．すると，$Ct_j^0(x)$ は，depth 1 を加えるが，述語記号，個体記号の数は同一という条件の下で，$Ct^1(x)$ の選言に展開されている．例えば，Px & Qx という Ct_3^0 は，これに (Ex) を加えた depth 1 : $(Ex)Ct_3^0(x)$ の選言で書くことが出来る．これは 8 項選言であった．

さて，どんな単項述語論理式も，上述の範囲においては，構成素の 0 項，1 項，……，2^{2^k} 項選言に変形され，解釈された体系では，それらの選言形によって，可能的世界を表現した．略記法 (1.2) を導入してこの事実を次のように書く．

$$(3.4) \qquad \sigma_a \prod_{j=0}^{2^k-1} (Ex) \prod_{i=0}^{k-1}{}_j P_i^1(x)$$

σ はその右側にある構成素 (3.3)：$(\pm)(Ex)Ct_0^0(x) \& (\pm)(Ex)Ct_1^0(x) \& \cdots\cdots \& (\pm)(Ex)Ct_j^0(x)$ の選言をあらわす．σ_a の $a(=0, 1, 2, \cdots\cdots, 2^{2^k})$ は，選言項の数をあらわす．これがこれまでの単項述語論理式の分配標準形である．

(i) この範囲で，任意の式の分配標準形のもつ構成素（選言項）の数を計算しうるか（解釈された体系において，その任意の式の情報的内容の尺度は与えられるか）．$(Ex)Ct_j^0(x)$ の構成素 $Ct_j^0(x)$ につき，その完全選言標準形の選言項数を g とすれば，$(2^g-1)\times(2^{2^k}-g)$ が求める数であることは容易に知られる．もし例 3 のように，$\sim(Ex)Ct_j^0(x)$ のときは，$(Ex)Ct_j^0(x)$ に関する選言項数，上記 $(2^g-1)\times(2^{2^k}-g)$ を，2^{2^k} より減じた数である．

(ii) (3.4) 式の σ_a の右部分を，例えば：

$$(Ex)(\sim Px \& \sim Qx) \& (Ex)(\sim Px \& Qx)$$
$$\& \sim(Ex)(Px \& \sim Qx) \& \sim(Ex)(Px \& Qx)$$

とする．今，第3，第4の連言項の $\sim$(Ex) をそれぞれ (Ux)$\sim$ に変える．すると上式は：

$$(\mathrm{Ex})(\sim \mathrm{Px} \,\&\sim \mathrm{Qx}) \,\&\, (\mathrm{Ex})(\sim \mathrm{Px} \,\&\, \mathrm{Qx}) \\ \&\, (\mathrm{Ux})\sim(\mathrm{Px} \,\&\sim \mathrm{Qx}) \,\&\, (\mathrm{Ux})\sim(\mathrm{Px} \,\&\, \mathrm{Qx})$$

普遍記号の連言への分配則の逆と，ド・モルガン則によって上式は：

$$(\mathrm{Ex})(\sim \mathrm{Px} \,\&\sim \mathrm{Qx}) \,\&\, (\mathrm{Ex})(\sim \mathrm{Px} \,\&\, \mathrm{Qx}) \\ \&\, (\mathrm{Ux})(\sim(\mathrm{Px} \,\&\sim \mathrm{Qx}) \,\&\sim(\mathrm{Px} \,\&\, \mathrm{Qx}))$$

$$(\mathrm{Ex})(\sim \mathrm{Px} \,\&\sim \mathrm{Qx}) \,\&\, (\mathrm{Ex})(\sim \mathrm{Px} \,\&\, \mathrm{Qx}) \\ \&\, (\mathrm{Ux})((\sim \mathrm{Px} \vee \mathrm{Qx}) \,\&\, (\sim \mathrm{Px} \vee \sim \mathrm{Qx}))$$

選言と連言の分配則によって (Ux) 以下は：

$$(\mathrm{Ux})((\sim \mathrm{Px} \,\&\sim \mathrm{Qx}) \vee (\sim \mathrm{Px} \,\&\, \mathrm{Qx}) \vee (\sim \mathrm{Px} \,\&\sim \mathrm{Px}) \vee (\mathrm{Qx} \,\&\sim \mathrm{Qx}))$$

上式中 ($\sim$Px &$\sim$Px) は $\sim$Px と等値で，且つ，第1，第2選言項に含まれること，(Qx &$\sim$Qx) は不整合であること，これらの理由で取除けば，もとの式は：

$$(\mathrm{Ex})(\sim \mathrm{Px} \,\&\sim \mathrm{Qx}) \,\&\, (\mathrm{Ex})(\sim \mathrm{Px} \,\&\, \mathrm{Qx}) \\ \&\, (\mathrm{Ux})((\sim \mathrm{Px} \,\&\sim \mathrm{Qx}) \vee (\sim \mathrm{Px} \,\&\, \mathrm{Qx}))$$

つまり，(Ex) が前置された各項と，それと同一の作用域の選言に (Ux) を前置したものとの連言に，もとの式は変形される．このことが一般的に成立つ証明は上と同様の諸則について行なわれる． 従って(3.4)式の等値形として，否定記号はすべて原子式にのみ前置された次の式がえられる（添字は省略)．

$$(3.5) \qquad \sigma_{\mathrm{a}}[\pi_{\mathrm{b}}(\mathrm{Ex}) \,\Pi\, \mathrm{P}^{1}_{\mathrm{i}}(\mathrm{x}) \,\&\, (\mathrm{Ux})\,\sigma_{\mathrm{b}} \,\Pi\, \mathrm{P}^{1}_{\mathrm{i}}(\mathrm{x})]$$

π は右記構成素の連言を表わし， b は，例1の表のごとく適当に順べた場合の，行番号 (=0, 1, ……) をあらわす整数である．否定記号のない (Ex) $\mathrm{Ct}^{0}_{\mathrm{j}}(\mathrm{x})$ のあらわれは，整数 b (=0, 1, 2, ……) の2進法表記を示す次の式によって，b と対応づけられる．

$$\mathrm{b} = \sum 2^{\mathrm{i}}\,\mathrm{b}_{\mathrm{i}} = 2^{0}\,\mathrm{b}_{0} + 2^{1}\,\mathrm{b}_{1} + \cdots\cdots + 2^{2^{\mathrm{k}}-1}\,\mathrm{b}_{2^{\mathrm{k}}-1}$$

$$(\mathrm{i} = 0, 1, \cdots\cdots 2^{\mathrm{k}}-1, \quad \mathrm{b}_{\mathrm{i}} = 0 \text{ or } 1)$$

(3.4) の形を分配標準形の第1形，(3.5) の形をその第2形という．第1形

では，否定記号は構成素に含まれる存在記号の前か原子式の前にのみあらわれ，且つ選言記号及び普遍量化記号は含まれない．第２形では，否定記号は原子式にのみ前置される．

§4　さて，以上は，単項述語論理式のもっとも単純な形，再言すれば，量記号の後に，Px, Qx 等の真理函数のみが来る限られた形のものについてであった．このような量化論理式の一番簡単な拡張は，(i) この量化論理式と真理函数的言明型との混在を許す論理式であろう．例えば，$P^0_0 \rightarrow (Ex)\,P^1_0(x)$, $P^0_0 \rightarrow P^0_1 \,\&\, (Ux)(P^1_0 x \rightarrow P^1_1 x)$ の形をしたものである．しかし (i) は以下の例で示されるように単純に処理されうる．

しかし上記の枠に入らない単項述語論理式，つまり，文記号と上記の単純な量化式との真理函数，いわば，文記号が外部から量化式に真理函数記号で結合するのでなく，(ii) 量化の内部に文記号が入って来る形がある．例えば，$(Ux)(P^0_0 \rightarrow P^1_0 x) \rightarrow (P^0_0 \rightarrow (Ux)\,P^1_0 x)$, $(Ex)((P^0_0 \,\&\, (P^1_0 x \rightarrow P^1_1 x))$ 等である．さらに，(iii) 2個以上の個体記号をもつ単項述語式，例えば，開放言明型で，$(Ux_1)(P^1_0 x_1 \rightarrow P^1_0 x_2)$, $(Ex_1)(P^1_1 x_2 \,\&\, P^1_0 x_1)$，あるいは，これらの閉鎖型 $(Ux_2)((Ux_1)\,P^1_0 x_1 \rightarrow P^1_0 x_2))$, $(Ux_2)(Ux_1)(P^1_1 x_2 \,\&\, P^1_0 x_1)$ 等がある．これらについても，これまでの変形技術で分配標準形に変形しうることが，以下において例によって示される．扱い方を対照するために，(iii) の例は Quine (1), (2) より採った．

(i)　**例 1**　$P^0_0 \rightarrow (Ex)\,P^1_0(x)$

印刷と見易さのため，p→(Ex) Fx と書くことにする．これは次の式に等値である．

$$\sim p \vee (Ex)\,Fx$$

$$(\sim p \,\&\, \sim(Ex)\,Fx) \vee (\sim p \,\&\, (Ex)\,Fx) \vee (p \,\&\, (Ex)\,Fx)$$

各選言項は文記号の真理函数と，(±) (Ex) (… x …) の形――存在構成素ということにする――との連言である．これらをそれぞれ文記号，すなわち命題論理式に関する部分と，存在構成素の部分について，与えられた条件，例えば，

文記号の集合 $\{p\}$, 述語の集合 $\{F\}$ に関して整理すれば：

$$
\begin{aligned}
&(\sim p \,\&\sim(Ex)\sim Fx \,\&\sim(Ex)\, Fx)\\
&\quad\vee(\sim p \,\&\, (Ex)\sim Fx \,\&\sim(Ex)\, Fx)\\
&\quad\vee(\sim p \,\&\sim(Ex)\sim Fx \,\&\, (Ex)\, Fx)\\
&\quad\vee(\sim p \,\&\, (Ex)\sim Fx \,\&\, (Ex)\, Fx)\\
&\quad\vee(p \,\&\sim(Ex)\sim Fx \,\&\, (Ex)\, Fx)\\
&\quad\vee(p \,\&\, (Ex)\sim Fx \,\&\, (Ex)\, Fx)
\end{aligned}
$$

もし，文記号の集合 $\{p, q\}$，述語記号の集合 $\{F, G\}$ についても，長くはなるが容易に展開出来る．このときは，$((\sim p \,\&\, q \,\&\sim(Ex)\,(\sim Fx \,\&\sim Gx) \,\&\sim (Ex)\,(\sim Fx \,\&\, Gx) \,\&\sim(Ex)\,(Fx \,\&\sim G) \,\&\sim(Ex)\,(Fx \,\&\, Gx)) \vee \cdots\cdots \vee \cdots\cdots$ の形の選言となる．

例 2　$p \to ((q \,\&\, (Ux)\,(Fx \to \sim Gx))$

$$
\begin{aligned}
&\sim p \vee (q \,\&\sim(Ex)\sim(Fx \to \sim Gx))\\
&\sim p \vee (q \,\&\sim(Ex)\,(Fx \,\&\, Gx))\\
&(\sim p \vee q) \,\&\, (\sim p \vee \sim(Ex)\,(Fx \,\&\, Gx))\\
&(\sim p \,\&\sim(Ex)\,(Fx \,\&\, Gx)) \vee (q \,\&\sim(Ex)\,(Fx \,\&\, Gx)) \vee (\sim p) \vee (\sim p \,\&\, q)\\
&((\sim p \,\&\, q \,\&\sim(Ex)(Fx \,\&\, Gx)) \vee ((\sim p \,\&\sim q \,\&\sim(Ex)(Fx \,\&\, Gx)) \vee \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

選言項 $(\sim p)$, $(\sim p \,\&\, q)$ は取除くことが出来る（5 行目）．全部書かなかったが，6 行目の各選言項について，例 1 同様，文記号及び存在構成素の部分それぞれにつき所要の展開をすればよい．文記号 p，q，2 個の連言と存在構成素 4 個の連言からなる構成素の選言となり，選言項数は 40 である（$\{p, q\}$，$\{F, G\}$ に関する恒真式ならば，$2^4 \times 2^2 = 64$ 項選言である）．

このように (i) タイプの単項述語論理式では，文記号についての連言部分と，存在構成素についての連言部分との連言で構成素を作ることである．これへの手続きは，量記号のつぎに Fx，Gx 等の真理函数のみが来る単純な式の場合と同じである．

以下のタイプは量記号の作用域に，文記号が入りこんだもので，表記は (i)

に倣う.

(ii) **例 1** $(Ux)(Fx \rightarrow p)$

$\sim(Ex)\sim(Fx \rightarrow p)$

$\sim(Ex)((Fx \,\&\sim p))$

$\sim((Ex)Fx \,\&\sim p)$

$\sim(Ex)Fx \vee p$

4 行目, 'p' を (Ex) の作用域からとり出す手続きは, §2 掲示の等値関係のうち, その (vi) による. 5 行目以降の展開は (i) タイプのため, 容易である.

例 2 $(Ex)((p \,\&\, (Fx \rightarrow Fx))$

$p \,\&\, (Ex)(Fx \rightarrow Fx)$

$p \,\&\, (Ex)(Fx \vee \sim Fx)$

$p \,\&\, ((Ex)Fx \vee (Ex)\sim Fx)$

$(p \,\&\, (Ex)Fx) \vee (p \,\&\, (Ex)\sim Fx)$

以下同様である. ちなみに, 第 2〜4 行の存在構成素は恒真式ではない (empty な世界では偽となる).

以上, (ii) については, 文記号を, 量記号の作用域の外部にとり出せばよいことがわかる. もっと複雑な例は (iii) と関連してあらわれる. 例えば, $(Ex)((p \vee Fx) \rightarrow \sim((Uy)Fy \,\&\, Gx))$ 等である.

(iii) **例 1** $(Ex)(Fy \,\&\, Gx)$

これは開放言明型である. 開放された言明型は, 閉鎖言明型の一部としてあらわれる場合にのみ関心があるものである. この例で自由変項をもつ述語 F をどのように解釈しても Fy は文にはならない. 開放文は手に入るがそれは真理値をもつ意味での文ではない. 従ってもとの開放言明型はそのままでは整合的とか妥当的であるとかいうことは出来ない. しかし例えば, Fy のすべての解釈の下で, 任意に選んだ領域のすべての対象について真であるとき, それは妥当的であると考えてよい. つまり, 開放言明型を普遍量化によって閉鎖したとき, それが妥当ならばもとの言明型は妥当である. 妥当でな

く，単に整合的ならばそれはまた整合的である．もっとも，Fy を単にある対象についての言明とみて，真あるいは偽のいずれかとして扱うことも出来るが，その場合は，全く文記号と同様，真理函数的言明型として扱うこととなり，それは，前記(i), (ii)に還元されることとなる．したがって，普遍閉鎖体にかえた形で扱うことがここでは適切である．

例 2　(Uy)(Ex)(Fy & Gx)

∼(Ey)∼((Ex)(Fy & Gx)

∼(Ey)∼(Fy & (Ex) Gx)

∼(Ey)(∼Fy∨∼(Ex) Gx)

∼((Ey)∼Fy∨∼(Ex) Gx)

∼(Ey)∼Fy & (Ex) Gx

最後の行で，変項の意味，ならびに，そのかかりに混乱の心配がないことから，変項 'y' を 'x' に rename してさしつかえない．すなわち：

∼(Ex)∼Fx & (Ex) Gx

以下の手続きは慣用のものである．次例3では見易いために [, {,},] を使用した．

例 3　(Uy)[{(Ux)((Fx & Fy)→Gx) & p & (Ux) Fx}→Gy]

∼(Ey)∼[∼{∼(Ex)∼(∼Fx∨∼Fy∨Gx) & p &∼(Ex)∼Fx}∨Gy]

∼(Ey)∼[(Ex)(Fx & Fy &∼Gx)∨∼p∨(Ex)∼Fx∨Gy]

∼(Ey)∼[{((Ex)(Fx &∼Gx) & Fy)∨Gy}∨∼p∨(Ex)∼Fx]

∼(Ey)∼[{((Ex)(Fx &∼Gx)∨Gy) & (Fy∨Gy)}∨∼p∨(Ex)∼Fx]

∼(Ey)[{∼((Ex)(Fx &∼Gx)∨Gy)∨∼(Fy∨Gy)}& p &∼(Ex)∼Fx]

∼(Ey)[{(∼Fy &∼Gy)
　∨(∼Gy &∼(Ex)(Fx &∼Gx))}& p &∼(Ex)∼Fx]

∼[(Ey){(∼Fy &∼Gy)
　∨(∼Gy &∼(Ex)(Fx &∼Gx))} & p &∼(Ex)∼Fx]

$$\sim[\{(Ey)(\sim Fy\ \&\sim Gy)$$
$$\vee(Ey)((\sim Gy\ \&\sim(Ex)(Fx\ \&\sim Gx))\}\ \&\ p\ \&\sim(Ex)\sim Fx]$$

$$\sim[\{(Ey)(\sim Fy\ \&\sim Gy)$$
$$\vee((Ey)\sim Gy\ \&\sim(Ex)(Fx\ \&\sim Gx))\}\ \&\ p\ \&\sim(Ex)\sim Fx]$$

$$\sim[\{(Ey)(\sim Fy\ \&\sim Gy)\vee(Ey)\sim Gy\}\ \&\ \{(Ey)(\sim Fy\ \&\sim Gy)$$
$$\vee\sim(Ex)(Fx\ \&\sim Gx)\}\ \&\ p\ \&\sim(Ex)\sim Fx]$$

$$\{\sim(Ey)(\sim Fy\ \&\sim Gy)\ \&\sim(Ey)\sim Gy\}$$
$$\vee\{\sim(Ey)(\sim Fy\ \&\sim Gy)\ \&\ (Ex)(Fx\ \&\sim Gx)\}\vee(Ex)\sim Fx\vee\sim p$$

この段階で‘y’を‘x’に書きかえて，以下所要の手続をすればよい．

例3の式は Quine (1) の例をとった．そこで彼は，与えられた任意の単項述語論理式を《基本的》(basic) な言明型へ還元する手続きを考案した．ここで《基本的》とは，その言明型の構成要素は，すべて (Ux) Fx, (Ux) (Fx→Gx) 等の普遍量化の形をした言明型か，文記号か，の真理函数だけから出来ているものである．この手続きは，部分式の中であれ，全体の量化についてであれ，量化をうけない式があれば，それらを外部にとり出す方法であった．上例でいえば，(Ux) については‘Fy’, (Uy) については (Ux) によって量化された部分式，ならびに，‘p’を外部に出すことである．その結果を引照すると：

$$\{p\ \&\ (Ux)\,Fx\}\rightarrow\{(Ux)(Fx\rightarrow Gx)\ \&\ (Uy)\,Gy\}$$
$$\vee\{\sim(Ux)(Fx\rightarrow Gx)\ \&\ (Uy)(\sim Fy\rightarrow Gy)\}$$

この手続きののち，‘→’を‘∼’と‘∨’で書き，‘(Ux)’,‘(Uy)’をそれぞれ‘∼(Ex)∼’,‘∼(Ey)∼’にあらためて整理すれば，上記同様の結果となる．Quine (1) の意図は，《基本的言明型》に任意の式を還元し，‘y’を‘x’に書きかえた上で，それについてその式の妥当性を判定する手段を考案することであった．しかし基本的言明型へのその還元技術は，《量記号のかかる真理函数の中に，その量記号の変項が自由にあらわれることのない構成要素》[Quine (2) §32] があれば，それを外部にとり出す手続きという意味で，上例について試みた変形手続きと内容的に同じものである．

以上，分配標準形をうるための手続きを例に即して見て来た．単項述語の場合についてはほぼ例を尽したと思う．上の手続きは単項量化の正準 (canonical) 言明型をうる手続き [Quine (2) § 19]，任意の単項言明型の標準 (standard) 言明型への翻訳手続き [§ 32] と同じものである．それを参照しつつ，以上試みた手続は次のようにまとめることが出来る．

量記号のかかる真理函数のなかに，文記号や，別の量化閉鎖言明型が含まれているとき，それを外にとり出さねばならぬ．

i) (Ux) はその等値形 '∼(Ex)∼' にかえる．

ii) 記号は，選言あるいは連言記号と否定記号のみにする．

iii) ド・モルガン則で否定記号を選言項あるいは連言項の原子式の前に内遷する．

iv) 選言の連言への分配則，連言の選言への分配則の適用．

これらの方法により，量記号のかかる真理函数のなかの，文記号，閉鎖言明型を《選言あるいは連言の一項，あるいは，選言のもとにある連言の一項》[Quine (2) § 32] に制限することが出来る．

v) その上で，既述の等値関係を用いてそれらを外部に出す．それらを再記すると，任意の論理式 'A', 'B' に対して，

(1) 'A', 'B' に 'x' が自由にあらわれれば，

$(Ex)(A \vee B)$ と $(Ex)A \vee (Ex)B$ は等値である．

(2) 'B' に 'x' が自由にあらわれなければ，

$(Ex)(A \vee B)$ と $(Ex)A \vee B$，$(Ex)(A \& B)$ と $(Ex)A \& B$

はそれぞれ等値である．

以上により，連言を選言項とし，その連言は，文記号あるいはその否定かいずれかの連言と，存在量化言明型 (存在構成素) の連言とにすることが出来る．存在量化言明型には，もちろん，文記号や他の量化言明型は含まれず，その量記号には，原子式かあるいはその否定のいずれかの連言のみがつづくようにしうる．

vi) 変項： 例えば ‘y’, ‘z’ 等は ‘x’ に書きかえる.

以下，分配標準形にいたる手続きは，

vii) 与えられた一定の条件， この場合， 文記号及び述語記号の数に関して，各選言項と等値な選言形——各項は連言形をしている——を求めてそれを並記する (重複する選言項があらわれればそれを除く). すなわち：

vii)′ 文記号かあるいはその否定かいずれかの連言部分については，一定の文記号に関して，その連言と等値な選言形を求める. その選言項は，命題論理における完全選言標準形の各選言項としてえられる連言である.

存在言明型の連言部分については，一定の述語記号に関して，各連言項と等値な存在言明型の選言形を求める. その選言項は，存在記号につづく原子式あるいはその否定かいずれかの連言部分と等値の，所定の述語記号に関する連言形をもつ. 原子式を文記号とみたとき，それは命題論理の完全選言標準形の各選言項とアナログである (§3，例4参照).

以上二つの部分の並記により，(vii) に書いた選言形をうる. それは，第1形の分配 (選言) 標準形である.

§5 一階述語論理の特殊な場合として，次に2項述語論理式の分配標準形を考察する. とくに， 2項述語の式で文記号を含まない閉鎖言明型について考える. この特殊な言明型の任意の式は，$(Ex_1)A$ の形の真理函数といってよい. 例えば $(Ex_1)(Ex_2)[(P^2_0x_1x_2 \rightarrow P^2_0x_2x_1) \& P^2_0x_1x_1]$ 等である. ‘(Ux_1)’ は ‘$\sim(Ex_1)\sim$’ であるから， $(Ux_1)A$ は $(Ex_1)A$ の真理函数であり， 上例でいえば A： $(Ex_2)[(P^2_0x_1x_2 \rightarrow P^2_0x_2x_1) \& P^2_0x_1x_1]$ の構成要素は， $P^2_0x_1x_1$ と， $P^2_0x_1x_2$, $P^2_0x_2x_1$ との真理函数である. 一例として，2項述語記号の集合を $\{P^2_0\}$，個体記号の集合を $\{x_1, x_2\}$ とし，書き易いためそれぞれ ‘P’, ‘x’, ‘y’ とする. すると任意の2項述語式は，$(Ex)A$ の形をした真理函数であるが，A の構成要素は，Pxx の形と，$(Ey)B$ の形で，B は Pxy, Pyx, Pyy の真理函数といってよい.

まずBについて，述語記号 $\{P_i\}$ $(i=0, 1, \cdots\cdots, k-1)$ の数を1個とすれば，Bは Pxy, Pyx, Pyy の真理函数，すなわち $k=1$ 個の述語記号に対し 3k 個の原子式の真理函数である．従って，式Bに関するすべての可能性を枚挙することから，分配標準形に到ることにする．すべての可能性の枚挙とは，以前に倣って：

$$(5.1)\qquad (\pm)\,Pxy \,\&\, (\pm)\,Pyx \,\&\, (\pm)\,Pyy$$

と書ける．解釈された体系では，任意の個体 'y' と一定の個体 'x' に関して，すべて相互に排除的な可能的世界を枚挙したものである．この各可能的世界を $Ct_j^0(x, y)$ と書けば，$j=0, 1, \cdots\cdots 2^{3k}-1$ である．いかなるBも，この $Ct_j^0(x, y)$ の選言であり，その選言項の数は0，1，……，2^{3k} である．

この選言形に存在量化記号 (Ey) を前置すれば，(Ey) の選言への分配則によって，(Ey) は各選言項に分配前置される．従って，どんなAも $(Ey)\,Ct_j^0(x, y)$ と Pxx との真理函数である．すなわち次の式は，Aに関するすべての可能性をつくしているから，どんな式Aも，これらの選言に等値である．

$$(5.2)\qquad (\pm)(Ey)\,Ct_0^0(x, y) \,\&\, (\pm)(Ey)\,Ct_1^0(x, y) \,\&\, \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots \,\&\, (\pm)(Ey)\,Ct_j^0(x, y) \,\&\, (\pm)\,Pxx$$

これを以前の略記法によって書くと：

$$(5.3)\qquad [\Pi_r\,(Ey)\,Ct_j^0(x, y)] \,\&\, (\pm)\,Pxx$$

これを又 $Ct_s^1(x, y)$ とする．rは $(Ey)\,Ct_j^0(x, y)$ を適当な順序に全部 $(j=0, 1, \cdots\cdots 2^{3k}-1)$ 並べ，各構成素 $(Ey)\,Ct_j^0(x, y)$ が肯定のあらわれをするとき1，否定記号をもつとき0とした場合，その行番号0, 1, 2,…… を示す整数である．この整数と2進法表記とを対応させれば，$(Ey)\,Ct_j^0(x, y)$ の並べ方に関して，肯定であらわれるその構成素を行番号の整数によって指示することが出来る．今の場合 $(Ey)\,Ct_j^0(x, y)$ の数は8個で，行数 $2^8=256$, $r=0, 1, \cdots\cdots, 255$ である．一般に $r=0, 1, \cdots\cdots, 2^{j+1}-1=0, 1, \cdots\cdots 2^{2^{3k}}-1$ である．今，Pxx の肯定を1，否定を0とすれば，$Ct_s^1(x, y)$ のsについて，それぞれ，$s=1+r\cdot 2^k$，$s=0+r\cdot 2^k$ (但し $k=1$)であることは整数と2進法表記との対応式：

$$r = \sum_{j=0} r_j \cdot 2^j \qquad (r_j = 1 \text{ or } 0, \quad j = 7, 6, \cdots\cdots, 0)$$
$$= r_j \cdot 2^j + r_{j-1} \cdot 2^{j-1} + \cdots\cdots + r_0 \cdot 2^0$$
$$s = \sum s_{j+1} \cdot 2^{j+1} \qquad (s_{j+1} = 1 \text{ or } 0, \quad j+1 = 8, 7, \cdots\cdots, 0)$$
$$= s_{j+1} \cdot 2^{j+1} + s_j \cdot 2^j + \cdots\cdots + s_0 \cdot 2^0$$

によって示される．従って $Ct^1_S(x, y)$ の行番号 s は $0 \leqq s \leqq 2^{(2^{3k}+k)}$ である．解釈された体系において，$Ct^1_S(x, y)$ は任意の個体 'x' に関するすべての可能な種類のリストを与え，その数は $2^9 = 512$ 種類である．

さて，もとの任意の 2 項述語論理式は，(Ex) A という形の真理函数であった．A については，いかなる式も，$Ct^1_S(x, y)$ という構成素の選言に等値であった．すると式 A に前置された存在量化記号 (Ex) は，各選言項に分配されうる．すなわち，どんな式 (Ex) A も次の選言である：

$$(5.4) \qquad (\pm)(Ex)\,Ct^1_0(x, y) \,\&\, (\pm)(Ex)\,Ct^1_1(x, y) \,\&\, \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots \,\&\, (\pm)(Ex)\,Ct^1_S(x, y) \qquad (s = 0, 1, \cdots\cdots 2^{(2^{3k}+k)} - 1)$$

というのは，これらの各代案が，解釈された体系の下では，(Ex) A なる形で書かれた任意の式によって表現される命題の描写するすべての可能な世界のリストであるからである．この可能な世界のリストは，$(\pm)(Ex)\,Ct^1_S(x, y)$ の $s+1 = 2^{(2^{3k}+k)}$ 個連言のあらゆる可能な組合せ $2^{2^{(2^{3k}+k)}}$ 種類である．

従って (Ex) A という形の任意の 2 項述語論理式の分配標準形は上記存在構成素の選言である：

$$(5.5) \qquad \sigma_a [\Pi_t (Ex)\,Ct^1_S(x, y)] \qquad (t = 0, 1, \cdots\cdots, 2^{2^{(2^{3k}+k)}} - 1)$$

この第 1 形に対し，次の式を選言項としてもつ形が第 2 形である：

$$(5.6) \qquad \pi_c (Ex)\,Ct^1_{Sw}(x, y) \,\&\, (Ux)\,\sigma_c\,Ct^1_{Sw}(x, y) \qquad (w = 0, 1, \cdots\cdots)$$

$$(5.7) \qquad \pi_c (Ex)\,\Pi_r (Ey) [\Pi_j P_i(x, y) \,\&\, (\pm)\,P_i(x, x)]$$
$$\& \,(Ux)\,\sigma_c\,\Pi_r (Ey) [\Pi_j P_i(x, y) \,\&\, (\pm)\,P_i(x, x)]$$

(5.7) は (5.6) を詳しく書いたものである．なお s_w は (5.5) の $(\pm)(Ex)\,Ct^1_S(x, y)$, $(s = 0, 1, \cdots\cdots)$ のうち，肯定であらわれる項の番号を示している．

2 項述語論理式の一般的な場合，例えば，量記号のかかる真理函数中に文

記号，個体常項，あるいは，他の量化言明型が入り込んでいる場合についてここでは検討しない．以下，２項述語の場合より一般的な多項述語を含む式に分配標準形が存在することにつき，直観的解釈を若干しておく．Hintikka (2), (3) に拠る．

§6　多項述語の場合，それらの有限な集合，個体記号の集合，depth とによって，個体のすべての可能な種類の記述がえられたと仮定する．この仮定の下では，その種類の個体が存在するかしないかを指定してやれば，単項あるいは２項の場合と並行的な仕方で，世界の可能的な種類の記述をうることが出来る筈である．

m 項述語記号の集合 $\{P^m_0, \cdots\cdots P^m_i\}$ $(m=1, 2, \cdots\cdots,\ i=0, 1, \cdots\cdots, k-1)$, 自由個体記号の集合 $\{x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n\}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$, depth d $(d=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ とする．$x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}$ の指示する個体に対し，x_n の指示する任意の個体がそれらと関係をもつある可能な種類——x_n の指示する個体のもつ複雑な属性——が，次のリストによって与えられたと仮定する：

$$(6.1)\qquad Ct^d_0(x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n),\quad Ct^d_1(x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n),\quad \cdots\cdots$$

これらは上記与件と，量記号，論理記号によって出来ている．今，これら可能な種類の個体 x_n が存在するかどうか，このリストに当ってその存否をたしかめる．それはこのリストの各項に (Ex_n) を前置し，その肯定，否定を指定することである．これによって，その可能な種類の区分けは，次の式となる：

$$(6.2)\qquad (\pm)(Ex_n)\,Ct^d_0(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)\ \&\ (\pm)(Ex_n)\,Ct^d_1(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n)$$
$$\&\ \cdots\cdots\ \&\ (\pm)\,P^m_0(x_1, \cdots, x_{n-1})\ \&\ P^m_1(x_1, \cdots, x_{n-1})\ \&\ \cdots\cdots$$

(6.2) 後半は，$x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}$ の指示する個体の間の関係を述語するすべての原子式の連言である．前半は上記の通りであるが，それとともに，仮定 (6.1) の書き方と並行的に，x_{n-1} の指示する任意の個体が，$x_1, \cdots\cdots, x_{n-2}$ の指示する個体との関係においてあるあり方，その可能な種類，属性について述べて

いると読むことが出来る．これは量記号と x_n の《束縛》とによって自然な読み方である（以上，２項述語の場合を参照して読まれたい）.

ところで d=0 という特別な場合，(6.1) は：

$$(6.3)\qquad (\pm)P_0^m(x_1,\cdots\cdots,x_{n-1},x_n)\ \&\ (\pm)P_1^m(x_1,\cdots\cdots,x_{n-1},x_n)\ \&\ \cdots\cdots$$

である．これは量記号がなく原子式の真理函数である．これは命題論理の完全（選言）標準形をもつ．これが帰納の base である．

このようにして，上記与件（但し d は一つ増加）の下で，多項述語式に分配標準形が存在することが判る．以上が，Hintikka (2), (3) の所説である．

ところで多少コメントをつけたい．まず，(i) (6.2) は決して (6.1) の定義ではない．(6.2) は (6.1) の各々に当ったその結果を書き上げたものである．(6.1) が与えられ，それを仮定し，既知とすれば，それと，$(\pm)P_0^m(x_1,\cdots\cdots,x_{n-1})\ \&\ (\pm)P_1^m(x_1,\cdots\cdots,x_{n-1})\ \&\ \cdots\cdots$ との連言によって，可能的な世界——個体の可能的な種類ではない——を書けるというのである．(ii) (6.1) の各々は，単にそう書けたと仮定されたのであって，その定義は別に与えられねばならない．その定義は，帰納的 (recursively) に与えられる：

$$\begin{aligned}(6.4)\qquad Ct_u^d(x_1,\cdots\cdots,x_n)=\ &(\pm)(Ex_{n+1})\,Ct_0^{d-1}(x_1,\cdots\cdots,x_n,x_{n+1})\ \&\\ &(\pm)(Ex_{n+1})\,Ct_1^{d-1}(x_1,\cdots\cdots,x_n,x_{n+1})\ \&\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &(\pm)P_0^m(x_1,\cdots\cdots,x_n)\ \&\\ &(\pm)P_1^m(x_1,\cdots\cdots,x_n)\ \&\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

この帰納方程式は，もちろん，右辺が既知である．この定義は，d=0 のとき，右辺の上半分は消える：

$$\begin{aligned}(6.5)\qquad Ct_u^0(x_1,\cdots\cdots,x_n)=\ &(\pm)P_0^m(x_1,\cdots\cdots,x_n)\ \&\\ &(\pm)P_1^m(x_1,\cdots\cdots,x_n)\ \&\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

これは(6.3)であり，帰納の base 基礎である．

(6.2)について言及したが，しかし一方では，(iii) それは x_{n-1} の指示する任意の個体の可能な種類のリストであると読める．x_n が bound で x_{n-1} が free とすれば，x_{n-1} の指示する任意の個体について，(6.2)の $(Ex_n)\,Ct_u^d(x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n)$ すなわち $Ct^{d+1}(x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n)$ はまた，帰納方程式で書くことが出来る．すなわちその定義は：

$$
\begin{aligned}
(6.6)\qquad Ct^{d+1}(x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n) = {} & (\pm)(Ex_n)\,Ct_0^d(x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n)\ \& \\
& (\pm)(Ex_n)\,Ct_1^d(x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n)\ \& \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& (\pm)\,P_0^m(x_1, \cdots\cdots, x_{n-1})\ \& \\
& (\pm)\,P_1^m(x_1, \cdots\cdots, x_{n-1})\ \& \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

右辺によって，左辺の x_n も bound variable である．

ところで，この定義につき，d=0 のときをとってみる．すると：

$$
\begin{aligned}
(6.7)\qquad Ct^1(x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n) = {} & (\pm)(Ex_n)\,Ct_0^0(x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n)\ \& \\
& (\pm)(Ex_n)\,Ct_1^0(x_1, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n)\ \& \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& (\pm)\,P_0^m(x_1, \cdots\cdots, x_{n-1})\ \& \\
& (\pm)\,P_1^m(x_1, \cdots\cdots, x_{n-1})\ \& \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

(6.7)の右辺は，その特別な場合として，(a) n=1, 単項述語 P_0^1, P_1^1, …… で，文記号 P_0^0, P_1^0, …… を含まないときの構成素を示し，(b) n=2, 2項述語 P_0^2, P_1^2, …… で，文記号を含まないときの depth 1 の構成素を示している．右辺後半部の連言は，$P_0^2(x_1, x_1)$, $P_1^2(x_1, x_1)$, …… の形である．これらを (α) 選言項あるいは (β) 選言項をつくる連言の一部としてもつ分配標準形は，それぞれ

単項述語式，2項述語式であった．このうち(a)を帰納の base とすることも出来る．しかし，原理的には，(6.4)に関して，(6.5)の右辺を選言項とする命題論理の完全標準形が base である．

なお，形式的（構文論的）な論理演算に関して付言したい．それは，(6.4)及び(6.6)の帰納方程式右辺の存在量化記号のあらわれについてである．その直観的解釈は縷説の通りであるが，形式的にいえば次のように云える．今 depth d (d=0, 1, ……) の任意の式 A があるとする．そして，それが $(Ex_i)B$ (i=1, 2, ……, n) の形をしていて，B が $Ct^{d-1}(x_1, \cdots\cdots, x_i)$ の選言であるとすれば，(i) (Ex_i) はその選言の各項に，存在量化記号の分配則によって分配されること，(ii) x_i を free に含まぬ $Ct^{d-1}(x_1, \cdots\cdots, x_i)$ の部分については，(Ex_i) の作用域から外に出してよいこと――§4 (v̈) (1), (2)参照――この規則を適用することが出来る．そしてその結果が，まさに，帰納方程式の右辺である．

(1967. 1)

References

Braithwaite, R. B., (1) «Two Ways of Definition by Verification» Erkenntnis, Bd. 7, 1937～'38.

Hintikka, J., (1) Distributive Normal Forms in the Calculus of Predicates. Helsinki, 1953.

―― " ―― (2) «Distributive Normal Forms in First-Oder Logic» in "Formal Systems and Recursive Functions" (ed. by Crossley & Dummett) Amsterdam, 1965.

―― " ―― (3) «Towards a Theory of Inductive Generalization» in "Logic, Methodology and Philosophy of Science" (ed. by Bar-Hillel) Amsterdam, 1966.

Quine, W. V., (1) «On the Logic of Quantification» Journal of Symbolic Logic. vol. 10, 1945.

―― " ―― (2) Methods of Logic. London, 1952 [改訂版 (1959) 邦訳『論理学の方法』1961].

von Wright, G. H., (1) Form and Content in Logic. Cambridge, 1949.

―― " ―― (2) «On the Idea of Logical Truth» Societas Scientarum Fennica, Commentationes physico-mathematicae. XIV, 4, 1948.

―― " ―― (3) «On Double Quantification» op. cit., XVI, 3, 1952.