



Title	Die konformen Abbildungen der Polygone mit zwei Ecken
Author(s)	Ikeda, Yosiro
Citation	北海道帝國大學理學部紀要, 2(2), 1-28
Issue Date	1938-04-30
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/34468">http://hdl.handle.net/2115/34468</a>
Type	bulletin (article)
File Information	2_P(2)1-28.pdf



[Instructions for use](#)

# Die konformen Abbildungen der Polygone mit zwei Ecken.

von

Yosiro IKEDA.

Mittels der Formel von Schwarz-Christoffel bildet man das innere Gebiet des Polygons auf die obere Halbebene ab. In der vorliegenden Arbeit handelt es sich darum, erstens möglichst viele konforme Abbildungen der Polygone mit zwei Ecken, deren Winkel  $\frac{n\pi}{3}$  oder  $\frac{m\pi}{4}$  ( $n=1, 2, 3, m=1, 2, 3$ ) sind, graphisch darzustellen, und zweitens um die allgemeine Erledigung der Aufgabe, die Abbildungsfunktion auf eine Kombination von einigen Elementarfunktionen und dem elliptischen Integral erster oder zweiter Art zu reduzieren.

## 1. Beide Winkel sind $90^\circ$ .

Es gibt drei verschiedene Polygone ;

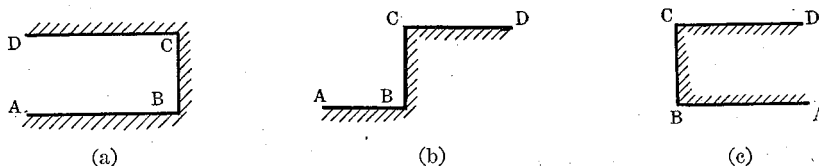


Abb. 1.

Die der Abb. 1 entsprechenden Formeln von Schwarz-Christoffel sind

$$(1.1) \quad Z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} ,$$

$$(1.2) \quad Z = \int_0^z \sqrt{\frac{z}{1-z}} dz ,$$

$$(1.3) \quad Z = \int_0^z \sqrt{1-z^2} dz .$$

Ersetzt man  $z$  in (1.3) durch  $\sqrt{1-u}$ , so erhält man

$$Z = \int \sqrt{\frac{u}{1-u}} du$$

Dies ist das Integral (1.2). In der Tat wird die dritte Abbildung unmittelbar durch Spiegelung an der Achse AB der zweiten Abbildung gewonnen. Die zwei Integrale (1.1) und (1.2) werden leicht durch Elementarfunktionen dargestellt:

$$(1.1.a) \quad Z = \sin^{-1} z$$

$$(1.2.a) \quad Z = \sin^{-1} \sqrt{z} - \frac{1}{2} \sin \{ 2 \sin^{-1} \sqrt{z} \}$$

Die Kurven, welche durch diese Funktionen abgebildet werden, sind in Abb. 32, 33 und 34 gezeigt, und die Methode, diese Abbildungen zu gewinnen, ist an anderer Stelle<sup>(1)</sup> ausführlich beschrieben.

## 2. Die Winkel sind 60°.

Es gibt vier Polygone, von denen zwei nicht wesentlich voneinander verschieden sind. Daher haben wir nur drei voneinander verschiedene Polygone.

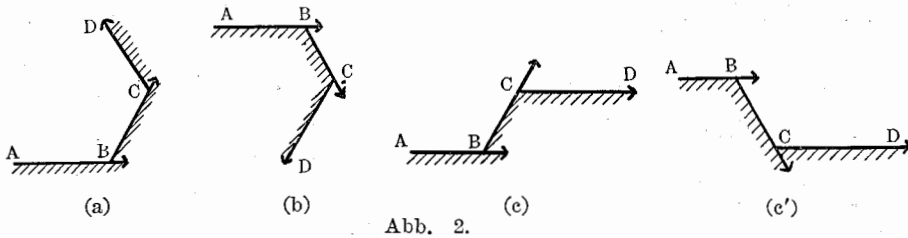


Abb. 2.

Die der Abb. 2 entsprechenden Formeln von Schwarz-Christoffel sind

$$(2.1) \quad Z = \int_0^{z^3} \sqrt{\frac{1}{(1-z)z}} dz ,$$

$$(2.2) \quad Z = \int_0^z \sqrt[3]{z(1-z)} dz ,$$

$$(2.3) \quad Z = \int_0^{z^3} \sqrt{\frac{z}{1-z}} dz, \text{ oder } Z = \int_0^{z^3} \sqrt{\frac{1-z}{z}} dz .$$

Führt man im ersten Falle als neue unabhängige Veränderliche die Grösse

$$z(1-z) = \frac{1}{4} t^3$$

(1) Streamlines near the Rectangular Edge by Y. IKEDA, S. KOBAYASI, T. SAKURAI and F. TATIBANA. Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Imperial University, Vol. 4, No. 1. Oct. 1936.

ein, so wird

$$z = \frac{1 + \sqrt{1-t^3}}{2}, \quad dz = \frac{1}{4} \frac{-3t^2}{\sqrt{1-t^3}} dt.$$

Weil wir diese Substitutionsformel häufig anwenden werden, so bezeichnen wir sie zur Abkürzung mit S. A.

Die Integrale (2.1) und (2.2) gehen durch S.A. in die Integrale;

$$(2.1.a) \quad Z = -\frac{3\sqrt[3]{4}}{4} \int \frac{t dt}{\sqrt{1-t^3}},$$

$$(2.2.a) \quad Z = \frac{1}{2\sqrt[3]{4}} \frac{3}{5} \left\{ t \sqrt{1-t^3} - \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} \right\}$$

über.

Nun schreiben wir

$$(2.1.b) \quad I_1(t) = \int_0^t \frac{t}{\sqrt{1-t^3}} dt,$$

$$(2.2.b) \quad I_2(t) = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}.$$

$I_1$  und  $I_2$  sind die elliptischen Integrale. Danach gelangen wir zu den Formeln

$$(2.1.c) \quad Z = -\frac{3\sqrt[3]{4}}{4} I_1$$

$$(2.2.c) \quad Z = \frac{1}{2\sqrt[3]{4}} \frac{3}{5} \left\{ \sqrt[3]{4z(1-z)} (1-2z) - I_2 \right\}.$$

Führt man im zweiten Falle als neue unabhängige Veränderliche die Grösse

$$\frac{z}{z-1} = t^3, \quad \text{oder} \quad \sqrt[3]{\frac{z}{1-z}} = e^{i\frac{\pi}{3}t}$$

ein, so wird

$$z = \frac{-t^3}{1-t^3}, \quad dz = -\frac{3t^2 dt}{(1-t^3)^2}.$$

Wir bezeichnen zur Abkürzung diese Substitution mit S.B.

Durch S.B. geht das Integral (2.3) in

$$(2.3.a) \quad Z = e^{i\frac{\pi}{3}} \int \frac{-3t^3}{(1-t^3)^2} dt = e^{i\frac{\pi}{3}} \left\{ \frac{-t}{1-t^3} + \int \frac{dt}{1-t^3} \right\}$$

über.

Wir schreiben

$$(2.3.b) \quad I_3 = \int \frac{dt}{1-t^3}.$$

Wir erhalten durch Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{1-t^3} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{1-t} + \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(1+2t)}{1+t+t^2} \right\}$$

das Integral

$$(2.3.c) \quad \int_0^t \frac{dt}{1-t^3} = -\frac{1}{3} \ln(1-t) + \frac{1}{6} \ln(1+t+t^2) \\ + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left( \frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Daraus gelangen wir zu der Formel

$$(2.3.d) \quad Z = e^{i\frac{\pi}{3}} \left\{ \sqrt[3]{(1-z)^2 z} + I_3 \right\}.$$

### 3. Ein Winkel ist $60^\circ$ und der andere Winkel ist $120^\circ$ .

Es gibt acht verschiedene Polygone, aber von diesen sind nur vier Polygone wesentlich voneinander verschieden.

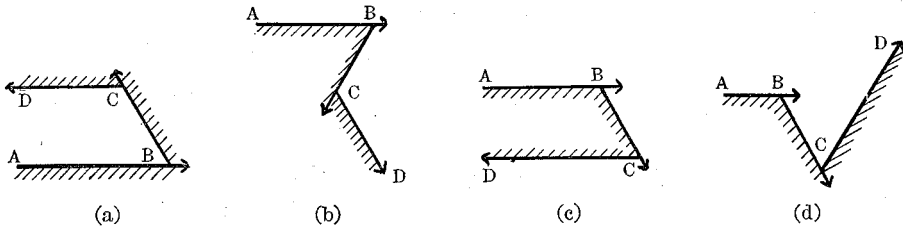


Abb. 3.

Die der Abb. 3 entsprechenden Formeln von Schwarz-Christoffel sind also

$$(3.1) \quad Z = \int_0^{z^3} \sqrt{\frac{1}{z^2(1-z)}} dz,$$

$$(3.2) \quad Z = \int_0^{z^3} \sqrt{\frac{z^2}{1-z}} dz,$$

$$(3.3) \quad Z = \int_0^z \sqrt[3]{z(1-z)^2} dz,$$

$$(3.4) \quad Z = \int_0^{z^3} \sqrt{\frac{z}{(1-z)^2}} dz .$$

Das Integral (3.1)

$$Z = \int_0^z \frac{1}{z} \sqrt{\frac{z}{1-z}} dz$$

geht durch S.B. in

$$= \int_0^t \frac{dt}{1-t^3} (-3e^{i\frac{\pi}{3}}) = -3e^{i\frac{\pi}{3}} I_3$$

über.

Die Integrale (3.2) und (3.4)

$$Z = \int_0^z z \sqrt{\frac{1}{z(1-z)}} dz , \quad Z = - \int_0^z z \sqrt{\frac{1}{z^2(1-z)}} dz$$

gehen durch S. A. in

$$Z = -\frac{3}{8} \sqrt[3]{4} \left\{ I_1 + \frac{t^2}{2} \right\} , \quad Z = -\frac{3}{2\sqrt[3]{4}} \{ I_2 + t \}$$

über, wobei

$$z(1-z) = \frac{1}{4} t^3 .$$

Das Integral (3.3)

$$Z = \int_0^z \sqrt[3]{z(1-z)^2} dz = \int_0^z (1-z) \sqrt[3]{\frac{z}{1-z}} dz$$

geht durch S. B. in

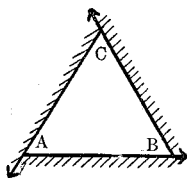
$$\begin{aligned} Z &= \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2} \int_0^t \frac{2 \cdot 3t^3}{(1-t^3)^3} \\ &= \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2} \left\{ \frac{t^2}{(1-t^3)^2} - \frac{1}{3} \frac{t^2}{1-t^3} - \frac{2}{3} I_3 \right\} \end{aligned}$$

über, wobei

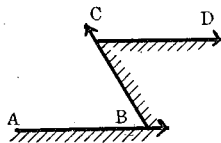
$$\frac{z}{z-1} = t^3 .$$

#### 4. Beide Winkel sind 120°.

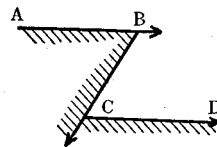
Da gibt es drei Polygone;



(a)



(b)



(c)

Abb. 4.

Das dritte Polygon ist von dem zweiten nicht wesentlich verschieden. Daher haben wir nur zwei Polygone zu untersuchen, also betrachten wir nur die Fälle (a) und (b).

Die der Abb. 4 entsprechenden Formeln von Schwarz-Christoffel sind

$$(4.1) \quad Z = \int_0^{z^3} \sqrt{\frac{1}{z^2(1-z)^2}} dz ,$$

$$(4.2) \quad Z = \int_0^{z^3} \sqrt{\frac{(1-z)^2}{z^2}} dz .$$

Das Integral (4.1) geht durch S. A. in

$$(4.1.a) \quad Z = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}} = -3\sqrt[3]{4} I_2$$

über.

Das Integral (4.2) geht durch S. B. in

$$\begin{aligned} Z &= e^{-i\frac{2\pi}{3}} 3 \int_0^t \frac{dt}{(1-t^3)^2} \\ &= e^{-i\frac{2\pi}{3}} \left( 2I_3 + \frac{t}{1-t^3} \right) \end{aligned}$$

über.

Daraus gelangen wir zu der Formel;

$$(4.2.a) \quad Z = e^{-i\frac{2\pi}{3}} (2I_3 - \sqrt{z(z-1)^2}) .$$

### 5. Ein Winkel ist $\pm 180^\circ$ und der andere Winkel ist $\pm 60^\circ$ .

Es gibt nur drei Polygone;

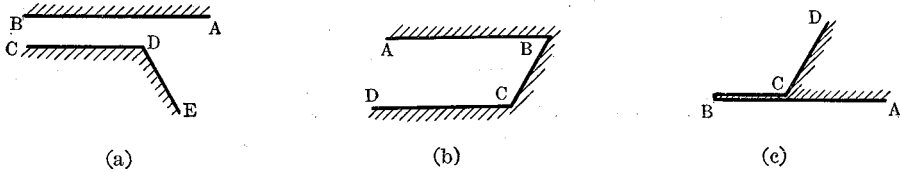


Abb. 5.

Das zweite Polygon ist schon in Abb. 3. (b) gezeichnet. Die (a) und (c) entsprechenden Formeln von Schwarz-Christoffel sind

$$(5.1) \quad Z = \int \frac{\sqrt[3]{1-z}}{z} dz ,$$

$$(5.2) \quad -Z = \int \frac{z}{\sqrt[3]{1-z}} dz$$

Die Integrale gehen durch die Substitution

$$t^3 = 1 - z, \quad 3t^2 dt = -dz$$

in die folgenden

$$(5.1.a) \quad Z = -3 \int \frac{t^3}{1-t^3} t^2 dt = 3[t - I_3]_0^t$$

$$(5.2.a) \quad Z = -3 \int (1-t^3) t dt = -3 \left( \frac{t^2}{2} - \frac{t^5}{5} \right)$$

über.

Wir bezeichnen diese Substitution mit S. C.

## 6. Ein Winkel ist $\pm 180^\circ$ und der andere ist $\pm 120^\circ$ .

Hier gibt es nur zwei Polygone;

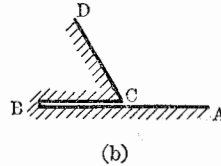
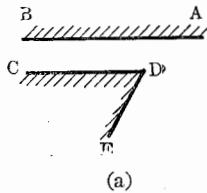


Abb. 6.

Die der Abb. 6 entsprechenden Formeln von Schwarz-Christoffel sind

$$(6.1) \quad Z = \int_0^z \frac{\sqrt{(1-z)^2}}{z} dz,$$

$$(6.2) \quad Z = \int_0^z \frac{z}{\sqrt[3]{(1-z)^2}} dz.$$

Das Integral (6.1) geht durch S. C. in

$$(6.1.a) \quad Z = -3 \int \frac{t^2}{1-t^3} t^2 dt = 3 \left[ \frac{t^2}{2} - \int \frac{t}{1-t^3} dt \right]$$

über.

Das letzte Integral führen wir durch die Substitution  $\frac{1}{t} = t'$  auf den

behandelten Typus  $I_3$  zurück. Danach wird

$$(6.1.b) \quad Z = 3 \left\{ \frac{\sqrt{(1-z)^2}}{2} - I_3 \left( \frac{1}{\sqrt[3]{1-z}} \right) \right\}.$$

Auch geht das Integral (6.2) durch S. C. in



$$Z = -3 \int \frac{1-t^3}{t^3} dt = -3 \left( t - \frac{t^4}{4} \right)$$

über, wobei

$$t^3 = 1 - z$$

7. Die Polygone, welche aus den Abb. 2, 3, 4, 5 und 6 zusammengesetzt werden.

Durch Spiegelung an einer Achse ergibt sich wieder eine konforme Abbildung. Wir wollen hier einige Abbildungen zeigen, um diese Methode zu erläutern.

Nach Abb. 1. (a)

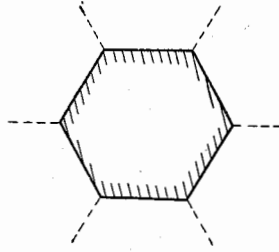


Abb. 7.

Nach Abb. 1. (b)

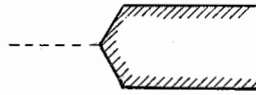


Abb. 8.

Nach Abb. 2. (a)

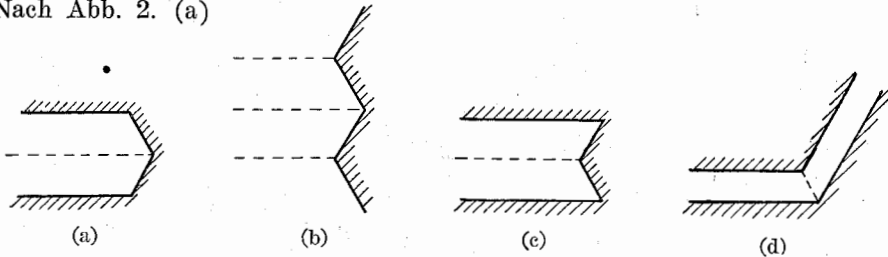


Abb. 9.

Nach Abb. 2. (b)

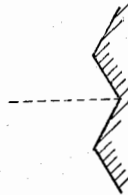


Abb. 10.

Nach Abb. 4. (a)

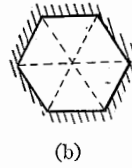
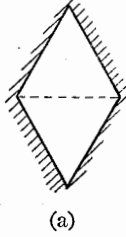


Abb. 11.

Nach Abb. 4. (b)

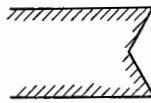


Abb. 12.

Nach Abb. 5. (a)

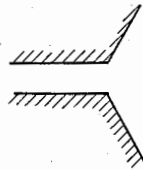


Abb. 13.

Nach Abb. 6. (a)

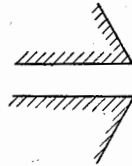


Abb. 14.

8. Die Winkel sind  $\pm 45^\circ$ .

Es gibt vier Polygone;

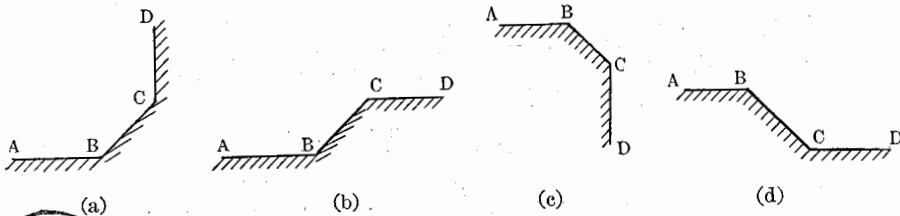


Abb. 15.



(b) und (d) sind nicht wesentlich voneinander verschieden.

Die (a), (c) und (d) entsprechenden Formeln von Schwarz-Christoffel sind

$$(8.1) \quad Z = \int \sqrt[4]{\frac{1}{z(1-z)}} dz ,$$

$$(8.2) \quad Z = \int \sqrt[4]{z(1-z)} dz ,$$

$$(8.3) \quad Z = \int \sqrt[4]{\frac{z}{1-z}} dz .$$

Das erste Integral  $\int \sqrt[4]{\frac{1}{z(1-z)}} dz$  führen wir durch die Substitution

$$(D) \quad z(1-z) = \frac{1}{4} t^4$$

$$z = \frac{1 + \sqrt{1-t^4}}{2}, \quad dz = \frac{-t^3}{\sqrt{1-t^4}} dt$$

auf das elliptische Integral

$$(8.1.a) \quad I_4 = \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

zurück. Also

$$(8.1.b) \quad Z = -\sqrt{2} \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^4}} = -\sqrt{2} [I_4]_0^t$$

wobei  $z(1-z) = \frac{1}{4} t^4$  oder  $z = \frac{1 + \sqrt{1-t^4}}{2}$ .

Wir bezeichnen diese Substitution mit S. D.

Das zweite Integral geht durch dieselbe Substitution in

$$Z = - \int \frac{t}{\sqrt{2}} \frac{t^3 dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

über.

Durch partielle Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} \int \frac{t^4 dt}{\sqrt{1-t^4}} &= \frac{1}{4} t \sqrt{1-t^4} - \frac{1}{4} \int \sqrt{1-t^4} dt \\ &= \frac{1}{4} t \sqrt{1-t^4} - \frac{1}{4} \int \frac{1-t^4}{\sqrt{1-t^4}} dt \\ &= \frac{1}{4} t \sqrt{1-t^4} - \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \frac{1}{4} \int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^4}} dt . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(8.2.a) \quad \int \frac{t^4 dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{3} t \sqrt{1-t^4} - \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} .$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(8.2.b) \quad I_5 = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} ,$$

so erhalten wir

$$(8.2.c) \quad Z = \frac{-1}{\sqrt[3]{2}} [t \sqrt{1-t^4} - I_5]_0^t .$$

Das dritte Integral  $\int \sqrt[4]{\frac{z}{1-z}} dz$  geht durch die Substitution

$$(E) \quad \sqrt[4]{\frac{z}{1-z}} = t$$

oder

$$z = -\frac{t^4}{1-t^4} , \quad dz = -\frac{4t^3 dt}{(1-t^4)^2}$$

in  $e^{\frac{\pi i}{4}} \int t \frac{-4t^3}{(1-t^4)^2} dt = -e^{\frac{\pi i}{4}} \left[ t \frac{1}{1-t^4} - \int \frac{dt}{1-t^4} \right]_0^t$

über.

Setzt man zur Abkürzung

$$(8.3.a) \quad I_6 = \int \frac{dt}{1-t^4} ,$$

so erhält man

$$(8.3.b) \quad Z = -e^{\frac{\pi i}{4}} \left[ \frac{t}{1-t^4} - I_6 \right]_0^t$$

wobei  $t = \sqrt[4]{\frac{z}{1-z}}$  und

$$(8.3.c) \quad I_6 = \frac{1}{4} \cosh^{-1} \frac{1+t^2}{1-t^2} + \cos^{-1} \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Diese Substitution  $\sqrt[4]{\frac{z}{1-z}} = t$  bezeichnen wir hiernach mit S. E.

## 9. Ein Winkel ist $\pm 90^\circ$ und der andere ist $\pm 45^\circ$ .

Es gibt vier voneinander verschiedene Polygone;

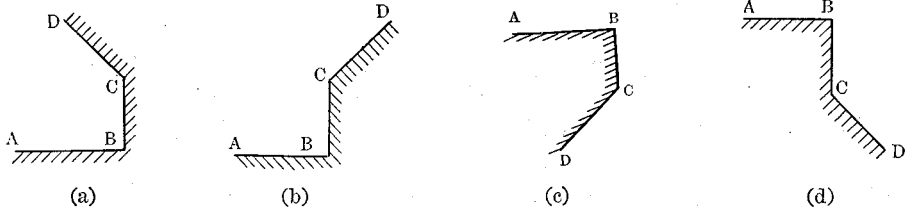


Abb. 16.

Die (a), (b), (c) und (d) entsprechenden Formeln von Schwarz-Christoffel sind

$$(9.1) \quad Z = \int \sqrt[4]{\frac{1}{z^2(1-z)}} dz ,$$

$$(9.2) \quad Z = \int \sqrt[4]{\frac{(1-z)}{z^2}} dz ,$$

$$(9.3) \quad Z = \int \sqrt[4]{\frac{z^2}{1-z}} dz ,$$

$$(9.4) \quad Z = \int \sqrt[4]{z^2(1-z)} dz .$$

Das Integral (9.1) führen wir durch die Substitution  $z=u^2$  auf den unter Nr.8 behandelten Typus zurück; durch S. E. können wir von da aus zu dem Integral  $I_4$  gelangen. In ähnlicher Weise geht das Integral (9.2) in das elliptische Integral von dem unter Nr. 8 behandelten Typus  $I_5$  über.

Die Integrale (9.3) und (9.4) gehen durch die Substitution

$$(F) \quad 1-z=t^4, \quad 1-t^4=z, \quad -4t^3 dt=dz$$

in

$$(9.3.a) \quad Z = -4 \int_1^t t^2 \sqrt{1-t^4} dt = \frac{4}{10} \left\{ -4 \int_1^t \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^4}} - 2 \left[ t^3 \sqrt{1-t^4} \right]_1^t \right\} \\ = \frac{2}{5} \left[ -4 I_4 - 2t^3 \sqrt{1-t^4} \right]_1^t$$

über, wobei  $t^4=1-z$ .

$$(9.4.a) \quad Z = -4 \int_1^t t^4 \sqrt{1-t^4} dt \\ = -\frac{4}{5} t^5 \sqrt{1-t^4} - \frac{4}{5} \int_1^t \frac{2t^8 dt}{\sqrt{1-t^4}} \\ = -\frac{4}{5} t^5 \sqrt{1-t^4} + \frac{8}{5} \int_1^t t^4 \sqrt{1-t^4} dt - \frac{8}{5} \int_1^t \frac{t^4}{\sqrt{1-t^4}} dt \\ = \frac{4}{28} \left\{ -4t^5 \sqrt{1-t^4} - 8 \int_1^t \frac{t^4}{\sqrt{1-t^4}} dt \right\} .$$

Nach (8.2.a) folgt

$$(9.4.b) \quad Z = \frac{4}{7} \left\{ -t^5 \sqrt{1-t^4} - \frac{2}{3} \left( -t \sqrt{1-t^4} + \int_1^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \right) \right\} \\ = \frac{4}{21} \left[ (2t - 3t^5) \sqrt{1-t^4} - \frac{2}{3} I_5 \right]_1^t,$$

wobei  $t^4 = 1 - z$ .

Wir bezeichnen die Substitution  $t^4 = 1 - z$  mit S.F.

### 10. Ein Winkel ist $\pm 135^\circ$ und der andere ist $\pm 45^\circ$ .

Es gibt vier voneinander verschiedene Polygone;

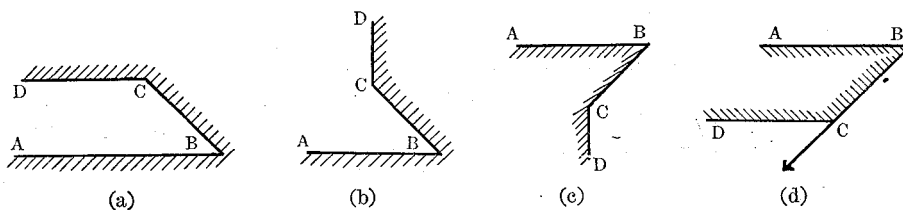


Abb. 17.

Die den Abb. (a), (b), (c) und (d) entsprechenden Formeln von Schwarz-Christoffel sind

$$(10.1) \quad Z = \int \sqrt[4]{\frac{1}{z^3(1-z)}} dz,$$

$$(10.2) \quad Z = \int \sqrt[4]{\frac{1-z}{z^3}} dz,$$

$$(10.3) \quad Z = \int \sqrt[4]{\frac{z^3}{1-z}} dz,$$

$$(10.4) \quad Z = \int \sqrt[4]{z^3(1-z)} dz.$$

Das Integral (10.1) geht durch S.E. in

$$(10.1.a) \quad Z = 4e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^t \frac{dt}{1-t^4} = 4e^{\frac{\pi i}{4}} [I_6]_0^t$$

über, wobei  $t = \sqrt[4]{\frac{z}{1-z}}$ .

Das Integral (10.2) geht durch S.D. in

$$(10.2.a) \quad Z = \int_1^{z^4} \sqrt[4]{\frac{1-z}{z^3}} dz = -\sqrt{2} \left\{ \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} - t \right\} = -\sqrt{2} [I_5 - t]_0^t$$

über, wobei  $t^4 = 4z(z-1)$ .

Das Integral (10.3) geht durch S.D. in

$$(10.3.a) \quad Z = \int_1^z z \sqrt{\frac{1}{z(1-z)}} dz = \frac{-1}{\sqrt{2}} \left\{ \int_0^t \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^t t^2 dt \right\} \\ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ I_4 + \frac{t^3}{3} \right]_0^t$$

über, wobei  $t^4 = 4(z-1)$ .

Das Integral (10.4) geht durch  $\frac{1-z}{z} = -t^4$ ,  $z = \frac{1}{1-t^4}$  in

$$(10.4.a) \quad Z = \int_1^z z^{\frac{4}{3}} \sqrt{\frac{1-z}{z}} dz = e^{-\frac{\pi i}{4}} \int_0^t t \frac{4t^3}{(1-t^4)^3} dt \\ = e^{-\frac{\pi i}{4}} \left[ \frac{t}{(1-t^4)^2} - \frac{1}{4} \frac{t}{1-t^4} - \frac{3}{4} I_6 \right]_0^t$$

über, wobei  $t = \sqrt[4]{\frac{z-1}{z}}$ ; und wir bezeichnen diese Substitution mit S.E'.

### 11. Ein Winkel ist $\pm 135^\circ$ und der andere ist $\pm 90^\circ$ .

Es gibt drei voneinander verschiedene Polygone;

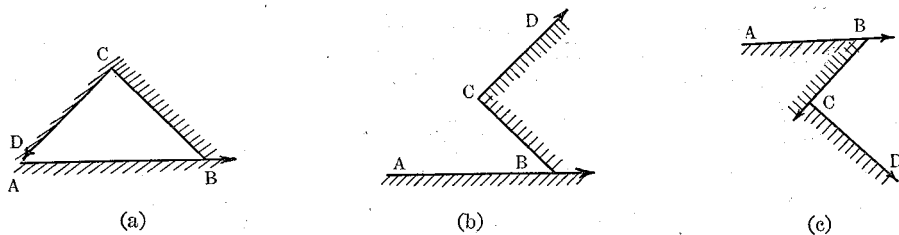


Abb. 19.

Die den Abbildungen (a), (b) und (c) entsprechenden Formeln von Schwarz-Christoffel sind

$$(11.1) \quad Z = \int \sqrt[4]{\frac{1}{z^3(1-z)^2}} dz,$$

$$(11.2) \quad Z = \int \sqrt[4]{\frac{(1-z)^2}{z^3}} dz,$$

$$(11.3) \quad Z = \int \sqrt[4]{\frac{z^3}{(1-z)^2}} dz.$$

Durch die Substitution  $z = t^4$  geht das Integral (11.1) in

$$(11.1.a) \quad Z = \int_1^{z^4} \sqrt{\frac{1}{z^3(1-z)^2}} dz = 4 \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = 4[I_5]^t,$$

über.

Durch partielle Integrationen führen wir die Integrale (11.2) und (11.3) auf das in § 9 behandelte Integral zurück

$$(11.2.a) \quad Z = \int \sqrt{\frac{(1-z)^2}{z^3}} dz = 4\sqrt{1-z}\sqrt[4]{z} + 2 \int \sqrt{\frac{z}{(1-z)^2}} dz$$

$$(11.3.a) \quad Z = \int \sqrt{\frac{z^3}{(1-z)^2}} dz = -2\sqrt{1-z}\sqrt[4]{z^3} - \frac{3}{2} \int \sqrt{\frac{(1-z)^2}{z}} dz$$

## 12. Die Winkel sind $\pm 135^\circ$ .

Es gibt zwei voneinander verschiedene Polygone;



Abb. 19.

Die Abb.19. (a) ist von der Abb.11. (a) nicht wesentlich verschieden. Die (b) entsprechende Formel von Schwarz-Christoffel ist

$$(12.1) \quad Z = \int_0^{z^4} \sqrt{\frac{z^3}{(1-z)^3}} dz$$

Durch S.E. geht das Integral in

$$\begin{aligned} Z &= \int_0^z e^{3\frac{\pi i}{4}} \frac{1}{t^3} \frac{4t^3}{(1-t^4)^2} dt = e^{3\frac{\pi i}{4}} \left[ \frac{1}{t^3} \frac{1}{1-t^4} + 3 \int \frac{dt}{t(1-t^4)} \right]_0^z \\ &= e^{3\frac{\pi i}{4}} \left[ \frac{1}{t^3(1-t^4)} - 3 \int \frac{dt}{t^4} - 3 \int \frac{dt}{1-t^4} \right]_0^z \\ &= e^{3\frac{\pi i}{4}} \left[ \frac{t}{(1-t^4)} + 3I_6 \right]_0^z \end{aligned}$$

über, wobei

$$t^4 = \frac{z}{z-1}$$

## 13. Ein Winkel ist $\pm 180^\circ$ und der andere ist $+45^\circ$ , $+90^\circ$ oder $+135^\circ$ .

Es gibt drei Polygone;



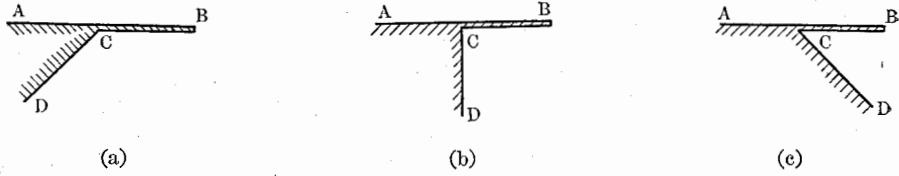


Abb. 20.

Die den Abb. 20. (a), (b) und (c) entsprechenden Integrale sind

$$(13.1) \quad Z = \int \frac{z}{\sqrt[4]{1-z}} dz ,$$

$$(13.2) \quad Z = \int \frac{z}{\sqrt[4]{(1-z)^2}} dz ,$$

$$(13.3) \quad Z = \int \frac{z}{\sqrt[4]{(1-z)^3}} dz .$$

Durch die Substitution  $1-z=t^4$ ,  $-dz=4t^3 dt$  gehen die Integrale in

$$(13.1.a) \quad Z = \int_1^t \frac{1-t^4}{t} 4t^3 dt = \left[ \frac{4}{3} t^3 - \frac{4}{7} t^7 \right]_1^t ,$$

$$(13.2.a) \quad Z = \int_1^t \frac{1-t^4}{t^2} 4t^3 dt = \left[ 2t^2 - \frac{2}{3} t^6 \right]_1^t ,$$

$$(13.3.a) \quad Z = \int_1^t \frac{1-t^4}{t^3} 4t^3 dt = 4 \left[ t - \frac{t^5}{5} \right]_1^t ,$$

über, wobei

$$t^4 = 1-z .$$

#### 14. Die Polygone welche aus den oben behandelten Polygonen durch Spiegelung entstehen.

Durch Spiegelung an einer passend gewählten Achse erhält man aus Abb. 16. (a)

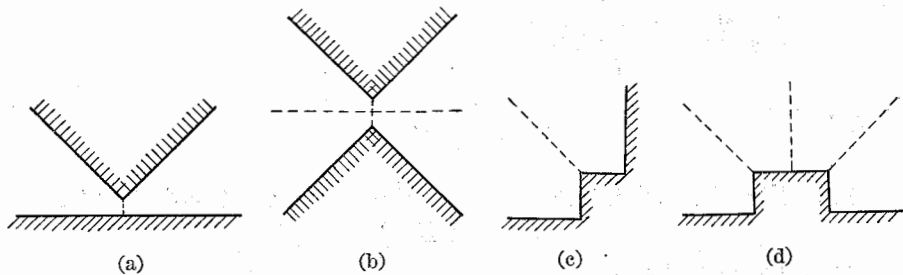


Abb. 21.

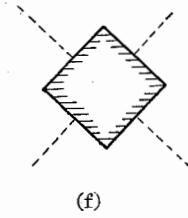
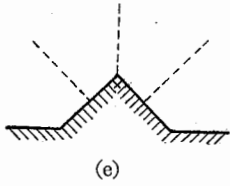


Abb. 21.

Nach Abb. 15. (c)

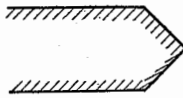


Abb. 22.

Nach Abb. 17. (d)

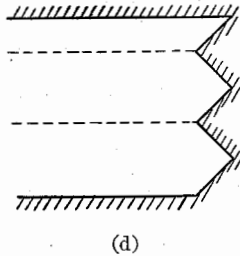
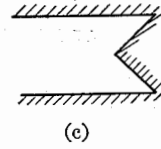
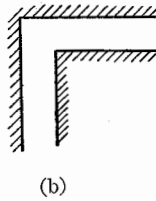
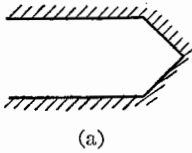


Abb. 23.

Nach Abb. 17. (b)



Abb. 24.

Nach Abb. 18. (a)

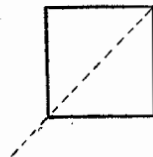


Abb. 25.

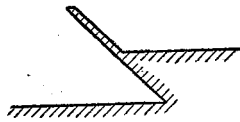
Aus Abb. 18. (c)



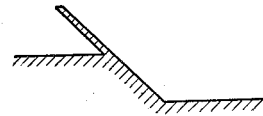
Abb. 26.

### 15. Die Polygone welche durch Addition einiger Polygone entstehen.

Durch die Addition Abb. 15. (a) + Abb. 18. (a), erhalten wir die Abbildungen



(a)



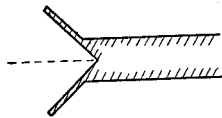
(b)

Abb. 27.

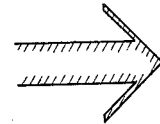
Das dazu entsprechende Integral ist

$$\int \frac{z-a}{\sqrt[4]{(1-z)z^3}} dz = \int \sqrt[4]{\frac{z}{1-z}} dz - a \int \frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z)z^3}}$$

Durch Spiegelung gelangen wir zu den Polygonen



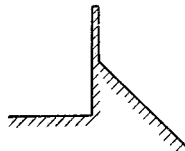
(a)



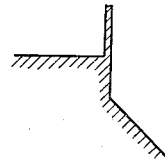
(b)

Abb. 28.

Durch die Addition Abb. 16. (c) + Abb. 15. (b), erhalten wir



(a)



(b)

Abb. 29.

Das dem entsprechende Integral ist

$$\int \frac{z-a}{\sqrt[4]{z^3(1-z)}} dz = \int \sqrt[4]{\frac{z^2}{(1-z)}} dz - a \int \frac{dz}{\sqrt[4]{z(1-z)}}$$

Durch Addition Abb. 16. (b) + Abb. 18. (a), erhalten wir

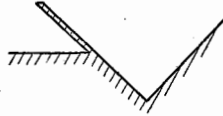


Abb. 30.

Das dem entsprechende Integral ist

$$\int \frac{z-a}{\sqrt[4]{z^3(1-z)^2}} dz = \int \sqrt[4]{\frac{z}{(1-z)^2}} dz - a \int \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3(1-z)^2}}$$

Daraus gewinnen wir durch Spiegelung die Figur.

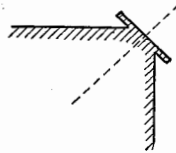


Abb. 31.

### 16. Die Abbildungsfunktionen.

Die im vorhergehenden Paragraphen gewonnenen Abbildungsfunktionen und die den Funktionen entsprechenden Polygone werden in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

Tabelle I.




	Polygon	Abbildungsfunktion
I		$Z = -\frac{3\sqrt[4]{4}}{4} I_1 \left\{ \sqrt[4]{4z(1-z)} \right\}$
II		$Z = \frac{1}{2\sqrt[4]{4}} \frac{3}{5} \left\{ (1-2z)\sqrt[4]{4z(1-z)} - I_2 \left( \sqrt[4]{4z(1-z)} \right) \right\}$
III		$Z = e^{i\frac{\pi}{3}} \left\{ \sqrt[3]{(1-z)^2 z} + I_3 \left( e^{-i\frac{\pi}{3}} \sqrt[3]{\frac{z}{1-z}} \right) \right\}$

Tabelle I.—Fortsetzung.

	Polygon	Abbildungsfunktion
IV		$Z = -3e^{i\frac{\pi}{3}} I_3 \left( e^{-i\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{z}{1-z}} \right)$
V		$Z = -\frac{3}{8} \sqrt[3]{4} \left\{ I_1 \left( \sqrt[3]{4z(1-z)} \right) + \frac{1}{2} \sqrt[3]{4z^2(1-z)^2} \right\}$
VI		$Z = \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2} \left\{ z^2 \left( \frac{z-1}{z} \right)^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{3} z \left( \frac{z-1}{z} \right)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} I_3 \left( e^{-i\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{z}{1-z}} \right) \right\}$
VII		$Z = -\frac{3}{2\sqrt[3]{4}} \left\{ I_2 \left( \sqrt[3]{4z(1-z)} \right) + \sqrt[3]{4z(1-z)} \right\}$
VIII		$Z = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{2} I_2 \left( \sqrt[3]{4z(1-z)} \right)$
IX		$Z = e^{-i\frac{3\pi}{4}} \left\{ 2I_3 \left( e^{-i\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{z}{1-z}} \right) - \sqrt{(z-1)^2 z} \right\}$
X		$Z = 3 \left\{ \sqrt[3]{1-z} - I_3 \left( \sqrt[3]{1-z} \right) \right\}$
XI		$Z = -3 \left\{ \frac{1}{2} (1-z)^{\frac{2}{3}} - \frac{(1-z)^{\frac{5}{3}}}{5} \right\}$
XII		$Z = 3 \left\{ \frac{(1-z)^{\frac{2}{3}}}{2} - I_3 \left( \frac{1}{\sqrt[3]{1-z}} \right) \right\}$
XIII		$Z = -\frac{3}{4} (1-z)^{\frac{1}{3}} (3+z)$

Die Abbildungsfunktionen I, VIII und IV sind als die zu Grunde liegenden Funktionen der oben gesuchten Fälle anzusehen, weil die anderen Funktionen durch  $I_1, I_2, I_3$  und einige elementare Funktionen gebildet werden, wobei

$$I_1(t) = \int_0^t \frac{tdt}{\sqrt{1-t^3}},$$

$$I_2(t) = \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}},$$

$$I_3(t) = \int_0^t \frac{tdt}{1-t^3}.$$

In welcher Weise Kurvenscharen, welche durch  $I_1 \{\sqrt[3]{4z(1-z)}\}$ ,  $I_2 \{\sqrt[3]{4z(1-z)}\}$  und  $I_3 \left( \sqrt[3]{\frac{z}{z-1}} \right)$  von der Halbebene  $z$  auf das Polygon konform abgebildet werden, ist in Abb. 35, 36 und 37 gezeigt.

Nun wollen wir zeigen, dass man leicht die konforme Abbildung der anderen in Tabelle I angeführten Polygone durch Kombination dieser Abbildung und einiger anderer Abbildungen, welche durch elementare algebraische Funktionen dargestellt sind, gewinnen kann.

Z.B. nehmen wir den Fall III in der Tabelle I. Die Kurvenscharen der Abb. 37 werden leicht in Abb. 38 transformiert nach der Methode, die in dem nächsten Paragraphen ausführlich dargestellt wird. Wir erhalten auch die Abb. 39 nach der Methode dieses Paragraphen.

Setzt man

$$Z_1 = I_3 \left( e^{-\frac{i\pi}{3}} \sqrt[3]{\frac{z}{1-z}} \right),$$

$$Z_2 = \sqrt{(1-z)^2 z}$$

und misst man die Koordinaten von  $Z_1$  und  $Z_2$  für denselben Punkt  $z$  in der Figur 38 und 39, so erhält man die konforme Abbildung,  $Z_1 + Z_2$  in der  $Z$ -Ebene, indem man die gemessenen Koordinaten addiert, was in der Figur 40 dargestellt ist.

Tabelle II.





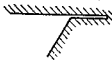


	Polygon	Abbildungsfunktion	Substitution.
I		$Z = \int_1^{z^4} \sqrt{\frac{1}{z(1-z)}} dz = -\sqrt{2} \{I_4(t) - I_4(0)\}$	$z = \frac{1 + \sqrt{1-t^4}}{2}$
II		$Z = \int_1^z \sqrt{z(1-z)} dz = \frac{-1}{\sqrt{2}} \{t\sqrt{1-t^4} - I_5(t) + I_5(0)\}$	$z = \frac{1 + \sqrt{1-t^4}}{2}$

Tabelle II.—Fortsetzung.

	Polygon	Abbildungsfunktion	Substitution
III		$Z = \int_0^z \sqrt[4]{\frac{z}{1-z}} dz = -e^{\frac{\pi i}{4}} \left\{ \frac{t}{1-t^4} - I_6(t) + I_6(0) \right\}$	$z = \frac{-t^4}{1-t^4}$
IV		Durch $z=u$ , geht die Funktion in I über	
V		Durch $z=u$ , geht die Funktion in II über	
VI		$Z = \int_0^z \sqrt[4]{\frac{z^2}{1-z}} dz = \frac{2}{5} \left\{ -4I_4(t) + 4I_4(1) - 2t^3 \sqrt{1-t^4} \right\}$	$z = 1-t^4$
VII		$Z = \int_0^z \sqrt[4]{z^2(1-z)} dz = \frac{4}{21} \left\{ (2t-3t^5) \sqrt{1-t^4} - \frac{2}{3} (I_6(t) - I_6(1)) \right\}$	$z = 1-t^4$
VIII		$Z = \int_0^z \sqrt[4]{\frac{1}{z^3(1-z)}} dz = 4e^{\frac{\pi i}{4}} \left\{ I_6(t) - I_6(0) \right\}$	$\frac{z}{1-z} = t^4$
IX		$Z = \int_1^z \sqrt[4]{\frac{1-z}{z^3}} dz = -\sqrt{2} \left\{ I_6(t) - I_6(0) - t \right\}$	$z = \frac{1 + \sqrt{1-t^4}}{2}$
X		$Z = \int_1^z \sqrt[4]{\frac{z^3}{1-z}} dz = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ I_4(t) - I_4(0) + \frac{t^3}{3} \right\}$	$z = \frac{1 + \sqrt{1-t^4}}{2}$
XI		$Z = \int_1^z \sqrt[4]{z^2(1-z)} dz = e^{-\frac{\pi i}{4}} \left\{ \frac{t}{(1-t^4)^2} - \frac{1}{4} \frac{t}{(1-t^4)} - \frac{3}{4} (I_6(t) - I_6(0)) \right\}$	$\sqrt[4]{\frac{z-1}{z}} = t$
XII		$Z = \int_0^z \sqrt[4]{\frac{1}{z^3(1-z)^2}} dz = 4 \left\{ I_6(t) - I_6(0) \right\}$	$z = t^4$
XIII		$Z = \int^z \sqrt[4]{\frac{(1-z)^2}{z^3}} dz = 4z^{\frac{1}{4}} (1-z)^{\frac{1}{2}} + 2$ (Funktion V)	

Tabelle II.—Fortsetzung.

	Polygon	Abbildungsfunktion	Substitution
XIV		$Z = \int_0^{z^4} \sqrt{\frac{z^3}{(1-z)^2}} dz = -2(1-z)^{\frac{1}{2}} z^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{5} \left\{ -4I_4(t) + 4I_4(0) - 2t^2 \sqrt{1-t^4} \right\}$	$z = t^4$
XV		$Z = \int_0^{z^4} \sqrt{\frac{z^3}{(1-z)^2}} dz = e^{\frac{3\pi i}{4}} \left\{ \frac{t}{1-t^4} + (3I_5(t) - I_5(0)) \right\}$	$\frac{z}{z-1} = t^4$
XVI		$Z = \int_0^z \frac{z}{\sqrt[4]{1-z}} dz = \left\{ \frac{4}{3} t^3 - \frac{4}{7} t^7 - \frac{16}{21} \right\}$	$z = 1 - t^4$
XVII		$Z = \int_0^z \frac{z}{\sqrt[4]{(1-z)^2}} dz = 2t^2 - \frac{2}{3} t^6 - \frac{4}{3}$	$z = 1 - t^4$
XVIII		$Z = \int_0^z \frac{z}{\sqrt[4]{(1-z)^2}} dz = 4 \left( t - \frac{t^5}{5} \right) - \frac{16}{5}$	$z = 1 - t^4$

Die Abbildungsfunktionen I, XII und VIII in der Tabelle II werden im wesentlichen durch die Funktionen

$$I_4 = \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

$$I_5 = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}},$$

wobei

$$z = \frac{1 + \sqrt{1-t^4}}{2},$$

und

$$I_6 = \int \frac{dt}{1-t^4} = \frac{1}{4} \cosh^{-1} \frac{1+t^2}{1-t^2} + \cos^{-1} \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

wobei  $\sqrt[4]{\frac{z}{1-z}} = t$  dargestellt.

Die Integrale  $I_4$  und  $I_5$  sind elliptische Integrale, von denen wir durch die Substitution

$$1-t^2 = \zeta^2, \quad \frac{-t dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\zeta d\zeta$$



sofort zu den bekannten Formen gelangen können:

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \sqrt{\frac{1-\zeta^2}{1-\frac{1}{2}\zeta^2}} d\zeta \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 2 \int \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\zeta^2}{1-\zeta^2}} d\zeta - \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)\left(1-\frac{1}{2}\zeta^2\right)}} \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 2E\left(\zeta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\zeta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\} \dots \\
 I_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} F\left(\zeta, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),
 \end{aligned}$$

wobei  $F$  und  $E$  die elliptischen Integrale erster und zweiter Art sind. Wir können diese Zurückführung statt mit zwei Schritten auch auf einmal vornehmen, in dem wir sofort die Substitution

$$z = \frac{1 + \zeta\sqrt{2-\zeta^2}}{2}, \quad \zeta^2 = 1 + 2\sqrt{z(1-z)}$$

für  $I_4$  und

$$\zeta^2 = 1 + \sqrt{z}$$

für  $I_5$  ausführen. Die Parallelen  $X_1 = \text{konst.}$  und  $Y_1 = \text{konst.}$  im Periodenquadrat der  $Z_1$ -Ebene werden durch die Kurvenscharen der Abb. 41 auf die  $z$ -Halbebene abgebildet und diese Kurvenscharen werden wieder durch  $\zeta^2 = 1 + 2\sqrt{z(1-z)}$  und  $\sqrt{2} I_4$  auf die  $Z$ -Ebene abgebildet, wie in Abb. 42 gezeigt ist. Umgekehrt werden die Parallelen  $x = \text{konst.}$  und  $y = \text{konst.}$  in der  $z$ -Halbebene durch  $I_5(\zeta)$  und  $\zeta^2 = 1 + \sqrt{z}$  auf die  $Z_1$ -Ebene abgebildet, wie die Abb. 43 zeigt. Wir wollen in dem nächsten Paragraphen zeigen, wie man diese Abbildungen gewinnen kann. Die letzte Abbildung  $I_6$  wird in Abb. 44 dargestellt<sup>(1)</sup>.

### 17. Ein graphisches Verfahren der konformen Abbildung.

Berechnet man die Funktionen,  $\ln z$ ,  $\ln \frac{1-z}{1+z}$ ,  $\ln(1-z)(1+z)$ ,  $\frac{1}{z}$ ,  $\sin^{-1} z$ ,  $F(z, k)$  und  $E(z, k)$  u.s.w., so genau wie möglich, um dadurch einige fundamentale Abbildungen zu gewinnen, so kann man damit zu

(1) Streamlines near the Rectangular Edge by Y. IKEDA, S. KOBAYASHI, T. SAKURAI and F. TATIBANA. Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Imperial University, Vol. 4, No. 1. Oct. 1936.

neuen Abbildungen durch ein graphisches Verfahren gelangen. Um das Verfahren zu erläutern, wollen wir einige wichtige Eigenschaften der Funktionen der konformen Abbildung anführen.

1. Sei  $Z=f(z)$  eine Abbildungsfunktion der konformen Abbildung, so folgt dass  $Z=re^{i\theta} f(z)$  auch eine Funktion der konformen Abbildung ist, wobei  $r$  die Vergrößerung und  $\theta$  den Drehungswinkel der Abbildung bedeuten. Daraus folgt, dass eine konforme Abbildung, wenn sie gleichmässig vergrößert oder um einen Winkel gedreht wird, eine konforme Abbildung bleibt.

2. Seien  $Z_1=X_1+iY_1=f(z)$  und  $Z_2=X_2+iY_2=\varphi(z)$  Abbildungsfunktionen der konformen Abbildung, so ist  $Z=X+iY=Z_1+Z_2$  auch eine Abbildungsfunktion der konformen Abbildung. Auf diesen Sätzen beruht die Methode.

Methode I. (a). Wenn in einem gegebenen Punkt  $z$  zwei Abbildungen  $Z_1=f(z)$  und  $Z_2=\varphi(z)$  gegeben sind, so erhält man die Abbildung  $Z=Z_1+Z_2$  in der  $Z$ -Ebene aus den Abbildungen  $Z_1$  und  $Z_2$  auf die in § 16 beschriebene Weise. Die Parallelen  $x=\text{konst.}$  oder  $y=\text{konst.}$  der  $z$ -Ebene können in solcher Weise in Kurvenscharen der  $Z$ -Ebene übergeführt werden.

Methode I. (b). Wir zeichnen, wenn  $Z_1=X_1+iY_1$  und  $Z_2=X_2+iY_2$  ist, in dieselbe  $z$ -Ebene die Kurvenscharen,  $X_1=\text{konst.}$ ,  $X_2=\text{konst.}$ ,  $Y_1=\text{konst.}$  und  $Y_2=\text{konst.}$  Dann suchen wir uns die Schnittpunkte von  $X_1=a_1$  und  $X_2=a_2$  oder  $Y_1=b_1$  und  $Y_2=b_2$  in der  $z$ -Ebene. Dann liegt, wenn  $Z=X+iY=Z_1+Z_2$  ist, der Schnittpunkt von  $X_1=a_1$  und  $X_2=a_2$  auf  $X=a_1+a_2$  und der Schnittpunkt von  $Y_1=b_1$  und  $Y_2=b_2$  auf  $Y=b_1+b_2$ . Wenn man die so erhaltenen Schnittpunkte  $X=\text{konst.}$ ,  $Y=\text{konst.}$  durch glatte, stetige Kurven verbindet, so sind diese Kurven in der  $z$ -Ebene die gesuchten geometrischen Orte der Funktionen  $X=\text{konst.}$  oder  $Y=\text{konst.}$

$$\text{Beispiel; } \quad Z_1 = \frac{2}{3} \ln z, \quad Z_2 = \frac{1}{3} \ln(1-z) .$$

Die geometrischen Orte der Punkte  $X=\text{konst.}$  oder  $Y=\text{konst.}$  in der  $z$ -Ebene sind Kreis- und Radien-scharen wie Abb. 47 für  $Z=\ln z$  zeigt. Zeichnen wir die Abb. 47 mit dem Zentrum erstens in  $z=0$  und zweitens in  $z=1$ , und bezeichnen wir die Koordinaten der Punkte, in denen sich die Kurven  $X_1=a_1$ ,  $X_2=a_2$  oder  $Y_1=b_1$  und  $Y_2=b_2$  miteinander schneiden, mit  $X=\frac{1}{3}(2a_1+a_2)$  oder  $Y=\frac{1}{3}(2b_1+b_2)$  und verbinden wir die Punkte, deren Koordinaten einander gleich sind, mit

glatten, stetigen Kurven, so erhalten wir die Funktion  $Z = \frac{1}{3} \{2 \ln z + \ln(1-z)\}$ , die Figur 48 darstellt.

3. Seien  $Z=f(z)$  und  $Z_1=\varphi(z)$  Abbildungsfunktionen der konformen Abbildung, so ist  $Z_1=\Psi(Z)$  auch eine Abbildungsfunktion der konformen Abbildung.

Methode II. Wenn eine gegebene Abbildung  $A$ , welche aus orthogonalen Kurvenscharen im ersten Gebiet besteht, konform in die Abbildung  $B$  im zweiten Gebiet übergeführt wird, und wenn zwischen  $A$  und  $B$  eine ein-eindeutige Beziehung besteht, so kann eine andere Abbildung  $C$  im ersten Gebiet in die Abbildung  $D$  im zweiten Gebiet konform transformiert werden nach der folgenden Methode. Wir zeichnen die Abbildung  $C$  in derselben Ebene wie die Abbildung  $A$  im ersten Gebiet, wobei Translationen und Drehungen des Kurvennetzes von  $C$  zugelassen sind, und suchen zunächst die Punkte, wo eine Kurve der Abbildung  $C$  eine Kurve der Abbildung  $A$  schneidet. Da die beiden Kurvenscharen der Abbildung  $A$  als krummlinige Koordinaten angesehen werden können, so lesen wir dadurch die Koordinaten der Schnittpunkte ab.

Die Kurvenscharen im ersten Gebiet, welche die krummlinigen Koordinaten angeben, entsprechen denen im zweiten Gebiet. Daher kann man die abgelesenen krummlinigen Koordinaten wieder in den dazu entsprechenden Punkt im zweiten Gebiet transformieren. Wenn man die in solcher Weise gewonnenen Punkte durch eine glatte, stetige Kurve verbindet, so erhält man die gesuchte konforme Abbildung im zweiten Gebiet.

Beispiel; $z$ :	Erstes Gebiet,	$Z_1 = \ln \sqrt[3]{z^2(1-z)}$	Abbildung A,	
	$Z$ :	Zweites Gebiet,	$Z_1 = \ln Z$	Abbildung B,
			$Z = z$	Abbildung C,
			$Z = \sqrt[3]{z^2(1-z)}$	Abbildung D,
				die gesucht ist

Nach der Methode II wurde Abb. 45 gewonnen.

Wenn man Abb. 38 und 39 für die Methode I. (a) verwendet, so gelangt man zur Abb. 40.

In ähnlicher Weise erhielten wir Abb. 46 aus Abb. 44 und 45.

4. Seien  $Z=f(\zeta)$  und  $z=\varphi(\zeta)$  Funktionen der konformen Abbildung, so folgt, dass  $z=F(Z)$

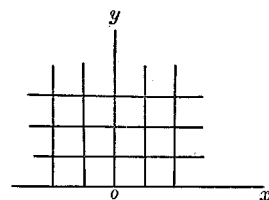


Abb. 49.

auch eine Funktion der konformen Abbildung ist.

Methode III. Wenn man die Kurvenscharen, welche die geometrischen Orte,  $X=\text{konst.}$  und  $Y=\text{konst.}$ , in der  $\zeta$ -Ebene mittels der Abbildungsfunktion  $Z=f(\zeta)$  und die Kurvenscharen, welche die geometrischen Orte,  $x=\text{konst.}$  und  $y=\text{konst.}$ , in der  $z$ -Ebene mittels der Abbildungsfunktion  $z=\varphi(\zeta)$  zeichnet, so kann man die erste Abbildung als die Kurvenscharen A des krummlinigen Koordinatensystems und die letzte Abbildung als die Abbildung C ansehen. Endlich werden die Parallelen  $X=\text{konst.}$  und  $Y=\text{konst.}$ , in der  $Z$ -Ebene als die Abbildung B angesehen. Daraus gewinnen wir die gesuchte Abbildung  $z=F(Z)$  nach der Methode II.

Als Beispiel wollen wir zeigen, wie die Abb. 42 und 43 zu gewinnen sind. Die zu den Achsen parallelen Linien des Quadrats in der  $Z$ -Ebene werden mittels der elliptischen Funktion  $z=\text{sn}^{-1}Z$  konform in zwei Kurvenscharen der  $z$ -Ebene transformiert, wie in Abb. 41 gezeigt ist.

Die Kurvenscharen werden wieder mittels der Abbildungsfunktion,

$$E(z, k) = \int_0^z \sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}} dz$$

in andere Kurvenscharen transformiert, wie in Abb. 51 gezeigt ist.

Nach der Methode I. (b) erhalten wir so die Abbildung

$$Z = 2E(z, k) - F(z, k) ,$$

die in Abb. 42 dargestellt ist.

Das Parallelenetz der Abb. 49 wird mittels der Funktion

$$\zeta^2 = 1 + \sqrt{z}$$

in die zwei Hyperbelscharen der Abb. 52 transformiert. Die reelle Achse der  $z$ -Ebene entspricht einem Zweige der Hyperbel, ( $\xi^2 - \eta^2 = 1$ ). Sehen wir an

Abb. 41 als A in der  $\zeta$ -Ebene,  $\zeta$ -Ebene als erstes Gebiet,  
Abb. 50 als B in der  $Z$ -Ebene,  $Z$ -Ebene als zweites Gebiet,

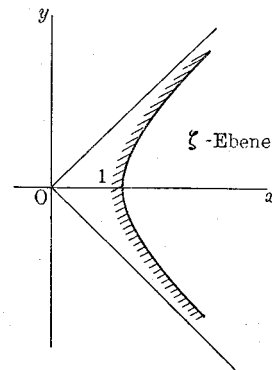
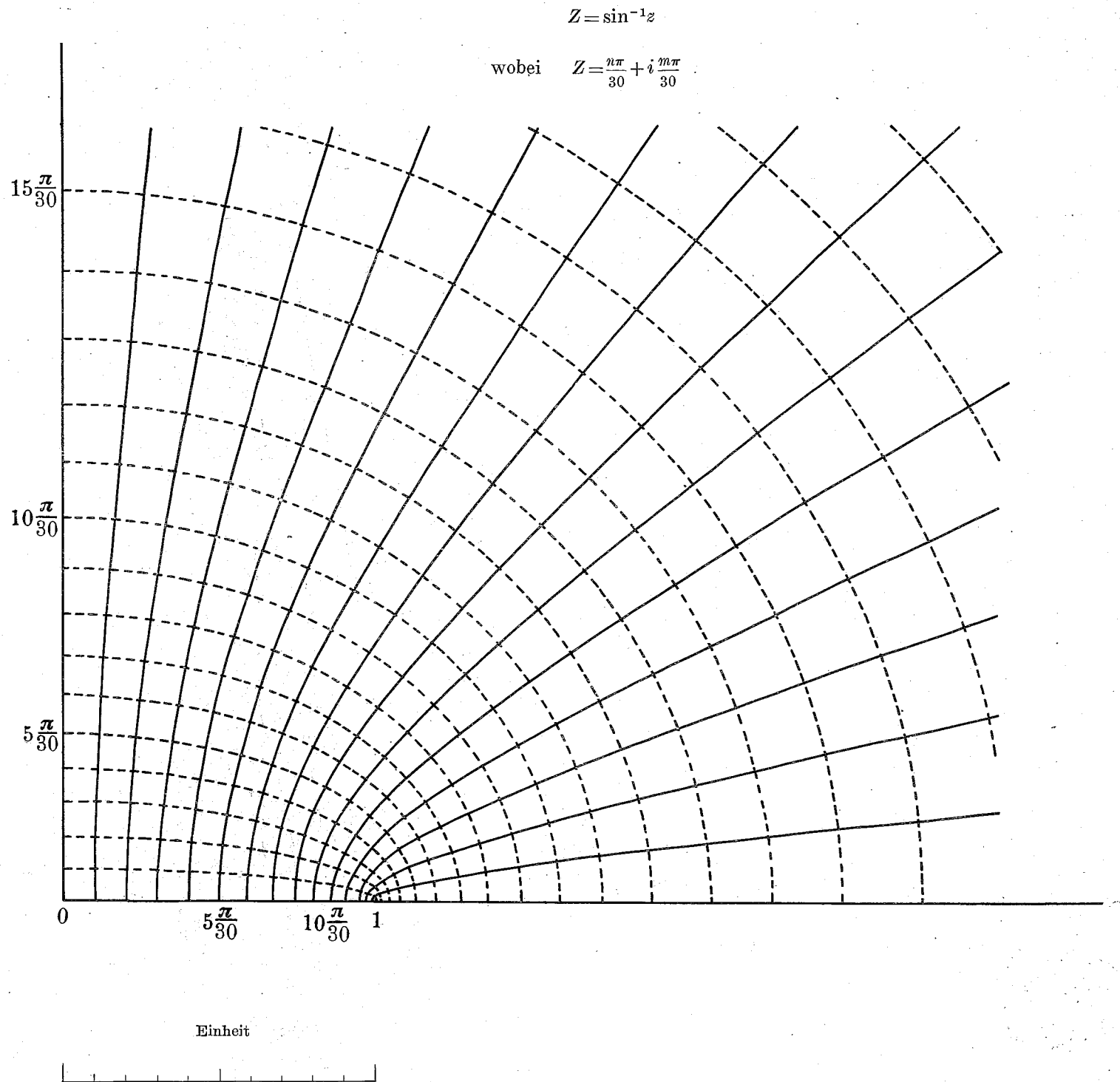
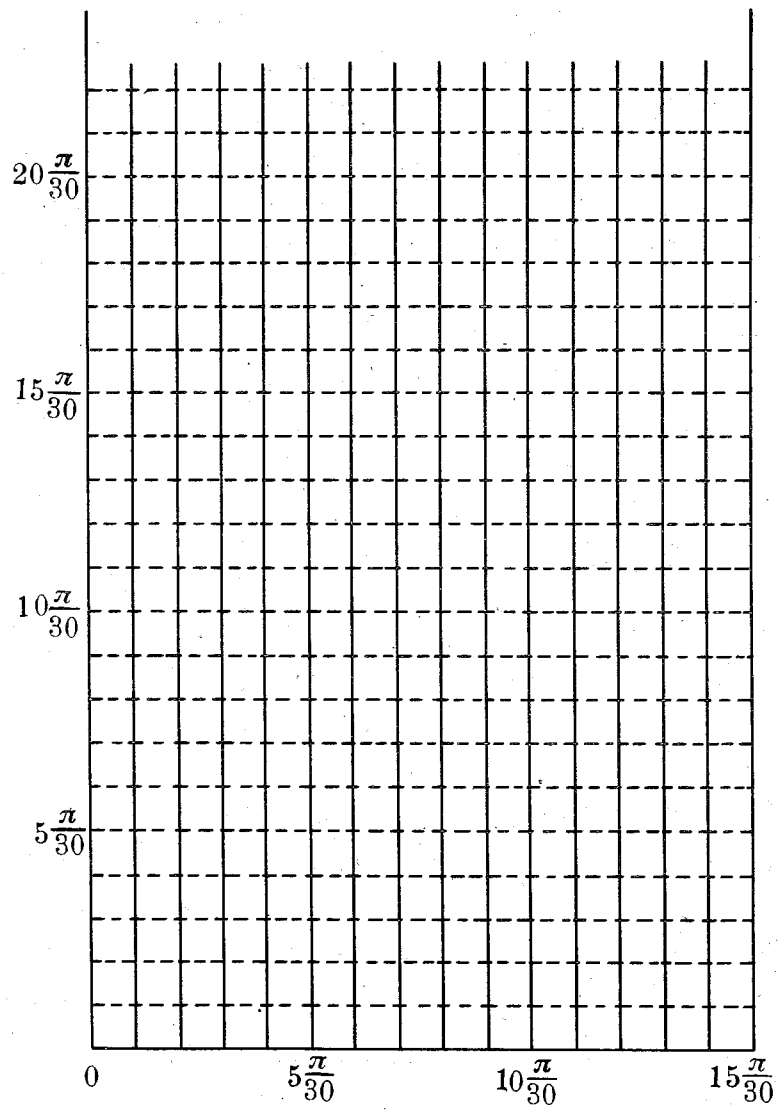


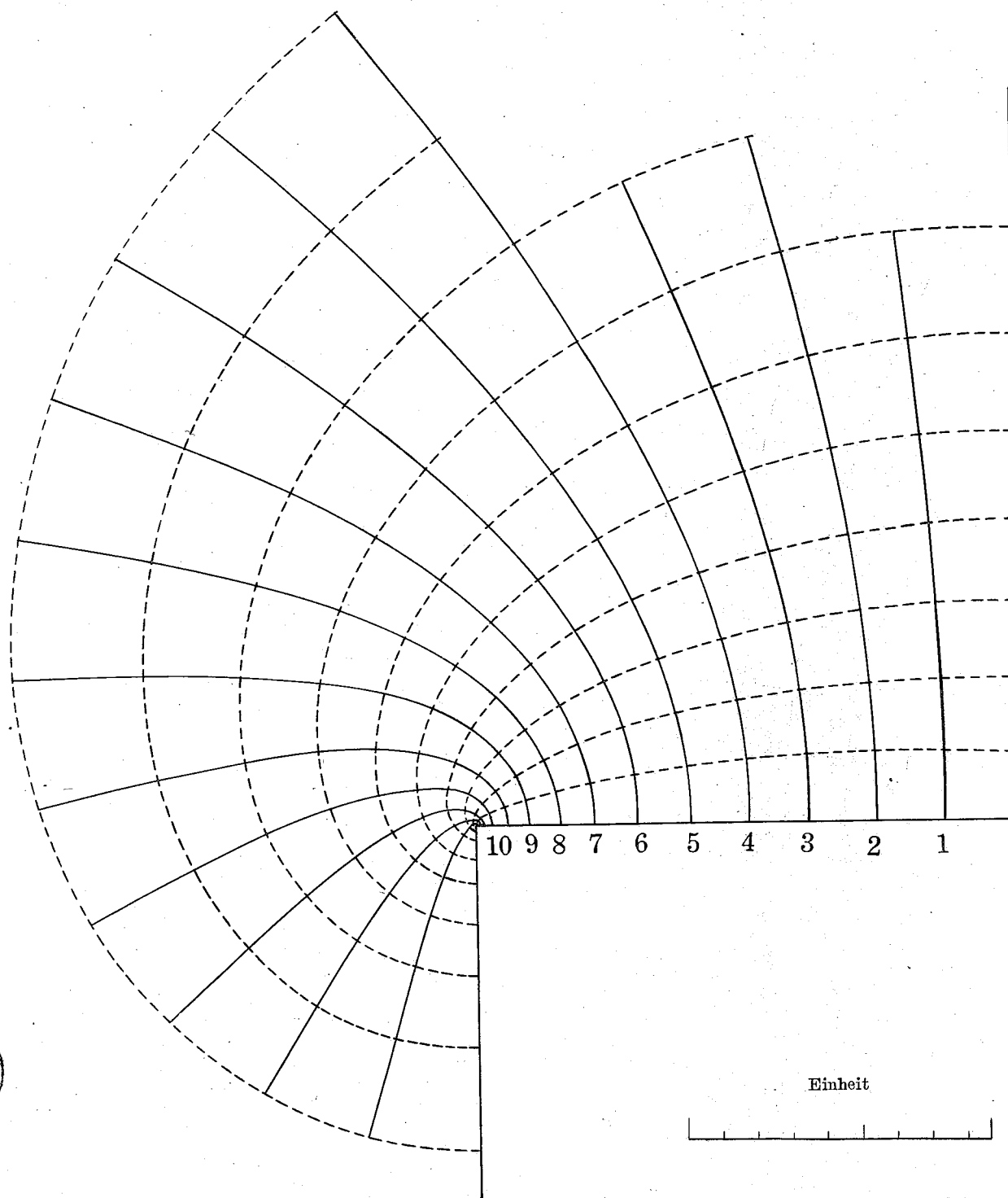
Abb. 52.

(1) Scientific Papers of the Institute of Physical and Chemical Research No. 561. Y. IKEDA and M. KUWAORI. Some Conformal Representations by means of Elliptic Function.

Abb. 52 als C in der  $\zeta$ -Ebene,  
so ist Abb. 43 als D in der Z-Ebene für die gesuchte Abbildung anzusehen. Daraus erhalten wir nach der Methode II die Abb. 43.

Zum Schluss möchte ich Herrn T. Ueki und Frl. S. Egara für bereitwillige Hilfe herzlich danken.



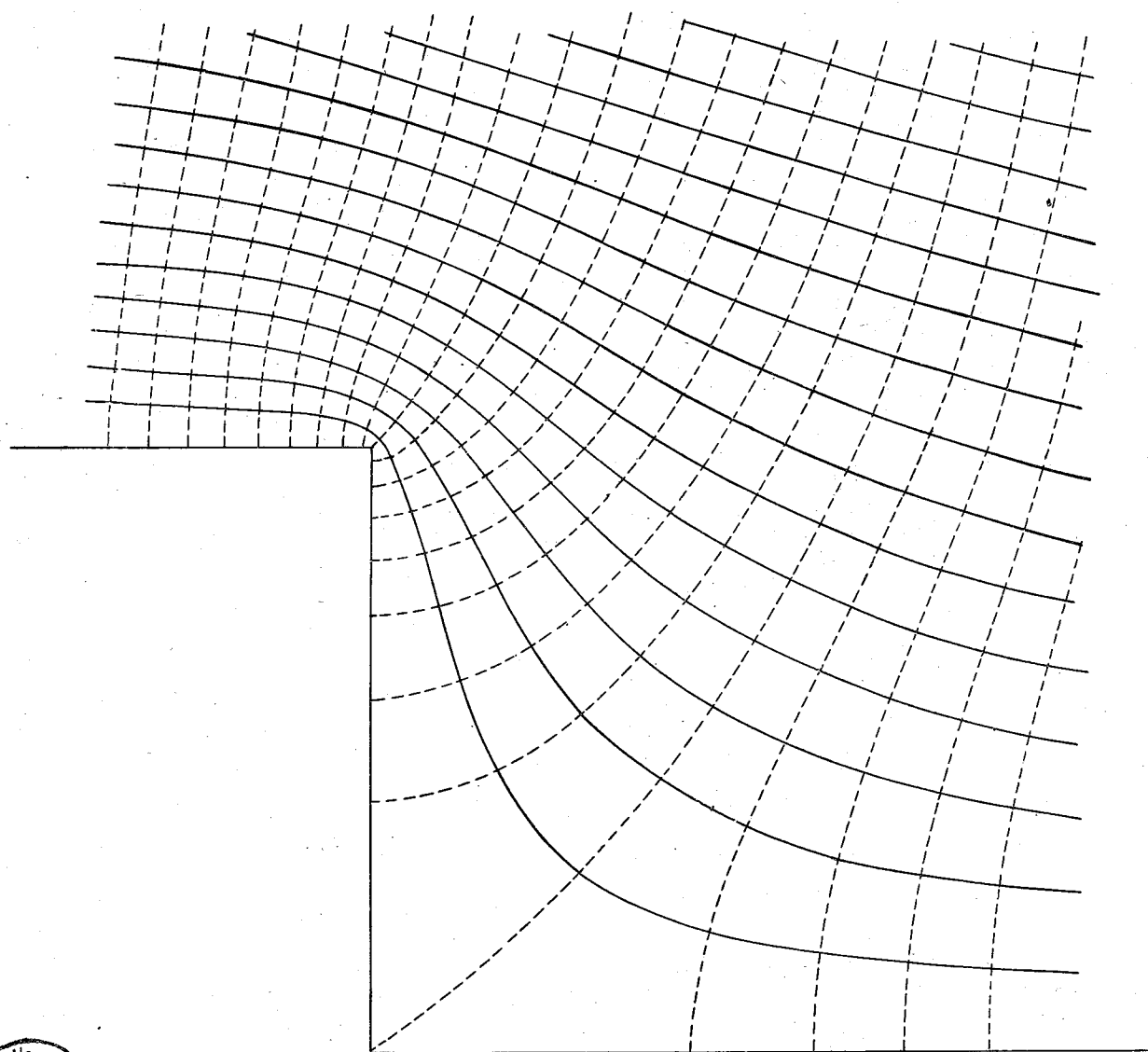


$$Z = \int \sqrt{\frac{z}{1-z}} dz$$

wobei  $Z_1 = \sin^{-1} \sqrt{z}$

$$Z_1 = \frac{n\pi}{30} + i \frac{m\pi}{30}$$

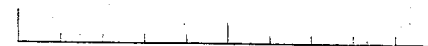




$$Z = \int \sqrt{\frac{z}{1-z}} dz$$

wobei  $z = \frac{1}{8}(n + im)$

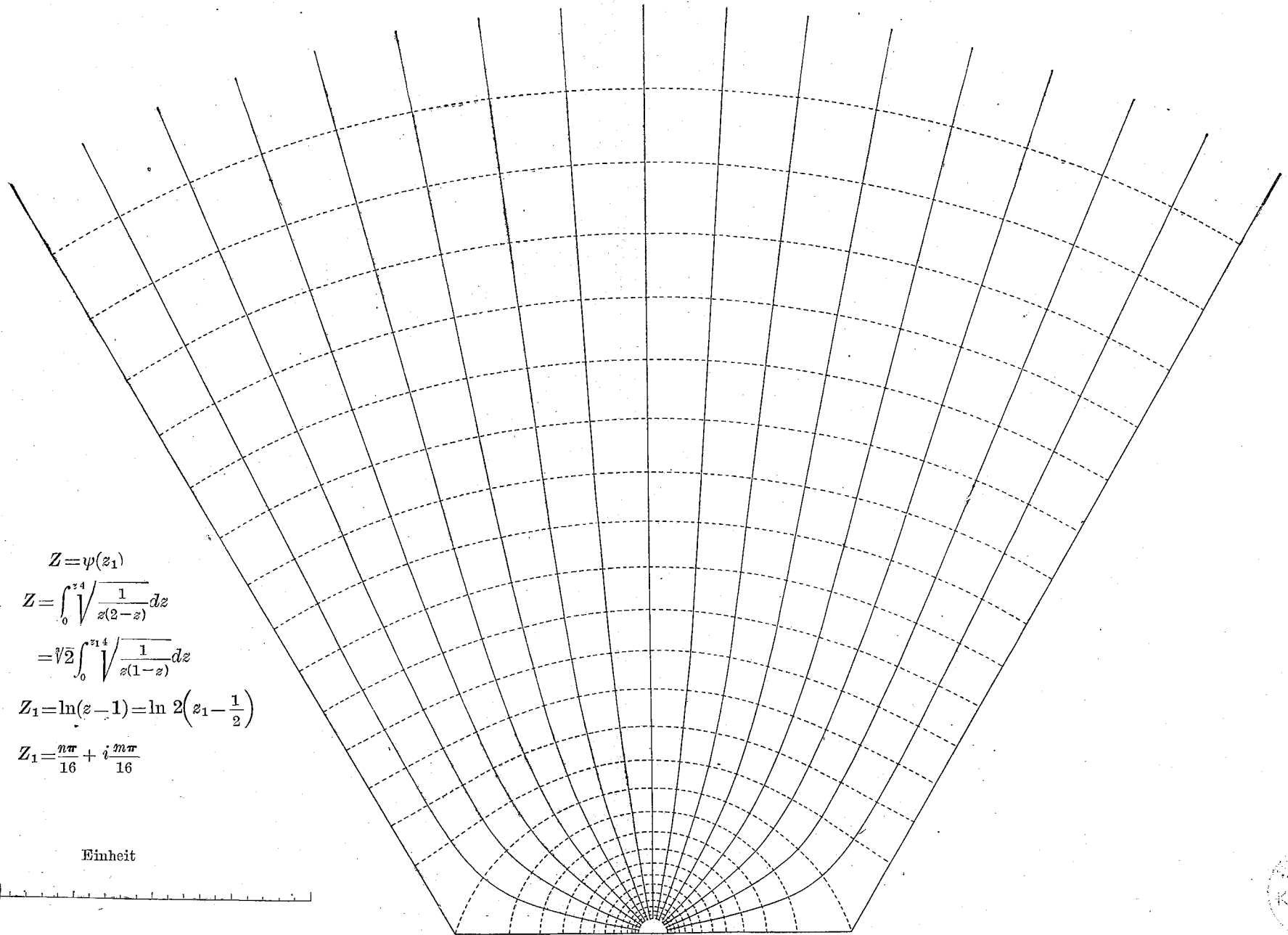
Einheit

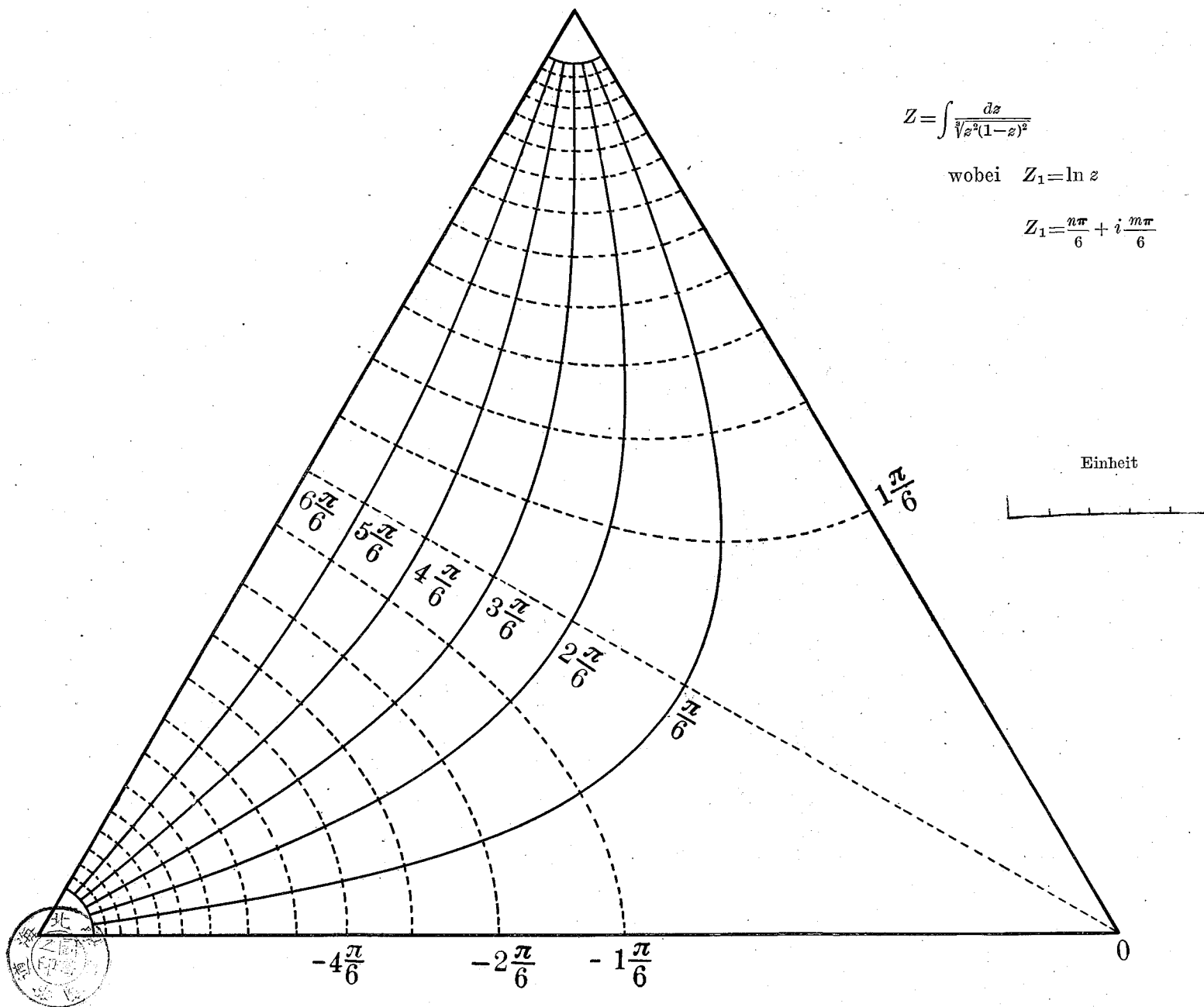


I. Ikeda: Die konformen Abbildungen der Polygone mit zwei Ecken.







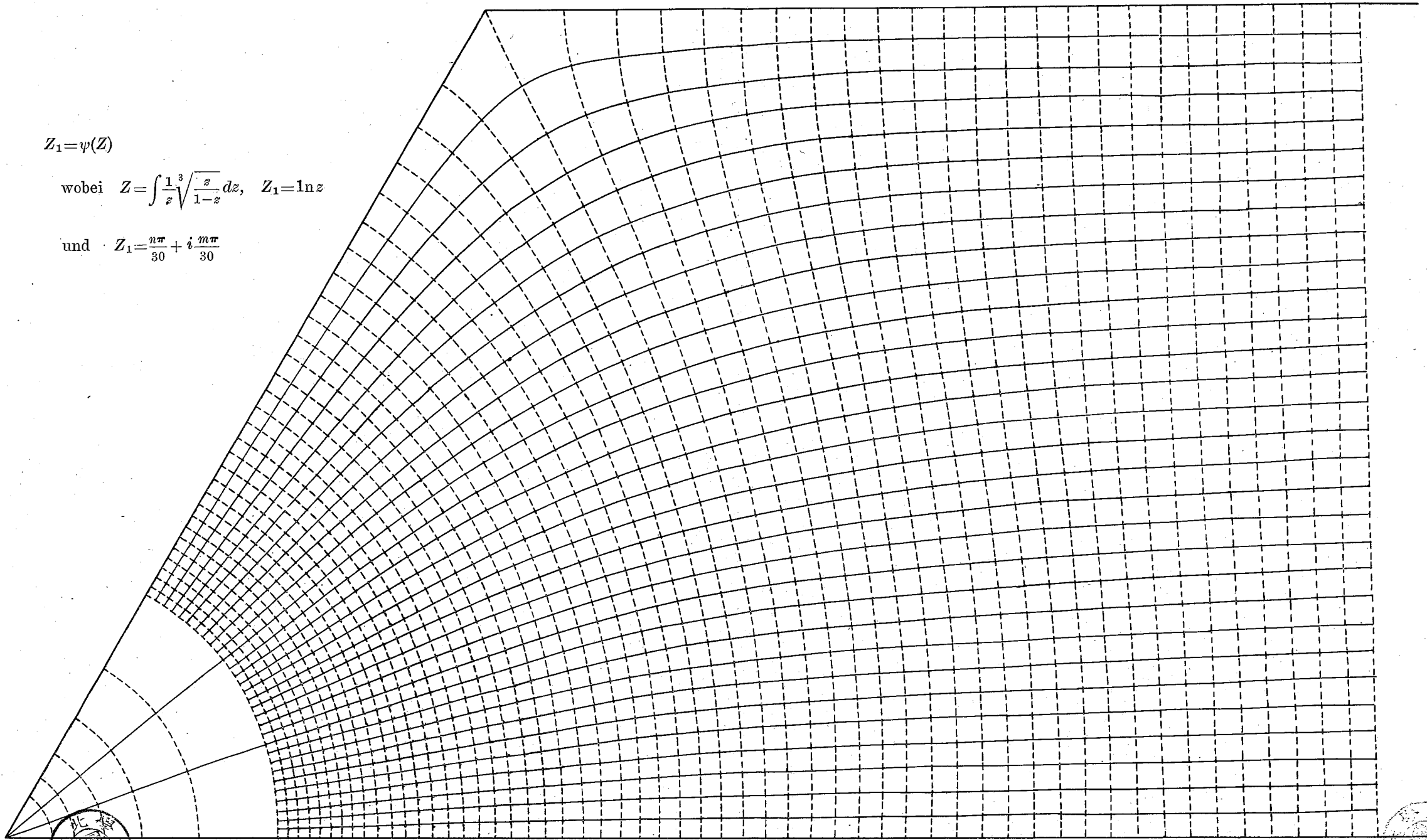


Y. Ikeda: Die konformen Abbildungen der Polygone mit zwei Ecken.

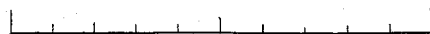
$$Z_1 = \psi(Z)$$

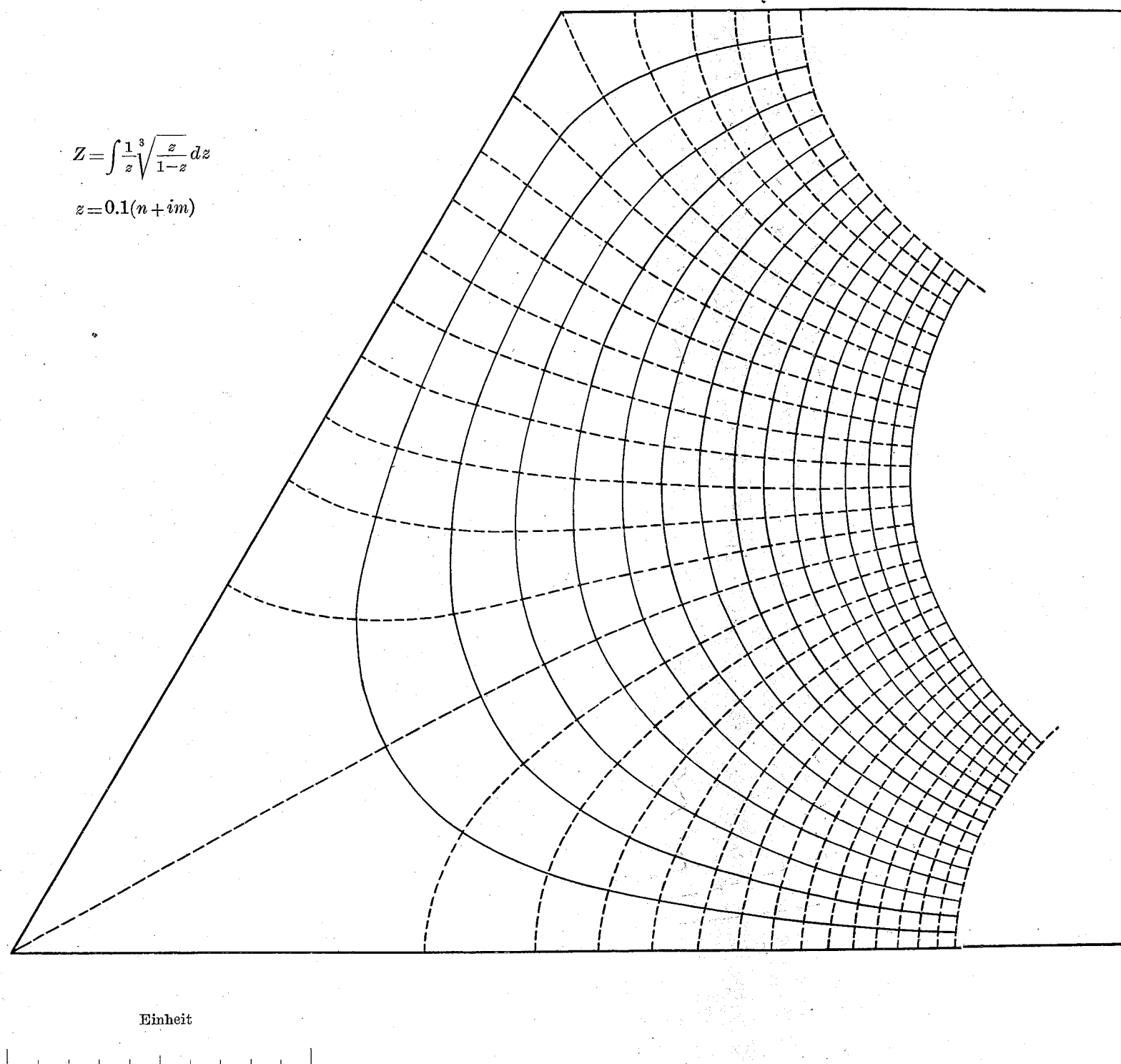
$$\text{wobei } Z = \int \frac{1}{z} \sqrt{\frac{z}{1-z}} dz, \quad Z_1 = \ln z$$

$$\text{und } Z_1 = \frac{n\pi}{30} + i \frac{m\pi}{30}$$



Einheit



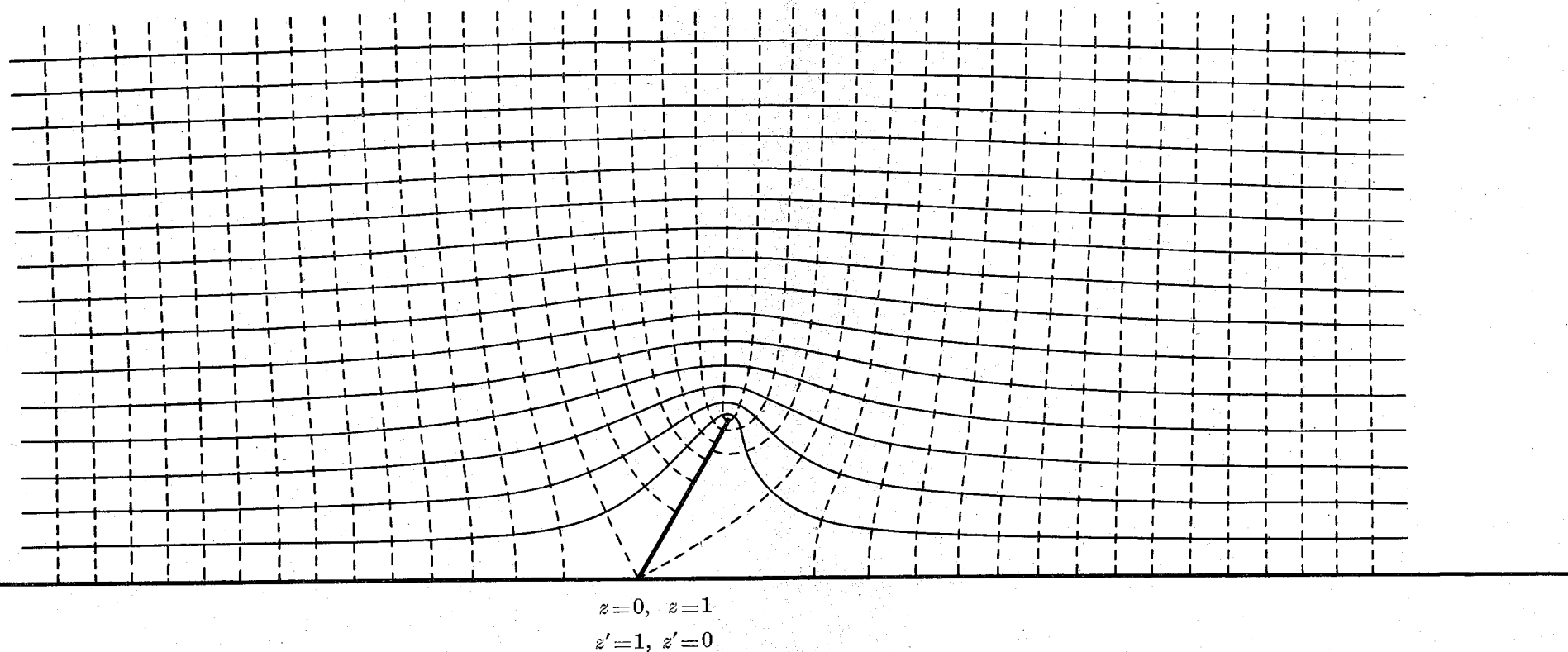


$$Z = \sqrt[3]{(1-z)z^2}$$

wobei  $z = 0.1(n + im)$

$$Z = \sqrt[3]{(1-z')^2 z'}$$

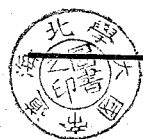
wobei  $z' = 0.1(n + im)$



Einheit

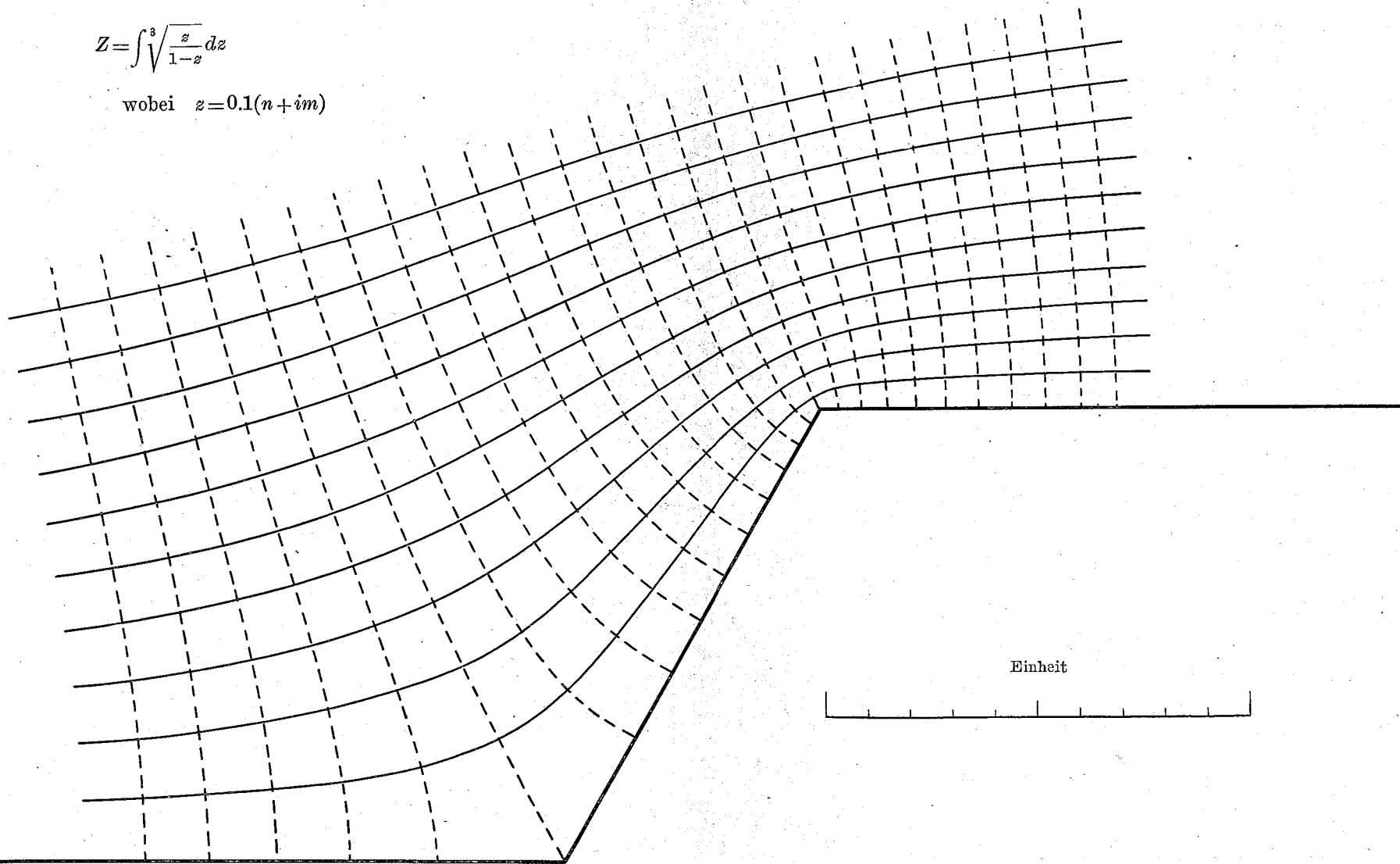


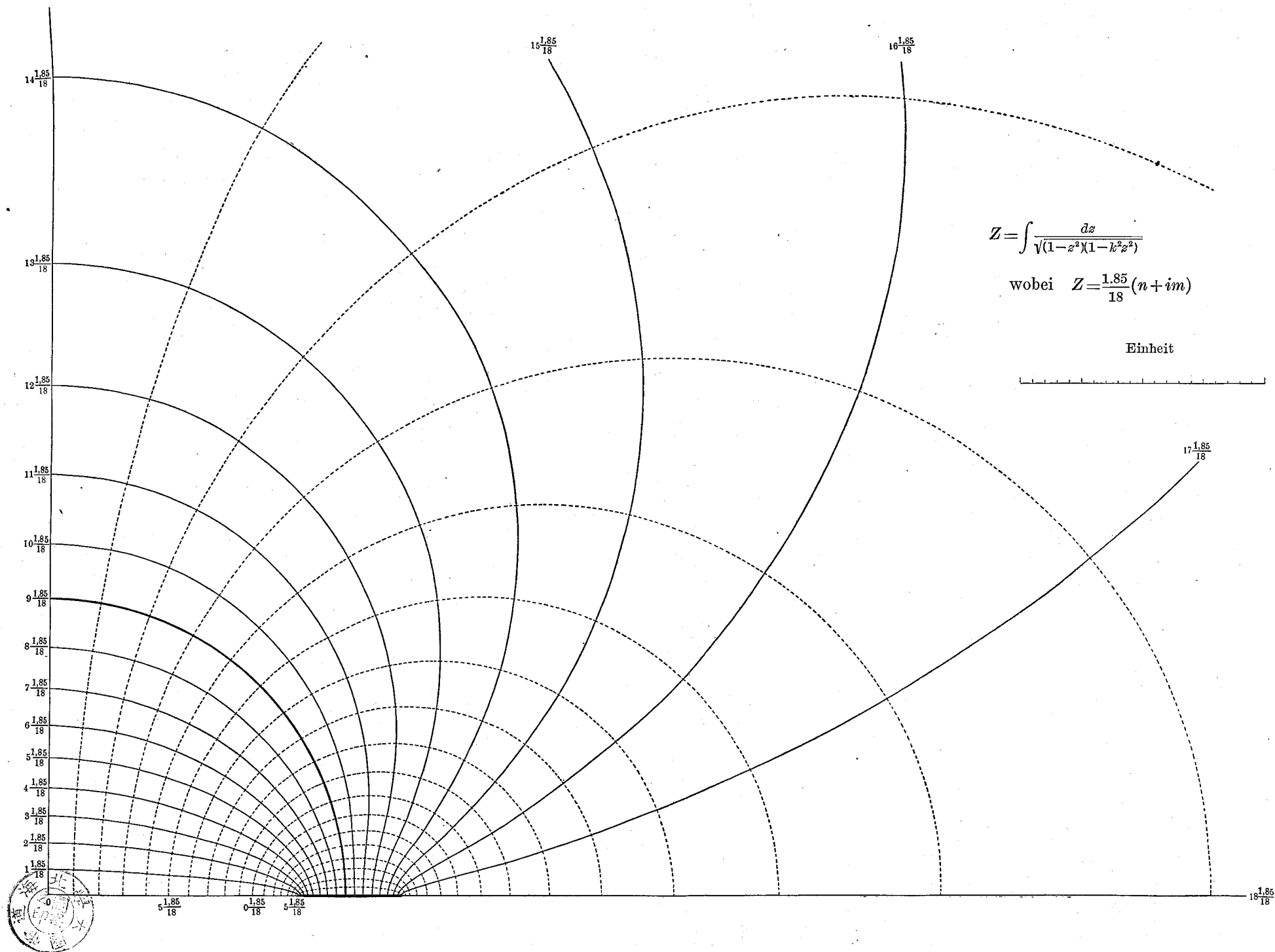
Y. Ikeda: Die konformen Abbildungen der Polygone mit zwei Ecken.



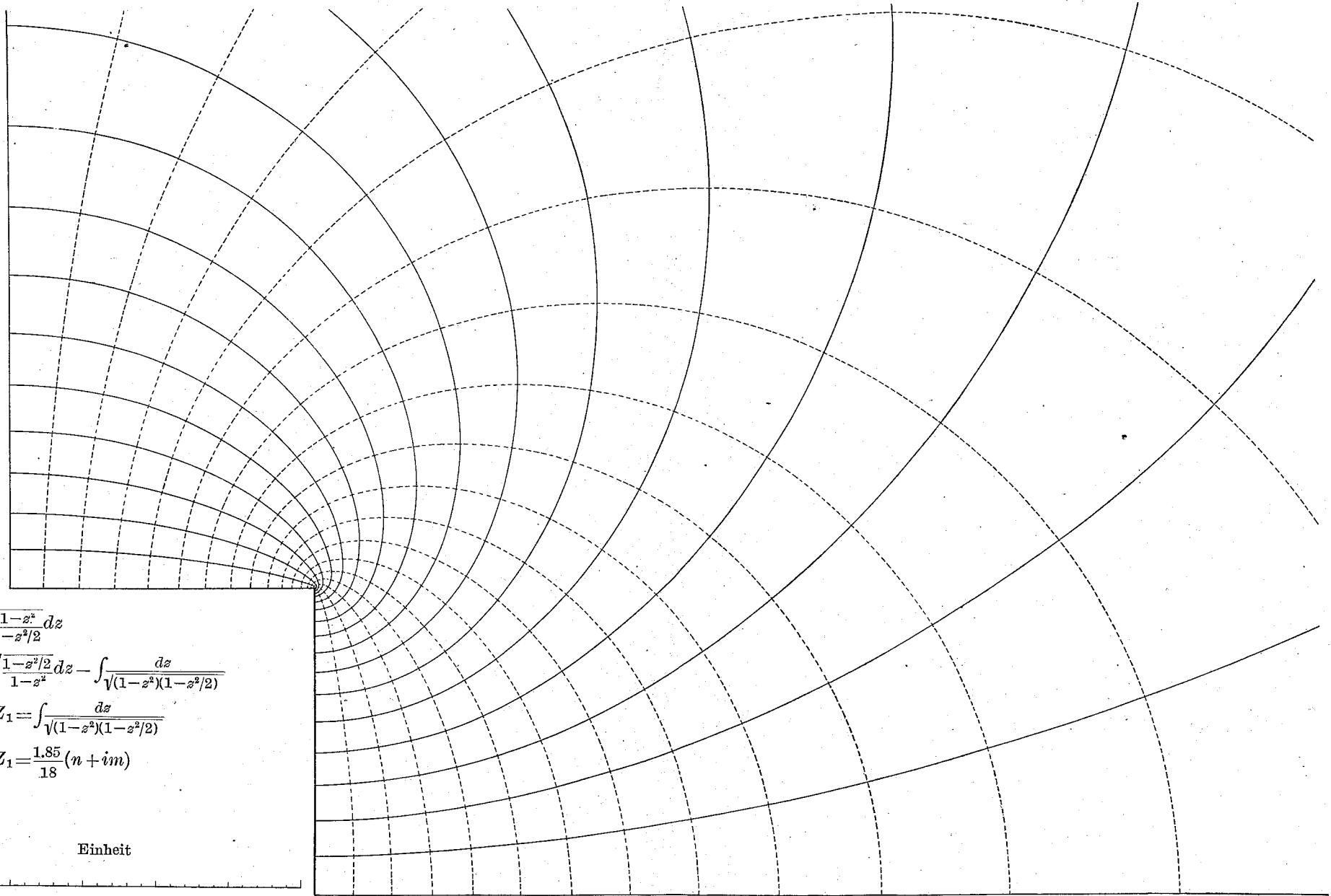
$$Z = \int^3 \sqrt{\frac{z}{1-z}} dz$$

wobei  $z = 0.1(n + im)$





Y. Ikeda: Die konformen Abbildungen der Polygone mit zwei Ecken.



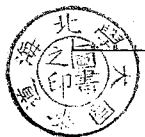
$$Z = \int \sqrt{\frac{1-z^2}{1-z^2/2}} dz$$

$$= 2 \int \sqrt{\frac{1-z^2/2}{1-z^2}} dz - \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-z^2/2)}}$$

wobei  $Z_1 = \int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-z^2/2)}}$

$$Z_1 = \frac{1.85}{18} (n + im)$$

Einheit

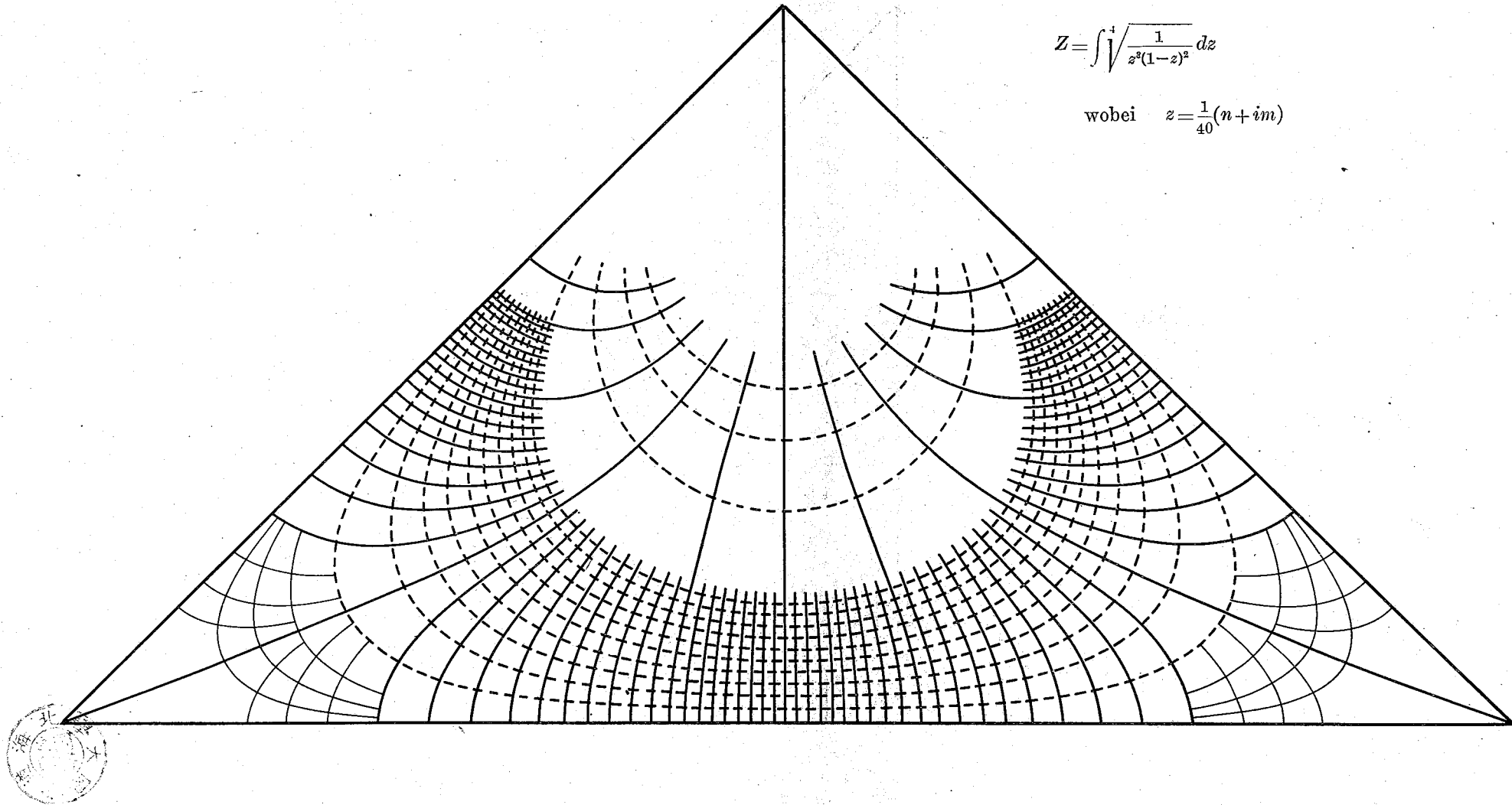


Y. Ikeda: Die konformen Abbildungen der Polygone mit zwei Ecken.

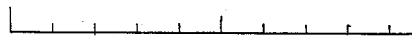


$$Z = \int \sqrt{\frac{1}{z^2(1-z)^2}} dz$$

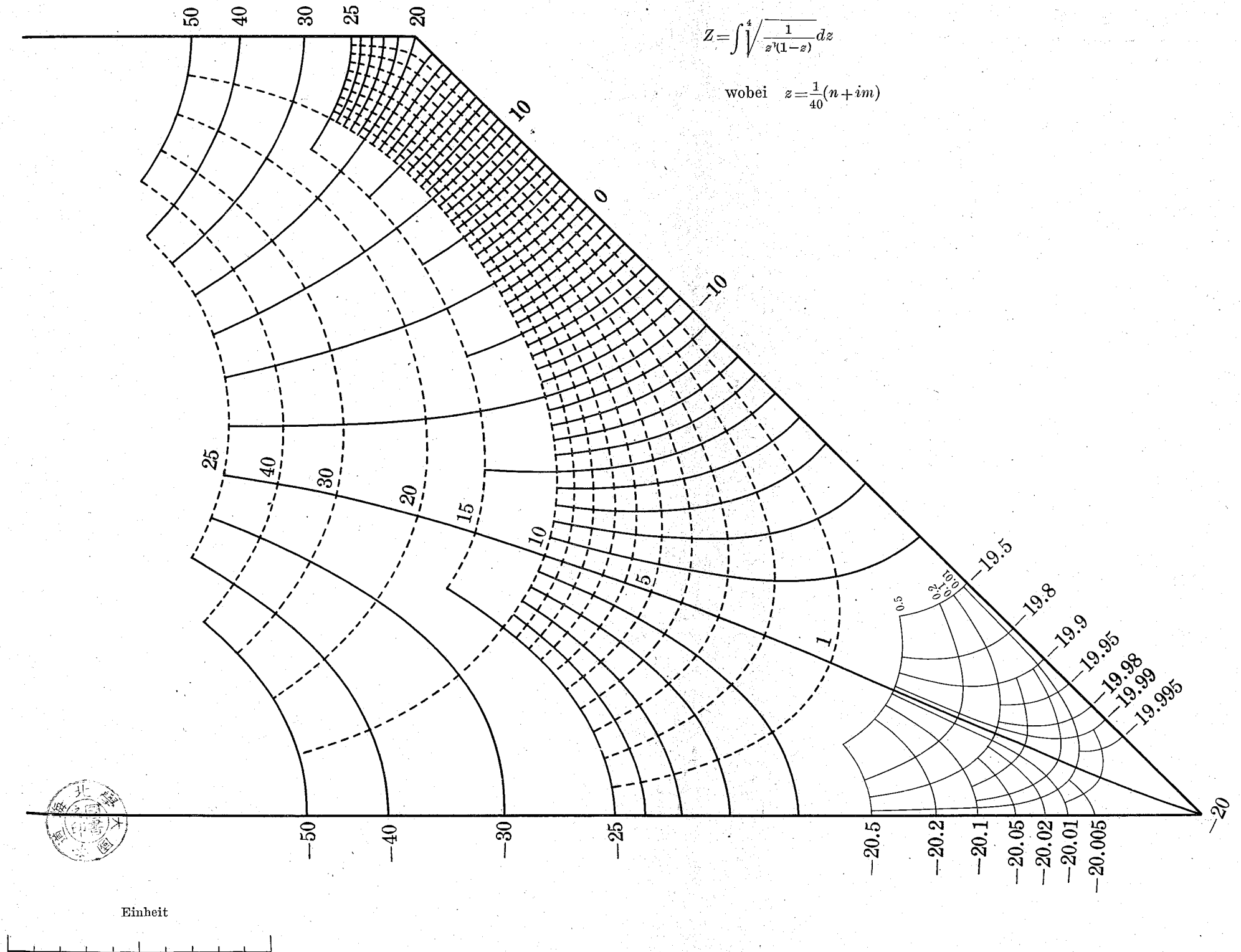
wobei  $z = \frac{1}{40}(n + im)$



Einheit



Y. Ikeda: Die konformen Abbildungen der Polygone mit zwei Ecken.

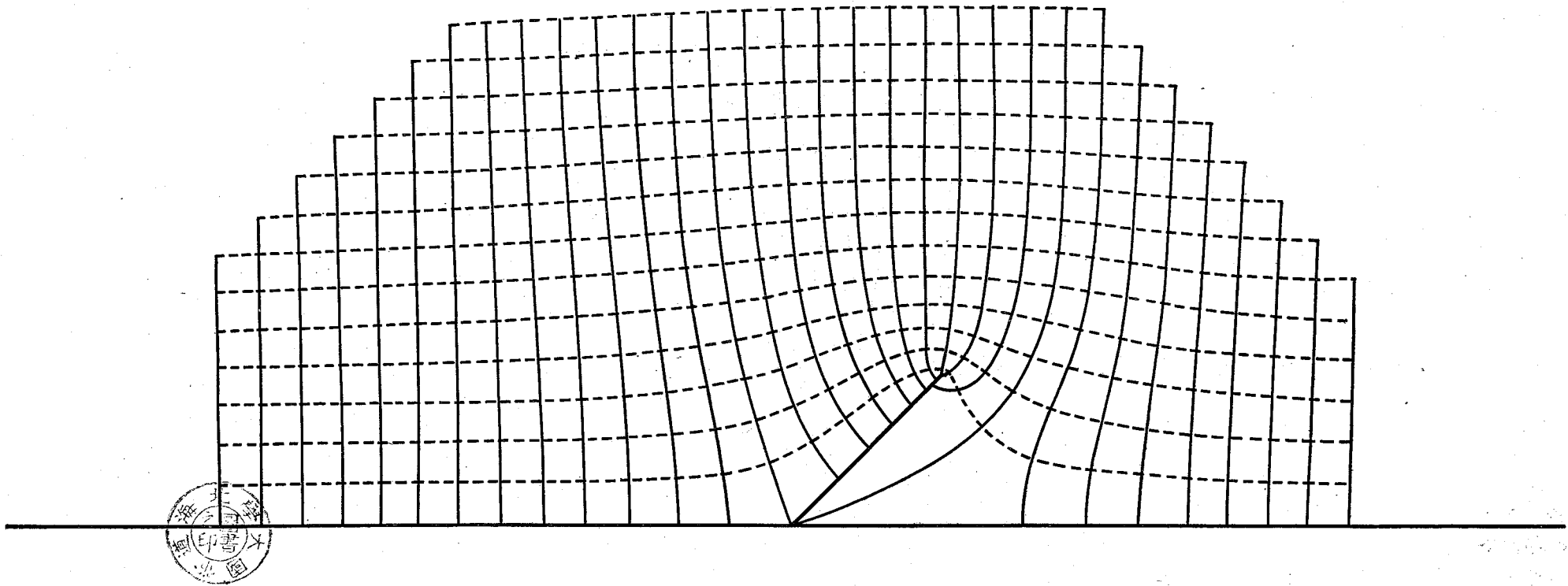


Y. Ikeda: Die konformen Abbildungen der Polygone mit zwei Ecken.

$$Z = \sqrt[3]{z^3(1-z)}$$

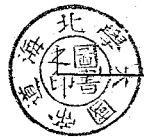
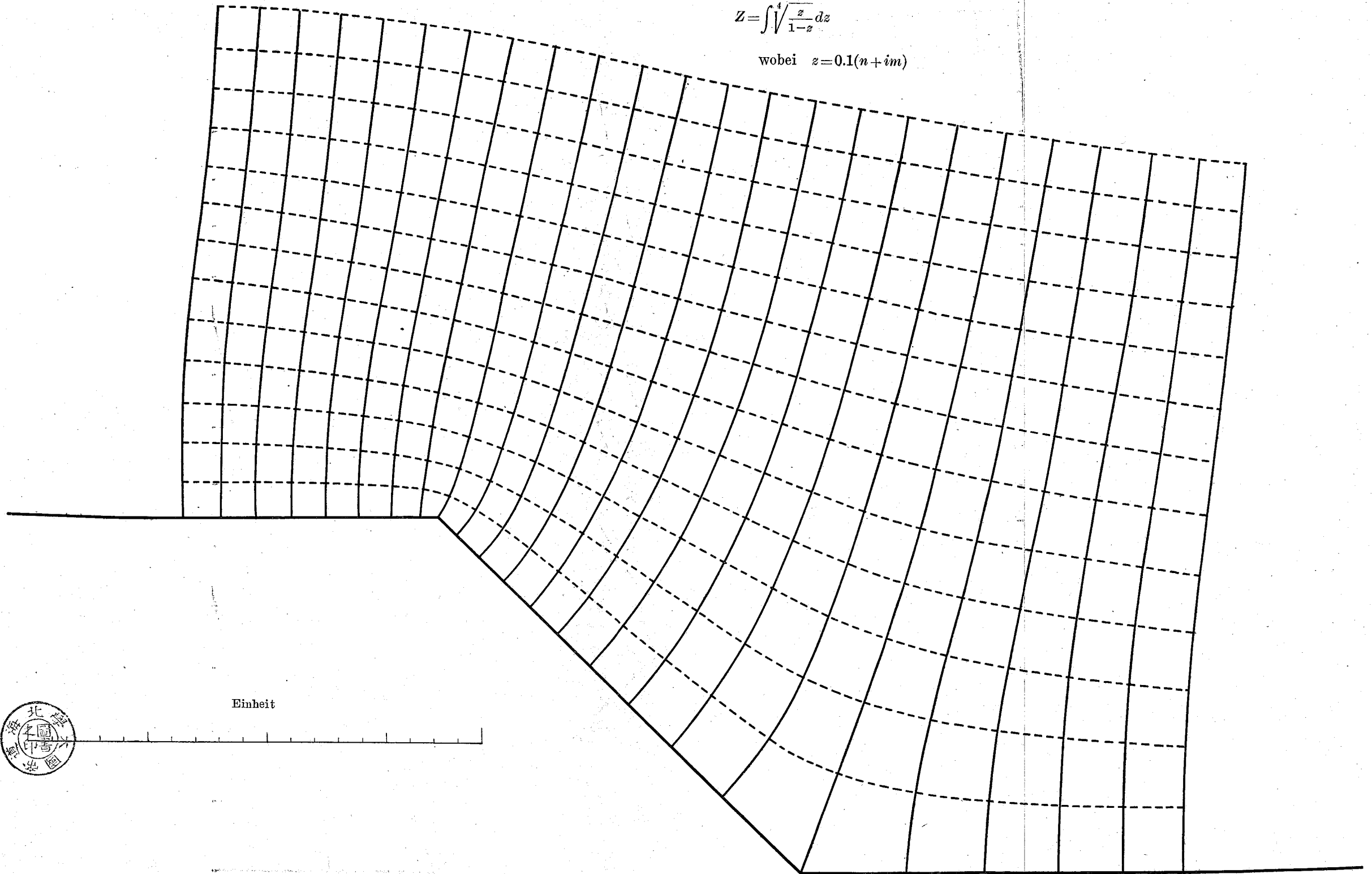
wobei  $z = 0.1(n + im)$

Einheit



$$z = \int \sqrt{\frac{z}{1-z}} dz$$

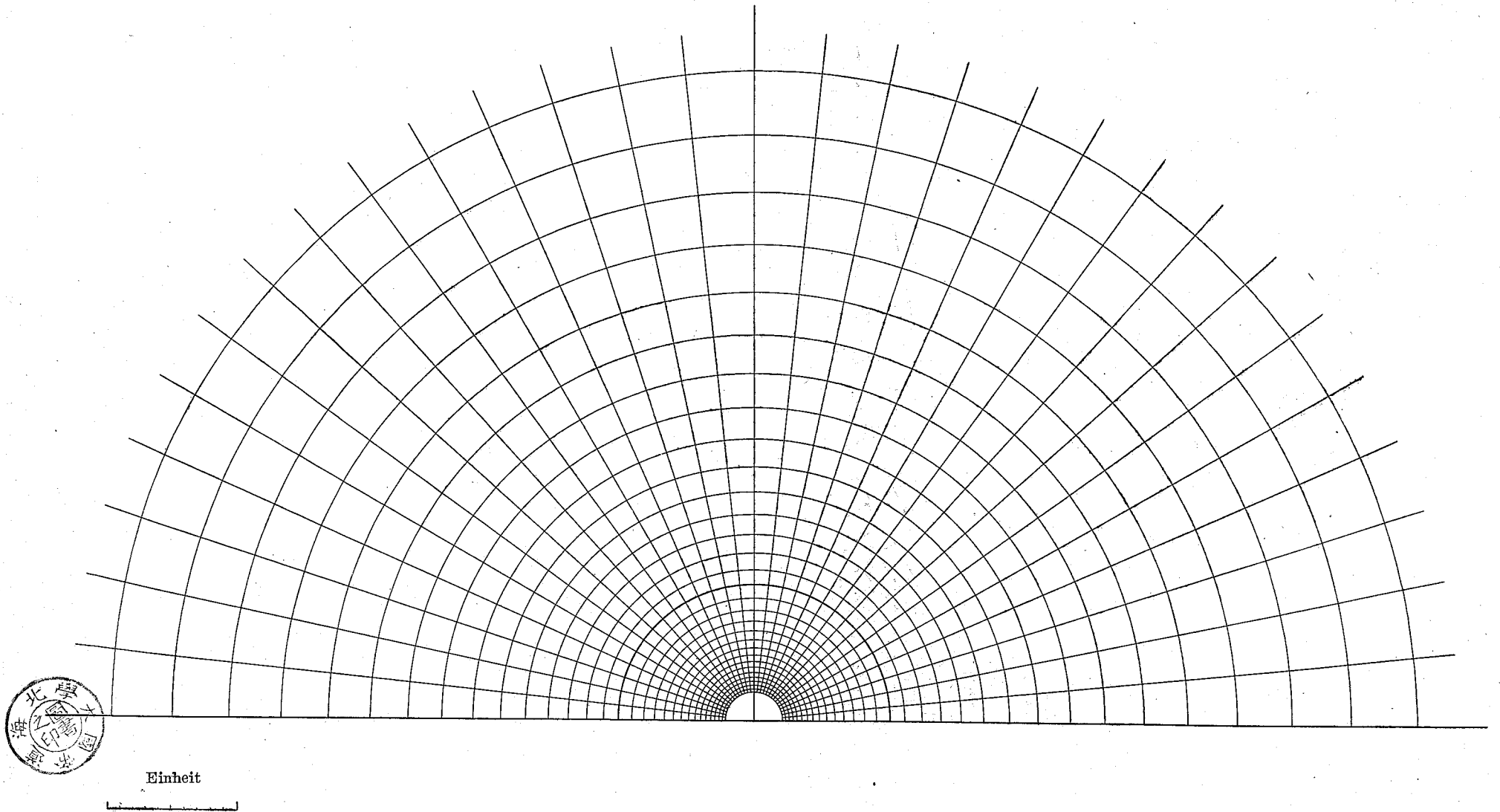
wobei  $z = 0.1(n + im)$



Einheit

$$Z = \ln z$$

$$\text{wobei } Z = \frac{n\pi}{30} + i \frac{m\pi}{30}$$



$$Z = \frac{2}{3} \ln z + \frac{1}{3} \ln (1-z)$$

wobei  $Z = \frac{n\pi}{30} + i \frac{m\pi}{30}$

Einheit

