



Title	熱浸透率の測定法に関する一考察 (I)
Author(s)	岡垣, 理
Citation	衛生工学, 1, 24-30
Issue Date	1958-08-01
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/36126">http://hdl.handle.net/2115/36126</a>
Type	bulletin (article)
File Information	1_24-30.pdf



[Instructions for use](#)

# 熱浸透率の測定法に関する

## — 考 察 (I)

講 師 岡 垣 理

### Some Contributions to Determining a Thermal Constant (I)

Lecturer: Osamu Okagaki

#### Abstract

In this report Krischers idea and a measuring apparatus for determining thermal constants of solids, so called "Thermal penetrativity" (wärmeeindringzahl), was re-examined.

From this investigation, as will be shown in Fig.5, it was found that the large duration of measurement, which increases with the thermal capacity of the heating source, is necessary to obtain the thermal penetrativity with a desirable accuracy.

#### は し が き

衛生工学上の問題として、土壌、コンクリート、建築材料等の熱的特性値を知る必要が屢々生ずる。

例えば、北海道のような寒冷地における、屎尿消化槽の保温、家屋の保温、給配水に关联した凍結深度の算定など、伝熱学的智識を要する点が極めて多

い。伝熱問題を数学的に解こうとする場合、熱係数が与えられねばならない。このうち、時間的溫度変化を伴わない定常状態に対しては、物体内部溫度は単に熱伝導率に左右されるのみであるが、実際には物体の周囲条件、即ち気温、日射、風速等が刻々変化するため、定常状態として取り扱い得ない場合がある。このような不定常熱伝導に対しては、熱伝導率だけでなく比熱、比重量等が影響することになり、数学的に解析する際、熱係数として溫度傳播率、熱浸透率又は比熱等が含まれてくる。これら諸係数は、何れも上記の熱伝導率、比熱及び比重量を組合せたもので、その工学上の単位は次の如くである。

熱伝導率 :  $\lambda$  [ kcal / h · m · °C ]

比 熱 :  $c$  [ kcal / kg · °C ] (重量基準)

比重量 :  $\rho$  [ kg / m<sup>3</sup> ]

溫度傳播率 :  $k = \lambda / c \cdot \rho$  [ m<sup>2</sup> / h ]

熱浸透率 :  $\sqrt{\lambda c \rho}$  [ kcal / √h · m<sup>2</sup> · °C ]

比 熱 :  $c \rho$  [ kcal / m<sup>3</sup> · °C ] (容量基準)

このうち、 $\lambda$ 、 $c$ 、 $\rho$ を單獨に測定することは従来広く行われ、その実測値も数多く発表されており、また比測定法も種々発表されている。他方、熱浸透率  $\sqrt{\lambda c \rho}$  を直接測定する方法は、着者の知る範囲では O. Krischer が発表した方法<sup>1)</sup>だけである。

この報告においては、着者が O. Krischer の測定方式について装置の特性及び測定上の諸問題を検討し、測定試料と装置との関係を纏めた結果の一部を述べる。

#### 測定法原理

いま、無限固体内に、無限の径がりをもつ平面状熱源を考えると、熱流はこの平面熱源と直交する 1 次元流となり、固体内任意点の溫度変化は、つぎの微分方程式の解として表わされる。

熱伝導に関する基礎偏微分方程式：

- 
- i) O. Krischer, H. Esdorn: Einfaches Kurzzeitverfahren zur Gleichzeitigen Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit, der Wärmekapazität und der Wärmeeindringzahl fester Stoffe. VDI-Forsch. Heft 450, Berlin 1954.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

初期条件：

$$t = 0, \theta = 0$$

境界条件：

$$x = 0, -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = Q$$

$$x \rightarrow \infty, \theta \rightarrow 0$$

(1)

この解は

$$\theta = \frac{2Q}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\lambda c_s}} \sqrt{t} \left( e^{-\eta^2} - \eta \sqrt{\pi} \cdot \operatorname{erfc}(\eta) \right) \dots (2)$$

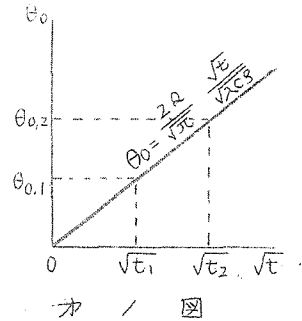
ただし、 $\theta$  = 温度 [°C]、 $2Q$  = 熱源の発生熱量 [Kcal / n·m<sup>2</sup>]、 $t$  = 時間 [h]、 $\eta = x / \sqrt{2\kappa t}$ 、 $x$  = 熱源からの距離 [m]、 $\operatorname{erfc}$  = 余誤差関数、その他の記号はすでに説明した。

式(2)において、 $x = 0$  とおいたものは、熱源の温度を表わし、つぎの  
ごとく、 $\theta$  と  $\sqrt{t}$  は直線的関係にある。 参 / 図参照。

$$\theta_{x=0} = \theta_0 = \frac{2Q}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\lambda c_s}} \sqrt{t} \dots (3)$$

従って、熱浸透率  $\sqrt{\lambda c_s}$  は上式より

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda c_s} &= \frac{2Q}{\sqrt{\pi}} \frac{d\sqrt{t}}{d\theta_0} \\ &= \frac{2Q}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}}{\theta_{0.2} - \theta_{0.1}} \end{aligned} \dots (4)$$



とほり、熱源の発生熱量  $2Q$  及び、実測温度変化より  $d\sqrt{t}/d\theta_0$  または、  
 $(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}) / (\theta_{0.2} - \theta_{0.1})$  を知れば算定できる。ただし、 $\theta_{0.1}$ 、 $\theta_{0.2}$  はそれぞれ  $t = t_1$  及び  $t = t_2$  における熱源温度である。以上が、  
Krischerによる熱浸透率  $\sqrt{\lambda c_s}$  の測定法原理である。

測定誤差について

上記測定法原理では、熱源を幾何学的平面と考え、その熱容量は無視しており、また供試材が無限に厚いとしている。しかし、実際には、熱源はある容積と重量をもつので、その熱容量を無視することはできず、また供試材を無限に厚くすることもできない。このため、実測して得られる $\sqrt{\lambda c s}$ の値には、これらの影響による誤差が加わることになる。

本報告では、測定装置の一特性としての熱源の熱容量が、 $\sqrt{\lambda c s}$ の測定に如何なる影響を及ぼすかということ考察する。

Fig. 2のごとく、無限固体内に、ある有限の熱容量をもつ平板状熱源がある場合、熱源及び固体内の温度 $\theta_1, \theta_2$ を考える。

これは、基礎式

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} = \kappa_2 \frac{\partial \theta_2^2}{\partial x^2}$$

と、初期条件  $t=0, \theta_1 = \theta_2 = 0$

と、境界条件  $x=a, \theta_1 = \theta_2,$

$$-\lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = Q - M_1 C_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial t}$$

$$x \rightarrow \infty, \theta_2 \rightarrow 0$$

} ..... (5)

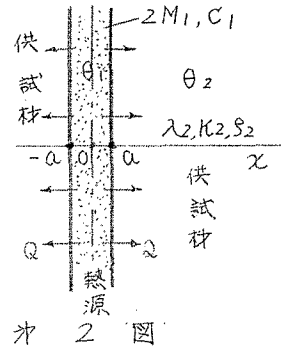


Fig. 2 図

のあとで解けばよい。ただし、式中の諸記号はさきに説明した通りであるが、添字 1, 2 はそれぞれ熱源及び供試材を表はし、熱板の厚さを  $2a$  (m)、重量を  $2M_1$  (kg/m<sup>3</sup>) なお、簡単のため熱源は完全導体(熱伝導率無限大)とする。例えば、熱板として銅のごとく熱伝導率の大きいものを採れば、これを完全導体と見做すことができる。

上式を解くために、各式に  $t$  に關する Laplace 変換を施すと、初期条件を考慮して

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{\theta}_2}{dx^2} &= q_2^2 \bar{\theta}_2, \quad \text{ただし } q_2^2 = \frac{s}{\kappa_2} \\ x=a, \quad \bar{\theta}_1 &= \bar{\theta}_2 \text{ 及び } -\lambda_2 \frac{d\bar{\theta}_2}{dx} = \frac{Q}{s} - M_1 C_1 s \bar{\theta}_1 \\ x \rightarrow \infty, \quad \bar{\theta}_2 &\rightarrow 0. \end{aligned} \right\} \text{---- (6)}$$

ただし、 $\bar{\theta}$  は  $t$  に關する  $\theta$  の Laplace 変換であり、 $s$  は Laplace 変換の parameter である。この常微分方程式より  $\bar{\theta}_1$  は

$$\bar{\theta}_1 = \frac{Q}{s(\lambda_2 q_2 + M_1 C_1 s)} \text{----- (7)}$$

さらに逆変換<sup>2)</sup>を施して、熱源温度  $\theta_1$  はつぎのごとく求まる。

$$\theta_1 = \frac{2Q}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda_2 C_2 S_2}} \sqrt{\tau} - \frac{Q M_1 C_1}{\lambda_2 C_2 S_2} \left( 1 - e^{-\frac{\lambda_2 C_2 S_2}{(M_1 C_1)^2} \tau} \cdot \operatorname{erfc} \left[ \frac{\sqrt{\lambda_2 C_2 S_2}}{M_1 C_1} \sqrt{\tau} \right] \right) \dots (8)$$

熱源の熱容量  $M_1 C_1$  [kcal/m<sup>2</sup>.°C] の影響は、上式右辺の  $\tau$  2 項に現われているが、

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} e^{-\frac{\lambda_2 C_2 S_2}{(M_1 C_1)^2} \tau} \cdot \operatorname{erfc} \left[ \frac{\sqrt{\lambda_2 C_2 S_2}}{M_1 C_1} \sqrt{\tau} \right] = 0$$

となるので、 $\tau$  の充分大きい範囲に対しては、

$$\theta_1 \approx \frac{2Q}{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda_2 C_2 S_2}} \sqrt{\tau} - \frac{Q M_1 C_1}{\lambda_2 C_2 S_2} \dots (9)$$

となり、従つて

$$\sqrt{\lambda_2 C_2 S_2} = \frac{2Q}{\sqrt{\pi}} \frac{d\sqrt{\tau}}{d\theta_1} \dots (10)$$

が得られることとなり、前掲の式(4)と全く一致する。結局、熱源の熱容量を無視し得ないとき、その影響をなくするためには、測定時間  $\tau$  を大きく送らねばならない。右図はこの場合の温度変化の様相を表わしたもので、実線は式(8)、これに接する破線(漸近線)は式(9)、上位の破線は式(3)の温度変化を示している。この2組の破線は互に平行であり、その距離は  $Q M_1 C_1 / \lambda_2 C_2 S_2$  である。このように充分の時間が経過した後では、温度変化の割合  $d\theta/d\sqrt{\tau}$  は一定 ( $2Q / \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda_2 C_2 S_2}$ ) となるので、式(10)より  $\sqrt{\lambda_2 C_2 S_2}$  の算定は可能となる。

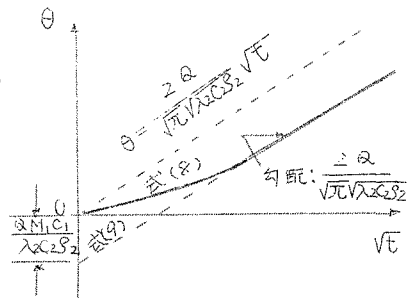


図 3

さて、熱源の熱容量  $M_1 C_1$  を無視し得ないために生ずる測定誤差は、式(4)を、

$$\sqrt{\lambda C S} = \frac{2Q}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\left( \frac{d\theta}{d\sqrt{\tau}} \right)}$$

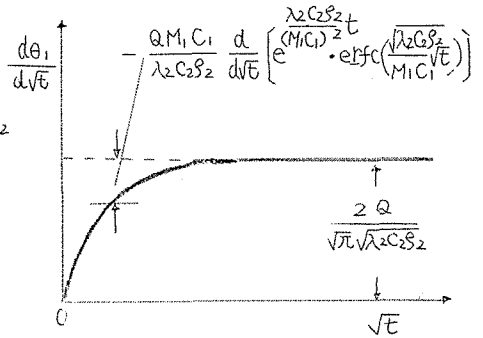
2) H.S. Carslaw, J.C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids. Oxf. Univ. Press, 1948, P380. または近藤次郎: 演算子法, 培風館, 昭31, 附録A-4.

のように変形し、 $d\theta/d\sqrt{t}$  をそれぞれの場合について比較することにより評価できる。図4図は、 $d\theta/d\sqrt{t}$  と  $\sqrt{t}$  の関係を示したもので、実線は有限の熱容量をもつ熱源の温度式(8)より

求めた  $d\theta/d\sqrt{t}$  を表し、破線は  $t \rightarrow \infty$  としたときの温度式(9)より導いたものである。

そして、後者は一定値  $2Q/\sqrt{\pi\lambda_2 c_2 s_2}$  を示し、熱源の熱容量を無視した  $M_1 C_1 = 0$  の場合の値と等しい。

従って、測定時間を充分とらないうちに生ずる誤差は、図の実線と破線との間の距離、すなわち、



$$- \frac{Q M_1 C_1}{\lambda_2 c_2 s_2} \frac{d}{d\sqrt{t}} \left[ e^{\frac{\lambda_2 c_2 s_2}{(M_1 C_1)^2} t} \operatorname{erfc} \left( \frac{\sqrt{\lambda_2 c_2 s_2}}{M_1 C_1} \sqrt{t} \right) \right] \quad \text{図 4}$$

に起因するもので、次式により評価することができる。

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1 - \frac{\frac{d\theta_1}{d\sqrt{t}}}{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\theta_1}{d\sqrt{t}}} \\ &= 1 - \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{\lambda_2 c_2 s_2}}{M_1 C_1} \sqrt{t} \cdot e^{-\frac{\lambda_2 c_2 s_2}{(M_1 C_1)^2} t} \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{\lambda_2 c_2 s_2}}{M_1 C_1} \sqrt{t} \right) \end{aligned}$$

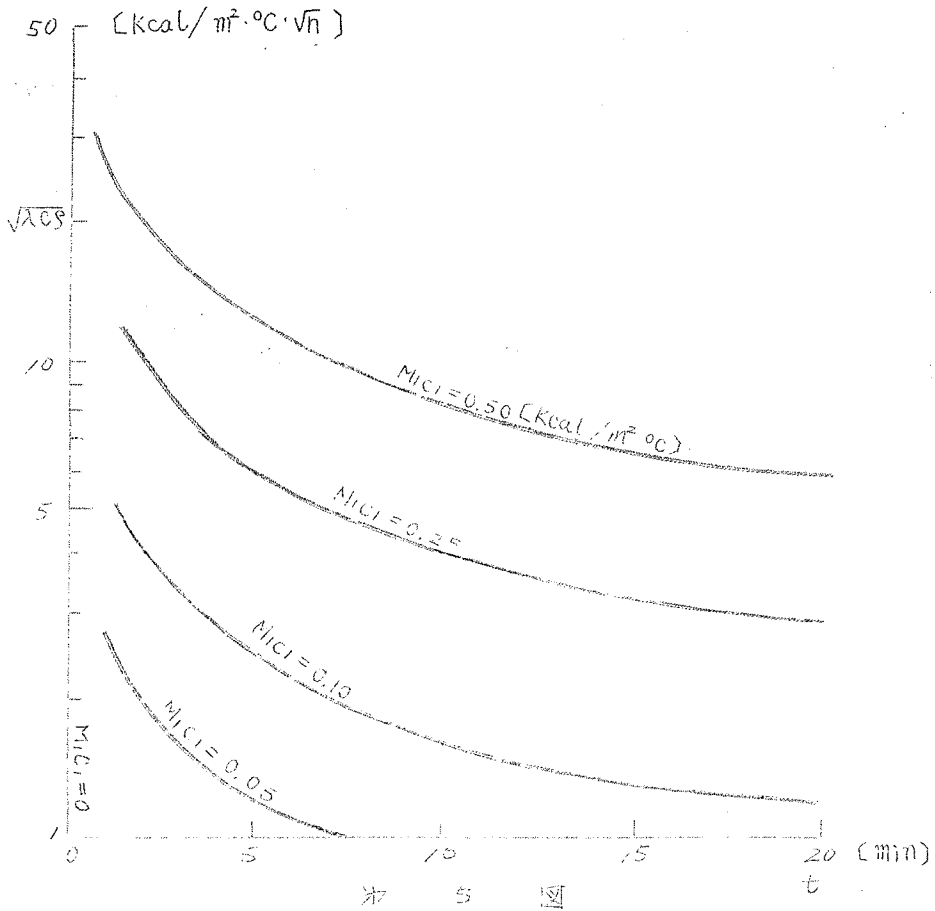
或いは、漸近展開<sup>3)</sup>により

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{M_1 C_1}{\sqrt{\lambda_2 c_2 s_2}} \right)^2 \frac{1}{t} - \frac{3}{4} \left( \frac{M_1 C_1}{\sqrt{\lambda_2 c_2 s_2}} \right)^4 \frac{1}{t^2} + \frac{15}{8} \left( \frac{M_1 C_1}{\sqrt{\lambda_2 c_2 s_2}} \right)^6 \frac{1}{t^3} - \dots \quad (11)$$

ここで、上式の  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\theta_1}{d\sqrt{t}}$  は、式(9)または(3)に基づく  $d\theta/d\sqrt{t}$  と同等である。

例えば、この誤差を1%以内に止めるためには、 $\epsilon \leq 0.01$  と満足するような時間  $t$  の範囲で測定を行えばよいことになる。図5図は  $\epsilon = 0.01$  の場合の計算結果を示したもので、熱源の熱容量  $M_1 C_1$  [Kcal/m<sup>2</sup>·°C] を Parameter とし、熱浸透率  $\sqrt{\lambda c s}$  と、誤差  $\epsilon$  を1%に止めるために必要な最小時間  $t$  との関係を表はしている。例えば、 $\sqrt{\lambda c s} = 2$  [Kcal·m·°C·√h] の供試材を熱容量  $M_1 C_1 = 0.05$  及び  $0.10$  [Kcal/m<sup>2</sup>·°C] のとき熱源を用いて測定するとき、誤差を1%以内に止めるためには、前者では  $t \geq 2$  [min] 後者では  $t \geq 7$  [min] の範囲で測定しなければならないことになる。勿論、 $M_1 C_1 \rightarrow 0$  という熱容量のない理想化した熱源に対してはすべての  $\sqrt{\lambda c s}$  に対し  $t \geq 0$  となり、図では  $\sqrt{\lambda c s}$  の座標軸(次頁に続く)

3) 前掲脚註 2) の APPENDIX II, P 371



(紙座標軸)がこれをおわしている。同図より明らかのように、熱源の熱容量  $M_1 c_1$  が大きい程、また供試材の熱浸透率  $\sqrt{\lambda c s}$  の大きいもの程、短時間で測定できる。

### む す び

上述の如く、Krischerによる熱浸透率の測定法においては、測定装置の一特性である熱源の熱容量の大小と、供試材の熱浸透率の大小が、測定誤差に關係することを明らかにした。そしてこの誤差を所要限度に止めるために必要な測定時間を求めた。

その他、供試材の厚さが有限であるため、熱浸透率測定上誤差を主たることになるが、これについては次報で発表の予定である。