



Title	結晶光学と非線形光学
Author(s)	三島, 瑛人
Issue Date	2009-03-11T07:50:48Z
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/36645
Type	learningobject
File Information	mishima.pdf



[Instructions for use](#)

結晶光学と非線形光学

北海道大学大学院情報科学研究科

情報エレクトロニクス専攻

三島 瑛人

工業高等専門学校集中講義

1. はじめに	1
2 章 結晶光学	2
2.1 異方性結晶中の光波	3
A マクスウェルの方程式と異方性結晶の誘電率	3
B 異方性結晶中の電界や磁界などの方向	4
C 異方性結晶中の光速度	6
D 固有偏波(常光線と異常光線)	7
E 屈折率だ円体	11
2.2 結晶光学の応用例	12
A 偏光プリズム	12
B 波長板	13
補足： 偏光とジョーンズベクトル	16
2.3 電気光学効果	17
2.4 電気光学効果の応用例	17
A 電気光学効果を用いた光変調器	17
B 光変調器への応用例	18
2 章の問題	19
3 章 非線形光学	22
3.1 屈折率の分散特性	23
3.2 非線形光学定数	26
3.3 非線形相互作用と第 2 高調波光の発生(SHG)	32
3.4 位相整合	34
3.5 非線形光学の特徴とその応用	36
3 章の問題	37

第1章 はじめに

このテキストは工業高等専門学校5年生の集中講義として計画された。少々難解でも話題性のある題材を扱った。

通常の媒質は等方性であるが、結晶は異方性であることが多い。異方性は方向によって誘電率が異なることに起因する。異方性媒質中では、波面の進む方向とエネルギーの進む方向とが一般的には異なったり、像が二重に見えるなどの興味ある現象が表れる。まずこれらを扱う結晶光学を勉強する。次に、非線形光学へと進む。非線形光学は、レーザ光の高いエネルギー密度を利用して結晶内で周波数を変換する（波長を変換する）などの興味ある応用を実現した。近年では非線形光学を利用して量子力学的暗号化を行うなどの研究もなされている。

第2章 結晶光学

光学結晶は光スイッチ，光変調器，光偏向器などによく利用される．それは，結晶ではその光学的特性がよくそろっていると同時に結晶特有の性質があるからである．

特有の性質の1つに，方向によって特性が異なる異方性(複屈折とも呼ばれる)という性質がある．また，結晶に電界を印加すると屈折率が変化するという電気光学効果も存在する．ここでは光の結晶内伝搬と結晶の電気光学効果および電気光学効果を利用した光変調器について学ぶ．

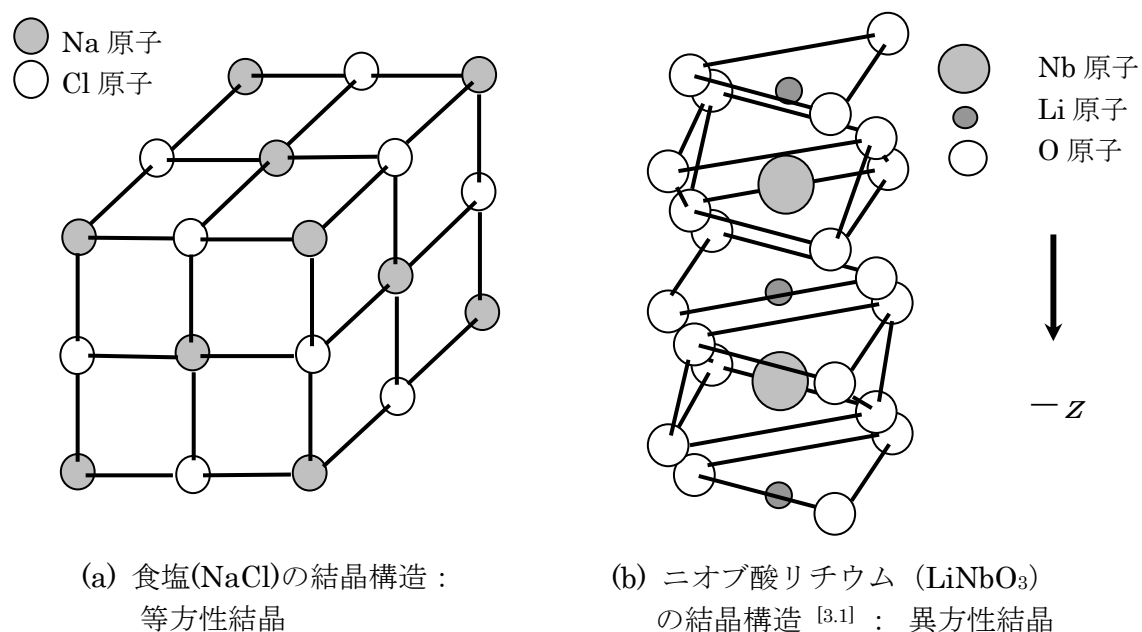


図 2.1 結晶構造の例

(a) の等方性結晶の場合には前後・左右・奥行方向に原子の配列が全く同じで電気的性質や光学的性質が方向に無関係である．(b) の異方性結晶では明らかに方向によって原子の配列が異なり，これらの性質が方向に依存する．なお上図の LiNbO_3 結晶では3つのO原子がつくる平面の下側にLi原子があるため+z方向と-z方向では性質が異なる(自発分極)．



図 2.2 単軸結晶を通して見たときの文字の見え方 (複屈折)^(a)^(b)

ここでは単軸結晶として方解石を用いている．方解石を通してみると像が二重に見える．方解石結晶を回転すると一方の像は動かない(常光線)が，他方の像(異常光線)は結晶の回転につれて回転する．したがって，この二重に見える現象は結晶の方向性と関係していると考えられる．(a) 文字が二重にずれて見える(左上側と右下側にずれている)．焦点はほぼ下の原稿用紙に合わせてある．(b) 結晶をほぼ 90° 回転すると一方の文字の位置がほぼ 90° 回転している．このような現象を複屈折という．なお，(b)では結晶表面に焦点を合わせているため焦点から離れるにしたがって文字がボケている．

2.1 異方性結晶中の光波

A. マクスウェルの方程式と異方性結晶の誘電率

主座標軸 X,Y,Z と誘電率テンソル(ϵ_{ij})を用いると電束密度 \mathbf{d} と電界 \mathbf{e} の関係は次式となる．

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_X \\ d_Y \\ d_Z \end{pmatrix} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_X \\ e_Y \\ e_Z \end{pmatrix} = \epsilon_0 [\epsilon_{ij}] \mathbf{e} \quad (2.1-1)$$

なお，主座標軸においては誘電率テンソル(ϵ_{ij})を対角行列に出来ることを用いている．

すなわち

$$\begin{aligned} d_X &= \epsilon_0 \epsilon_{11} e_X \\ d_Y &= \epsilon_0 \epsilon_{22} e_Y \\ d_Z &= \epsilon_0 \epsilon_{33} e_Z \end{aligned}$$

となる．

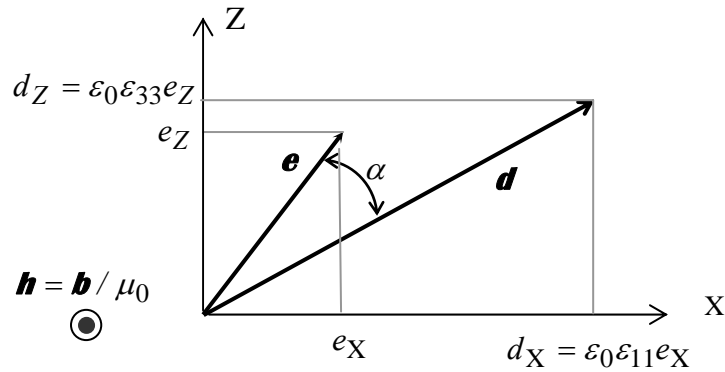


図 2.3 電束密度 \mathbf{d} と電界 \mathbf{e} の例 ($e_Y = d_Y = 0$ のとき)

$\epsilon_{11} = \epsilon_{33}$ のときには \mathbf{d} と \mathbf{e} の方向が一致する (常光線 : 後述) が,
 $\epsilon_{11} \neq \epsilon_{33}$ のときには \mathbf{d} と \mathbf{e} の方向が一致しない (異常光線 : 後述).

B. 異方性結晶中の電界や磁界などの方向

以後単軸結晶 ($\epsilon_{11} = \epsilon_{22} \neq \epsilon_{33}$) を扱う. この場合, 光波は 2 つの固有偏波に分けられ, そのおのおのについて次のマクスウェルの式が成立する.

$$\nabla \times \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \quad (2.1-2)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad (2.1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = 0 \quad (\text{真電荷なし}) \quad (2.1-4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (2.1-5)$$

ただし ∇ はナブラと呼ばれるベクトル演算子で $\nabla \equiv \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z}$

また, 媒質の性質を示す次式が成立する.

$$\mathbf{d} = \epsilon_0 [\epsilon_{ij}] \mathbf{e} \quad (2.1-6)$$

$$\mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{h} \quad (\text{真空と同じ}) \quad (2.1-7)$$

電界等を次式の平面波と仮定する.

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{E} \exp[j(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})], & \mathbf{h} &= \mathbf{H} \exp[j(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})] \\ \mathbf{d} &= \mathbf{D} \exp[j(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})], & \mathbf{b} &= \mathbf{B} \exp[j(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})] \end{aligned} \quad (2.1-8)$$

$\mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{d}, \mathbf{b}$ を代表して \mathbf{a} と書くと, その時間微分とその回転は次のように簡単になる.

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = j\omega \mathbf{a}, \quad (2.1-9)$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{a} &= \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (\hat{\mathbf{x}} a_x + \hat{\mathbf{y}} a_y + \hat{\mathbf{z}} a_z) \\
&= \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \hat{\mathbf{y}} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \\
&= -j(\hat{\mathbf{x}} K_x + \hat{\mathbf{y}} K_y + \hat{\mathbf{z}} K_z) \times (\hat{\mathbf{x}} a_x + \hat{\mathbf{y}} a_y + \hat{\mathbf{z}} a_z) \\
&= -j\mathbf{K} \times \mathbf{a}.
\end{aligned} \tag{2.1-10}$$

すなわち, $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = j\omega \mathbf{a}$, および $\nabla \times \mathbf{a} = -j\mathbf{K} \times \mathbf{a}$.

(2.1-9)と(2.1-10)を用いると, (2.1-2)と(2.1-3)から次式を得る.

$$\mathbf{d} = -\frac{1}{\omega} \mathbf{K} \times \mathbf{h} \tag{2.1-11}$$

$$\mathbf{h} = \frac{1}{\omega \mu_0} \mathbf{K} \times \mathbf{e} \tag{2.1-12}$$

また, エネルギーの伝搬方向(ポインティングベクトルの方向)の単位ベクトルは電磁気学で習うように,

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{h}}{|\mathbf{e} \times \mathbf{h}|} \tag{2.1-13}$$

となる. これらの方向を図 2.4 に示した.

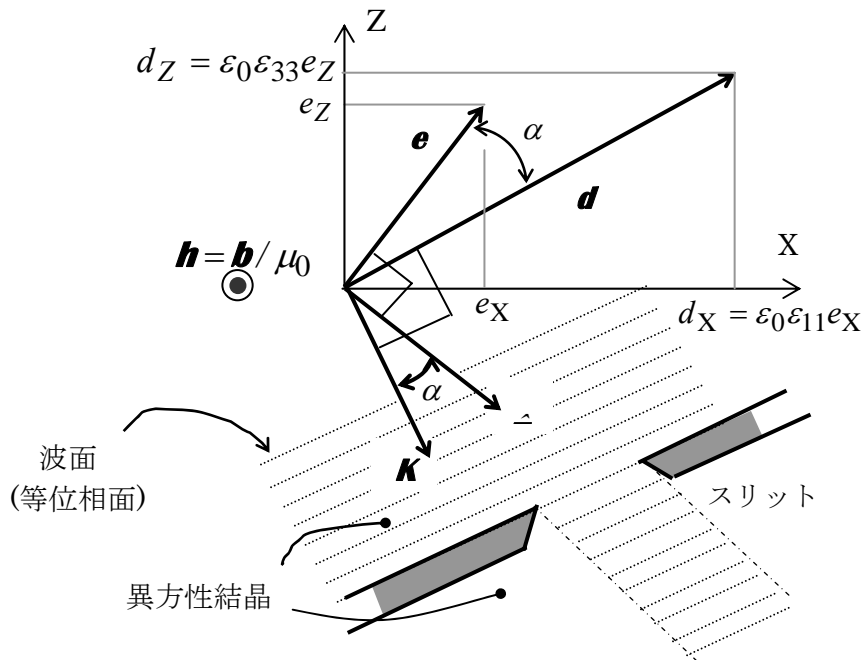


図 2.4 異方性結晶中の伝搬 ($e_Y = d_Y = 0$ のとき)

異方性結晶中にスリットが置かれたと仮定すると, 波面の進行方向とエネルギーの進行方向は異なる ($\epsilon_{11} \neq \epsilon_{33}$ の場合)ことが了解できる.

C. 異方性結晶中の光速

- 位相の伝搬から定義……………位相速度
- エネルギーの伝搬から定義……………エネルギー速度（群速度）

○位相速度

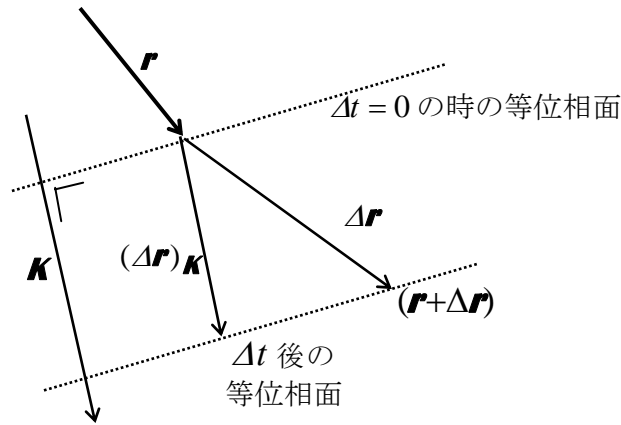


図 2.5 等位相面の移動と位相速度

図 2.5 に沿って位相速度を考える。 \mathbf{K} に垂直な方向には等位相であり、 $(\Delta\mathbf{r})_{\mathbf{K}}$ を $\Delta\mathbf{r}$ の \mathbf{K} 方向成分とすると、 Δt の時間内に $(\Delta\mathbf{r})_{\mathbf{K}}$ だけ \mathbf{K} 方向に位相が移動したと見なせる。 よって位相速度は $(\Delta\mathbf{r})_{\mathbf{K}} / \Delta t$ であり、 その位相速度の方向は \mathbf{K} の方向である。

電界 $\mathbf{e} = \mathbf{E} \exp[j(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})]$ の位相は $(\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r})$ である。 $t = t$ かつ $\mathbf{r} = \mathbf{r}$ の時と $t = t + \Delta t$ かつ $\mathbf{r} = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ の時の位相が等しいとすると

$$\omega t - \mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = \omega(t + \Delta t) - \mathbf{K} \cdot (\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) \quad \therefore 0 = \omega\Delta t - \mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{r}$$

よって、位相速度の大きさは $\mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{r} = K(\Delta\mathbf{r})_{\mathbf{K}}$ を用いて次式となる。

$$v_p = \frac{(\Delta\mathbf{r})_{\mathbf{K}}}{\Delta t} = \frac{\omega}{K} \tag{2.1-14}$$

この v_p を用いて媒質の屈折率 n を次のように定義する。

$$n \equiv \frac{c_0}{v_p} = \frac{\text{真空中の光速}}{\text{媒質中の光速}} \tag{2.1-15}$$

○エネルギー速度 (群速度)

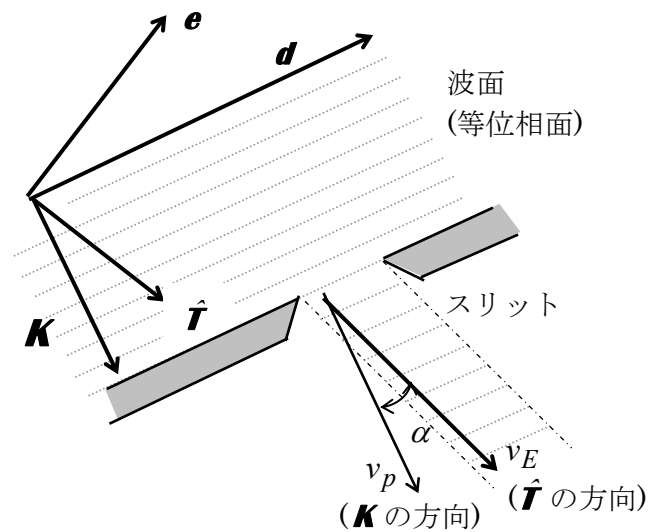


図 2.6 エネルギー速度 (群速度)の定義

エネルギーの伝搬速度は波面の進行方向ではなく、エネルギー(電力)の伝搬方向にとるのが妥当である。

エネルギー速度(群速度)の方向は $\hat{\mathbf{T}}$ の方向でエネルギー速度(群速度)の大きさは

$$v_E = v_p / \cos \alpha \quad (2.1-16)$$

となる。

D. 固有偏波(常光線と異常光線)

一般に、異方性結晶中を進む光波の偏波状態は伝搬にともなって変化する。しかし、ある特定の2つの偏波状態を選ぶと伝搬には無関係に一定となる。これを固有偏波という。2つの固有偏波は直交しており、単軸結晶の場合には直交する2つの直線偏波(常光線と異常光線)となる。単軸結晶($\epsilon_{11} = \epsilon_{22} \neq \epsilon_{33}$)においては図 2.7 と 2.8 のようになる。

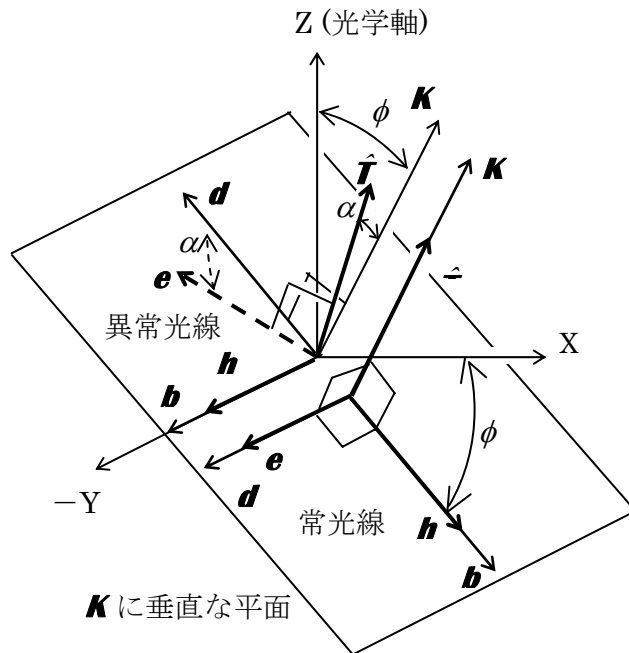


図 2.7 波動ベクトル \mathbf{K} と電束密度ベクトル \mathbf{d} の方向

$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} \neq \epsilon_{33}$ であるような単軸結晶における概念図. ある方向に伝搬する光波を 2 つの固有偏波(常光線と異常光線)に分解する. それぞれの位相の伝搬方向(\mathbf{K} の方向と同じ)は同じであるが, エネルギーの伝搬方向($\hat{\mathbf{T}}$ の方向)は異なる.

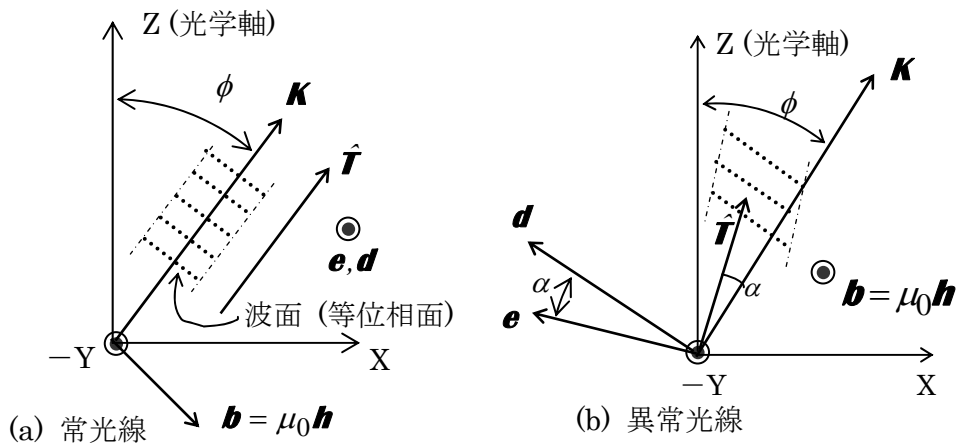


図 2.8 常光線と異常光線の各ベクトルの方向

常光線, 異常光線とも, 波面の伝搬方向は \mathbf{K} の方向 ($\mathbf{d} \times \mathbf{h}$ の方向) であり, エネルギーの伝搬方向は $\hat{\mathbf{T}}$ の方向 ($\mathbf{e} \times \mathbf{h}$ の方向) である.

次にこれらの常光線と異常光線の位相速度を求めよう.

式(2.1-11)の \mathbf{h} に式(2.1-12)を代入して次式を得る.

$$\mathbf{d} = -\frac{1}{\omega^2 \mu_0} \mathbf{K} \times (\mathbf{K} \times \mathbf{e}) \quad (2.1-17)$$

ベクトル公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \text{ は任意のベクトル})$$

を用いると式(2.1-17)は次式となる.

$$\mathbf{d} = -\frac{1}{\omega^2 \mu_0} \{ \mathbf{K}(\mathbf{K} \cdot \mathbf{e}) - K^2 \mathbf{e} \} \quad (2.1-18)$$

ところで結晶の光学軸を Z 軸とする. 任意の方向に伝搬する光波を考えるが, その伝搬ベクトル \mathbf{K} が XZ 面内にくるよう X 軸をとる(図 2.7 参照).

式(2.1-18)の Y 成分は両辺で等しくなければならないので

$$d_Y = -\frac{1}{\omega^2 \mu_0} \{ K_Y (\mathbf{K} \cdot \mathbf{e}) - K^2 e_Y \} \quad (2.1-19)$$

を得る. ところが \mathbf{K} は XZ 面内にあるので $K_Y = 0$ である. また式(2.1-1)を用いると式(2.1-19)は次のように変形できる.

$$\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_{11} e_Y = K^2 e_Y \quad \text{すなわち} \quad K = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_{11}} = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\varepsilon_{11}} \quad (2.1-20)$$

したがって式(2.1-14)の定義を用いると, 電束密度ベクトルの Y 成分と電界ベクトルの Y 成分とが関係する波の位相速度として次式が得られる.

$$v_p \equiv \frac{\omega}{K} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{11}}} \quad (2.1-21)$$

この波の屈折率は

$$n \equiv \frac{c_0}{v_p} = \sqrt{\varepsilon_{11}} \equiv n^{(0)} \quad (2.1-22)$$

となる. $n^{(0)}$ は主屈折率と呼ばれる. このように電束密度ベクトル, 電界ベクトルの Y 成分(結晶の光学軸と \mathbf{K} で作る平面に垂直な成分)が関係する光波を常光線あるいは正常波と呼んでいる. 常光線の位相速度や屈折率は, (後述する異常光線とは異なり)光の伝搬方向には無関係に一定である.

次に電束密度ベクトルの常光線成分 d_Y に垂直な成分を考える. この成分は XZ 面内にあ

り \mathbf{K} に垂直である。よって図 2.7 のように光学軸と \mathbf{K} とのなす角を ϕ とすると、伝搬ベク

トル \mathbf{K} と、この電束密度成分 ($\mathbf{d}^{(E)}$ とする) は

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_X \\ 0 \\ K_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \sin \phi \\ 0 \\ K \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (2.1-23)$$

$$\mathbf{d}^{(E)} = \begin{bmatrix} d^{(E)}_X \\ 0 \\ d^{(E)}_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d^{(E)} \cos \phi \\ 0 \\ d^{(E)} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (2.1-24)$$

となる。式(2.1-18)の X 成分は両辺で等しくなければならないので

$$e_X \varepsilon_0 \varepsilon_{11} = \frac{-1}{\omega^2 \mu_0} \left\{ K \sin \phi (e_X K \sin \phi + e_Z K \cos \phi) - e_X K^2 \right\}$$

すなわち

$$\left\{ -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_{11} + K^2 (-\sin^2 \phi + 1) \right\} e_X = e_Z K^2 \sin \phi \cos \phi \quad (2.1-25)$$

を得る。全く同様に Z 成分より

$$\left\{ -\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_{33} + K^2 (-\cos^2 \phi + 1) \right\} e_Z = e_X K^2 \cos \phi \sin \phi \quad (2.1-26)$$

を得る。式(2.1-25)と(2.1-26)の辺々を乗じて次式を得る。

$$\begin{aligned} & \left(\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_{11} - K^2 \cos^2 \phi \right) \left(\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_{33} - K^2 \sin^2 \phi \right) = K^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi \\ \therefore \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 &= \frac{K^2 \sin^2 \phi}{\varepsilon_{33}} + \frac{K^2 \cos^2 \phi}{\varepsilon_{11}} \end{aligned} \quad (2.1-27)$$

したがってこの波の位相速度と屈折率は次式となる。

$$v_p \equiv \frac{\omega}{K} = c_0 \left\{ \frac{\sin^2 \phi}{\varepsilon_{33}} + \frac{\cos^2 \phi}{\varepsilon_{11}} \right\}^{\frac{1}{2}} = c_0 \left\{ \frac{\sin^2 \phi}{(n^{(E)})^2} + \frac{\cos^2 \phi}{(n^{(O)})^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.1-28)$$

$$n^{(E)}(\phi) \equiv \frac{c_0}{v_p} = \left\{ \left(\frac{\sin \phi}{n^{(E)}} \right)^2 + \left(\frac{\cos \phi}{n^{(O)}} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.1-29)$$

ただし

$$n^{(E)} \equiv \sqrt{\varepsilon_{33}} \quad (2.1-30)$$

とおいた。したがって電束密度ベクトルの XZ 面内成分が関係する光波は伝搬方向(ϕ)によって、位相速度と屈折率が変化する。この成分を異常光線あるいは異常波と呼んでいる。以上をまとめると次のようになる。

○常光線： \boldsymbol{d} が XY 平面内にある固有偏波(X 方向と Y 方向の比誘電率は等しい)

$$v_p = \frac{\omega}{K} = \frac{c_0}{n^{(O)}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_{11}}} \quad (\text{位相速度}=\text{真空中の光速}/\text{屈折率}) \quad (2.1-31)$$

$$v_E = v_p \quad (2.1-32)$$

○異常光線： \boldsymbol{d} が XY 平面内でない固有偏波

(XY 面内方向と Z 方向の比誘電率は異なる)

$$v_p = \frac{\omega}{K} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} n^{(E)}(\phi)} = \frac{c_0}{n^{(E)}(\phi)} = c_0 \sqrt{\left(\frac{\cos \phi}{n^{(O)}}\right)^2 + \left(\frac{\sin \phi}{n^{(E)}}\right)^2} \quad (2.1-33)$$

(位相速度 = 真空中の光速/屈折率)

$$v_E = v_p / \cos \alpha \quad (2.1-34)$$

ただし、

$$n^{(E)}(\phi) = \left\{ \left(\frac{\cos \phi}{n^{(O)}}\right)^2 + \left(\frac{\sin \phi}{n^{(E)}}\right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (2.1-29)$$

$$n^{(E)} \underline{\underline{\Delta}} \sqrt{\varepsilon_{33}} \quad (2.1-30)$$

E. 屈折率だ円体

電束密度 \boldsymbol{d} の方向に屈折率の大きさ n をとった曲面で、その曲面上の点を

(n_X, n_Y, n_Z) とすると

$$n = \sqrt{n_X^2 + n_Y^2 + n_Z^2} \quad (2.1-35)$$

$$\left(\frac{n_X}{n^{(X)}}\right)^2 + \left(\frac{n_Y}{n^{(Y)}}\right)^2 + \left(\frac{n_Z}{n^{(Z)}}\right)^2 = 1 \quad (2.1-36)$$

ただし、 $n^{(X)}, n^{(Y)}, n^{(Z)}$ は、この曲面と主軸座標 XYZ との交点である。

$$n^{(X)} \underline{\underline{\Delta}} \sqrt{\varepsilon_{11}}, \quad n^{(Y)} \underline{\underline{\Delta}} \sqrt{\varepsilon_{22}}, \quad n^{(Z)} \underline{\underline{\Delta}} \sqrt{\varepsilon_{33}} \quad (2.1-37)$$

単軸結晶の場合には $n^{(X)} = n^{(Y)} \neq n^{(Z)}$ $(n^{(X)} = n^{(Y)} = n^{(O)}, n^{(Z)} = n^{(E)})$ (2.1-38)

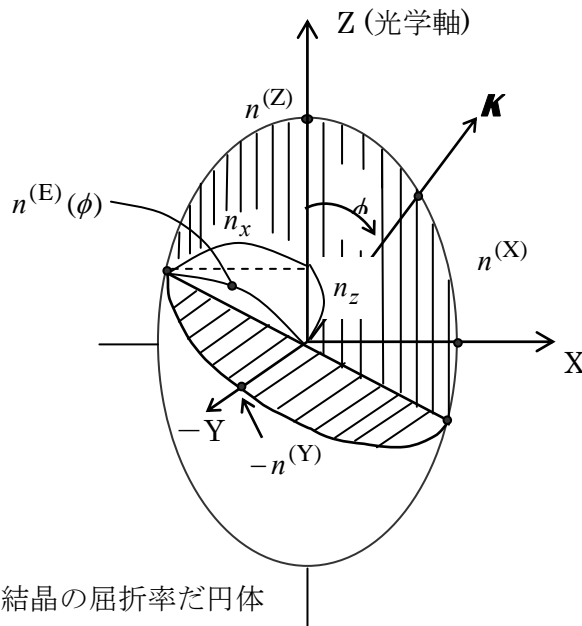


図 2.9 単軸結晶の屈折率だ円体

だ円の主軸方向の長さはそれぞれ $2n^{(X)}$, $2n^{(Y)}$ ($n^{(Y)} = n^{(X)}$), $2n^{(Z)}$ である. 波動ベクトル \mathbf{K} は \mathbf{XZ} 面内にあるものと仮定している. 電束密度ベクトル \mathbf{d} は波動ベクトル \mathbf{K} と垂直な面内にあるが, それを固有偏波 (\mathbf{Y} 成分と \mathbf{XZ} 面内成分) に分解し, それぞれの \mathbf{d} の方向に屈折率 n の大きさをプロットしている.

2.2 結晶光学の応用例

A. 偏光プリズム

ここでは図 2.10 に示されるグラントムソンプリズムについて説明する.

$$\left. \begin{array}{l} \text{方解石は単軸結晶で } n^{(E)} < n^{(O)} \\ \text{どの方向に伝搬しても } n^{(E)}(\phi) \leq n^{(O)} \end{array} \right\} \quad (2.2-1)$$

プリズムの頂角 β を小さくすると

$$n^{(E)}(\phi) \sin(90^\circ - \beta) < n_C < n^{(O)} \sin(90^\circ - \beta) \quad (2.2-2)$$

とすることが可能 (n_C はカナダバルサム屈折率).

このとき $\left\{ \begin{array}{l} \text{常光線は全反射} \\ \text{異常光線は一部分は反射するが, 大部分は屈折・透過する.} \end{array} \right.$

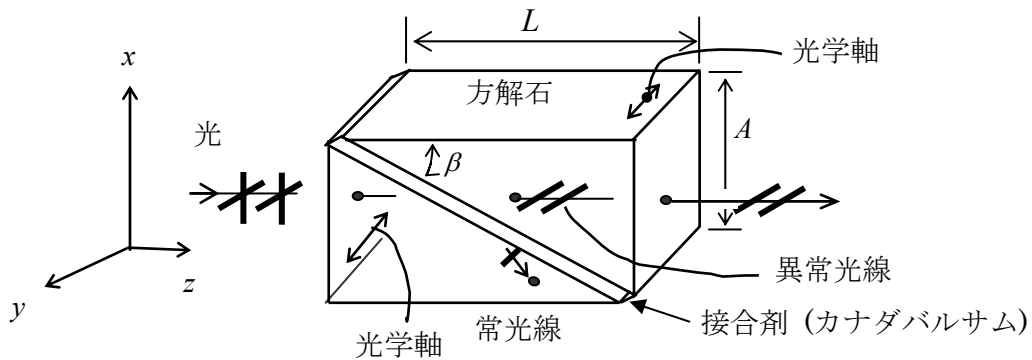


図 2.10 グラントムソンプリズム (偏光プリズムの例)

常光線は方解石とカナダバルサムとの境界面で全反射されて出力には表れないので、出力光は異常光線のみとなり直線偏波となる。異常光線は大部分が透過する。

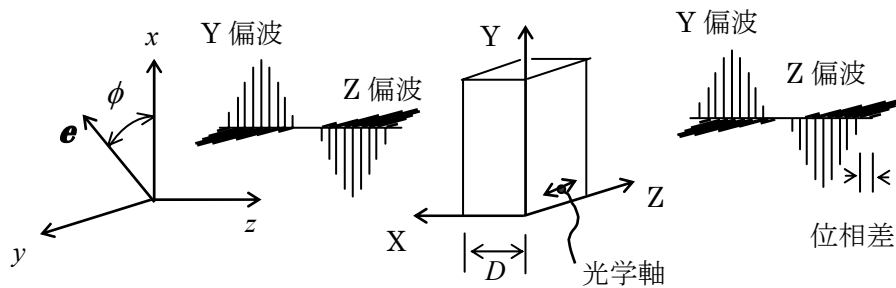


図 2.11 波長板の切り出し方と結晶の方位

結晶の入射面に光学軸が平行となるように切断・研磨する。λ/4板の場合には出力光はだ円偏波となり、**e**の方向(φ′)が回転する。λ/4板の場合には

B. 波長板： 異方性結晶内の2つの固有偏波の伝搬速度の差(屈折率の差)を利用して両者の位相差を変化させる板状の光学素子である。ジョーンズベクトルを用いると

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_o &= \begin{pmatrix} E_{ox} \\ E_{oy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{ix} \exp(-j2\pi n^{(O)} D/\lambda) \\ E_{iy} \exp(-j2\pi n^{(E)} D/\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-j2\pi n^{(O)} D/\lambda) & 0 \\ 0 & \exp(-j2\pi n^{(E)} D/\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{pmatrix} \\ &= [\mathbf{T}] \mathbf{E}_i \end{aligned} \tag{2.2-3}$$

$$\bigcirc \frac{1}{4} \text{波長板}(\lambda/4 \text{板}): 2\pi(n^{(O)} - n^{(E)})D/\lambda = \pm \frac{\pi}{2} \tag{2.2-4}$$

$$\text{すなわち } \mathbf{E}_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(\pm j\pi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{ix} \\ \pm jE_{iy} \end{pmatrix}$$

$$\bigcirc \frac{1}{2} \text{波長板}(\lambda/2 \text{板}): 2\pi(n^{(O)} - n^{(E)})D/\lambda = \pm\pi \tag{2.2-5}$$

$$\text{すなわち } \mathbf{E}_o = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(\pm j\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{ix} \\ -jE_{iy} \end{pmatrix}$$

入射光 \mathbf{E}_i を次式と仮定する.

$$\mathbf{E}_i = \begin{pmatrix} E_{iY} \\ E_{iZ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{pmatrix} = E_i \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \quad (2.2-6)$$

(x 軸から y 軸方向へ ϕ だけ偏波面が傾いた直線偏波)

$$\text{○}1/4 \text{ 波長板の場合 : } 2\pi(n^{(Y)} - n^{(Z)})D/\lambda = \pm\pi/2 \quad (2.2-7)$$

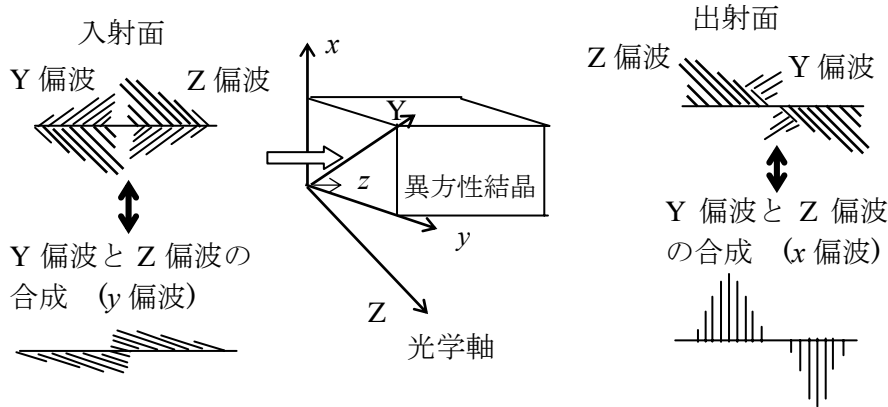


図 2.12 位相差のある Y 偏波と Z 偏波の合成と分解 ($\lambda/4$ 板の例)

入射面では Y 偏波と Z 偏波の位相は同じでそれらを合成すると y 偏波になる。出射面では Y 偏波と Z 偏波の位相差が $\pm\pi$ となり，それらを合成すると x 偏波になる。(上図参照)

$$\text{出射光} \begin{cases} \phi = 0^\circ \text{ なら } \mathbf{E}_o = E_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (\phi' = 0^\circ \text{ 方向の直線偏波}) & (2.2-8) \\ \phi = 45^\circ \text{ なら } \mathbf{E}_o = \frac{E_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\exp(\pm j\pi/2) \end{pmatrix} & (\text{円偏波}) & (2.2-9) \\ \phi = 90^\circ \text{ なら } \mathbf{E}_o = E_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} & (\phi' = 90^\circ \text{ 方向の直線偏波}) & (2.2-10) \end{cases}$$

$$\text{○}1/2 \text{ 波長板の場合 : } 2\pi(n^{(Y)} - n^{(Z)})D/\lambda = \pm\pi \quad (2.2-11)$$

$$1/2 \text{ 波長板の場合の出射光 } \mathbf{E}_o = E_i \begin{pmatrix} \cos\phi \\ -\sin\phi \end{pmatrix} \quad (2.2-12)$$

(x 軸から $-y$ 軸方向へ $\phi' = \phi$ だけ偏波面が傾いた直線偏波)

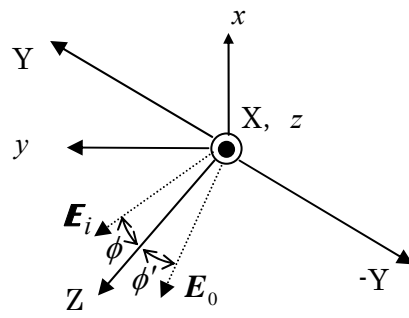


図 2. 13 1/2 波長板による偏波の回転

補 足 : 偏光とジョーンズベクトル

E_x と H_y の 組合わせと, E_y と H_x の 組み合わせはともにマクスウェルの
方程式の解である. 言い換えると, 周波数と伝搬方向が等しい 2 組の独立な解が存
在することになる. また, E_x から H_y , E_y から H_x が一意に求められるので, この
2 組の独立な解を E_x と E_y とで代表させてかまわない. さらに, ω と \mathbf{K} が, それぞ
れ共通の場合にはこれらを組み合わせて考えると統一的に理解できる. その例が以
下に述べる, ジョーンズベクトルによる偏光に関する説明である.

ジョーンズベクトル

ところで, これ迄のカーテシアン座標の方向はどれも特別な方向はなく, 3 つの
軸がそれぞれ直交して右手系座標を形成していればよい. したがって, 任意の \mathbf{K} と ω
とを有する光(電磁波)の電界を位相の伝搬方向 \mathbf{K} (z 軸の方向と仮定する)に垂直な
平面内の任意の直交座標(x, y)成分に分けて考えることができる. これを次の 1×2 の
行列(ベクトル)の形に書く.

$$\mathbf{E}(z, t) = \begin{pmatrix} E_{x0} \cos(\omega t - Kz + \delta_x) \\ E_{y0} \cos(\omega t - Kz + \delta_y) \end{pmatrix} \quad (1)$$

通常, 一定方向にのみ伝搬する平面波においては, 周波数が固定され, 空間分布
は存在しないので, これらに関する情報を表示しなくても問題がないことが多い.
しかし, 例えばある平面 $z=0$ における x 成分の位相 δ_x と y 成分の位相 δ_y の差は問
題になることが多いので, $z=0$ における位相を残す. したがって, (1)は複素指数関
数表示では次のように書いてもよい.

$$E(0) = \begin{pmatrix} E_{x0} \exp(j\delta_x) \\ E_{y0} \exp(j\delta_y) \end{pmatrix} = \exp(j\delta_x) \begin{pmatrix} E_{x0} \\ E_{y0} \exp[j(\delta_y - \delta_x)] \end{pmatrix} \quad (2)$$

この形式をジョーンズベクトル(Jones vector)と言う.

(2)の形式から(1)の形式へ戻すには, 複素指数関数表示を余弦関数(または正弦関
数)表示に直し, $\omega t - Kz$ を位相の部分に加えるとよいことは容易に理解できるであ
ろう.

2.3 電気光学効果

一般に、結晶に、電界、磁界、応力(機械的な力)が加えられると、結晶内の結合電子の分極率が変化したり原子間隔が変化したりする。これらの原因により誘電率が変化する。

また同時に結晶が変形し、変形に伴う応力によっても誘電率が変化する。通常は、これら両者の効果が複合して表れる。応力が零の条件と変形が零の条件とでは変化の仕方が異なるが、ここではこれ以上言及せず、そのどちらかの条件にあるものと仮定する。これを1次の電気光学効果あるいはポッケルス効果という。

一般的な議論は省略し、以後はニオブ酸リチウム (LiNbO_3) 結晶の Z 軸方向に電界を印加した場合を説明する。この結晶は、電界が印加されていないときは単軸結晶で $3m$ (あるいは C_{3v}) と呼ばれる対称性をもつ。さらに Z 軸方向の電界が印加されても単軸結晶であり主軸の変化もないが、主屈折率は次式のように変化する。

$$(n^{(O)})' = \left\{ (n^{(O)})^{-2} + r_{13} E_Z \right\}^{-1/2} \approx n^{(O)} - (1/2) r_{13} (n^{(O)})^3 E_Z \quad (2.3-1)$$

$$(n^{(E)})' = \left\{ (n^{(E)})^{-2} + r_{33} E_Z \right\}^{-1/2} \approx n^{(E)} - (1/2) r_{33} (n^{(E)})^3 E_Z \quad (2.3-2)$$

ただし、 r_{13} 、 r_{33} はポッケルス定数と呼ばれ、ニオブ酸リチウム結晶では

$$r_{13} = 10 \times 10^{-12} \left[\text{mV}^{-1} \right] \quad (2.3-3)$$

$$r_{33} = 32.2 \times 10^{-12} \left[\text{mV}^{-1} \right] \quad (2.3-4)$$

である。

2.4 電気光学効果の応用例

A. 電気光学効果を用いた光変調器

図 2.14 のように Z 軸方向に直流の電界を印加できるようにしたニオブ酸リチウム結晶を考える。Y 軸方向に沿って光波の電界が X, Z 軸と 45° をなすように入射させると、この光は 2 つの固有偏光(常光線と異常光線)となって結晶中を伝搬する。これら 2 つの光波の屈折率は式(2-3-1)と(2-3-2)で示されるから結晶の厚さ T だけ伝搬する間に次の位相差を生ずる。

$$\Gamma = \omega \left(\frac{T}{c^{(O)}} - \frac{T}{c^{(E)}} \right) = \frac{2\pi c}{\lambda} \left\{ \frac{T}{c/(n^{(O)})'} - \frac{T}{c/(n^{(E)})'} \right\} = \frac{2\pi \left\{ (n^{(O)})' - (n^{(E)})' \right\}}{\lambda} T \quad (2.4-1)$$

ただし、 ω , λ , c はそれぞれ、光波の角周波数、真空中の波長、真空中の位相速度である。

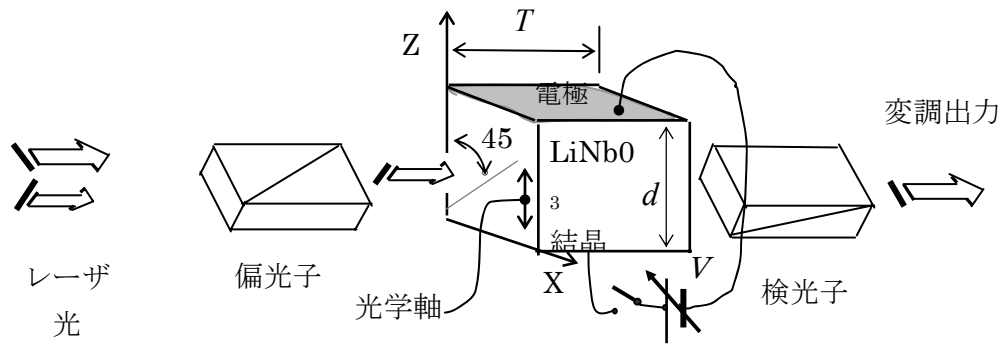


図 2.14 横形光変調器の例

電気光学結晶に加えられる電界と光の進行方向とが直交するため横形と呼ばれる。ニオブ酸リチウム結晶の Z 軸方向に電界 E_z を印加することは縦形変調器と同じ、しかし結晶の主軸座標系で示した伝搬方向が縦形変調器とは異なる。 T を大きく、 d を小さくすることにより縦形変調器より印加電圧 V を小さくすることが可能。

また $c^{(O)} = c/n^{(O)}$ および $c^{(E)} = c/n^{(E)}$ は、それぞれ常光線および異常光線の結晶中での位相速度である。

式(2.3-5)に(2.3-1)および(2.3-2)を代入して位相差 Γ は

$$\Gamma = \frac{2\pi T}{\lambda} \left[n^{(O)} - n^{(E)} - \frac{1}{2} \{ r_{13} (n^{(O)})^3 - r_{33} (n^{(E)})^3 \} E_Z \right] \quad (2.4-2)$$

となる。

E_Z を変化させて $\Gamma = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \dots$ とすれば入射偏波方向と同じ偏波方向の出射光が得られ、 $\Gamma = \pm\pi, \pm 3\pi \dots$ とすれば入射偏波方向から 90° 偏波方向が回転した出射光が得られる。

結晶からの出射光を図 2.14 で示されるような方向を向いた検光子に導くと、 $\Gamma = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \dots$ のときには偏波面の回転はないので検光子を透過せず、 $\Gamma = \pm\pi, \pm 3\pi \dots$ のときには偏波面が回転するので検光子を透過する。すなわち E_Z を変化させることにより、光波を透過させたり透過させなかったりする (ON/OFF) 光変調器を構成できる。光変調器は、光を ON/OFF することで光に情報を担わせるもので、光通信において重要なデバイスである。

なお、図 2.14 で示される光変調器は印加電界の方向と光の進行方向が直交するので横形変調器と呼ばれている。

B. 光変調器への応用例

現行の光ファイバ通信は、数 Gbit/s なので半導体レーザの直接変調を用いているが、将来は外部光変調器を用いることになるだろう。

- ・ 現行の光ファイバ通信 (変調速度 10Gbit/s 程度以下)

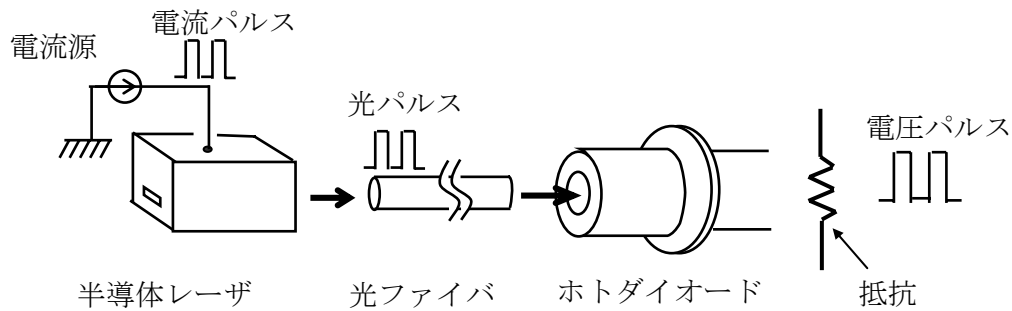


図 2.15 半導体レーザの直接変調を用いた光ファイバ通信

- ・ 未来の光ファイバ通信の予想図(変調速度 約 10Gbit/s 以上)

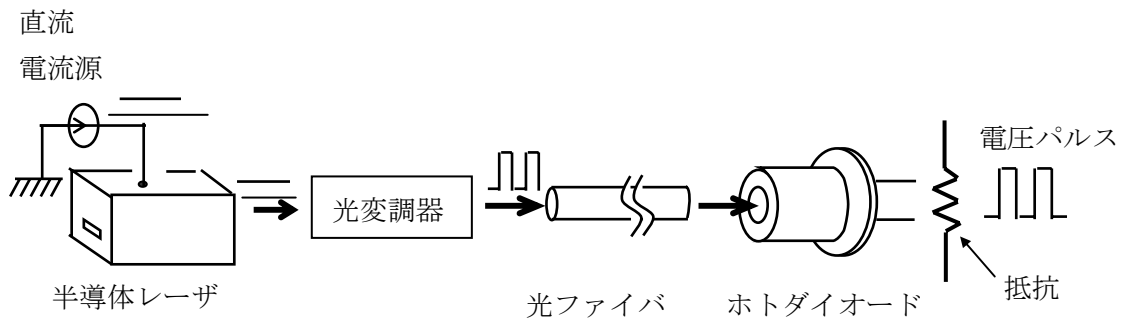


図 2.16 外部光変調器による高速変調を用いた光ファイバ通信の予想図

2 章の問題

- 2.1 単軸異方性結晶において電界の方向と電束密度の方向の角度差 α_O と α_E を求めよ。
ただし、波動ベクトルと光学軸のなす角を $\phi (0 \leq \phi \leq 90^\circ)$ 、常光線の角度差を α_O 、異常光線の角度差を α_E とする。
- 2.2 単軸結晶における常光線と異常光線について次の観点から比較せよ。
 - ① 電界ベクトル \mathbf{e} と電束密度ベクトル \mathbf{d} の方向の差。
 - ② 波面の伝搬方向 \mathbf{K} と電力の伝搬方向 $\hat{\mathbf{T}}$ の差。
 - ③ 屈折率の伝搬方向依存性。
- 2.3 異方性結晶を通して見たとき、像が二重に見えることを複屈折という。複屈折を説明

せよ.

2.4 位相速度と群速度の定義を述べ、これらの速度を比較せよ.

2.5 (2.3-2)の近似式を証明せよ. ただし、次式を仮定せよ.

$$|r_{mk} E_Z| \ll (n^{(O)})^{-2}, \quad (n^{(E)})^{-2}$$

2.6 図 2.14 で示されるニオブ酸リチウム結晶を用いた電気光学変調器において X 軸方向に偏波した光と Z 軸方向に偏波した光について、

①入射面から出射面までの伝搬時間を求めよ.

②次にそれらの差を求めることによって同相で入射した 2 つの偏波の出射面での位相差を求めよ.

問題の略解

2.1 電界を \mathbf{e} , 電束密度を \mathbf{d} , 波動ベクトルを \mathbf{K} とし, \mathbf{K} が XZ 面内にあるように主座標軸をとると(光学軸は z 軸)

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_X \\ e_Y \\ e_Z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_X \\ d_Y \\ d_Z \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} (n^{(O)})^2 & 0 & 0 \\ 0 & (n^{(O)})^2 & 0 \\ 0 & 0 & (n^{(E)})^2 \end{pmatrix} \mathbf{e} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} (n^{(O)})^2 e_X \\ (n^{(O)})^2 e_Y \\ (n^{(E)})^2 e_Z \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K \sin \phi \\ 0 \\ K \cos \phi \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{K} \text{ と } \mathbf{d} \text{ は直交するから } \mathbf{K} \cdot \mathbf{d} = 0 \quad \therefore e_Z = -\frac{(n^{(O)})^2}{(n^{(E)})^2} e_X \tan \phi$$

常光線と異常光線に分解すると、それぞれの電束密度、電界は

$$\mathbf{d}_E = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} (n^{(O)})^2 e_X \\ 0 \\ (n^{(E)})^2 e_Z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_E = \begin{pmatrix} e_X \\ 0 \\ e_Z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_O = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 0 \\ (n^{(O)})^2 e_Y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_O = \begin{pmatrix} 0 \\ e_Y \\ 0 \end{pmatrix}$$

常光線の \mathbf{d}_O と \mathbf{e}_O のなす角 α_O は

$$\cos \alpha_O = \frac{\mathbf{d}_O \cdot \mathbf{e}_O}{|\mathbf{d}_O| |\mathbf{e}_O|} = \frac{(n^{(O)})^2 e_Y^2}{(n^{(O)})^2 e_Y^2} = 1 \quad \therefore \alpha_O = 0$$

異常光線の \mathbf{d}_E と \mathbf{e}_E のなす角は α_E は

$$\cos\alpha_E = \frac{\mathbf{d}_E \cdot \mathbf{e}_E}{|\mathbf{d}_E||\mathbf{e}_E|} = \frac{\varepsilon_0 \left\{ \left(n^{(O)} \right)^2 e_X^2 + \left(n^{(E)} \right)^2 e_Z^2 \right\}}{\varepsilon_0 \sqrt{\left\{ \left(n^{(O)} \right)^2 e_X^2 + \left(n^{(E)} \right)^2 e_Z^2 \right\} \left\{ e_X^2 + e_Z^2 \right\}}}$$

$$\therefore \alpha_E = \cos^{-1} \left\{ \frac{\left(n^{(E)} \right)^4 \cos^2 \phi + \left(n^{(O)} \right)^4 \sin^2 \phi}{\sqrt{\left(n^{(E)} \right)^4 \cos^2 \phi + \left(n^{(O)} \right)^4 \sin^2 \phi}} \right\}$$

2.2

	①	②	③
常光線	\mathbf{e} と \mathbf{d} は平行	\mathbf{K} と $\hat{\mathbf{T}}$ は平行	なし
異常光線	\mathbf{e} と \mathbf{d} は平行ではない (ただし特別な場合には平行)	\mathbf{K} と $\hat{\mathbf{T}}$ は平行ではない (ただし特別な場合には平行)	あり

2.3 比誘電率が方向によって異なるため異常光線の \mathbf{d} と \mathbf{e} は平行ではなくなる. よって異常光線の $\hat{\mathbf{T}}$ は \mathbf{K} の方向ではなくなる. 一方, 常光線の $\hat{\mathbf{T}}$ は \mathbf{K} の方向であるから, 異常光線と常光線の伝搬方向に差が生ずる. したがって異常光線による像と常光線による像が異なる場所に見える.

2.4 位相速度の定義: 等位相面に垂直な方向(伝搬ベクトル \mathbf{K} の方向)へ単位時間に等位相面が進む距離

群速度の定義: エネルギーの伝搬方向(ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{e} \times \mathbf{h}$ の方向)へ単位時間に等位相面が進む距離

比較: 等位相面は \mathbf{K} に垂直なので, 位相速度の方向に距離を測る方が伝搬した距離が短くなる. よって位相速度が群速度より遅い.

2.5 (あまりにも簡単なので省略)

2.6 ①X 軸方向に偏波した光の伝搬時間は, c を真空中の光速度として,

$$\frac{T}{c^{(O)}} = \frac{T}{c/(n^{(O)})'} = \frac{T \left\{ n^{(O)} - (1/2)r_{13}(n^{(O)})^3 \right\}}{c}$$

全く同様にして Z 軸方向に偏波した光の伝搬時間は,

$$\frac{T}{c^{(E)}} = \frac{T}{c/(n^{(E)})'} = \frac{T \left\{ n^{(E)} - (1/2)r_{33}(n^{(E)})^3 \right\}}{c}$$

②両者が同相で入射した場合, 出射面での位相差 Γ は,

$$\Gamma = \frac{2\pi}{1/f} \left(\frac{T}{c^{(O)}} - \frac{T}{c^{(E)}} \right) = \frac{\omega T}{c} \left\{ n^{(O)} - n^{(E)} - (1/2)r_{13}(n^{(O)})^3 + (1/2)r_{33}(n^{(E)})^3 \right\}.$$

3章 非線形光学

入力 a に対して出力が $f(a) = A$, 入力 b に対して出力が $f(b) = B$ であるとするとき a と b を同時に入力したとき出力が $f(a + b) = A + B$ となることを重畳の法則が成立するという。図 3.1(a)はこれを示しており、言い方を変えると、入力 b が入っているとき入力 a を入力してもしなくても出力 B には変化はない。これは光の性質として良く見られるものである。この性質は例えば光ファイバ中を光信号が伝搬しているときに周囲から光を照射しても光ファイバ中を伝搬する信号には変化が見られないことを説明している。すなわち重畳(superposition)の法則が成立する。我々が通常観察する光学現象はこのように線形(linear)の現象である。このような線形性は伝送路としては望ましいものである。

一方、入力 a を単独で入力したときの出力が $f(a) = A$ で、入力 b を単独で入力したときの出力が $f(b) = B$ であるにもかかわらず、 a と b を同時に入力したとき、その出力が $f(a + b) = C + D$ ($C \neq A, D \neq B$) となる場合には、重畳の法則が成立しない、あるいは非線形性(nonlinearity)を示すという。このような場合を図 3.1(b)に示した。入力 b が入力されている場合、入力 a が入力されているときとされていないときでは出力が異なる。

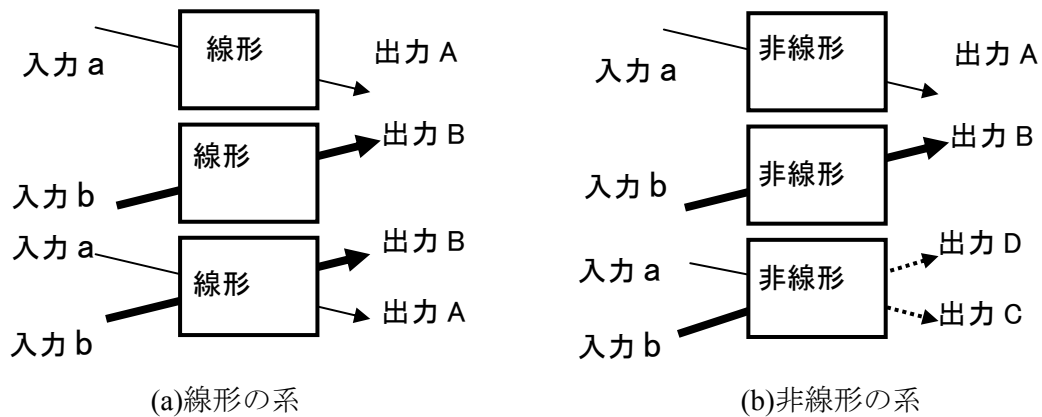


図 3.1 線形と非線形

このような非線形性は、光学現象としては通常は見られない。しかしこれから述べるようにある条件下では実現可能な現象である。このような非線形性は、一般の伝送路としては不適であるが、光信号を光で制御する場合には必須の性質である。

通常観察する光学現象は線形であるが、強力なレーザー光を照射すると非線形性を示す媒

質も存在する。非線形性には 2 次の非線形性(SHG などを参照)だけでなく、3 次の非線形性、…などの高次の非線形効果も存在する。また、その発生原因が原子あるいは分子内の局所的事象によるもの(例えばSHG)と、荷電粒子が結晶内を移動することが必須要因となっている非局所的事象によるもの(例えばフォトリラクティブ効果)とが知られている。

ここでは非線形光学(nonlinear optics) の例として第 2 高調波光発生(Second Harmonic Generation) (SHG) をとりあげる。またその理解のために、屈折率の分散特性と非線形光学定数を先に説明する。ただし結晶の異方性については学習済みとする。

3.1 屈折率の分散特性

この節では異方性・非線形性は無視し、一次元モデルで考える。結晶内のポテンシャルエネルギー U は、電子の質量を m , その平行位置からの変化位を x , 自由振動角周波数を ω_0 とすると次式で表せる。

$$U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 \quad (3.1-1)$$

従って、何らかの原因で電子が x だけその平衡位置からずれると復元力

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -m\omega_0^2 x \quad (3.1-2)$$

が働き平衡位置へ戻ろうとする。

外部から角周波数 ω の電界(例えば光の電界) $E\cos\omega t$ が加えられているときの電子の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m\sigma\frac{dx}{dt} = F - eE\cos\omega t \quad (3.1-3)$$

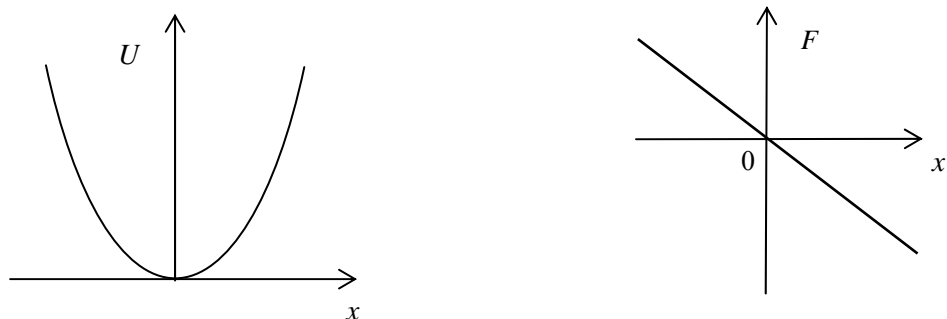


図 3.2 結晶内電子のポテンシャルエネルギー U と復元力 F の概念図

となる。ただし左辺第 2 項は一般化するために加えた損失の項である。(3.1-2)を(3.1-3)へ

代入し，整理すると次式を得る．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sigma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = -\frac{eE}{m} \cos \omega t \quad (3.1-4)$$

この方程式は次の解をもつ．

$$x = \frac{1}{2} \frac{-eE/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\sigma} \exp(i\omega t) + c.c. \quad (3.1-5)$$

すなわち，電子の平衡位置からのずれ x は印加電界の角周波数 ω で振動することになる．

この振動の振幅は $\omega = \omega_0$ で最大となり， ω_0 は自由振動角周波数と呼ばれる．

負の電荷をもった電子が振動するということは交流の分極が存在するという事でありこの分極は電子 1 個当たり $-ex$ と考えられるから，この媒質中でのこの振動に関する単位体積当たりの電子の数を N 個とすると電束密度は次式となる．

$$d = \epsilon_0 E \cos \omega t - exN \quad (3.1-6)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 + \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\sigma} \right) E \exp(i\omega t) + c.c. \quad (3.1-7)$$

すなわち，比誘電率 ϵ_s は次式となる．

$$\epsilon_s = 1 + \frac{Ne^2/(m\epsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\sigma} \quad (3.1-8)$$

比誘電率 ϵ_s は屈折率 n の 2 乗であるから次式を得る．

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2/(m\epsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\sigma} \quad (3.1-9)$$

ω が ω_0 から離れていて， $|\omega_0 - \omega^2| \gg \omega\sigma$ が成立するときには

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2/(m\epsilon_0)}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (3.1-10)$$

が成立するので， ω ， ω_0 に対応する波長を λ ， λ_0 とし，比例定数を A とおくと，

$$n^2 = 1 + \frac{A\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2} \quad (3.1-11)$$

となる．

一般には，自由振動角周波数は複数存在するので

$$n^2 = 1 + \sum_k \frac{A_k \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \quad (3.1-12)$$

となる。 $\lambda_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ は自由振動角周波数に対応する波長である。

この式はセルマイヤの分散式(Sellmeier's dispersion formula)と呼ばれ、屈折率の分散特性(dispersion)すなわち屈折率の波長依存性を示すのによく用いられる。これを概念的に波長を横軸として示すと図 3.3 のようになり、ある自由振動数に対応する λ_k とその隣の自由振動数に対応する λ_{k+1} の間では右下がりの曲線となる。この部分を正常分散(normal dispersion)という。

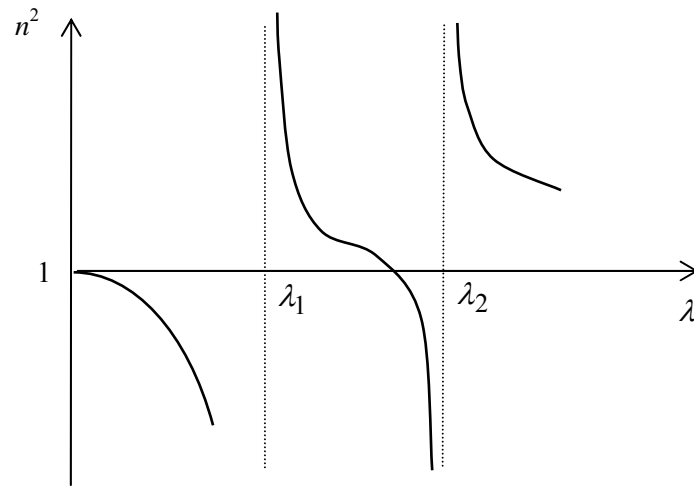


図 3.3 屈折率の分散特性の概念図

損失を示す σ の項を省略しているため、すべて右下がり(正常分散)の領域となっている。 $\lambda_1, \lambda_2 \dots$ は自由振動角周波数に対応する波長である。

(3.1-9)で損失を示す分母の σ の項を省略したが、これを省略しなければ自由振動数に対応する λ_k の近傍では右上がりの曲線となる。この部分を異常分散(anomalous dispersion)の領域という。通常、異常分散の領域、すなわち自由振動周波数近傍では吸収が大きく光学媒質として利用できないことが多いので σ の項を省略した結果であるセルマイヤの式を用いても問題がないことが多い。図 3.4 に一例として光変調器や光導波路によく用いられる LiNbO_3 (ニオブ酸リチウム)結晶の主屈折率の分散特性を示す。正常分散の領域では波長の増加とともに屈折率は低下し、位相速度が速くなることになる。

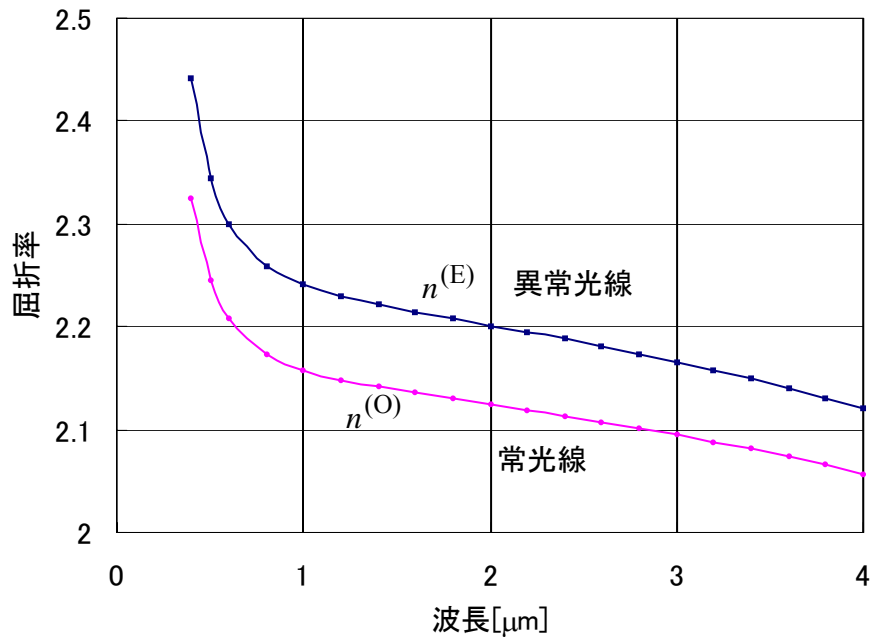


図 3.4 LiNbO₃ の主屈折率の分散特性

LiNbO₃ は紫外線の領域と赤外線領域とに自由振動角周波数がある．それらに対応する波長を λ_1, λ_2 とする．これらの中間の波長 ($\lambda_1 \ll \lambda \ll \lambda_2$) での主屈折率は次式で近似できる． λ の単位は μm ．

常光線の(主)屈折率 $n^{(O)}$ に対して

$$(n^{(O)})^2 = 4.9260 - \frac{0.1170}{0.0473 - \lambda^2} - 0.0275\lambda^2$$

異常光線の主屈折率 $n^{(E)}$ に対して

$$(n^{(E)})^2 = 4.5778 - \frac{0.0964}{0.0446 - \lambda^2} - 0.0221\lambda^2$$

3.2 非線形光学定数

前節では，電子のポテンシャルエネルギー U を x^2 までの項とした．したがって U は空間座標 x に関し対称である．このような結晶を中心対称的(centro-symmetric)な結晶と呼び，食塩(NaCl)結晶がその例である(図 3.5 参照)．

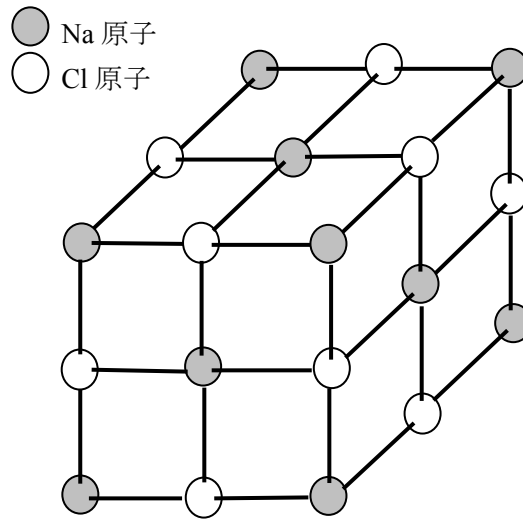


図 3.5 NaCl 結晶の模式図

上下，左右，前後に関して対称である．このような結晶では原子の振動が対称的で 2 倍の高調波は発生しない．

一方，GaAs 結晶や LiNbO₃ 結晶では空間座標に対して電子のポテンシャルエネルギーが対称ではなく，非中心対称的(noncentro-symmetric)な結晶と呼ばれている(図 3.6 および図 3.7 参照)，その非対称性を考慮するためには x^2 までの項では説明できず x^3 までの項を用いて近似する．すなわち

$$U = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{3}mDx^3 \quad (3.2-1)$$

とする．このとき復元力 F は

$$F = -m\omega_0 x - mDx^2 \quad (3.2-2)$$

であるから

$$|F(x)| \neq |F(-x)| \quad (3.2-3)$$

となり，復元力も空間座標に対して非対称となる．従ってその振動も非対称となる．すなわち，外部から印加される電界(例えば光の電界)が完全な正弦波であったとしても x の正方向のふれと負方向のふれは等しくはない．よって分極も非対称となる．

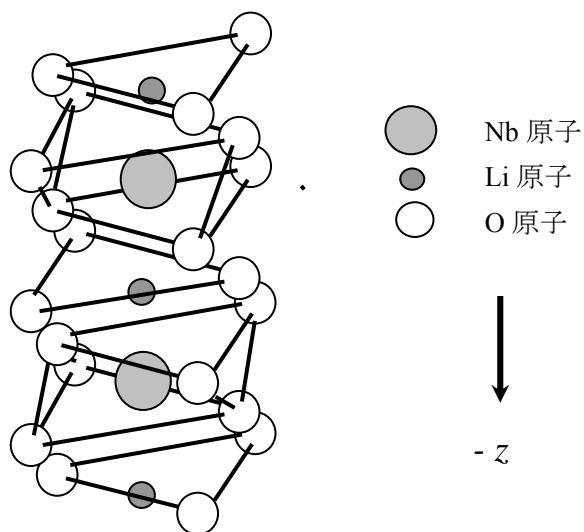


図 3.6 LiNbO₃ 結晶の模式図

Li 原子は酸素原子のつくる三角形の下側にあり，上方向と下方向は明らかに対称ではない．また，そのため上下方向は明らかに他の方向とは異なっている．このような結晶では分極が非対称になり第 2 高調波の分極が発生する．

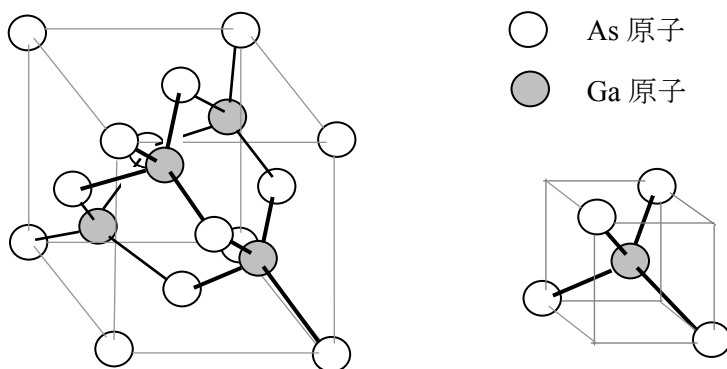


図 3.7 GaAs 結晶の模式図

Ga 原子を中心として，上・左・手前方向とその逆方向ではポテンシャルのようすが明らかに異なる．このような結晶でも第 2 高調波の分極は発生する．しかし，GaAs 結晶中で位相整合(後述)をとる方向が知られていないので第 2 高調波発生には利用されていない．

このような非対称の分極は、フーリエ変換すると2倍の高調波で振動する項を含んでおり、2倍の高調波で振動する分極が存在することになる(図3.7参照)。そして、この分極は2倍の高調波で振動する分極が存在することになる(図3.7参照)。そして、この分極は2倍の高調波で振動する電磁波(第2高調波)を放射する。すなわち入力光の角周波数を ω とすると 2ω の角周波数の電磁波が放射される。これが第2高調波発生*である。

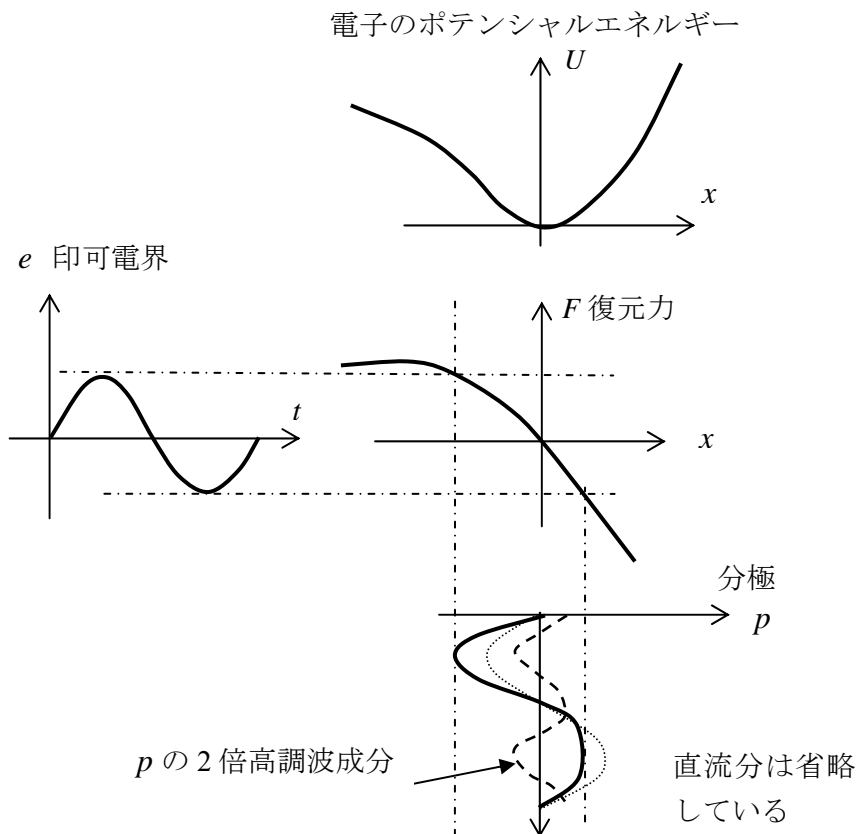


図 3.8 非中心対称的結晶における電子のポテンシャルエネルギー U 、復元力 F 、加えられる電界 e 、誘起される分極 p の概念図。

U が対称でないとき F が直線ではなくなり、対称な電界が加えられても電子の位置 x は対称には振動しない。したがって、分極は2倍の高調波成分を持つ。この2倍の高調波成分は2倍の高調波を放射する。

*「発生」と呼ばれる理由は出力される 2ω の周波数成分は最初全く存在しないからである。また「増幅」とはある周波数成分がその振幅に比例する出力振幅を生み出すことを称しており、この場合には入力がなければ出力はありえない。「発振」は最初に(雑音等の中に)出力される周波数成分が存在し、それが増幅・帰還されて成長し、出力されるものであり、最初にその周波数成分が雑音の中にも全く存在しないと仮定すると出力がなくなることになる。

電子の運動方程式は次式である.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\sigma \frac{dx}{dt} = F - eE_1 \frac{\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)}{2} \quad (3.2-4)$$

ただし, 非中心的結晶を考えるため, 復元力を

$$F = -m\omega_0^2 x - mDx^2 \quad (3.2-5)$$

とする. (3.2-5)の右辺第2項がポテンシャルエネルギーの非対称性から生じる. もし, 式(3.1-2)のように $D = 0$ ならば対称であり, 第2高調波光は発生しない.

これを近似的に解くため, 電子の位置 x を, ω で振動する $\exp(\pm i\omega t)$ を含む項と 2ω で振動する $\exp(\pm i2\omega t)$ を含む項とに分け, 次式と仮定する.

$$x = (1/2)\{x_1 \exp(i\omega t) + x_2 \exp(i2\omega t) + c.c.\} \quad (3.2-6)$$

(3.2-6)を(3.2-4)へ代入し, ω の成分と 2ω の成分に分け, それぞれの係数が等しいとすると x_1 および x_2 が求められる.そこで分極を ω の成分と 2ω の成分とに分離し次のようにおく.

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) \quad (3.2-7)$$

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{\varepsilon_0}{2} \chi(\omega) E_1 \exp(i\omega t) + c.c. \\ &= -\frac{Ne}{2} x_1 \exp(i\omega t) + c.c. \end{aligned} \quad (3.2-8)$$

$$\begin{aligned} p_2(t) &= \frac{1}{2} d_2 E_1^2 \exp(i2\omega t) + c.c. \\ &= -\frac{Ne}{2} x_2 \exp(i2\omega t) + c.c. \end{aligned} \quad (3.2-9)$$

式(3.2-5)-(3.2-9)を運動方程式(3.2-4)へ代入し, $\chi(\omega)$ と d_2 を求めると

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\sigma)} \quad (3.2-10)$$

$$d_2 = \frac{DNe^3}{2m^2(\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\sigma)^2(\omega_0^2 - 4\omega^2 + i2\omega\sigma)} \quad (3.2-11)$$

となる. $\chi(\omega)$ は1次の感受率(線形感受率)と呼ばれ, d_2 は2次の非線形光学定数 (Second order nonlinear optical coefficient) と呼ばれている.

結局, 2次の非線形分極(分極の 2ω 成分)は次式となる.

$$\begin{aligned} p_2(t) &= \frac{1}{2} d_2 E_1^2 \exp(i2\omega t) + c.c. \\ &= \frac{1}{2} P_2 \exp(i2\omega t) + c.c. \end{aligned} \quad (3.2-12)$$

ここで、この振幅 P_2 は次式である。

$$P_2 = d_2 E_1^2 \quad (3.2-13)$$

これまで、この非線形媒質に異方性がないとして、1次元でとり扱ってきた。しかし、実際に用いられる結晶においては異方性を無視できなく、(3.2-13)は電界の各成分について記述されねばならない。それらを考慮すると次の3階のテンソルの形式となる。

$$(P_2)_i = \sum_{j,k=x,y,z} (d_2)_{ijk} (E_1)_j (E_1)_k \quad (3.2-14)$$

本来 $(d_2)_{ijk}$ は $3 \times 3 \times 3 = 27$ の要素をもつテンソルであるが、結晶の対称性から独立なものも最大でも18個のみとなり、次のように簡略化された2階のテンソル(行列)の形式になる。この簡略化のための数学的な扱いは電気光学テンソルの時と全く同様であり、省略する。表3.1に2次非線形光学定数の例を示す。

$$\begin{pmatrix} (P_2)_x \\ (P_2)_y \\ (P_2)_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d_2)_{11} & (d_2)_{12} & (d_2)_{13} & (d_2)_{14} & (d_2)_{15} & (d_2)_{16} \\ (d_2)_{21} & (d_2)_{22} & (d_2)_{23} & (d_2)_{24} & (d_2)_{25} & (d_2)_{26} \\ (d_2)_{31} & (d_2)_{32} & (d_2)_{33} & (d_2)_{34} & (d_2)_{35} & (d_2)_{36} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x^2 \\ E_y^2 \\ E_z^2 \\ 2E_y E_z \\ 2E_z E_x \\ 2E_x E_y \end{pmatrix} \quad (3.2-15)$$

表 3.1 2 次の非線形光学定数の例

結 晶	$(d_2)_{ijk}$
$\text{NH}_4\text{H}_2\text{PO}_4$ (A D P)	$d_{36} = d_{312} = 0.45$ $d_{14} = d_{123} = 0.45 \pm 0.02$
KH_2PO_4 (K D P)	$d_{36} = d_{312} = 0.45 \pm 0.03$ $d_{14} = d_{123} = 0.45 \pm 0.03$
LiNbO_3	$d_{31} = d_{311} = 4.76 \pm 0.5$ $d_{22} = d_{222} = 2.3 \pm 1.0$
$\text{Ba}_2\text{NaNb}_5\text{O}_{15}$	$d_{33} = d_{333} = 10.4 \pm 0.7$ $d_{32} = d_{322} = 7.4 \pm 0.7$
Ag_3AsS_3 (Proustite)	$d_{22} = d_{222} = 22.5$ $d_{36} = d_{312} = 13.5$

単位は $(1/9) \times 10^{-22}$ MKS unit

3.3 非線形相互作用と第2高調波光の発生(SHG)

ここでは前節で説明された非線形分極 (2倍の高調波の分極)が媒質内に存在するときの電磁界を、マクスウェルの式を用いて、2倍の高調波の発生に焦点をあてて調べる。

簡単のため、この節では無損失かつ等方性の媒質を仮定する。なお、小文字は時間の関数である。

マクスウェルの式は

$$\nabla \times \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \quad (3.3-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} \quad (3.3-2)$$

となるが、ここで非線形分極まで考えて、電束密度を次の形でおく。

$$\mathbf{d} = \varepsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p} = \varepsilon_0 \mathbf{e} + \varepsilon_0 \chi_E \mathbf{e} + \mathbf{p}_{NL} \quad (3.3-3)$$

最後の2項が媒質による分極で、線形部分 $\varepsilon_0 \chi_E \mathbf{e}$ と非線形部分 \mathbf{p}_{NL} とに分けて示した。

(3.3-3)を(3.3-1)に代入すると次式を得る。

$$\nabla^2 \mathbf{e} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{p}_{NL}}{\partial t^2} \quad (3.3-4)$$

ただし

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_E) \quad (3.3-5)$$

である。

このままでは非常に繁雑なので次の仮定をおいて問題を簡単にする。

- ① \mathbf{p}_{NL} と \mathbf{e} とが平行と仮定する。これにより \mathbf{p}_{NL} と \mathbf{e} とは一つの座標成分のみで記述でき(3.3-4)はスカラーの方程式となる。
- ② e と p_{NL} を次のように基本周波数成分と2倍高調波成分のみで近似する。

$$e(z, t) = e_1(z, t) + e_2(z, t) \quad (3.3-6)$$

$$e_n(z, t) = \frac{1}{2} E_n(z) \exp\{i(n\omega t - k_n z)\} + c.c. \quad (n=1, 2) \quad (3.3-7)$$

$$p_{NL}(z, t) = d_2 e^2(z, t) \quad (3.3-8)$$

- ③ 2倍の高調波発生のみを考える。 $\omega_2 = 2\omega_1$ として ω_1 の成分と ω_2 の成分のみを考慮する。

- ④ $\left| k_n \frac{\partial E_n}{\partial z} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 E_n}{\partial z^2} \right|$ と仮定する。この仮定は Slowly Varying Envelope Approximation

(SVEA)と呼ばれ、それぞれの電界振幅は波長 λ_n の程度でほとんど変化しないことを意味している。

これらの仮定を(3.3-3)へ代入すると $\exp(\pm i\omega t)$, $\exp(\pm i2\omega t)$, $\exp(\pm i0t)$ (直流), $\exp(\pm i3\omega t)$, $\exp(\pm i4\omega t)$ を含む項の和となる。そのうち、 $\exp(\pm i\omega t)$ と $\exp(\pm i2\omega t)$ を含む項のみに注目し他は無視する。すると $\exp(\pm i\omega t)$ の係数は右辺と左辺で等しいことから次式が得られる。

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = -i \frac{\omega_1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}} d_2 E_1^* E_2 \exp(i\Delta k z) \quad (3.3-9)$$

ここに

$$\Delta k = k_2 - 2k_1 \quad (3.3-10)$$

また $\exp(\pm i2\omega t)$ の係数が右辺と左辺で等しいことから次式が得られる。

$$\frac{\partial E_2}{\partial z} = -i \frac{2\omega_1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}} d_2 E_1^2 \exp(i\Delta k z) \quad (3.3-11)$$

(3.3-9)は E_1 の変化分が E_2 の大きさに依存し、(3.3-11)は逆に E_2 の変化分が E_1 の大きさに依存することを示している。しかし d_2 が零であればこれらの依存関係はない。すなわち非線形性が、 $\omega_1 = \omega$ の基本波と $\omega_2 = 2\omega$ の第2高調波の相互作用を生み出す元となっており、これらの波の間に電力の授受が生ずる。

次に $|E_1| \gg |E_2|$ とすると ω の波の電力は大きく 2ω の波との電力の授受があったとしても E_1 の変化は小さい。よって(3.3-9)を無視し(E_1 を一定とし)、(3.3-11)のみを考えればよい。(3.3-11)を非線形光学結晶の長さ s にわたって積分すると次式を得る。

$$\begin{aligned} E_2(s) &= \int_0^s \frac{\partial E_2}{\partial z} dz \\ &= -i\omega_1 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}} d_2 s E_1^2 \text{sinc}(\Delta k s / 2) \exp(i\Delta k s / 2) \end{aligned} \quad (3.3-12)$$

ただし

$$\text{sinc}(x) = (\sin x) / x \quad (3.3-13)$$

である。従って、第2高調波の強度は結晶出力端 $z = s$ で次式となる。

$$\begin{aligned}
I_2(s) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_0}} E_2(s) E_2^*(s) \\
&= \sqrt{\frac{\mu_0^3}{4\varepsilon_1^2 \varepsilon_2}} (2\omega_1)^2 d_2^2 s^2 I_1^2 \text{sinc}^2(\Delta ks/2)
\end{aligned}
\tag{3.3-14}$$

ただし、 I_1 は基本波の強度で次式で示される。

$$I_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}} E_1 E_1^*
\tag{3.3-15}$$

上式より第2高調波の強度が大きくなるためには次の条件が満たされることが必要であることがわかる。

- ①非線形光学定数 d_2 の大きい媒質を用いること。
- ②相互作用長(結晶の長さ) s が大きいこと。
- ③基本波の強度 I_1 が大きいこと。
- ④位相不整合量 Δks が小さいこと。

②と④を同時に満足させるためには $\Delta k = 0$ とすることが重要である。このことを位相整合をとると言う(次節参照)。③を満足させるために、レンズで集光したり、導波路内に基本波を閉じ込めるなどの方法がとられている。

3.4 位相整合

第2高調波の強度が大きくなるためには相互作用長 s が大きく位相不整合量 Δks が小さいことが必要であり、両者を満足させるためには Δk を零とするのがよい。これを位相整合(phase matching)という。これを定性的に説明すると図3.9のようになる。

(3.3-10)より次式を得る。

$$\Delta k = k_2 - 2k_1 = \frac{2\omega_1}{c_0} (n_2 - n_1)
\tag{3.4-1}$$

ここで、 n_2 および n_1 は、それぞれ第2高調波および基本波の屈折率である。したがって第2高調波の屈折率 n_2 と基本波の屈折率 n_1 が一致すれば位相整合条件は満足される。すなわち、両者の位相速度を一致させると位相整合条件は満たされる。しかし、屈折率の分散特性のため、通常この条件は満足されない。この問題を解決するために考えられたのが、異方性結晶中の常光線と異常光線とを用いる方法である。これを単軸負結晶 ($n^{(E)} - n^{(O)} < 0$) の場合について次に説明する。

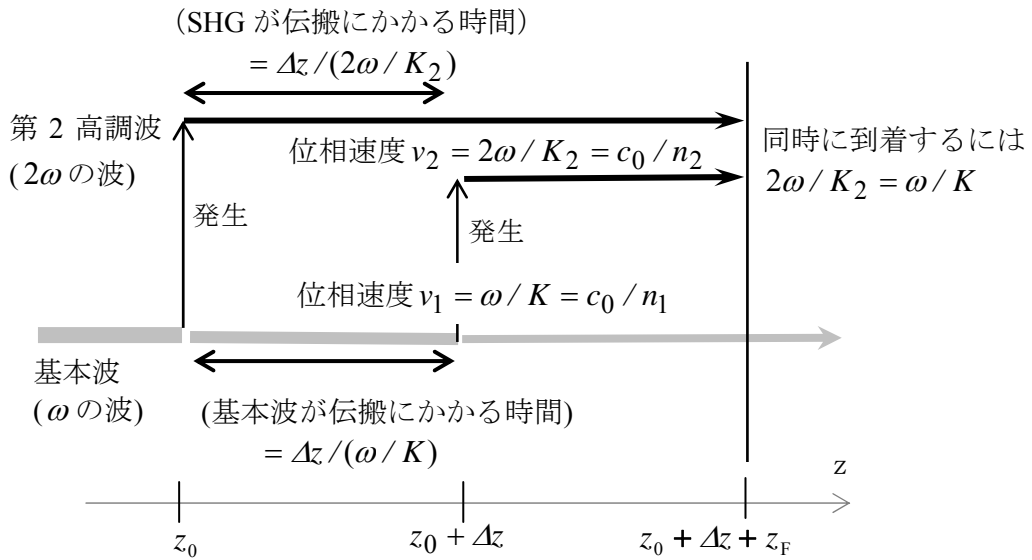


図 3.9 第 2 高調波の，発生場所による位相差

$z = z_0$ での 2ω の分極より放出された電磁波と， $z = z_0 + \Delta z$ での 2ω の分極より放出された電磁波の位相差が結晶出力端で零となるのは， $v_1 = v_2$ すなわち $2\omega/K_2 = \omega/K$ となるときである．これを屈折率で表すと $n_1 = n_2$ である．

単軸負結晶の場合，基本波を常光線とし，その屈折率を $n_1^{(O)}$ とする．第 2 高調波を常光線とすると第 2 高調波の屈折率は $n_2^{(O)}$ であり，正常分散の場合，

$$n_1^{(O)} < n_2^{(O)} \quad (3.4-2)$$

となり位相整合条件は満足されない．第 2 高調波を異常光線とすると，その屈折率は $n_2^{(E)}(\phi)$ である．この屈折率 $n_2^{(E)}(\phi)$ は光学軸と第 2 高調波の伝搬方向との角度 ϕ によって $n_2^{(O)}$ から $n_2^{(E)}$ まで変化するので，図 3.10 に示すように $n_2^{(E)} < n_2^{(O)}$ であるならば， ϕ を適切に選ぶことによって

$$n_2^{(E)}(\phi) = n_1^{(O)} \quad (3.4-3)$$

とすることが可能である．すなわち，位相整合をとることが可能である．

$n_1^{(O)} = n_2^{(E)}(\phi)$ において右辺に式(3.1-20)を用いると

$$\sin^2 \phi = \frac{(n_1^{(O)})^{-2} - (n_2^{(O)})^{-2}}{(n_2^{(E)})^{-2} - (n_2^{(O)})^{-2}} \quad (3.4-4)$$

を得る．この式を満たす ϕ の方向へ基本波を伝搬させると，同じ方向に第 2 高調波が発生・

伝搬し出力される．このように角度 ϕ を調節して位相整合をとることを角度整合(angle phase matching)と呼んでいる．

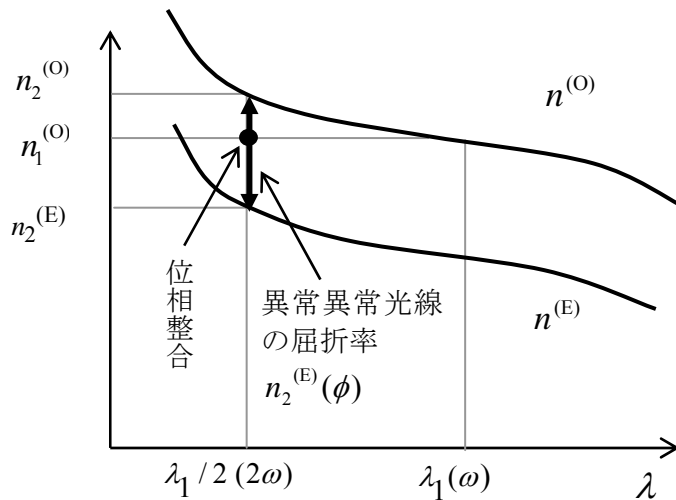


図 3.10 単軸負結晶における位相整合の概念図

基本波の角周波数 $\omega_1 = \omega$ に対応する波長を λ_1 とすると、 $\omega_2 = 2\omega$ に対応する波長は $\lambda_1/2$ となる．これら2つの波長で屈折率が等しくなるためには、 λ_1 の波を常光線(屈折率 $n_1^{(O)}$)、 $\lambda_1/2$ の波を適切な角 ϕ の方向へ進む異常光線(屈折率 $n_2^{(E)}(\phi)$)とすればよいことがわかる．これが角度整合の原理である．

3.5 非線形光学の特徴とその応用

これ迄、第2高調波発生についてのみ述べてきた．これは非線形光学の一例であり、非線形光学は、①周波数変換を伴うもの(和周波数光の発生、差周波数光の発生、 n 次高調波光の発生($n=2$ 以上)などのパラメトリック周波数変換)や、②周波数変換を伴わないもの(位相共役波の発生、スクイズド光発生等)の分野がある．

これらに共通している特徴を、主として光波領域の発振器であるレーザと対比させて列挙すると、大略以下のようになる．

- ①レーザのように媒質のエネルギー準位を必要としないので広い周波数帯域(波長帯域)で利用できる．また、波長可変の発光源としても利用できる．
- ②光波領域での非線形性は一般に小さく、波長に比較してかなり長い相互作用領域が必要である．
- ③そのため、波長が異なる複数の光を相互作用させるためにはその伝搬速度を一致させること、すなわち位相整合条件を満足させることが重要となる．

前節迄に説明した第2高調波光発生的重要な応用としてレーザ光の短波長化がある．レーザの発振理論を検討するとわかるように、波長が短くなると誘導放出の自然放出に対す

る割合が小さくなり、短波長のレーザを発振させるのは一般的に困難になる。また半導体レーザは小型、軽量で高効率であり、また電池でも動作する便利な発光源である。しかし赤や赤外線が発光するものは多いが緑・青等の短波長で発光するものはほとんどない。

したがって、波長 $0.8\mu\text{m}$ 近傍の半導体レーザ光を第 2 高調波光発生を用いて波長 $0.4\mu\text{m}$ 近傍(青色または紫色)に変換したり、波長 $1.064\mu\text{m}$ で発振する $\text{Nd}^{3+}:\text{YAG}$ レーザの出力光を第 2 高調波光発生を用いて $0.532\mu\text{m}$ (緑色)に変換したりすることが行われている。特に半導体レーザ光の第 2 高調波発生は光ディスクに用いると光スポットの径を $1/2$ にすることができ、記録密度が 4 倍になると考えられ有望視されている。また、光の 3 原色の 1 つであるためカラー画像の表示用などにも有望であると考えられている。

3 章の問題

- 3.1 2 次の非線形光学効果は中心対称性のある結晶では何故発生しないか。
- 3.2 SHG (第 2 高調波発生)において位相整合は何故必要か。
- 3.3 非線形結晶としての LiNbO_3 を用いて波長 $\lambda = 2.0\mu\text{m}$ の基本波から第 2 高調波を発生させる場合について次の問に答えよ。ただし $n^{(O)}(1\mu\text{m}) = 2.24$, $n^{(E)}(1\mu\text{m}) = 2.16$, $n^{(O)}(2\mu\text{m}) = 2.19$, $n^{(E)}(2\mu\text{m}) = 2.11$ とせよ。
 - ①基本波と第 2 高調波がともに常光線とすると位相の不整合 Δk はいくらになるか。
 - ②この時、結晶内での相互作用長 $s=1.0\text{cm}$ とすると $\text{sinc}^2 \frac{\Delta k s}{2}$ はいくらになるか。
 - ③位相整合させるには基本波と第 2 高調波をそれぞれ、常光線と異常光線のどちらにすればよいか。
- 3.4 SHG(第 2 高調波発生)の応用の可能性について述べよ。

略 解

- 3.1 中心対称性があると、電子の平衡位置からの距離 x とすると、電子のポテンシャル U が、 x^3 の項を持たない。したがって分極が $+x$ 方向と $-x$ 方向で対称となる。そのため電子の振動の 2 倍高調波成分が存在せず、2 倍高調波成分の分極も存在しない。
よって第 2 高調波成分の放射もない。

3.2 相互作用長 s を大きくしても位相不整合量 Δks を小さなままに保つためである。これはまた、基本波と第 2 高調波の位相速度を等しくし、発生した第 2 高調波の位相をそろえて打ち消し合わないようにするとも言える。

3.3

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \Delta k &= k_2 - 2k_1 = \frac{2\pi n^{(O)}(1\mu\text{m})}{\lambda_2} - 2 \frac{2\pi n^{(O)}(2\mu\text{m})}{\lambda_1} \\ &= 2 \frac{2\pi}{\lambda_1} \{n^{(O)}(1\mu\text{m}) - n^{(O)}(2\mu\text{m})\} = 3.1 \times 10^5 \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \text{sinc}^2 \frac{\Delta ks}{2} &= \left(\frac{\sin \frac{\Delta ks}{2}}{\frac{\Delta ks}{2}} \right)^2 = \left(\frac{\sin \frac{3.1 \times 10^5 \times 10^{-2}}{2}}{\frac{3.1 \times 10^5 \times 10^{-2}}{2}} \right)^2 \\ &\doteq \left\{ 6.4 \times 10^{-4} \sin(0.16) \right\}^2 \doteq 4 \times 10^{-7} \times 0.025 \end{aligned}$$

③ 基本波を常光線，第 2 高調波を異常光線にすればよい。

3.4 例えば光ディスクの読み書き用に用いると，波長が半分になり，記録密度が 4 倍になると考えられる。また， $0.8\mu\text{m}$ 近傍の近赤外線レーザ光に用いると $0.4\mu\text{m}$ 近傍の青色(または紫色)の光源となる。

参考文献

- 3.1 日置隆一: 光用語事典, オーム社(1981)
- 3.2 桜庭一郎: レーザ工学, 森北出版(1984)
- 3.3 桜庭一郎: オプトエレクトロニクス入門, 森北出版(1983)