



Title	2004年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2004
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/371">http://hdl.handle.net/2115/371</a>
Rights(URL)	<a href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learningobject
Note	当講義資料は著者のホームページ <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a> からもダウンロードできます。
Note(URL)	<a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	GraphTheory04_11a.pdf (第11回講義ノート)



[Instructions for use](#)

# グラフ理論 配布資料 #11

教科書 pp. 143 ~ 161 の内容

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 7 月 26 日

## 演習問題 10 の解答例

(1) 完全二部グラフ  $K_{2,3}$  は図 1 のとおりである。以下、点  $a$  と点  $b$  が同色の場合と異色の場合に分けて考

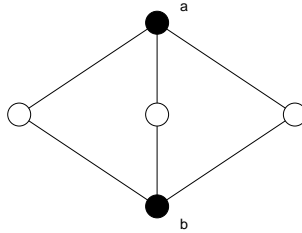


図 1: 完全二部グラフ  $K_{2,3}$ .

える。

- (i) 点  $a$  と点  $b$  が同色の場合、彩色の方法は  $k(k-1)^3$  通りある。
- (ii) 点  $a$  と点  $b$  が異色の場合、彩色の方法は  $k(k-1)(k-2)^2$  通りがある (図 2 参照)。

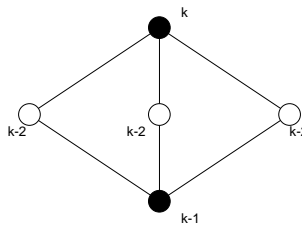


図 2: 完全二部グラフ  $K_{2,3}$  の彩色の仕方。

従って、求める彩色多項式はこの両者の和として

$$P_{K_{2,3}}(k) = k(k-1)^3 + k(k-1)(k-2)^2$$

で与えられる。

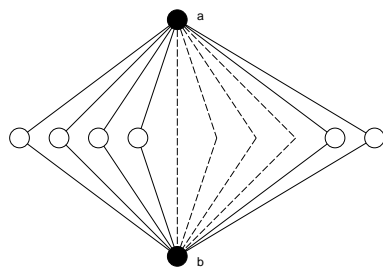


図 3: 完全二部グラフ  $K_{2,s}$ . 「中間層」は  $s$  個の白丸からなる.

(2) 完全二部グラフ  $K_{2,s}$  は図 3 のようなグラフである. この図 3 では「中間層」の点の個数が  $s$  であることに注意しよう. このとき, やはり, 点  $a$  と点  $b$  が同色/異色の場合に分けて考える.

- (i) 点  $a$  と点  $b$  が同色の場合 :  $k(k-1)^s$  通り.
- (ii) 点  $a$  と点  $b$  が異色の場合 :  $k(k-1)(k-2)^s$  通り.

従って, 求める彩色多項式はこれら 2 つの場合の和として

$$P_{K_{2,s}}(k) = k(k-1)^s + k(k-1)(k-2)^s$$

で与えられる.

(3) 公式 :

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k) \tag{1}$$

を用いると,  $C_4$  は図 4 のように「分解」することができるので, 求める彩色多項式は

$$\begin{aligned} P_{C_4}(k) &= k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) \\ &= k(k-1)(k^2 - 3k + 3) \end{aligned}$$

となる. 一方,  $C_5$  は, 図 5 のように分解できるので, 求める彩色多項式  $P_{C_5}(k)$  は  $P_{C_4}(k)$  の結果を用

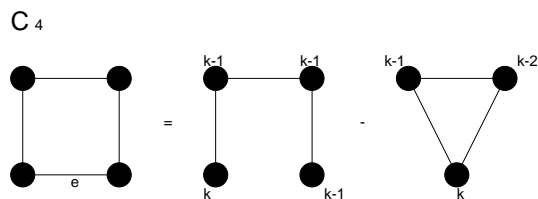


図 4: 閉路  $C_4$  はこの図のように木と三角形 ( $C_3$ ) へと分解できる.

いて

$$\begin{aligned} P_{C_5}(k) &= k(k-1)^4 - P_{C_4}(k) \\ &= k(k-1)^4 - k(k-1)(k^2 - 3k + 3) \\ &= k(k-1)(k^3 - 4k + 6k - 4) \end{aligned}$$

と求まる.

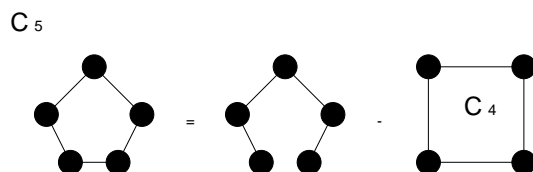


図 5: 閉路  $C_5$  はこの図のように木と  $C_4$  へと分解できる.

- (4) 閉路であるから,  $n \geq 2$  として考える.  $n = 2$  のときには, 図 6 より,  $P_{C_2}(k) = k(k-1)$  となるが, これは証明すべき関係式で  $n = 2$  と置いたものに等しい. そこで, 点の数が  $n-1$  のとき, 関係式:

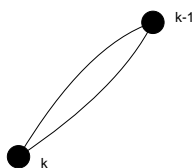


図 6: 閉路  $C_2$  とその彩色方法.

$$P_{C_{n-1}}(k) = (k-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k-1) \quad (2)$$

が成立すると仮定する.

このとき, 図 7 の辺  $e$  で, 公式 (1) を用いると

$$\begin{aligned} P_{C_n}(k) &= k(k-1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(k) \\ &= k(k-1)^{n-1} - \{(k-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k-1)\} \\ &= k(k-1)^{n-1} - (k-1)^{n-1} + (-1)^n(k-1) \\ &= (k-1)^n + (-1)^n(k-1) \end{aligned}$$

となる. 従って, 数学的帰納法により, 全ての  $n$  に対して

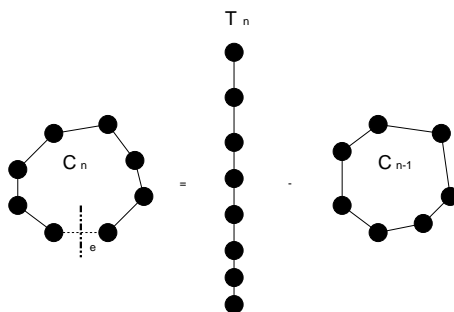


図 7: 閉路  $C_n$  を辺  $e$  において分解すると,  $n$  点からなる木  $T_n$  と閉路  $C_{n-1}$  へと分解される.

$$P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

が成り立つ。(証明終わり).

## レポート問題 #9 に関するコメント

問題 2.(3) に関して 1 点だけ. 再度, 得られた結論を書き出してみると「グラフ  $G$  に  $K$  角形まで無いとすれば,  $n$  が不等式:

$$n \geq 4 \left( \frac{K+1}{K-1} \right) \quad (3)$$

を満たすならば, グラフ  $G$  には次数が  $2(K+1)/(K-1) - 1$  以下の点が存在する」ということでした. この結論に具体的なはじめのいくつかの  $K$  の値を代入してみると,  $K = 3$  のとき,  $n \geq 8$  であるならば,  $G$  には次数 3 以下の点が存在することになり, この問題の (1) で得られた結論と一致します.  $K = 4$  のときには  $n \geq 20/3 = 6.6\dots$  であるならば  $G$  には次数 2 以下の点が存在することになります.  $K = 5$  のときには  $n \geq 6$  で次数 2 以下の点が存在し,  $K = 6$  のときには  $n \geq 24/5 = 4.8$  であるならば,  $G$  には次数 1 以下の点が存在することになります. この議論を押し進めて  $K = \infty$  になったときには,  $n \geq 4$  であるならば,  $G$  には次数 1 以下の点が存在することになります. ところで,  $K$  角形が作れるためには少なくとも  $n \geq K$  であることが必要となりますが, 上の議論からわかるように, この条件は  $K = 6$  以上で一部満たされなくなります. しかし, この場合には  $(K+1)$  角形以上の多角形も存在できないわけですから, 直観的にも次数が 1 の点が存在することがわかり, つじつまが合っています.

## 11 有向グラフ

今まで扱ってきたグラフは各辺に向きは無く, 例えば, オイラー小道などを考える際には, 辺のどちら向きに進んで道を作っても構わなかった. これに対し, この節からは各辺がそれぞれ向きを持っている「有向グラフ」について, その性質を調べて行くことにする.

### 11.1 有向グラフの定義・概念とその性質

弧集合 (arc family)  $A(D)$ : 点集合  $V(D)$  の元の順序対からなる有限族.

有向グラフ (digraph)  $D$ :  $V(D)$  と  $A(D)$  からなるグラフ (図 8 参照).

$D$  の基礎グラフ (underlying graph): 有向グラフ  $D$  の矢印を取り除いたグラフ (図 8 参照).

単純有向グラフ (simple digraph):  $D$  の弧が全て異なり, ループが無いグラフ.

(注): 単純有向グラフの基礎グラフは必ずしも単純グラフではない (図 10 参照).

有向グラフの同形: 基本グラフの間に同形写像があり, 各点の順序を保存する写像になっているとき.

例えば, 図 11 のグラフ  $A$  と  $B$  は同形ではない.  $\overline{wz}$  の向きが異なるからである.

有向グラフ  $D$  の隣接行列  $A = (a_{ij})$ : 要素  $a_{ij}$  が  $v_i$  から  $v_j$  への「弧」の本数を表す, サイズ  $n$  のグラフに対して  $n \times n$  の行列.

(注): 無向グラフの場合と異なり, 行列  $A$  は非対称であることに注意されたい.

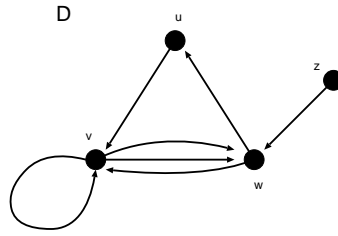


図 8: 有向グラフ D の一例.  $V(D) = \{u, v, w, z\}$ ,  $A(D) = \{\overline{uv}, \overline{vw}, \overline{vw}, \overline{vw}, \overline{wv}, \overline{wu}, \overline{zw}\}$ .

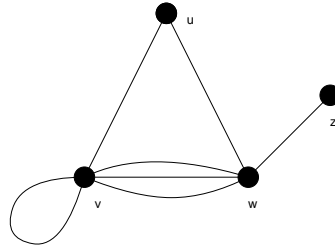


図 9: 図 8 の有向グラフに対する基礎グラフ.

図 12 の有向グラフ D の隣接行列  $A$  は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる.

強連結 (strongly connected) : 任意の 2 点,  $v, w$  の間に  $v$  から  $w$  への道がある.

向き付け可能 (orientable) : グラフ  $G$  の全ての辺を方向付けて強連結有向グラフが得られるとき (例として図 13 参照).

**定理 22.1**

連結グラフ  $G$  が向き付け可能であるための必要十分条件, グラフ  $G$  の各辺が少なくとも 1 つの閉路に含まれていることである.

(証明)

必要性は明らかなので十分性を示す.

まず, グラフ  $G$  の全てが閉路に含まれている場合には証明は終わる. 従って, 以下ではこれ以外の場合を考える.

さて, 閉路  $C$  には含まれないが,  $C$  の各辺に隣接している辺  $e$  を選ぶ (図 14 参照). 「グラフ  $G$  の各辺が少なくとも 1 つの閉路に含まれている」のであるから,  $e$  はある閉路  $C'$  に含まれている.  $C'$  の辺を  $C$  にも

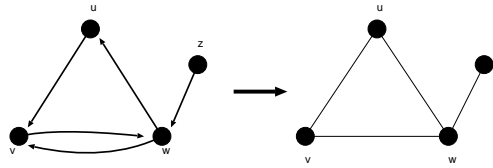


図 10: 図 8 の単純有向グラフの基礎グラフは必ずしも単純グラフではない。

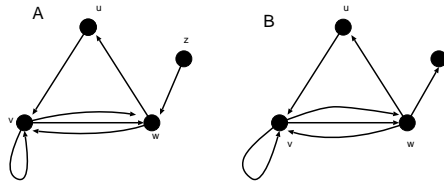


図 11: これら有向グラフ A と B は同形ではない. 辺  $wz$  の向きが異なるからである.

含まれている  $C'$  の辺の向きは変えないで向き付ける. この操作でできる有向グラフは強連結である.

従って, この操作を続けて, 各ステップで少なくとも 1 つの辺を向き付ける. 各ステップで有向グラフは強連結なので, グラフ全体を向き付けた後にできるグラフは強連結である. (証明終わり).

有向グラフの応用問題として, 次の例題を見ておこう.

(例題)

図 15 のネットワークで点 A から点 G への最長路を見つけよ.

(答え)

点 A からの各点  $V$  への最長路の長さを示す数値  $l(V)$  計算すると

$$A : 0$$

$$B : l(A) + 30 = 30$$

$$C : l(A) + 50 = 50$$

$$D : \max\{l(B) + 6, l(C) + 12\} = \max\{36, 62\} = 62$$

$$F : \max\{l(D) + 23, l(C) + 10\} = \max\{85, 60\} = 85$$

$$E : \max\{l(B) + 40, l(B) + 35, l(F) + 11\} = \max\{70, 97, 96\} = 97$$

$$G : \max\{l(E) + 8, l(F) + 20\} = \max\{105, 105\} = 105$$

となるから, 最長路の長さは 105 であり, 最長路を図 16 に載せる.

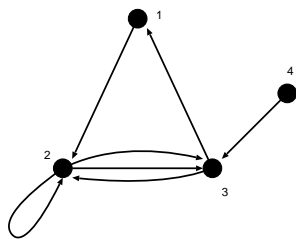


図 12: その隣接行列が  $A$  で与えられる有向グラフ  $D$ .

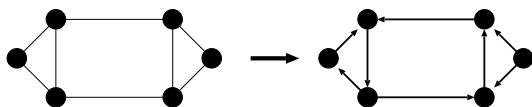


図 13: 向き付け可能なグラフの一例.

(例題)

有向グラフ  $D$  の逆  $\tilde{D}$  は  $D$  の辺の向きを反転して得られる. 以下の問題に答えよ.

- (1) その逆と同形であるような有向グラフの一例を描け.
- (2)  $D$  と  $\tilde{D}$  の隣接行列の間にはどんな関係があるか, 答えよ.

(答え)

- (1) 互いに同形であるような有向グラフ  $D$  及び, その逆  $\tilde{D}$  を図 17 に描く.
- (2) 図 18 に載せた基礎グラフ  $G$  に対して有向グラフ  $D$  及び, その逆  $\tilde{D}$  を作り, それぞれの隣接行列  $A_G, A_D, A_{\tilde{D}}$  を書き下してみると

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_{\tilde{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$



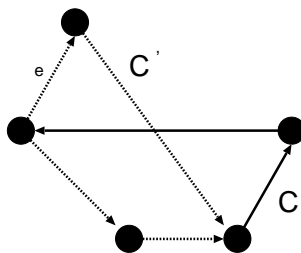


図 14: 閉路 C と C'.

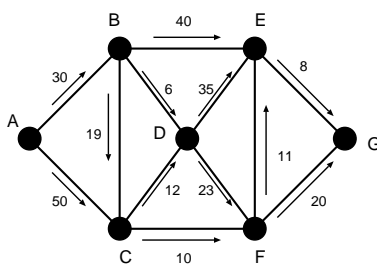


図 15: ここでの例題のネットワーク.

となる.  $A_D + A_{\bar{D}}$  を作ってみると

$$A_D + A_{\bar{D}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

が得られるが, これは一行一列成分 ( $[A_D + A_{\bar{D}}]_{11}$ ) だけが異なる以外は基礎グラフの隣接行列と一致する. この食い違いが生じた成分は基礎グラフの「ループ」に相当する. 従って, ループが無い基礎グラフに関しては関係式:

$$A_G = A_D + A_{\bar{D}} \quad (7)$$

が成立することがわかる. ループを含むグラフに関しても, 非対角成分に限れば上関係式が成り立つ.

ここでは図 18 に載せた特定のグラフに関して議論したが, これが一般のグラフに関しても成り立つのは明らかである. グラフの逆は辺の向きを逆転してできるわけであるから, 一方のグラフで弧  $vw$  が存在するならば, その逆のグラフでは  $vw$  は存在しない. 従って, ループが無い場合には関係式 (7) の非対角成分に関して  $[A_G]_{vw} = [A_D + A_{\bar{D}}]_{vw}$  が成り立つ. ループがある場合には各隣接行列に対して  $[A_D]_{vv} = [A_{\bar{D}}]_{vv}$  が成り立つわけであるから, 関係式 (7) の対角成分に関して  $2[A_G]_{vv} = [A_D + A_{\bar{D}}]_{vv}$  が成り立つ. ループが無い場合には隣接行列の対角成分はゼロであるから, 関係式 (7) を成分で書けば全ての場合に関して, 異なる任意の 2 点  $v, w$  に対し

$$[A_G]_{vw} = [A_D + A_{\bar{D}}]_{vw} \quad (8)$$

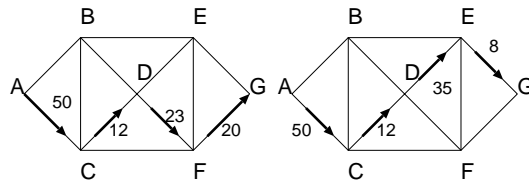


図 16: 最長路を与える 2 通りの経路. どちらも最長路の長さは 105 である.

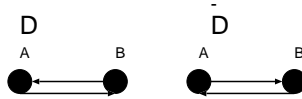


図 17: 互いに同形であるような有向グラフ  $D$  及び, その逆  $\tilde{D}$  の一例.

$$2[A_G]_{vv} = [A_D + A_{\tilde{D}}]_{vv} \quad (9)$$

が成り立つ.

## 11.2 オイラー有向グラフとトーナメント

連結有向グラフ  $D$  の全ての弧を含む閉じた小道が存在する場合, その有向連結グラフ  $D$  をオイラーであると言う. 図 19 に載せた例は, オイラーではないが, その基礎グラフはオイラーである場合である.

出次数 (out-degree)  $\text{outdeg}(v)$ :  $vw$  の形をした有向グラフ  $D$  の弧数.

入次数 (in-degree)  $\text{indeg}(v)$ :  $wv$  の形をした有向グラフ  $D$  の弧数.

### 握手有向補題

有向グラフ  $D$  の全点についての入次数の合計と出次数の合計は等しい.

### 定理 23.1

連結有向グラフ  $D$  がオイラーであるための必要十分条件は,  $D$  の各点で  $\text{outdeg}(v) = \text{indeg}(v)$  が成立することである.

ハミルトン有向グラフ (Hamiltonian digraph): 全ての点を含む閉路がある有向グラフ.

半ハミルトン有向グラフ (semi-Hamiltonian digraph): 全ての点を通る道があるグラフ.

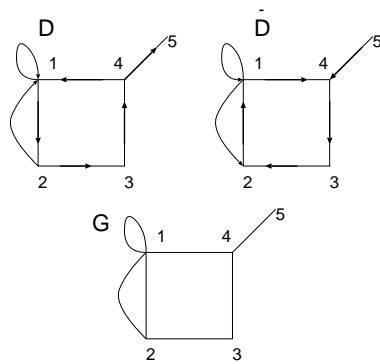


図 18: 例として考える基礎グラフ  $G$ , 有向グラフ  $D$  及び, その逆  $\bar{D}$ .

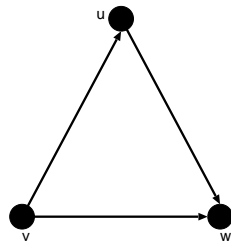


図 19: オイラー有向グラフではないが, その基礎グラフはオイラーであるグラフの一例.

**定理 23.2**

$D$  は強連結有向グラフであり, 点が  $n$  個あるとする. 各点  $v$  に対し,  $\text{outdeg}(v) \geq n/2$ , かつ,  $\text{indeg}(v) \geq n/2$  ならば,  $D$  はハミルトン有向グラフである.

トーナメント (tournament) : 任意の 2 点がちょうど 1 本の弧で結ばれている有向グラフ (図 20 参照).

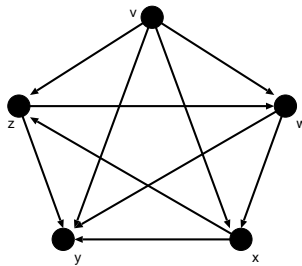


図 20: トーナメントの一例.

**定理 23.3**

- (i) ハミルトンでないトーナメントは全て半ハミルトンである.
- (ii) 強連結なトーナメントは全てハミルトンである.

(証明)

(i) 点  $n$  個のトーナメントは全て半ハミルトンであると仮定する.  $T'$  には点が  $n$  個あるので, 半ハミルトン道がある (図 21 参照).

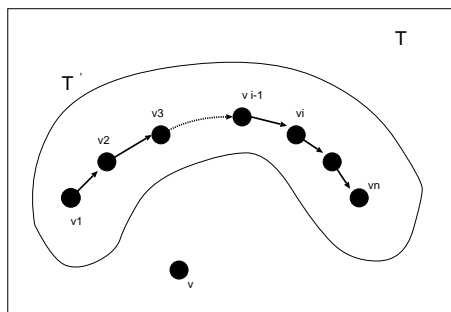


図 21:  $T'$  には半ハミルトン道がある.

- (1)  $vv_1$  が  $T$  の弧ならば,  $v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$  が所望の道である.
- (2)  $vv_1$  が  $T$  の弧ではなく,  $v_1v$  が  $T$  の弧であれば, 図 22 のように点  $v_i$  を選ばばよい.

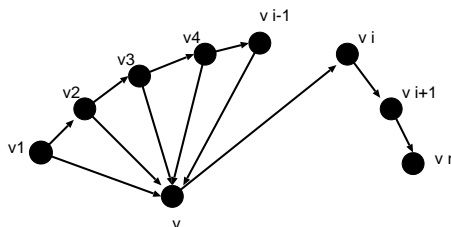


図 22:  $vv_1$  が  $T$  の弧ではなく,  $v_1v$  が  $T$  の弧であれば, 図のように点  $v_i$  を選ばばよい.

- (3)  $vv_i$  の形をした弧が  $T$  にないのであれば,  $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \rightarrow v$  が所望の道である. (証明終わり).

最後にトーナメント (「トーナメントが推移的である」という概念) に関する例題を一つ見ておこう.

(例題)

トーナメントが推移的であるというのは、弧  $uv$  と  $vw$  があれば必ず弧  $uw$  があることである。以下の問いに答えよ。

- (1) 推移的トーナメントの一例を描け。
- (2) 推移的トーナメントにおいては全てのチームに順位を付けられることを示せ。ただし、どのチームもそれより下位のチーム全てを負かしていなければならないものとする。
- (3) 点が2個以上ある推移的トーナメントは強連結になり得ないことを示せ。

(答え)

- (1) 推移的トーナメントグラフの一例を図 23 に載せる。

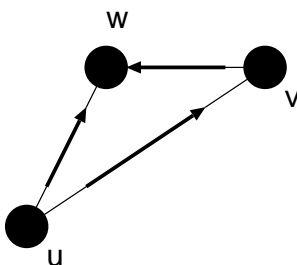


図 23: 推移的トーナメントグラフの一例。

- (2) 図 23 に示したグラフにおいて、点  $k = u, v, w$  出次数 :  $\text{outdeg}(k)$  及び 入次数 :  $\text{indeg}(k)$  と順位の関係を書くと

$$1 \text{ 位 } (u) : \text{outdeg}(u) = 2, \text{indeg}(u) = 0$$

$$2 \text{ 位 } (v) : \text{outdeg}(v) = 1, \text{indeg}(v) = 1$$

$$3 \text{ 位 } (w) : \text{outdeg}(w) = 0, \text{indeg}(w) = 2$$

となる。従って、 $\text{outdeg}$  の多い順 (あるいは  $\text{indeg}$  の少ない順) に 1 位から 3 位への順位が付けられる。また、推移的トーナメントの定義から  $\text{outdeg}$  あるいは  $\text{indeg}$  の数が等しい点が見れることはあり得ないから、全てのチームに順位をつけることができる。

- (3) 点が2個以上ある推移的トーナメントのグラフならば、必ず  $\text{outdeg}(k) = 0$  となるような点  $k$  が存在するから、強連結にはなり得ない。

### 11.3 マルコフ連鎖

ここでは、自然科学、社会科学、工学等、様々な場面で用いられる「マルコフ連鎖」のグラフを用いた表現法について学ぶ。

1次元酔歩：酔っ払いが各時刻で右左にそれぞれ確率  $1/3, 1/2$  で動き、確率  $1/6$  で現在の位置に留まる。また、 $E_1, E_6$  に到達するとその場を離れないとする (図 24 参照)。この場合の酔っ払いの位置  $E_1, \dots, E_6$  に滞

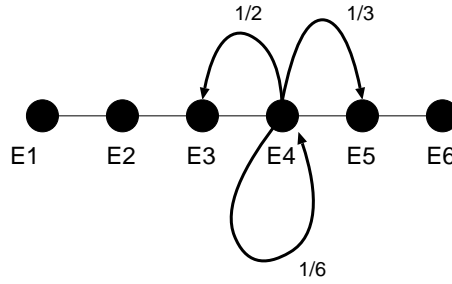


図 24: 1次元酔歩の一例.

在する確率をを時間の関数として調べる.

酔っ払いの最初の位置を  $E_4$ , すなわち,  $x = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$  で酔っ払いの動きを指定する. ここで, ベクトル  $x$  の各成分  $i$  は, 位置  $E_i$  に酔っ払いがいる確率を表す. 従って, 1, 2 分後にはそれぞれこの状態ベクトルは

$$\begin{aligned} x_1 &= \left( 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0 \right) \\ x_2 &= \left( 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{13}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9} \right) \end{aligned}$$

となる.

このような状態ベクトルを算出するために, 遷移行列 (transition matrix) :  $P = (P_{ij})$  を導入すると便利である. この行列の  $ij$  成分  $P_{ij}$  は遷移確率 (transition probability) と呼ばれ, ある時刻から 1 分後に, 酔っ払いが  $E_i$  から  $E_j$  に移動する確率を表す. 従って, 上の酔っ払いの例では

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる.

ここで, 酔っ払いのスタート地点での状態ベクトルを  $x_0 = (p_0^1, p_0^2, p_0^3, p_0^4, p_0^5, p_0^6)$  とし, それから 1 分後の状態ベクトルを  $x_1 = (p_1^1, p_1^2, p_1^3, p_1^4, p_1^5, p_1^6)$  と定めると

$$x_1 = x_0 P \tag{10}$$

なる関係が成り立つ. 具体的に成分で書き下すと

$$(p_1^1, p_1^2, p_1^3, p_1^4, p_1^5, p_1^6) = (p_0^1, p_0^2, p_0^3, p_0^4, p_0^5, p_0^6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left( p_0^1 + \frac{p_0^2}{2}, \frac{p_0^2}{6} + \frac{p_0^3}{2}, \frac{p_0^3}{3} + \frac{p_0^3}{6} + \frac{p_0^4}{2}, \frac{p_0^3}{3} + \frac{p_0^4}{6} + \frac{p_0^5}{2}, \frac{p_0^4}{3} + \frac{p_0^5}{6} + \frac{p_0^6}{2}, \frac{p_0^5}{6} + p_0^6 \right) \quad (11)$$

となる。ここで、例えば

$$p_1^1 = p_0^1 + \frac{1}{2}p_0^2 \quad (12)$$

は  $t=0$  に  $E_1$  にいた場合、確率 1 で  $E_1$  にとどまり、 $E_2$  にいた場合、確率  $1/2$  で  $E_1$  に移ることを意味している。

(例題)

$P$  と  $Q$  が遷移行列ならば、 $PQ$  も遷移行列であることを例を挙げて示せ。また、 $P$  と  $Q$  の関連有効グラフと  $PQ$  の間の関係を例を挙げて説明せよ。

(答え)

まず、図 25 のような状態遷移グラフの遷移行列  $P$  は

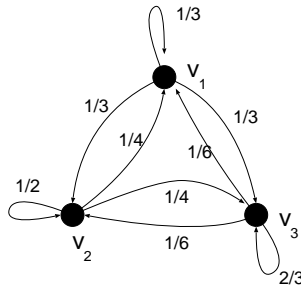


図 25: 遷移行列  $P$  で与えられる有向グラフ。

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad (13)$$

となる。一方、図 26 に与えた状態遷移グラフに関する遷移行列  $Q$  は

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

となる。

例えば、時刻  $t=0$  で  $v_1, v_2, v_3$  に「粒子」が居る確率を  $p_{v_1}(0), p_{v_2}(0), p_{v_3}(0)$  とし、これを状態ベクトルとして  $\vec{p}(0) = (p_{v_1}(0), p_{v_2}(0), p_{v_3}(0))$  と書くことにすると、次の時刻  $t=1$  での状態ベクトル  $\vec{p}(1)$  は

$$\begin{aligned} (p_{v_1}(1), p_{v_2}(1), p_{v_3}(1)) &= (p_{v_1}(0), p_{v_2}(0), p_{v_3}(0)) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{1}{3}p_{v_1}(0) + \frac{1}{4}p_{v_2}(0) + \frac{1}{6}p_{v_3}(0), \frac{1}{3}p_{v_1}(0) + \frac{1}{2}p_{v_2}(0) + \frac{1}{6}p_{v_3}(0), \frac{1}{3}p_{v_1}(0) + \frac{1}{4}p_{v_2}(0) + \frac{2}{3}p_{v_3}(0) \right) \end{aligned}$$

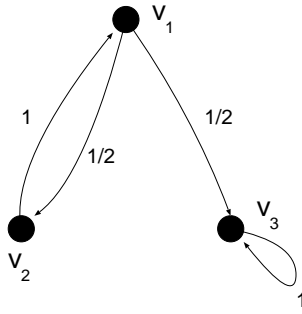


図 26: 遷移行列  $Q$  で与えられる有向グラフ.

となり,  $t = 0$  に粒子が  $v_1$  に居たとすれば  $p_{v_1}(0) = 1, p_{v_2}(0) = p_{v_3}(0) = 0$  であり, このとき, 1 秒後にそれぞれの点に粒子が移る確率 (存在確率) は

$$\begin{aligned} (p_{v_1}(1), p_{v_2}(1), p_{v_3}(1)) &= (1, 0, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

となる (図 25 参照).

ここで, 注意すべきなのは, 遷移行列においては各行の和は 1 になっていなければならないことである. これは各点から 1 秒後には必ず (現在居る点も含めた) 「どこか」に移動しなければならないからである. さて, 行列の積  $PQ$  を計算してみると

$$\begin{aligned} PQ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

となっており, 確かにこの行列  $PQ$  の各行の和は 1 になっている. 従って,  $PQ$  は遷移行列である. この行列  $PQ$  で表される状態遷移グラフを描くと図 27 のようになっている.  $t = 0$  から  $t = 1$  への 1 ステップで状態ベクトルは

$$\begin{aligned} (p_{v_1}(1), p_{v_2}(1), p_{v_3}(1)) &= (p_{v_1}(0), p_{v_2}(0), p_{v_3}(0)) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\ &= \left( \frac{p_{v_1}(0)}{3} + \frac{p_{v_2}(0)}{2} + \frac{p_{v_3}(0)}{6}, \frac{p_{v_1}(0)}{6} + \frac{p_{v_2}(0)}{8} + \frac{p_{v_3}(0)}{12}, \frac{p_{v_1}(0)}{2} + \frac{3p_{v_2}(0)}{8} + \frac{3p_{v_3}(0)}{4} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

となる.



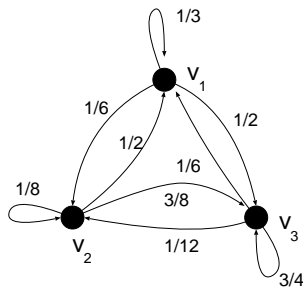


図 27: 遷移行列  $PQ$  で与えられる有向グラフ.

### 演習問題 11

- 有向グラフ  $D$  の各点が整数の対  $\{11, 12, 21, 22\}$  で表され,  $j = k$  のとき, 点  $ij$  と  $kl$  が弧で結ばれるものとする. このとき,  $D$  を図示し, そのオイラー小道が存在するならばそれを求めよ.
- マルコフ連鎖と有向グラフに関して以下の問いに答えよ.

(1) その遷移行列  $P$  が

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

で与えられる 3 状態 (a,b,c と名付ける) の状態遷移を表す有向グラフを描け. ただし, 行列の行の増える方向に a,b,c と点に名前を付けること.

- 時刻  $t = 0$  で, この酔っ払いが a にいる, つまり, 状態ベクトルが  $x = (1, 0, 0)$  とするとき,  $t = 1, 2$  において, この酔っ払いが a,b,c に居る確率  $(p_a(1), p_b(1), p_c(1))$ , 及び,  $(p_a(2), p_b(2), p_c(2))$  をそれぞれ求めよ.
- $t = n$  で, この酔っ払いが a,b,c に居る確率  $p_a(n), p_b(n), p_c(n)$  をそれぞれ求めよ.

# 連絡事項: 今回のレポート締め切りは 9/6(月) 第 3 講時の補講開始時までとします.