グラフ理論 配布資料 #3

教科書 pp. 21 〜 34 の内容

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 4 月 23 日

演習問題 2 の解答例

1. 求める同形写像 θ, ϕ はグラフ $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ の各点に対して

$$\theta(\mathsf{a}) = 1, \theta(\mathsf{b}) = 2, \theta(\mathsf{c}) = 3, \theta(\mathsf{d}) = 4, \theta(\mathsf{e}) = 5$$

各辺に対して

$$\begin{aligned} \phi(\overline{\mathsf{ab}}) = \overline{12}, \phi(\overline{\mathsf{bc}}) = \overline{23}, \phi(\overline{\mathsf{cd}}) = \overline{34}, \phi(\overline{\mathsf{bd}}) = \overline{24} \\ \phi(\overline{\mathsf{de}}) = \overline{45}, \phi(\overline{\mathsf{ce}}) = \overline{35}, \phi(\overline{\mathsf{ea}}) = \overline{51} \end{aligned}$$

従って, この写像の下で

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{\mathsf{ab}}) = \mathsf{ab} \quad &\Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{\mathsf{ab}})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{12}) = \theta(\mathsf{a})\theta(\mathsf{b}) \\
\psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{\mathsf{bc}}) = \mathsf{bc} \quad &\Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{\mathsf{bc}})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{23}) = \theta(\mathsf{b})\theta(\mathsf{c}) \\
\psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{\mathsf{cd}}) = \mathsf{cd} \quad &\Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{\mathsf{cd}})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{34}) = \theta(\mathsf{c})\theta(\mathsf{d}) \\
\psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{\mathsf{de}}) = \mathsf{de} \quad &\Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{\mathsf{de}})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{45}) = \theta(\mathsf{d})\theta(\mathsf{e}) \\
\psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{\mathsf{ea}}) = \mathsf{ea} \quad &\Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{\mathsf{ea}})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{51}) = \theta(\mathsf{e})\theta(\mathsf{a}) \\
\psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{\mathsf{ce}}) = \mathsf{ce} \quad &\Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{\mathsf{ce}})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{35}) = \theta(\mathsf{c})\theta(\mathsf{e}) \\
\psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{\mathsf{bd}}) = \mathsf{bd} \quad &\Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{\mathsf{bd}})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{24}) = \theta(\mathsf{b})\theta(\mathsf{d})
\end{aligned}$$

が成り立つ.

2. 例えば図 1 のようなグラフが G_2 の部分グラフである.

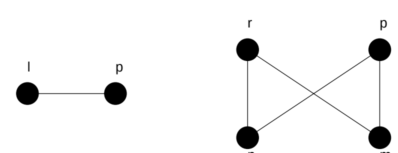


図 1: グラフ G_2 の部分グラフの例.

3. まず, 隣接行列 $\boldsymbol{A}$ について考える. この隣接行列のサイズから, 求めるグラフの点の数は $n = 5$ であり, 隣接行列は必ず対称行列であることに注意しょう. また, この行列 $\boldsymbol{A}$ の対角成分は全てゼロである

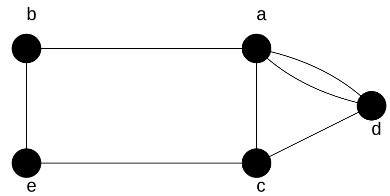


図 2: 隣接行列が $\boldsymbol{A}$ で与えられるグラフ．ここで, 隣接行列 $\boldsymbol{A}$ の第 1 行, 2 行, ⋯ の番号として, 図の点 a,b, ⋯ が対応していることに注意.

ことから, このグラフには**ループが含まれない**ことが直ちにわかる．以上に注意しながら隣接行列の定義に従ってグラフを描くと図 2 のようになる．もちろん, この図と全く同じでなくても, 同形なグラフならば正解である.

次は接続行列 $\boldsymbol{M}$ を持つグラフに関してであるが, 以下の点に注意しながら考察するとグラフが描きやすい.

- 隣接行列の各列には必ず 2 個の 1 があり, 対応する行の番号が付された点同士が結ばれ, それにより出来上がる辺にはその列の番号が割り当てられる.
- 第 i 行, 第 j 行に 1 が立っている列が l 本ある場合, 点 i, j 間には l 重の多重辺が存在する.

以上に注意しながらグラフを描くと図 3 のようになる.

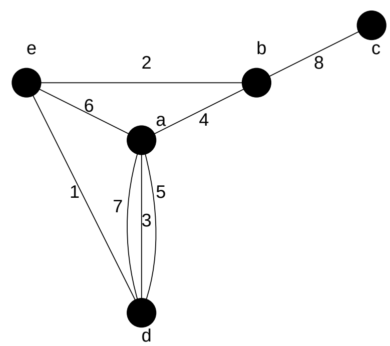


図 3: 隣接行列が $\boldsymbol{M}$ で与えられるグラフ．ここで, 接続行列 $\boldsymbol{M}$ の第 1 列, 2 列 ⋯ の番号として, 図の a,b, ⋯ が対応していることに注意.

レポート #1 に関する補足コメント

1. 問題 2. の解答グラフ (図 4) に誤りがありました．正しくは図 4 のようになります.
2. 問題 3. の問題文には「同一対戦カードを複数回含まない」という条件を特に課さなかったので, 解答として挙げた 5 種類のグラフ以外に, 多重辺を含むグラフ等を描いてくださった方も, そのグラフに対戦数と次数の関係が正しく反映されていれば正解にしました.
3. 問題 1. で解答に挙げたグラフ A,B,C の各々に該当する有機化合物の名称を書いてくださった方が数名いました．**ペンタン** (A), **2-メチルブタン** (B), **2-2-メチルプロパン** (C) だそうです.

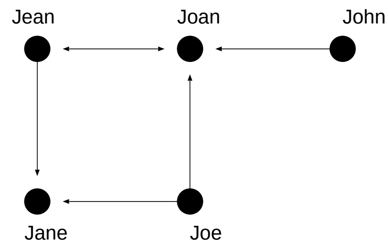


図 4: $\boxed{\textbf{演習問題 1}}$ 2. の正しいグラフ.

3　様々なグラフの例

この節では一般的はグラフ G を論じるのではなく, 様々な (特殊な) グラフを例をとって説明し, 個々のグラフの特徴を見てゆくことにしょう. ここでは, 後のこの講義で頻出するグラフとその性質を簡単に述べるが, 具体的な応用例, 及び, 詳しい性質に関しては追々見て行くことになる. しかし, ここで出てくる各グラフの名前と大まかな性質を押さえておくと, 後の学習がスムーズに進むであろう.

3.1　空グラフ

空グラフ (null graph) : 辺集合が空であるグラフ (「点のみからなるグラフ」あるいは「辺のないグラフ」), 数式で表現するならば, n 点からなる空グラフは N_n となる. 図 5 に N_4 の例を載せる.

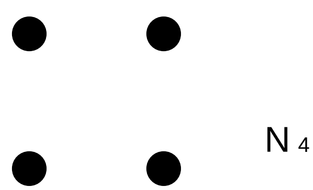


図 5: 空グラフ N_4.

3.2　完全グラフ

完全グラフ (complete graph) : 相違なる 2 つの点が全て隣接している単純グラフ (ループや多重辺を含まないグラフ).
(難しく言うと) $\Rightarrow \forall_{v,v'} \in V(\mathrm{G}), v \neq v^{'}$ に対し, $v, v^{'}$ を両端とする辺が唯一 1 個存在するグラフ.

式では n 個の点からなる完全グラフは K_n と表現される.

n 個の点からなる完全グラフ K_n の辺の総数は, $1, 2, \cdots, n$ 個の点の中から任意に 2 点選んで結ぶ場合の数, すなわち, ${}_nC_2 = n(n-1)/2$ 個である. 図の例で言うと, $n = 4$ の場合には 6 本, $n = 5$ の場合には 10 本であり, これは図 6 より直ちに確認できる.

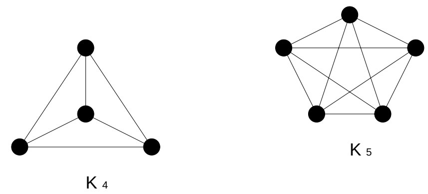


図 6: 完全グラフ K_4 及び K_5.

3.3 正則グラフ

r-**正則グラフ (regular graph)**：全ての $v \in V(G)$ に対して, $\mathrm{dev}(v) = r$ であるグラフ．平たく言うと, どの点の次数も全て共通に r であるグラフ.

(注)：正則グラフという観点からは, N_n は 0-正則グラフ, C_n は 2-正則グラフ, K_n は $(n-1)$-正則グラフということになる.

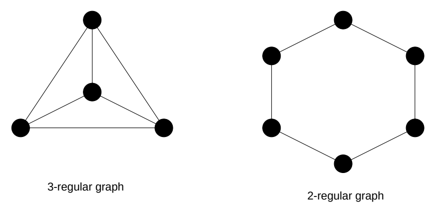


図 7: 次数 3 の正則グラフ (左), 及び, 次数 2 の正則グラフ（右) の例.

3.4 閉路グラフ

閉路グラフ (cycle graph)：次数 2 の正則連結グラフ．式では C_n のように表記される.

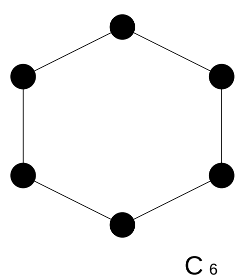


図 8: 閉路グラフ C_6.

3.5 道グラフ

道グラフ (path graph) : 閉路グラフ C_n から一つの辺を除いて得られるグラフ. 式で表現すると P_n となる.

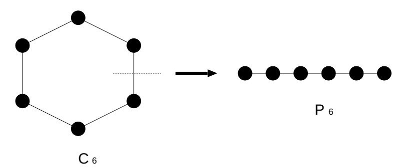


図 9: 閉路グラフ C_6 から次数 6 の道グラフ P_6 を作成する過程.

3.6 車輪

車輪 (wheel) : C_{n-1} に新しい点 v を一つ加え, v と他の全ての点とを辺 (「スポーク」と呼ばれる) で結んでできるグラフ. 式で表記すると W_n となる.

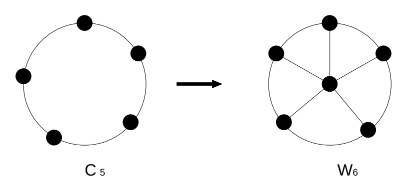


図 10: 閉路グラフ C_5 から次数 6 の車輪 W_6 を作成する過程.

3.7 ピータースン・グラフ

ピータースン・グラフ (Petersen graph) は図のような特殊な形状を持つグラフであるが, 今後の演習問題等でしばしば現れることになる [1] .

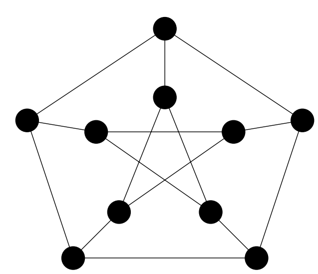


図 11: ピータースン・グラフ.

[1] Petersen graph は教科書では「ピータースン・グラフ」と発音, 日本語表記されているが, 他の専門書では「ペテルセン・グラフ」と発音, 日本語表記されているものが多い (むしろ, こちらの方が多数派である)

3.8　二部グラフ

二部グラフ (bipartite graph)：グラフ G の点集合を 2 つの素な集合 A, B に分割し, G の全ての辺は A の点と B の点を結ぶようにできたとする．このとき, グラフ G は二部グラフであるという．

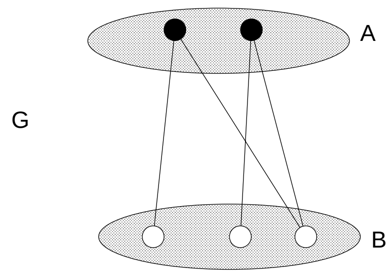


図 12: 二部グラフ G の例．全ての辺の端点は黒丸と白丸のペアでなくてはいけない．

3.9　完全二部グラフ

完全二部グラフ (complete bipartite graph)：A の各点が B の各点とちょうど 1 本の辺で結ばれている二部グラフ．

図のように点を黒丸と白丸で 2 つの集合に分けたとき, 黒の点 r 個, 白の点 s 個からなる完全二部グラフは $\mathrm{K}_{r,s}$ と表記される．

当然であるが, $\mathrm{K}_{r,s}$ には $(r+s)$ 個の点と rs 本の辺がある．

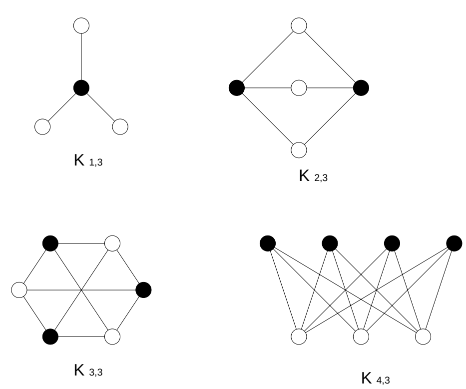


図 13: 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{1,3}, \mathrm{K}_{2,3}, \mathrm{K}_{3,3}, \mathrm{K}_{4,3}$.

3.10　k-立方体

k-立方体 (k-cube)：$a_i = 0$ or 1 であるような 1 つの列 (ベクトル) $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ に一つの点を対応させ, 一つだけ異なる成分 a_i を持つ二つのベクトルに対応する二つの点が辺で結ばれるような正則二部グラ

フ. 式で表記すると Q_k となる.

$\Rightarrow$ Q_k は 2^k 個の点と, $k2^{k-1}$ 本の辺[2] を持つ.

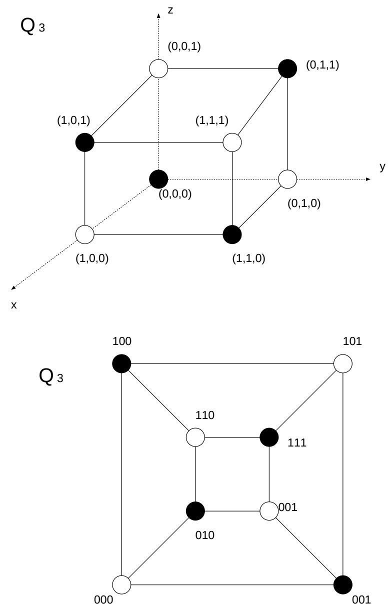


図 14: 3-立方体. 図の G_1 及び G_2 は同形である.

3.11 単純グラフの補グラフ

単純グラフの補グラフ (complement): 単純グラフ G の補グラフ $\overline{\mathrm{G}}$ とは, 点集合 $V(\mathrm{G})$ を持ち, $\overline{\mathrm{G}}$ の 2 点が隣接するのは G におけるそれらの 2 点が隣接していないとき, かつ, そのときに限るような単純グラフを言う.

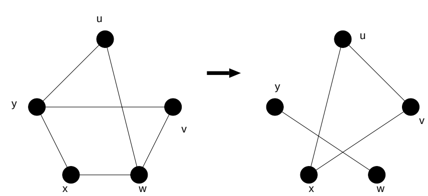


図 15: 単純グラフから, その補グラフを作成する過程.

- 完全グラフの補グラフは空グラフである. (ただし, 逆は言えない).
- 完全二部グラフの補グラフは 2 つの完全グラフの和である.

[2] $(0,0,0,1,0,0,\cdots,0),(0,0,0,0,1,0,\cdots,0),\cdots$ の各ベクトルの k 成分のうちのどの成分が食い違うかという場合 k 通り, 残りの $k-1$ 成分の並び替え 2^{k-1} 通りの積で $k2^{k-1}$ 本の辺の数となる.

(問題)

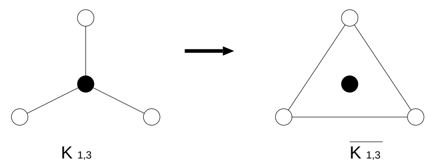


図 16: 完全二部グラフ $K_{1,3}$ とその補グラフ.

4 グラフにまつわるいくつかのパズル

ここでは, グラフを用いて効率的に解くことができる 2 つのパズルを紹介しょう.

4.1 8 つの円の配置問題

図のような 8 つの円の中に A, B, C, D, E, F, G, H の 8 つの文字を入れることを考える. ただし, アルファベット順で隣にくる文字は互いに隣接しないように置く. このとき, このとき, 適切な配置の仕方を答えよ. ちなみに, 可能な配置の総数は $8! = 46320$ 通りであるから, 全ての場合をしらみつぶしに試してみる戦略は適切ではないことに注意しょう. **(着眼点)** :

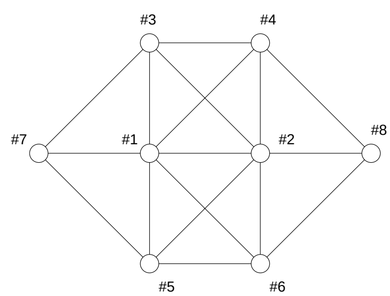


図 17: 8 つの円の配置問題の図.

- A と H の配置の仕方は易しい (片側にしか相手がいないから).
- 図の $\#1$, $\#2$ の円への配置が最も難しい (次数が最大だから).

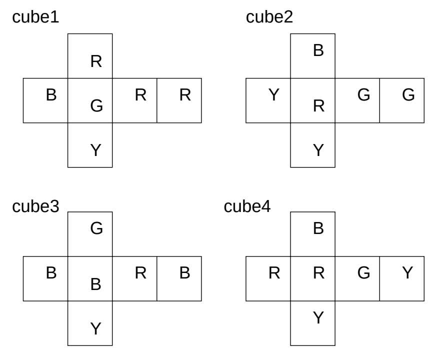
(解答) :

1. 最も次数が多く難しい, $\#1, \#2$ にそれぞれ A, B を配置する.
2. アルファベットで A, H1 の隣にくる B 及び G をそれぞれ $\#8, \#7$ にそれぞれ配置する.
3. 残りの文字をそれぞれがアルファベットで隣り合わないように配置する. 例えば, $\#3 =$ C, $\#4 =$ E, $\#5 =$ D, $\#6 =$ F のように配置すればよい.

4.2 4 つの立方体パズル

(問題)

図のような立方体の展開図：cube1, cube2, cube3, cube4



から立方体を作り, それらを積み上げて, 四角柱を作り, 四角柱の 4 つの側面それぞれに 4 色全てが表れるような四角柱の積み上げ方を見つけたい.

以下の問い (1)〜(3) に答え, このような配置を求めよ.

(1) 各立方体を 4 点からなるグラフで表し, R, B, G, Y の各点は各色に対応させ, 平行な面に塗られた色に対応する点は辺で結ぶ. このようにして出来上がるグラフを cube1, cube2, cube3, cube4 に対して描け.
(2) (1) で求めたグラフを重ね合わせたグラフ G を描け.
(3) G の部分グラフ $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2$ を見つけ出し, 立方体：cube1, cube2, cube3, cube4 を積み上げて, 四角柱を作り, 四角柱を作ったとき, その四角柱の 4 つの長方形の側面にそれぞれ 4 色全部が現れるような積み上げ方を示せ.

(解答)

(1) まず, cube1, cube2, cube3, cube4 に相当するグラフはそれぞれ図 18 のようになる.

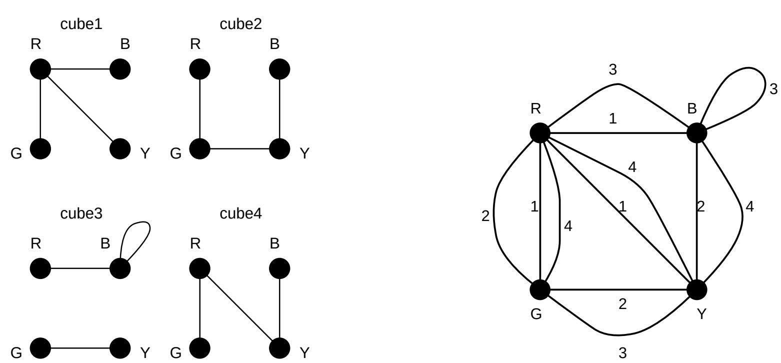


図 18: cube1, cube2, cube3, cube4 にそれぞれ相当するグラフ (左), 及び, それぞれのグラフを重ね合わせることにより得られるグラフ G(右).

(2) (1) で得られたグラフを重ね合わせると, 図 18(右) の G が得られる.
(3) 各 cube の辺をちょうど 1 本ずつ含み, 共通な辺が無く, 次数 2 の正則グラフとしてのグラフ G の部分グラフ $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2$ を選ぶと, 図 19 のようになる. これらの部分グラフ $\mathsf{H}_1\,(FB)$, $\mathsf{H}_2\,(LR)$ を用いて, cube1, cube2, cube3, cube4 を積み上げると図 19(右) のようになる. これが答えである.

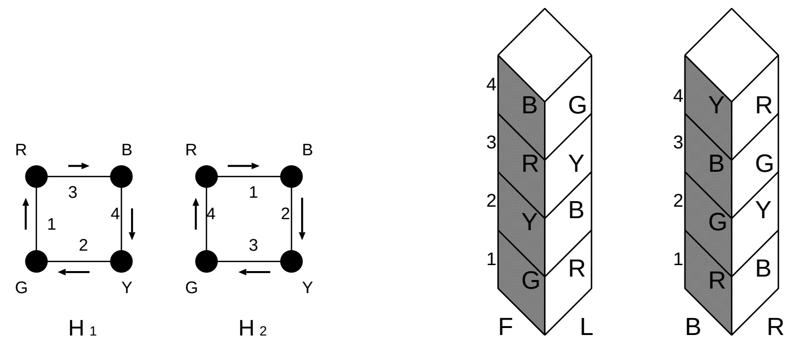


図 19: 求める G の部分グラフ $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2$ (左), 及び, 求める立方体の積み上げ方 (右).

演習問題 3

1. 図 20 に載せるグラフ G に関して以下の問いに答えよ.

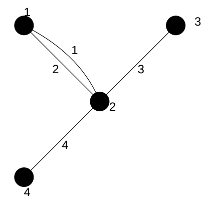


図 20: 問題のグラフ G.

(1) グラフ G の接続行列を求めよ.
(2) 接続行列の各列の要素の和は何を意味しているか？
(3) 接続行列の各行の要素の和は何を意味しているか？
(4) $\epsilon(\mathrm{G})$ をグラフ G の辺数とすると

$$\sum_{v \in V(\mathrm{G})} \deg(v) = 2\epsilon(\mathrm{G})$$

が成り立つことを示せ.

2. 図 6 に載せた完全グラフ K_5 について以下の問いに答えよ.

(1) 図 6 の完全グラフ K_5 の 5 つの頂点に, 時計回りに番号 $1, \cdots, 5$ を割り当てる. このとき, この完全グラフの隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を求めよ.
(2) 点 1 と点 3 を結ぶ長さ 2 の歩道の数は, $\boldsymbol{A}^2$ の第 $(1,3)$-成分に等しいことを示せ.
(3) 点 1 と点 3 を結ぶ長さ 3 の歩道の数は, $\boldsymbol{A}^3$ の第 $(1,3)$-成分に等しいことを示せ.
(4) 一般に, 隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を持つ単純グラフ G の 2 点 i, j を結ぶ長さ K の歩道の数は, $\boldsymbol{A}^K$ の第 (i,j)-成分に等しいことを示せ.

3. 完全三部グラフ $\mathrm{K}_{r,s,t}$ はそれぞれに属する点の個数が r, s, t である 3 つの点集合からなり, 異なる集合に属する点は全て辺で結ばれているグラフである. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $\mathrm{K}_{2,2,2}$ 及び $\mathrm{K}_{3,3,2}$ を描け.
(2) $\mathrm{K}_{r,s,t}$ には全部で何本の辺があるか答えよ.

連絡 #1 : 次回 4 月 26 日は井上の出張により休講です.
連絡 #2 : 今回のレポートの〆切は 5 月 10 日の講義開始時です.