グラフ理論 配布資料 #7

教科書 pp. 66 〜 82 の内容

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 5 月 31 日

演習問題 6 の解答例

(1) 問題文中に与えられた木 T に対し，「端点を除去する操作」[1] を行うと，1 回目に削除される端点グループは $\{1,2,4,5,8,9,12,13,15,16\}$ であり，2 回目に削除される端点グループは $\{3,6,10,14,17\}$．そして，最後に削除される端点グループは $\{7,8\}$ である．従って，これら一連の操作により最後まで生き残る木 T の中心は 11 である．

(2) 仮に木の中心が 3 つあるとする．このとき，**定理 9.1** (iv) から，木の全ての辺は橋になっていることから，端点を除去していく操作により，残る木としては図 1 の場合しかない．この場合に対して，さらに

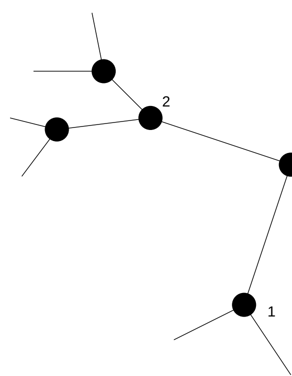

図 1: 端点を削除することによってできるグラフの一例.

次の 2 通りの可能性があり得る．

(I) 点 1 と点 2 に結合している成分の大きさが等しい場合
(II) 点 1 と点 2 に結合している成分の大きさが異なる場合

(I) の場合について考えると，点 1 と点 2 と v に接続する 2 つの辺を除去することにより，唯一の中心 v が得られる．

(II) の場合に関して，点 2 に結合している成分の方が大きいとすると，点 1 と点 v を結ぶ辺を除去することにより，$(v,2)$ という 2 つの中心が得られる．

[1] ここで言う「端点を除去する操作」とはもう少し正確に言うと，この解答に示したように「端点のグループを除去する操作」のことです．問題文がやや舌足らずだったかもしれません．

従って, (I)(II) のいずれの場合にしても, 木の中心が 3 つあるという可能性はあり得ず, 必ず, 引き続く除去のプロセスにより, 1 つまたは 2 つの中心に行き着くことになる.

(3) もしも仮に, 木の中心が 2 つあり, それらが隣接していないとすると, その場合には**定理 9.1** (iv) により, 木の全ての辺は橋であり, 中心である点 1,2 は次数が 2 の点 v を介して結合しているはずである (図 2 参照). 従って, 点 1,2 とこの v との接続辺を除去すると中心が 1 つとなってしまい, 中心が 2 つある

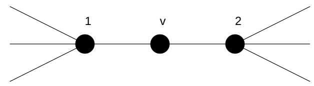

図 2: 木では全ての辺が橋である.

という仮定に反する. よって, 木の中心が 2 つある場合には, それらは必ず隣接していると結論付けられる.

(4) 点が 7 つで, 中心が 1 つまたは 2 つのグラフの一例をそれぞれ図 3 に載せる.

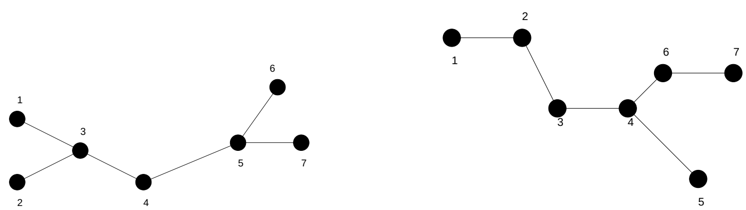

図 3: 7 点からなる木で中心が 1 つのもの (左) と中心が 2 つのものの一例.

レポート #5 に関するコメント

任意周回不可能なグラフの条件として, 「オイラー・グラフに含まれる次数 4 以上の点が 2 つ以上ある」と解答には書きましたが, もちろん, 考える v の次数が 2, つまり, $\deg(\mathsf{v}) = 2$ のときには $\deg(\mathsf{u}) \geq 4$ となる点 u が 1 つでも存在すればこの点での進路の選択いかんでは訪れることのない辺がでてくるので, 任意周回は不可能となります (このケースのグラフを描いて下さった方が 2 名ほどいました). 例えば, 図 4 の左のグラフで, $\mathsf{v} \to 1 \to \mathsf{u} \to 2 \to \mathsf{v}$ と進んでしまえば, 点 3, 4, 5, v からなる部分グラフへは行けないことになるからです. 一方, v 自身も次数 4 以上の点である場合にはこの点も含めて次数 4 以上の点が 2 つ以上必要

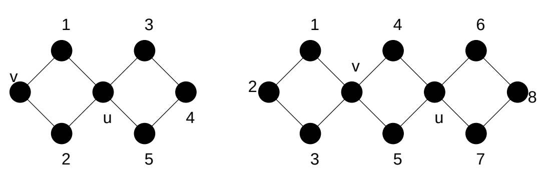

図 4: 点 v の次数が 4 以上か否かによって任意周回不可能であるための次数 4 以上の点の個数は異なる.

となります (図 4 の右側のグラフ参照).

また, 問題 1.(2) で, オイラー小道を求める問題で, 全ての点を 1 度ずつ通って元に戻る小道であるハミルトン閉路を描いた方がいましたが, オイラー・グラフとハミルトン・グラフの定義をもう一度ご確認下さい.

7.4 木の数え上げ

点にラベルを付けた木を「ラベル付き木」と言うが, このように各点にラベルを付けて木を区別した場合, その総数はいくつあるか, ということが問題になる. その答えは **Cayley (ケイリー) の定理**としてまとめられており, 「n 個の点からなるラベル付き木の総数は n^{n-2} 個である」というように, とても簡単な形で表される. ここではこの定理 (公式) の証明を詳しく追い, 関連する系, 及び, いくつかの例題をとりあげ, その理解を深めて行くことにしよう.

定理 10.1 (Cayley の定理)
n 点の異なるラベル付の木は n^{n-2} 個ある.

この定理の構成論的な証明 (第 1 の証明) は教科書 pp. 67-68 を見て頂くことにして, ここでは第 2 の証明を詳しく追って行くことにする.

(証明)
まずは準備として

- $\deg(v) = k-1$ の点 v を含むラベル付きの木を A
- $\deg(v) = k$ の点 v を含むラベル付きのの木を B

と定義しておく.

ここで述べる証明のポイントは「『ラベル付き木 A からラベル付き木 B を作る**連鎖 (linkage)** の総数』と『逆にラベル付き木 B からラベル付き木 A を作る連鎖の総数』が等しい」という条件 (関係式) から可能なラベル付き木の総数を求める, という点である.

それでは以下で連鎖：A → B, 及び, 連鎖：B → A なる操作をそれぞれ見て行くことにしょう. この際, n 個の点からなるラベル付き木のある点 v の次数が k であるものの総数を $T(n,k)$ で表しておくことにする.

連鎖：A → B
図 5 のように A を点 v に接続していない辺で分離し (図 5 の (a) → (b)), 点 v と点 z とを結ぶと (図 5 の (b) → (c)), $\deg(v) = k$ であるラベル付き木 B が得られる. さて, ラベル付き木 A の選び方は $T(n, k-1)$ 通りあり, 1 つの A に対して, 切断する辺の選び方は

$$\begin{aligned}(\text{点 } v \text{ に接続している辺の選び方}) &= (\text{木 A の辺の本数}) - (\text{点 } v \text{ の次数}) \\ &= (n-1) - (n-k) = n-k \quad (\text{通り})\end{aligned}$$

だけあるから, 連鎖：A → B の総数は

$$(\text{連鎖：A} \to \text{B の総数}) = T(n, k-1)(n-k)$$

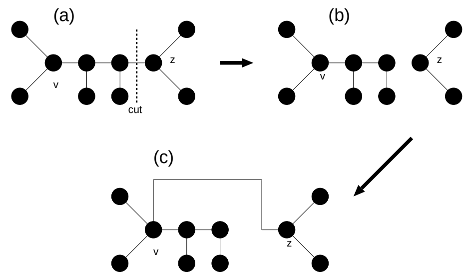

図 5: 連鎖：A → B.

となる．次に連鎖：B → A を考える．

連鎖：B → A

図 6 のように，ラベル付き木 B から点 v，及び，その接続辺を除去して得られる，木 B の成分である一連の部分木を $(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \cdots, \mathrm{T}_k)$ とする (図 6 の (a))．ここで各部分木に含まれる点の総数は n_i であり，当然のことながら

$$n-1 \quad = \quad \sum_{i=1}^{k} n_i$$

を満たしている．このとき，ラベル付き木 B から点 v，及び，その接続辺の 1 本を除去し (この際にできる成

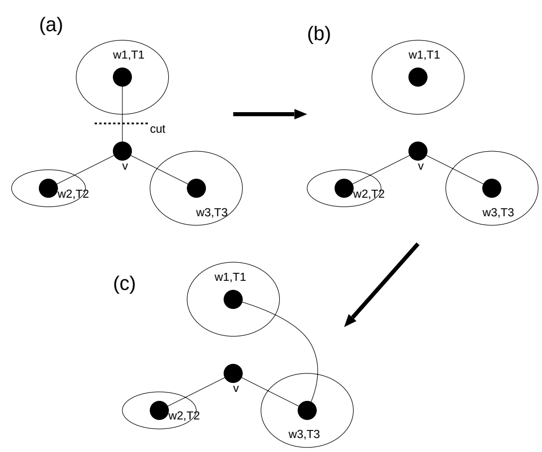

図 6: 連鎖：B → A.

分である部分木を T_i と名付ける)(図 6 の (a) → (b))，T_i 以外の部分木 T_j の任意の点 u と部分木 T_i 内の任意の点 w_i を辺で結ぶ (図 6 の (b) → (c)) と $\deg(v) = k-1$ のラベル付き木 A が得られる．

ここでラベル付き木 B の選び方は $T(n,k)$ 通りであり，点 w_i と T_i 以外の部分木 T_j の任意の点を結ぶ方法は

$$(\text{点 } v \text{ を除く点の総数}) - (\text{部分木 } \mathrm{T}_i \text{ に属する点の総数}) \quad = \quad (n-1) - n_i \quad (\text{通り})$$

だけあるから, 連鎖 : B → A の総数は

$$\begin{aligned}
& T(n,k)\{(n-1-n_1)+(n-1-n_2)+\cdots+(n-1-n_k)\} \\
= \quad & T(n,k)\{(n-1)k-(n_1+n_2+\cdots+n_k)\} \\
= \quad & T(n,k)(n-1)(k-1)
\end{aligned}$$

となる.

連鎖 : A → B, B → A の総数を等しいと置くことにより, 関係式 :

$$(n-k)T(n,k-1) \quad = \quad (n-1)(k-1)T(n,k)$$

が得られる.

ところで, $T(n,n-1)=1$ に注意して, 上関係式で $k=n-1,n-2,n-3,\cdots$ と書き出して行ってみると

$k=n-1$ のとき

$$T(n,n-2) \quad = \quad (n-1)(n-2)T(n,n-1)=(n-1)(n-2)$$

$k=n-2$ のとき

$$2T(n,n-3) \quad = \quad (n-1)(n-3)T(n,n-2)=(n-1)^2(n-2)(n-3)$$

つまり

$$T(n,n-3) \quad = \quad \frac{1}{2}(n-1)^2(n-2)(n-3)$$

$k=n-3$ のとき

$$\begin{aligned}
3T(n,n-4) \quad &= \quad (n-1)(n-4)T(n,n-3) \\
&= \quad \frac{1}{2}(n-1)^3(n-2)(n-3)(n-4)
\end{aligned}$$

つまり

$$T(n,n-4) \quad = \quad \frac{1}{3\cdot2\cdot1}(n-1)^3(n-2)(n-3)(n-4)$$

が得られる. これを一般化すると, 二項定理より $k=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}
T(n,k) \quad &= \quad \frac{(n-1)^{n-k+1}(n-2)}{(k-1)(k-2)\cdots} \\
&= \quad {}_{n-2}C_{k-1}(n-1)^{n-k-1}
\end{aligned}$$

という結果が得られる. 従って, 求めるラベル付き木の総数 $T(n)$ は上記の $T(n,k)$ に関し, $k=1$ から $k=n-1$ まで和をとることにより

$$\begin{aligned}
T(n) \quad &= \quad \sum_{k=1}^{n-1}T(n,k) \\
&= \quad \sum_{k=1}^{n-1}{}_{n-2}C_{k-1}(n-1)^{n-k-1} \\
&= \quad \sum_{k=1}^{n-1}{}_{n-2}C_{k-1}1^{k-1}(n-1)^{(n-2)-(k-1)} \\
&= \quad \{(n-1)+1\}^{n-2}=n^{n-2}
\end{aligned}$$

となり, Cayley の定理が証明された. **(証明終わり)**.

この定理に関する例題を一つ見ておく.

(例題)
n 点のラベル付き木の個数を $T(n)$ とする. このとき以下の問いに答えよ.

(1) k 点のラベル付き木と $n-k$ 点のラベル付き木の結び方の総数を計算することにより, 次の関係式を示せ.

$$2(n-1)T(n) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k(n-k)T(k)T(n-k)$$

(2) 次の関係式を示せ.

$$\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2}$$

(答え)

(1) n 点からなる木の辺を一辺だけ切って, 2 つのグラフ A, B を作る方法は

$$2 \times (n-1) \times T(n) \quad = \quad 2(n-1)T(n) \tag{1}$$

通り存在する. ここで, $T(n)$ は n 点からなる木の総数であり, 係数 $(n-1)$ はどの辺を切るかという自由度を, また, 係数 2 はグラフ A, B の交換による自由度を表している.

ところで, k 点のラベル付き木 A と $(n-k)$ 点のラベル付き木 B の結び方の総数は, k 点のラベル付き木の中から一点を選ぶ方法の $kT(k)$ 通りと $n-k$ 点のラベル付き木の中から一点を選ぶ方法の $(n-k)T(n-k)$ 通りを掛け合わせ, これに n 個の点から k $(k=1,2,\cdots,n-1)$ 個の点を選んで A, B を作る場合の数を掛け合わせただけの個数だけ存在するから

$$\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, kT(k)(n-k)T(n-k) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k(n-k)T(k)T(n-k) \tag{2}$$

となる. (1)(2) は等しいので

$$2(n-1)T(n) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k(n-k)T(k)T(n-k) \tag{3}$$

が得られる.

(2) (3) 式において, Cayley の定理 : $T(n) = n^{n-2}$ 等を用いると

$$\begin{aligned} 2(n-1)n^{n-2} \quad &= \quad \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k(n-k)k^{k-2}(n-k)^{n-k-2} \\ &= \quad \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} \end{aligned} \tag{4}$$

が得られる.

この節の最後に Cayley の定理から導かれる系を一つあげておこう.

系 10.2
完全グラフ K_n の全域木の総数は n^{n-2} 個である.

(証明)
完全グラフ K_n から, 各点に接続している辺を適切に除去することにより, n 点のラベル付き木 (全域木) が得られ, 逆に, n 点のラベル付き木の各点に, 各点の次数が $n-1$ になるよう, 適切に辺を加えることにより完全グラフ K_n が得られる (例えば, 図 7 に K_5 の場合を載せた). 従って, n 点のラベル付き木は完全グラフ K_n の全域木に一意に対応し, よって, 完全グラフ K_n の全域木の総数は n^{n-2} である. **(証明終わり)**.

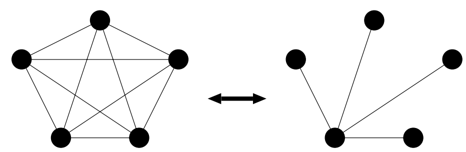

図 7: 完全グラフ K_5 とその全域木.

7.5 点行列と行列木定理

ここで学ぶ **行列木定理 (matrix-tree theorem)** は, 与えられたグラフ G のラベル付き全域木の個数を与える実用的な定理である.

具体的に定理とその応用例を見る前に, グラフ G の**点行列 (vertex matrix) $\boldsymbol{D}$** を次のように定義する [2] .

グラフ G の点行列 $\boldsymbol{D}$ とは, その要素 D_{ij} が

$$D_{ij} \quad = \quad \begin{cases} \text{点 } v_i \text{ の次数} & (i=j \text{ のとき}) \\ -(\text{点 } v_i \text{ と点 } v_j \text{ を結ぶ辺の本数}) & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられる行列である.

このとき, グラフ G の全域木の本数 $\tau(\mathrm{G})$ は行列 $\boldsymbol{D}$ の任意の余因子で与えられる. つまり, 行列 $\boldsymbol{D}$ の第 i 行, 第 j 列を削除して得られる行列を $\boldsymbol{D}(\bar{i},\bar{j})$ とすると

$$\tau(\mathrm{G}) \quad = \quad (-1)^{i+j}|\boldsymbol{D}(\bar{i},\bar{j})|$$

[2] この講義では個々のグラフのデータ構造を表現するための行列を既にいくつか取りあげてきたが, この点行列は 5 番目の行列である. 各自, これまでに学んだ「隣接行列」「接続行列」「タイセット行列」「カットセット行列」を復習しておくこと.

が全域木の本数を与える．ここで, $|\boldsymbol{X}|$ は行列 $\boldsymbol{X}$ の行列式を意味する．

なお, 実用的には行列 $\boldsymbol{D}$ のサイズが $N \times N$ ならば, $i = j = N$ と選ぶのが扱いやすく, このとき

$$\tau(\mathrm{G}) \quad = \quad |\boldsymbol{D}(\overline{N}, \overline{N})|$$

が全域木の総数となる．以上の内容を**行列木定理**と呼ぶ．

この定理の使い方を具体的に見るために, 次のような例題を考えてみよう．

(例題)
隣接行列 $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるグラフ G の全域木の総数 $\tau(\mathrm{G})$ を求めよ．また, その全域木を全て図示せよ．

(答え)

隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を持つグラフ G を図示してみると図 8 となる．このグラフ G の点行列 $\boldsymbol{D}$ は, その定義から

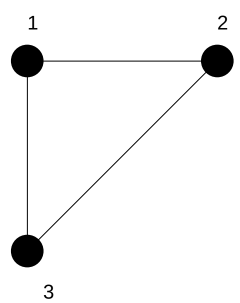

図 8: 隣接行列 $\boldsymbol{A}$ で与えられるグラフ G.

$$\boldsymbol{D} \quad = \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

であり, その $i = j = 3$ での余因子が, このグラフ G の全域木の総数 $\tau(\mathrm{G})$ を与え

$$\tau(\mathrm{G}) \quad = \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \ \ (\text{個})$$

となる．この 3 つの全域木を描くと図 9 のようになる．

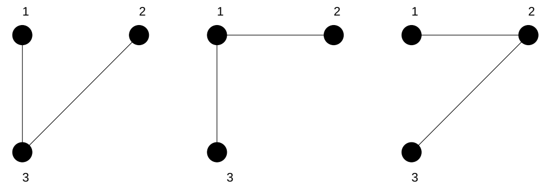

図 9: 隣接行列 $\boldsymbol{A}$ で与えられるグラフ G の 3 つの全域木.

演習問題 7

1. 今回の講義で学んだ Cayley の定理の証明を参考にして, 下記の問いに答えよ.

(1) n 個の点からなる木で, 与えられた点 v が端点になっているものは何個あるか ?

(2) n 個の点からなる木の与えられた点 v が端点となっている確率 $P(n)$ を求めよ. また, 点の数 n が無限大のときの $P(n)$ の極限値が

$$\lim_{n\to\infty} P(n) \quad = \quad \frac{1}{\mathrm{e}}$$

で与えられることを示せ. ただし, e は自然対数の底である.

2. 隣接行列 $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるグラフ G に関する行列木定理について以下の問いに答えよ.

(1) グラフ G の点行列 $\boldsymbol{D}$ を求めよ.

(2) 行列木定理により, グラフ G の全域木の総数 $\tau(\mathrm{G})$ を求めよ.

(3) (2) で得られた個数だけ存在する全域木を具体的に全て図示せよ.

連絡 : 9 月 6 日 (月) の第 3 講時に M151 講義室にて補講を行います.