



Title	確率モデルを用いたフラクタル図形の作成に関する実験手引書
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2004
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/372
Rights(URL)	http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learningobject
Note	この講義資料は著者のホームページ http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/ からもダウンロードできます。
Note(URL)	http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
File Information	jikken_fractal2004.pdf



[Instructions for use](#)

情報工学実験 II (平成 16 年度 後期)

確率モデルを用いたフラクタル図形の作成

担当: 複雑系工学講座 混沌系工学研究室 井上 純一 (情科研棟 8-13, 706-7225)

～ この実験の目的 ～

自然界に数多く見られる「フラクタル図形」をコンピュータを用いて作図することにより、フラクタルという概念を学ぶ。特に、決定論的な規則に従って描くことのできるフラクタルの他、単純無向グラフ上において粒子の確率的な拡散と吸着が結果としてフラクタル図形を生むことを確認する。最後に、フラクタル図形と非フラクタル図形を区別するために「フラクタル次元」と呼ばれる量を導入し、この次元の算出方法の一例 (ボックスカウント次元の計算) を学ぶ。

1 フラクタルとは何か?

下の図 1 を見てほしい。この図形は「フラクタル」と呼ばれる構造をもつ。この種の図形の特徴は、部分的な構造の積み重ねで全体が構成され、描かれている点である。言い方を換えれば、スケールを変えて図形を眺めても、常に同じ図形として見えるということである。

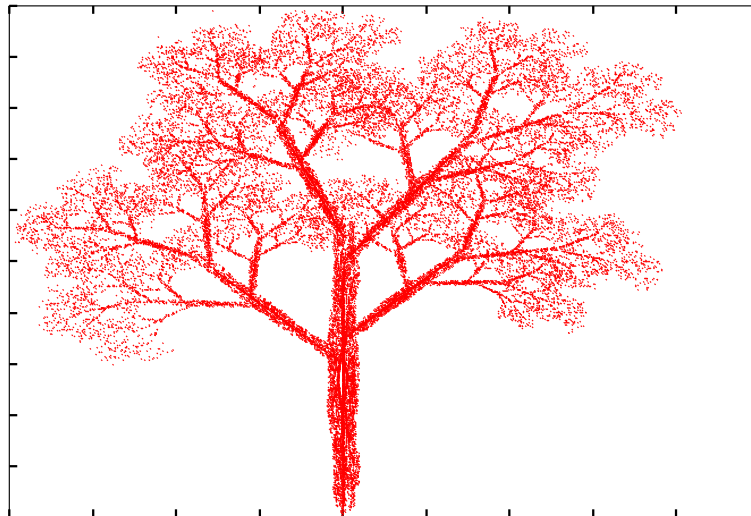


図 1: フラクタルな木.

さて、上の図 1 は私がフリーハンドで描いたものではなく、また、木の影の写真でもない。これは簡単なルールに基づき、コンピュータに描かせたものである。非常に簡単なルールからこのような複雑な図形が描かれるのはちょっとした驚きであるが、この実験ではこのルールを乱数による確率的なものとしたときに、フラクタル図形が実際に描かれるかどうかを確かめてもらう。

目 次

1	フラクタルとは何か?	1
2	複素力学系：決定論的フラクタル	3
2.1	ロジスティック写像の複素数への拡張	3
2.2	複素力学系の数値解法：ニュートン法	4
2.3	マンデルブロ集合	5
3	確率的フラクタル	6
3.1	この実験で用いる一様乱数生成ルーチン	6
3.2	シェルピンスキー・ガスケット	7
3.3	菌糸成長の計算機シミュレーション	9
3.3.1	準備：2次元ランダムウォーク	10
3.3.2	菌糸成長のアルゴリズム	12
3.4	フラクタル次元とその計算方法	16
4	パーコレーションとフラクタル	18
4.1	臨界浸透確率におけるクラスターのフラクタル次元	19
5	いくつかの付録	20
5.1	シェルピンスキー・ガスケットに関するフラクタル次元の別解法	20
5.2	複素多項式と Lee-Yang の定理	20
6	参考文献	22
7	課題レポート提出にあたって (重要)	24

～ 本実験に取り組む際の注意事項 ～

- 本実験でやって頂く課題は大きく 2 種類あります。一つは ***必修課題** であり、課題 1 から課題 5 まで計 5 つあります。また、これら ***必修課題** とは別に **追加課題** が計 6 題あります。この実験は ***必修課題** を全てやってレポートを提出すれば合格としますが、**追加課題** は各自のペースと技量により、何題やってレポートとして提出して下さい下さっても OK です。もちろん、数多くの課題を提出すればそれだけ点数は高くなります。
- どの課題もコンパクトにまとめれば数 100 行以内ですむプログラムばかりです。しかし、プログラム中にはできるだけコメントを書き、他人 (時間が経過した後の自分) が読んでもわかるようにしておくことが肝要です。

2 複素力学系 : 決定論的フラクタル

この実験では確率モデルを用いてフラクタルを作図するが、その前にウォーミングアップとして「確率的」の対極にある「決定論的」なフラクタルを見ていく。

2.1 ロジスティック写像の複素数への拡張

まずは昨年度の情報工学演習 I(A)「ファイル操作」(井上担当)の回で少しふれた、次式で与えられるロジスティック写像を思い出してみよう。

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad (1)$$

写像 (漸化式)(1) に含まれるパラメータ a を変えていくと $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \cdots \rightarrow x_n \cdots$ という時系列は「固定点」「周期軌道」「カオス」というような様々な振る舞いを見せた。また、 a の変化に対してその周期軌道の分岐構造がどうであるかは図 2 のようになったことも演習課題として確かめた。この演習では写像

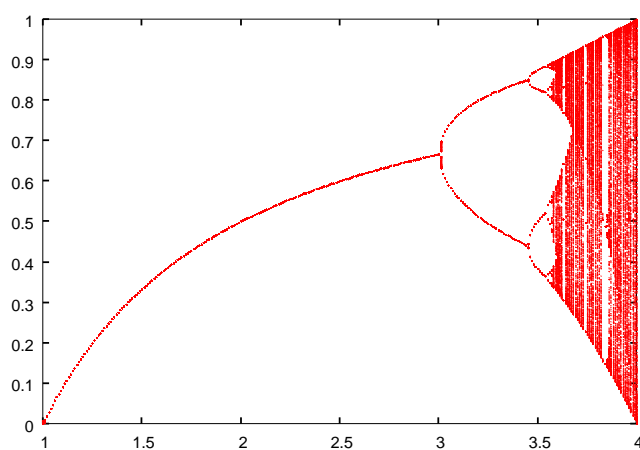


図 2: 情報工学演習 I(A) で見たロジスティック写像の分岐図

の変数 x を実数であるとしたが、これを複素数 z に拡張した場合に得られる複素数版のロジスティック写像からは何がわかるのかを調べてみよう。複素数 z の実部を x 、虚部を y で表せば、 z は $z = x + iy$ と書けるので、これをロジスティック写像の式: $z_{n+1} = az_n(1 - z_n)$ に代入すれば

$$\begin{aligned} x_{n+1} + iy_{n+1} &= a(x_n + iy_n)(1 - x_n - iy_n) \\ &= a(x_n - x_n^2 + y_n^2) + iay_n(1 - 2x_n) \end{aligned} \quad (2)$$

が得られる。ここでパラメータ a は $a = a_R + ia_I$ として複素数に選ぶこともできるが、まずは簡単のため実数であるとして話を進めよう。

さて、(2) 式の両辺の実部、虚部をそれぞれ等しいと置くことにより

$$x_{n+1} = a(x_n - x_n^2 + y_n^2) \quad (3)$$

$$y_{n+1} = ay_n(1 - 2x_n) \quad (4)$$

が得られる。この連立漸化式 (3)(4) をある初期条件 $x_0 \equiv (x_0, y_0)$ からスタートさせると、この初期条件の選び方が良ければ連立漸化式は複素平面 x - y 内のある点へと収束するか、有限範囲内での周期軌道へと収束してい

く。しかし、一方で初期条件の選び方がうまくなければこの連立漸化式は収束せず、 $|x_\infty| \equiv \sqrt{x_\infty^2 + y_\infty^2} \rightarrow \infty$ のように発散してしまう。従って、全ての可能な初期条件はその初期条件から出発した軌道が [発散してしまうもの] と [有限に留まるもの] との 2 種類に分類されることがわかる。つまり、初期条件の作る集合： $\{x_0\}$ は

$$\begin{aligned}\{x_0\}_\infty &\equiv \{x_0 \mid |x_\infty| \rightarrow \infty\} \\ \{x_0\}_{\text{finite}} &\equiv \{x_0 \mid |x_\infty| < \infty\}\end{aligned}$$

でそれぞれが定義される部分集合 $\{x_0\}_\infty$ と $\{x_0\}_{\text{finite}}$ に分類される。

連立漸化式 (3)(4) を数値的に解き、複素平面 x - y 内にこの $\{x_0\}_{\text{finite}}$ をプロットしてできる図は、その作り方が上述のように極めて単純なのにも関わらず非常に複雑な形状を持つ。それを図 3 に示そう。この集

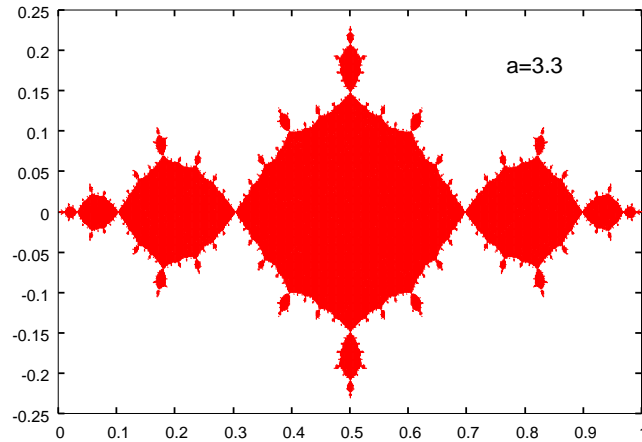


図 3: ジュリア集合. $a = 3.3$

合 $\{x_0\}_{\text{finite}}$ のことをジュリア集合と呼ぶ。図 3 では $a = 3.3$ に選んだが、この場合に得られるジュリア集合はフラクタルであり、前述の自己相似性を有する。もちろん、 a の値をいろいろ変えれば様々なジュリア集合が得られる (各自がいろいろ試してみると楽しいと思う)。図 4 にその中から数例を載せる。

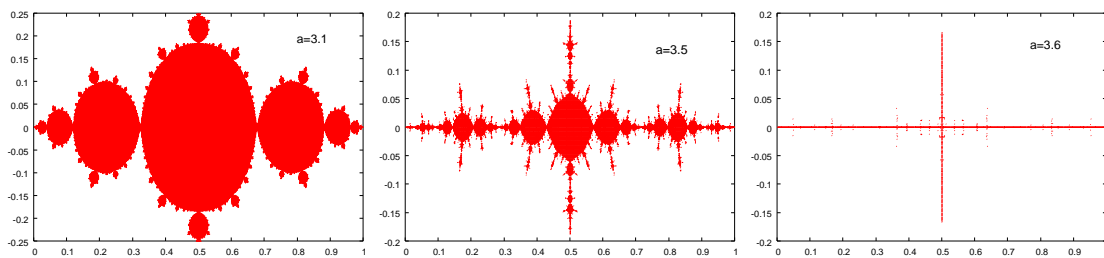


図 4: 左から $a = 3.1, 3.5$, 及び, $a = 3.6$ に対するジュリア集合.

2.2 複素力学系の数値解法：ニュートン法

具体的に $z_{n+1} = f(z_n)$ のタイプの漸化式の解は $z_{n+1} = z_n = z$ としたときの方程式 $f(z) - z \equiv g(z) = 0$ の解である。従って、ジュリア集合を求める際にはこの方程式 $g(z) = 0$ の解 z が有限であるかどうかを判

定すればよい。このとき、 $g(z) = 0$ の解法としてはニュートン法が知られている。既に他の演習等で学んだと思われるが、ここでは簡単にそれについて説明し、この問題への適用を考えてみる。

ニュートン法とは方程式 $g(z) = 0$ の解の候補 $z = z_0$ で曲線 $y = g(z)$ に接する接線の方程式：

$$y = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0)$$

の z 軸との交点：

$$z \equiv z_1 = z_0 - \frac{g(z_0)}{g'(z_0)}$$

を解候補 z_0 の改良版とするもので、これをおし進めて n -番目の解候補と $n+1$ 番目の候補の間に成り立つ関係式：

$$z_{n+1} = z_n - \frac{g(z_n)}{g'(z_n)} \quad (5)$$

を z_n に関する漸化式とみて、この収束点をもって解きたい方程式 $g(z) = 0$ の解とするものであった。

今の複素数版ロジスティック写像の場合には $g(z) = az(1-z) - z$ であるから、反復式 (5) は

$$z_{n+1} = z_n - \frac{az_n(1-z_n) - z_n}{a - 2az_n - 1}$$

であるが、例によって $z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$, $z_n = x_n + iy_n$ をこれに代入し、 x, y に関する漸化式に直してみると、やや煩雑ではあるが

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(a - 2ax_n - 1)[(a - 1)x_n - a(x_n^2 + y_n^2)]}{(a - 2ax_n - 1)^2 + 4a^2y_n^2} \quad (6)$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{y_n(a - 2ax_n - 1)^2 + 2ay_n\{a(x_n - x_n^2 + y_n^2) - x_n\}}{(a - 2ax_n - 1)^2 + 4a^2y_n^2} \quad (7)$$

が得られる。これら (6)(7) 式を様々な初期条件からスタートし、その解が有限範囲に収まるか否かをチェックして行けばよい。

2.3 マンデルブロ集合

前節ではロジスティック写像をコントロールするパラメータ a を実数として扱ったが、先に述べたようにこれをも複素数に拡張することができる。 $a = a_R + ia_I$ として (2) 式に代入し、実部と虚部にわけた反復式を書き出してみると

$$x_{n+1} = a_R(x_n - x_n^2 + y_n^2) - a_I y_n(1 - 2x_n) \quad (8)$$

$$y_{n+1} = a_R y_n(1 - 2x_n) + a_I(x_n - x_n^2 + y_n^2) \quad (9)$$

が得られる。ジュリア集合を求めたときには、 a の値を固定し、反復式 (8)(9) が有限の値に収まるような初期条件の集合を複素平面内にプロットした。ここでは逆に、初期条件 $\{x_0, y_0\}$ が一つ与えられた場合、 a_R, a_I の値を様々変えたときに、反復式 (8)(9) の解が有限の値を持つような集合 $\{a_R, a_I\}$ を x - y 平面にプロットしたならばどのような図形が得られるのかを考えてみたい。図 5 に $x_0 = 0.5, y_0 = 0$ を初期条件に選んだ場合の結果を載せる。このような図形のことをマンデルブロ集合と呼ぶ。

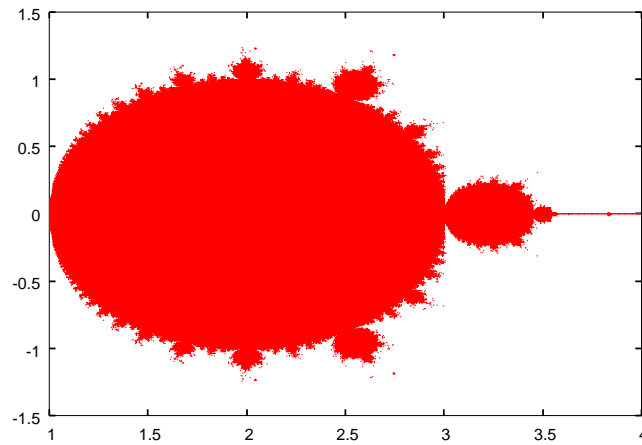


図 5: マンデルブロ集合. $x_0 = 0.5, y_0 = 0$ と初期条件を選んである.

追加課題 1

ロジスティック写像 (2) の代わりに

$$z_{n+1} = f(z_{n+1}) = z_n^2 - c$$

$$c \equiv c_R + ic_I$$

に関してジュリア集合を求めるプログラムを書き, 実数 c_R, c_I を様々に変えて出来上がるジュリア集合をいくつか図示せよ.

3 確率的フラクタル

ここからは本実験の主題である確率モデルを用いたフラクタルについて見ていく. コンピュータ上で確率を扱うわけであるから, 擬似乱数を用いなければならない. そこでまずはこの実験で用いる一様乱数を生成する関数 (サブルーチン) を見ていこう.

3.1 この実験で用いる一様乱数生成ルーチン

この実験では $[0, 1]$ 間の一様乱数を頻繁に用いる. 乱数自体を課題にしている情報工学実験もあり, 既にそのような実験をした班もあるかと思うので, ここでは予めそのような乱数を発生させるルーチン (関数) を配布し, それを使ってもらうことにする. 次のアドレスを netscape で開いてほしい.

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/JIKKEN2004/jikken2004.html

次にここにある randomnumber.c というプログラムファイルをダウンロードする. うまくダウンロードができたなら, このプログラムファイルを xemacs を用いて開き, この中の乱数の「種」SEED の値を幾つか変えて乱数の系列を確認せよ. ここで, 生成された乱数は rand.dat というファイルに格納されるようになった

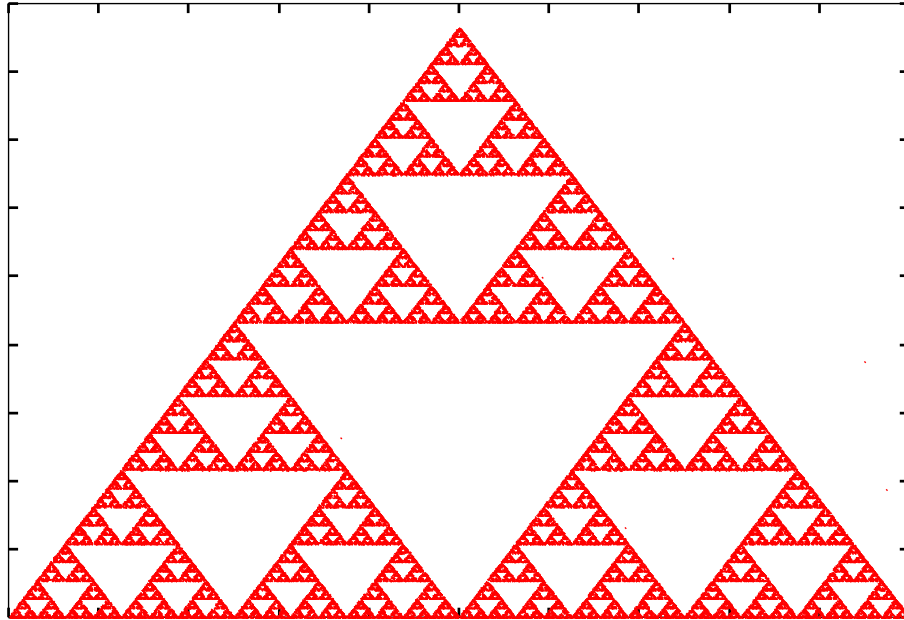


図 6: シェルピンスキー・ガスケット.

ている．つまり，コマンドラインから

```
% gcc randnumber.c -lm
```

```
% a.out
```

```
% more read.dat
```

とすれば，実際に $[0, 1]$ の乱数が生成されたかがわかるはずである．

次の節から，いよいよ具体的な確率的フラクタル図形の作成に入る．

3.2 シェルピンスキー・ガスケット

図 6 はシェルピンスキー・ガスケット (Sierpinsky's gasket) と呼ばれる典型的なフラクタル図形の一つである¹．この図形は次に示すような非常に簡単なルールを用いて生成させることができる．

- (1) 図 7 のように頂点を $(X_1, Y_1) = (0, 0)$ (点 O), $(X_2, Y_2) = (2l, 0)$ (点 A), $(X_3, Y_3) = (l, \sqrt{3}l)$ (点 B) とする正三角形を考える．
- (2) この正三角形内部の任意の点 $P^{(0)} = (x_0, y_0)$ を選ぶ．
- (3) 数 0, 1, 2 をランダムに選び
 - 0 \Rightarrow O と $P^{(0)}$ を結ぶ線分の midpoint に点 $P^{(1)} = (x_1, y_1)$ を置く．
 - 1 \Rightarrow A と $P^{(0)}$ を結ぶ線分の midpoint に点 $P^{(1)} = (x_1, y_1)$ を置く．

¹ ガスケット (gasket) とは「詰め物」の意味である．

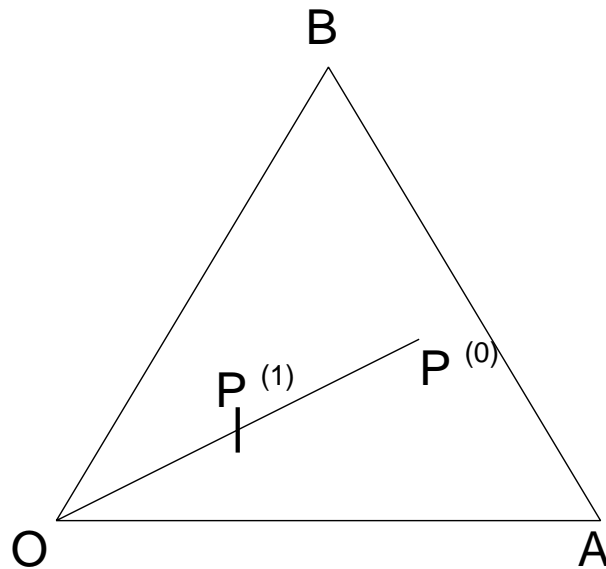


図 7: O が選ばれた場合には $P^{(0)}$ と O の中点に $P^{(1)}$ をおく.

- 2 \Rightarrow B と $P^{(0)}$ を結ぶ線分の midpoint に点 $P^{(1)} = (x_1, y_1)$ を置く.

(4) プロセス (3) を十分多数回繰り返す.

上記のアルゴリズムにより, 点列

$$P^{(0)}(x_0, y_0) \rightarrow P^{(1)}(x_1, y_1) \rightarrow \dots P^{(n)}(x_n, y_n) \rightarrow \dots$$

を 2 次元平面内にプロットする. 具体的には

$x_0 \ y_0$
 $x_1 \ y_1$
 $x_2 \ y_2$
 $x_3 \ y_3$

という形式でデータファイル (例えば gasket.dat) に格納する.

*必修課題 1

上記 (1) から (4) のプロセスを C プログラムとして書き, シェルピンスキー・ガスケットを描け.

(注) : 実際の作図には gnuplot を用いよ. なお, gnuplot の簡単な使い方の手引きは昨年度に実施した情報工学演習 I(A) 「ファイル操作」(井上担当) の URL :

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/LEC/ENS/inf_ens_2003.html

にあるので必要な者はテキスト等を再度ダウンロードし参照すること。

[プログラム作成上のヒント]

(3) の条件分岐の部分は $r \leftarrow [0, 1]$ 間の一様乱数 として

$r \in [0, 1/3] \rightarrow$ 点 O を選ぶ.
 $r \in [1/3, 2/3] \rightarrow$ 点 A を選ぶ.
 $r \in [2/3, 1] \rightarrow$ 点 B を選ぶ.

を if 文で表現すればよい。また, if 文を用いなくても。

```
rr = (int)(r*3.0);
```

とすると rr には 0, 1, 2 がそれぞれ 1/3 の確率で現れることから, switch 文を用いて

```
switch(rr){  
case 0: (点 O を選ぶ);  
break;  
case 1: (点 A を選ぶ);  
break;  
case 2: (点 B を選ぶ);  
break;  
}
```

としてもよい。

追加課題 2

上でやった *必修課題 1 を 3 次元に拡張せよ。

3.3 菌系成長の計算機シミュレーション

前節で見たシェルピンスキーガasketは確率的なメカニズムがその生成過程に含まれているとはいえ、コンピュータ上に人工的に作られたフラクタル図形であった。しかし、この他にも自然界に目を向ければ、木、海岸線など、数多くのフラクタル構造を持つものが実在する。また、はじめに我々が見たジュリア集合のフラクタル図形はその作り方から明らかなように、点列： $P^{(0)}(x_0, y_0) \rightarrow P^{(1)}(x_1, y_1) \rightarrow \cdots \rightarrow P^{(n)}(x_n, y_n) \rightarrow \cdots$ は決定論的な規則² に従ってグラフ上に点が打ち込まれることにより、全体がフラクタルとなった。

一方で、自然界に見られる多くのフラクタル図形の形成メカニズムには確率的要素が重要になってくるものも少なくない。ここでは、その中でも菌系の成長過程、つまり、核の周りをおある確率に従って動き回る粒

² これを作図プログラムには乱数の入る余地がない。この意味で確率が介在しない決定論的規則である。

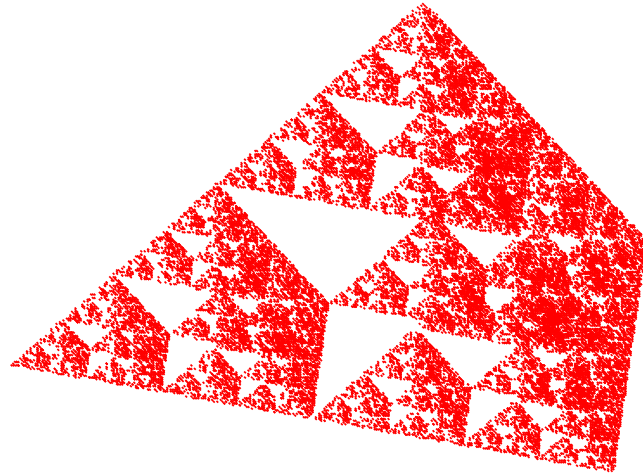


図 8: シェルピンスキー・ガスケットの 3 次元版の例.

子が次々と核に吸着していくことにより複雑な図形が出来上がるプロセスをコンピュータ上にシミュレートし, 出来上がる図形がフラクタルであることを確認する.

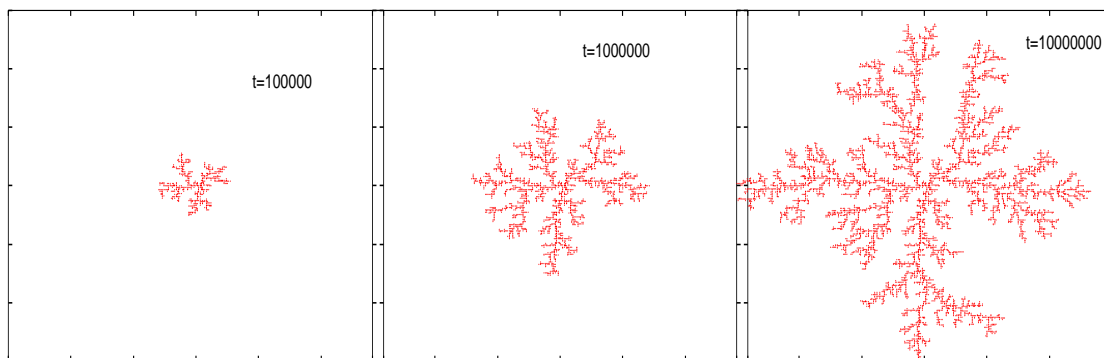


図 9: 菌系の成長過程. 時間は左から右に流れている.

図 9 は中央に置かれた菌系の「種」に周りからランダムウォーク (酔歩) しながらやってくる菌が次々と付着してゆくことによって, この菌系が成長していく様子をあらわしている. この過程の作図を始める前に, まずは 2 次元格子上的ランダムウォークを考えてみよう.

3.3.1 準備 : 2 次元ランダムウォーク

我々の最終目標である「菌系の成長」をシミュレートするためには 2 次元格子上的ランダムウォークのプログラムを用意する必要がある. そこで, ここでは準備としてそれを見てゆくことにする. ランダムウォークは任意の点 (例えば原点 $(0, 0)$) から出発して, 2 次元正方格子上 (格子の形は何でもよいが, ここでは正方格子とする) で, 等確率で 4 つの方向の中から 1 つをランダムに選択し (図 10 参照), 移動してゆくものである.

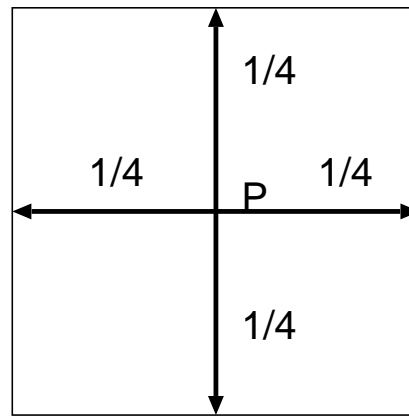


図 10: 点 P から菌は隣接する 4 つの格子点に等確率でジャンプする.

***必修課題 2**

2 次元正方格子上周ランダムウォークの軌跡を描け. 例を図 11 載せる.

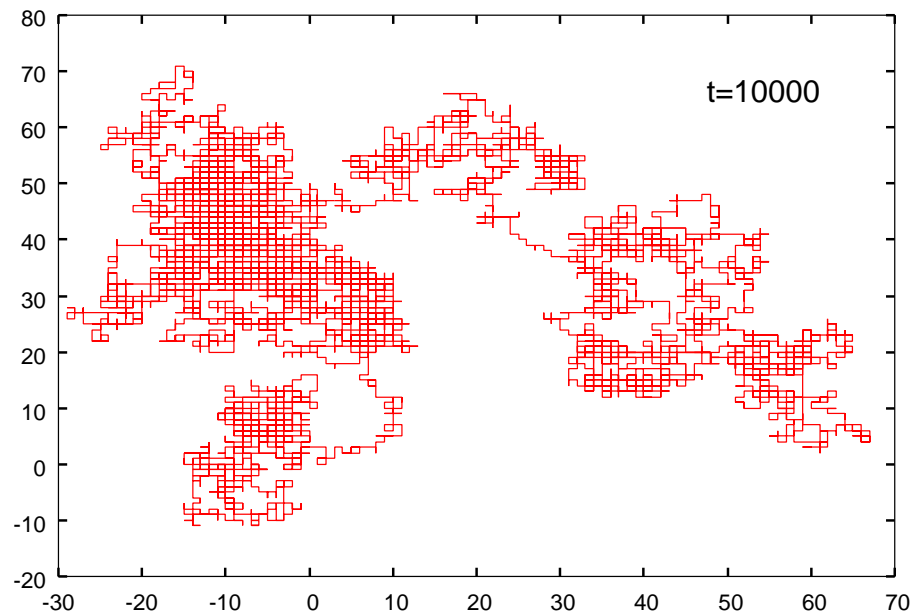


図 11: 2 次元正方格子上周ランダムウォークの例.

追加課題 3

***必修課題 2** のプログラムを改良し, (i) 3 次元正方格子ランダムウォーク, (ii) それまでの自分自身の軌跡に重ならないように動く 2 次元正方格子上ランダムウォークの軌跡をそれぞれ作図せよ. (ii) のようなランダムウォークを自己回避ランダムウォークと呼ぶ (例として図 12 参).

(注) この自己回避ランダムウォークでは軌跡が迷路の袋小路に入ってしまう, そこから抜けられなくなり, ランダムウォーク自体が停止してしまうことがしばしば起こる. この追加課題に取り組む者はこのことを考慮に入れ, プログラムを工夫し, ランダムウォークが早期に停止しないように試みられたい.

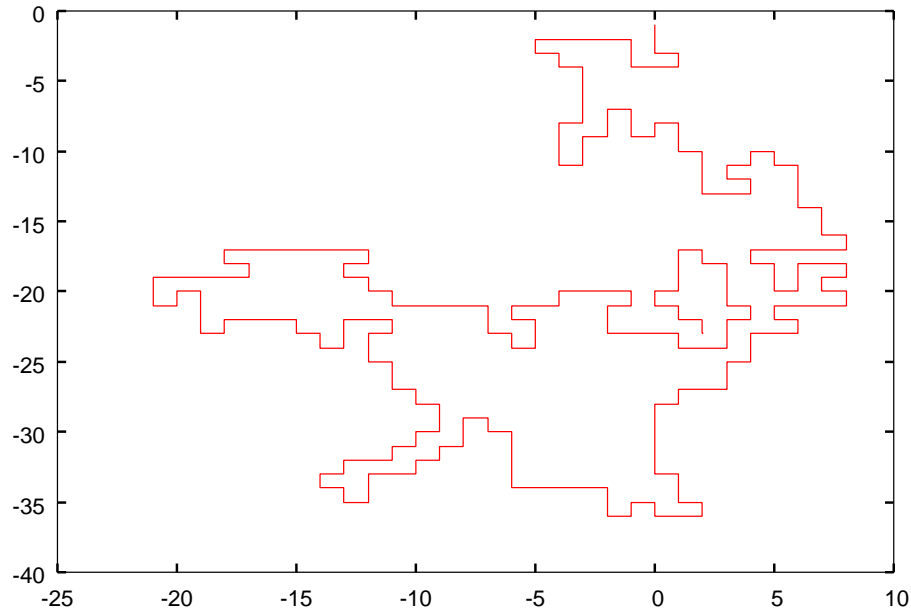


図 12: 自己回避ランダムウォークの例.

3.3.2 菌系成長のアルゴリズム

以上をふまえて具体的な菌系成長のアルゴリズムを以下で説明する.

- (1) 菌 (粒子) の可動範囲は縦 \times 横 $= l_{\max} \times l_{\max}$ の正方格子上とする. (l_{\max} は偶数). この中央 $S(l_{\max}/2, l_{\max}/2)$ に「種」を置き, 菌系を取り囲む最小半径 r_{\max} を $r_{\max} = 1$ にセットする (図 13 参照).
- (2) S を中心とする半径 $r_s (= r_{\max} + 2.0)$ の円周上の任意の一点 $P(rx, ry)$ をスタート地点に選ぶ. ただし

$$\begin{aligned} rx &= r_s \cos \phi \\ ry &= r_s \sin \phi \end{aligned}$$

とし, ϕ は $\phi \in [0, 2\pi]$ の乱数として選ぶ (図 14 参照).

- (3) この点 P をスタート地点に選び, ***必修課題 2** で行った 2 次元正方格子上のランダムウォークをさせる.

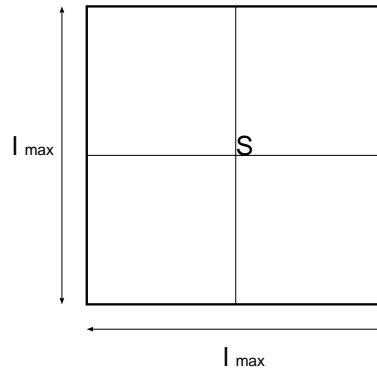


図 13: 菌の可動範囲. 中央に「種」を置く.

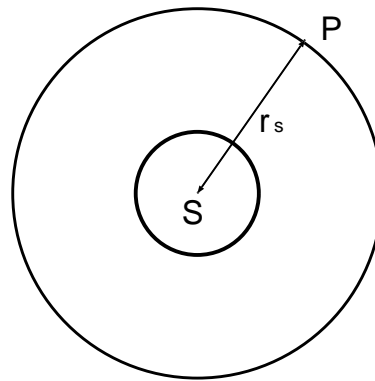


図 14: ランダムウォークの初期地点を半径が r_s の円周上を選ぶ.

(4) $r \equiv \sqrt{(rx)^2 + (ry)^2}$ の大小関係により, 次のように処理を分岐させる.

(k) r が r_k (この値は自分で適当に決める.) を超えたら, P を置き直す. そして (2) へ戻る.

(c) もし, $r_k > r_d > r_s$ なる $r_d (= r_{\max} + 5.0)$ に対し, $r \geq r_d$ ならば次のようなジャンプをさせる. 図 15 のように, 中心が半径 r の円周上, 半径が $(r - r_s)$ の円を考え, この円 O_2 上の任意の点にランダムにジャンプさせる. つまり,

$$rx = rx + (r - r_s)\cos\theta$$

$$ry = ry + (r - r_s)\sin\theta$$

とし, θ を $\theta \in [0, 2\pi]$ の乱数として選ぶ.

(a) もし, 粒子の現在地 $(rx + l_{\max}/2, ry + l_{\max}/2)$ に隣接する 4 つの格子点 $(rx + l_{\max}/2 + 1, ry + l_{\max}/2)$, $(rx + l_{\max}/2, ry + l_{\max}/2 + 1)$, $(rx + l_{\max}/2 - 1, ry + l_{\max}/2)$, $(rx + l_{\max}/2, ry + l_{\max}/2 - 1)$ に粒子が存在すれば $(rx + l_{\max}/2, ry + l_{\max}/2)$ に粒子を置き, r_{\max} を

$$r_{\max} = \max \left[r_{\max}, \sqrt{(rx)^2 + (ry)^2} \right]$$

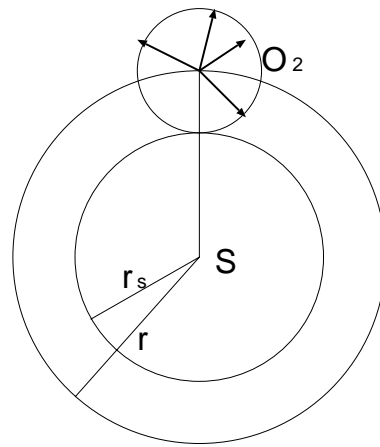


図 15: 半径 $(r - r_s)$ の円 O_2 上にジャンプする.

の規則で更新させる. つまり, 1 ステップ前の r_{\max} と比べて大きい方に取り替える. そして (2) へ戻る.

(j) (k),(c),(a) のいずれでもなければ (3) へ.

*必修課題 3

上のアルゴリズムを具体的にプログラミングして菌系成長を描いてみよ.

[プログラム作成上のヒント]

以下に main 関数のサンプルを載せる. この中にある, `check()`, `int()`, `occupy()`, `jump()`, `aggregate()`, `longjump()`; 等の関数を各自考え, プログラムを完成させること.

なお, このプログラムは

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/JIKKEN2004/jikken2004.html

に `dla-jikken-main.c` として置いてあるので, 必要に応じて各自ダウンロードすること.

```

/*****
/*      菌系成長のシミュレーション   (main 関数のみ)      */
/*                                  copr. J. Inoue          */
*****/

#include<stdlib.h>
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#define lmax 620

```

```
#define rs (rmax+2.0)
#define rd (rmax+5.0)
#define rkill (5*rmax)
#define PI 3.14159265
/*****
/*          乱数の種          */
*****/
#define SEED1 131
#define SEED2 233
#define SEED3 151

/*  (rx,ry) に粒子がいるかどうかを決める配列 .  いれば xf [rx] [ry]=1, いなければ xf [rx] [ry]=0. */
int xf[lmax][lmax];

int rx, ry;
double rmax;

main()
{
    FILE *ptr;
    long i,k;
    rmax=10;

    init();      /* 中央に種を置く関数 */
    occupy();    /* スタート地点 P を選ぶ関数 */
    jump();      /* 任意の点で 4 つの隣接格子点のいずれかにジャンプさせる関数 */

    for(i = 0; i <= 1000000; i++){
        switch(check()) { /* check() は (4) での分岐条件の k,a,j,c のいずれかを返す関数 */
            case 'k':
                occupy();
                jump();
                break;
            case 'a':
                aggregate();          /* r_max を算出する関数 */
                if((ptr=fopen("test.dat","at")) != NULL){
                    fprintf(ptr, "%d %d \n", rx, ry); /* 粒子を位置 (rx,ry) に置く */
                }
            }
        fclose(ptr);

        occupy();
        jump();
        break;
        case 'j':
```



```

        jump();
        break;
    case 'c':
        longjump(); /* 半径 (r-r_s) の円周上へジャンプ. (c) の作業に相当する関数 */
        break;
    }
}
}

```

3.4 フラクタル次元とその計算方法

前節まででいくつかのフラクタル図形に関して学び、実際にそれらを作図してきた。ところで、フラクタル図形をスケールを変えてみても同じ図形に見えるものとして定義したが、もう少し定量的にフラクタル図形とその他の図形を区別するための指標はないであろうか？

ところで「次元」というものに関し、我々は経験上、直線は 1 次元、正方形は 2 次元、立方体は 3 次元であると認識している。ここでは各図形に関する次元の決め方を我々の経験則とも一致するような形で定義することにより、フラクタル図形の次元 — フラクタル次元 — を考えてみることにする。

一辺が l の図形の中に含まれる格子点の数を $m(l)$ とする。もし、格子点が全て同じ重さを持っていたとすればこれは一辺が l の長さの図形の質量を表している (図 16 参)。さて、 l を 1 から徐々に増加させると、正方形の場合、 $m(1) = 4, m(2) = 9, \dots, m(l) = (l+1)^2$ となる。従って、 l が十分大きいときには

$$m(l) = Al^2$$

となることはわかるであろう。ここで、 A は比例係数である。同様にして考えると立方体の場合は

$$m(l) = Al^3$$

となっていることがわかるであろう。

従って、これを拡張し、対象とする図形を基本ユニットに分け、その中に含まれる点の数を対象図形 1 辺の長さ l の関数 $m(l)$ として表したとき、 l と m の間に

$$m(l) = Al^{d_f}$$

なる関係があったとき、この d_f を次元と定義することにしよう。ここで、既に見たように、このような次元の定義は、我々の経験則、つまり、正方形は 2 次元、立方体は 3 次元、..... に反しないことに注意されたい。

さて、我々は常識的に次元というものは整数であると思い込んでいる。しかし、我々が既に作図した 2 つの図形、シェルピンスキーガasket、菌糸の成長図は非整数次元をもつ。このような d_f をフラクタル次元 (ボックスカウント次元) と呼んでいる。フラクタル次元はフラクタル図形を特徴付ける最も基本的な量である。逆にフラクタル次元が非整数値を持つような図形をフラクタル図形と呼ぶ。

以下の課題で、それぞれの図形のフラクタル次元を具体的に求めてみよう。

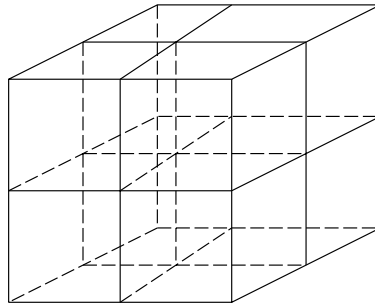
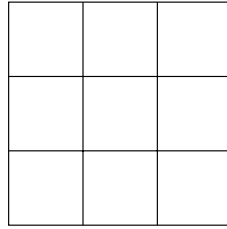
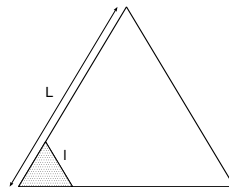


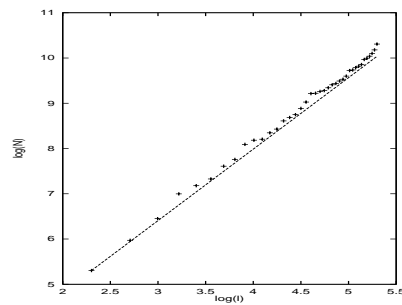
図 16: 正方形と立方体 (書くまでもないが, 念のため).

***必修課題 4**

***必修課題 1** で作図したシェルピンスキー・ガスケットにおいて



長さ l の正三角形に含まれる点の数を N とし, l を 1 から $L = l_{\max}$ までいくつか変化させ (上図), l と $N(l)$ を求める. 次いで, 縦軸に $\log N$, 横軸に $\log l$ をプロットし, その傾きからフラクタル次元 d_f を求めよ (例えば下図のように).



追加課題 4

追加課題 1 で作成する 3 次元版シェルピンスキー・ガスケットのフラクタル次元を求めよ。

追加課題 5

*必修課題 1, 追加課題 2 で作成する, 2,3 次元正方格子ランダムウォーク, 自己回避 2 次元正方格子ランダムウォークのフラクタル次元をそれぞれ求めよ。

*必修課題 5

*必修課題 3 で作った菌系の成長図に関して, 種を中心として半径 r の円内に含まれる点 (菌) の数を $N(r)$ とし, r を r_{\max} までいくつか選び, 縦軸に $\log N$ を横軸に $\log r$ をプロットし, その傾きからフラクタル次元 d_f を求めよ。

4 パーコレーションとフラクタル

正方格子上の各頂点 (サイト) が粒子で占有されるか否かが各サイトで独立にある確率 p で決まる状況を考えてみよう。隣接する粒子を線 (ボンド) で結んで出来上がる「島」のことをクラスターと呼ぶことにすれば, 確率 p が小さい場合には隣り合うサイトがともに粒子で占有される確率も小さく, 従って, 出来上がるクラスターのサイズも小さい。しかし, この確率を次第に大きくしていくと, 徐々に大きなクラスターが現れ, ある確率 $p = p_c$ でシステムサイズと同程度のクラスターが出現する。これは, 考えているシステムの端点から端点までをつなぐ有限の道 (連結グラフ) が存在することを意味する。この簡単な確率モデルにより, 例えば森林火災や伝染病の蔓延過程が表現できることはすぐに見当がつくであろう。すなわち, この数理モデルは, ある木に火が付く確率, ある人が伝染病にかかる確率が p で与えたとき, 森林, あるいは, 社会的コミュニティに火災, 伝染病が行きわたるにはどのくらいの確率 p で個々の木に火がつき, 人が伝染病にかかればよいのかという基本的な問いかけに対する解答を与えることができる³。このように, 各サイトに粒子が「存在する」「存在しない」というのをある確率で与えたときに, システムサイズと同程度のつながりができることを (サイト) パーコレーション (浸透) と呼ぶ⁴。

確率 p を次第に大きくしていったとき, どれくらいの p でパーコレーションが起こるのか (パーコレートするのか), は重要な問題であり, 2 次元正方格子の場合にはこの臨界浸透確率 (percolation threshold) : p_c は計算機実験などから $p_c = 0.592745$ であることが信じられている⁵。一方, グラフ理論の演習 (情報工学演習 II(B) #1 問題 5) で学んだ $K = 3$ のケイリーの木 (ベーテ格子) では p_c が厳密に $p_c = 1/(K-1) = 0.5$ で与えられることがわかっている (詳しくは参考文献 [6] を参照)。図 17 に正方格子上のサイト・パーコレーションの一例を載せる。

³ もちろん, ここに述べたような単純なサイト・パーコレーションはこれらの現象を説明するにはあまりにも素朴すぎる。しかし, 例えば森林火災の時に重要であろう「風の向き」を確率に関する「異方性」で取り入れたり (自分の右側のサイトが粒子で占有された場合には比較的大きな確率で自分も占有されるなど), 各サイトが独立に占有されるのではなくて回りの 4 つのサイトが粒子で埋まった場合に限り占有されるとしたり (この種の過程をコンタクト・プロセスと呼ぶ), あるいは現実の森林における木と木の間隔を具体的にグラフの形状に取り込んでシミュレートする等々, 工夫を施して行くことによりいくらでも現実の問題に近づけて議論することができる。さらに「情報科学」との関連で言えば, コンピュータウィルスが蔓延するプロセスなどはこの手のパーコレーションでモデル化できるであろうことは容易に想像がつく。

⁴ 「与えられた格子上の点と点を結ぶ各辺 (ボンド) がある確率でつながる」という状況でこのパーコレーションを考えることもできる。これを前述のサイト・パーコレーションに対比してボンド・パーコレーションと呼んでいる。

⁵ p_c を計算機実験で調べる際にはそのサイズが問題となる。比較的小さな有限のサイズでシミュレートする際には乱数の「種」の選び方によってクラスターの形状, 大きさ等にはばらつきが出るので, いくつかの「種」の選び方に関して平均操作を行う必要がある。

このパーコレーションの確率モデルはその簡単さからくる扱いやすさゆえに様々なバリエーションが考えられており、様々な自然現象/社会現象を調べる上で貴重な数理モデルとなっている。モデル自体が簡単だからいいわけだ。

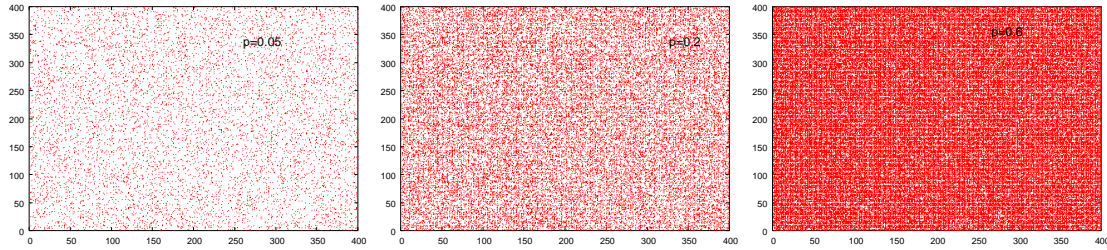


図 17: 2 次元正方格子上のサイト・パーコレーション. システムサイズは 400×400 . 臨界浸透確率は $p_c = 0.59$.

4.1 臨界浸透確率におけるクラスターのフラクタル次元

臨界浸透確率 p_c において s 個の点からなるクラスターに注目したときに、それらの平均半径 R_s は

$$R_s = \left\langle \left(\frac{\sum_{i=1}^s r_i^2}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \right\rangle \quad (10)$$

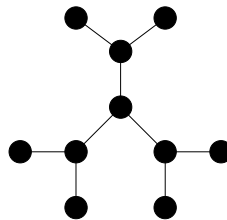
で与えられる. ここで, r_i は考えているクラスターの重心からクラスター内の i 番目の点までの距離を表し, $\langle \dots \rangle$ はシステムに出現した s 個の点からなるクラスターについての平均を表す. つまり, $p = p_c$ でシステムに s 個の点からなるクラスターが 10 個できたのであれば, $(\dots)^{1/2} + \dots + (\dots)^{1/2} / 10$ を計算すればよい. s を次第に大きくとっていったとき, R_s が

$$R_s \sim s^{1/d_f} \quad (11)$$

と振舞えばクラスターはフラクタルである. 従って, $\log R_s = (1/d_f) \log s + c$ であるから, s と R_s の関係を両対数グラフにプロットした場合, その傾きがフラクタル次元 d_f を与えることになる.

追加課題 6

(i) 2 次元正方格子上のサイト・パーコレーションの臨界浸透確率 $p_c = 0.59$ でのフラクタル次元を求めよ. また, (ii) グラフ理論の演習 (情報工学演習 II(B) #1 の **問題 5**) で学んだ $K = 3$ のケーリーの木 (ベーテ格子) (下図参照) 上でのサイト・パーコレーションを (いくつかの確率 p に対するスナップ・ショットを) 図示し, 臨界浸透確率 $p_c = 1/(K - 1) = 0.5$ でのフラクタル次元を求めよ.



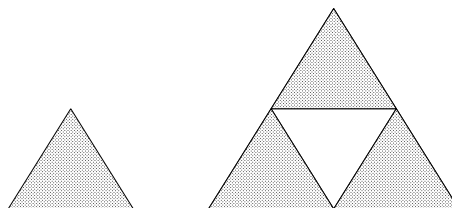


図 18: シェルピンスキーガasketの別の作り方.

5 いくつかの付録

最後にこの実験に関連したいくつかの話題を「付録」として下記に載せておく.

5.1 シェルピンスキー・ガasketに関するフラクタル次元の別解法

シェルピンスキー・ガasketの描き方は本実験で示したような確率を用いたものだけではなく、次のような方法でも描くことができる. 図 18 のように, 1 辺の長さが 1 の正三角形を考える (図 18 の左側). 次に, この辺の長さを 2 倍にした三角形をつくり, その中央に先ほどの辺の長さが 1 の三角形を逆さまにしたものをくり抜く (図 18 の右側). この操作を繰り返してゆくとシェルピンスキーガasketが出来上がる.

さて, ある図形が全体を $1/a$ 倍に縮小した相似形 b 個によって全体が構成される場合のフラクタル次元は

$$d_f = \frac{\log b}{\log a}$$

で与えられる. これはフラクタル次元の別の形での定義である. これを今の場合に当てはめると, $a = 2$, $b = 3$ (一辺が $1/2$ 倍の三角形が 3 個からなる.) より,

$$d_f = \frac{\log b}{\log a} = 1.585.....$$

となる. *必修課題 4 で求まった値のチェックに用いよ.

5.2 複素多項式と Lee-Yang の定理

この実験で学んだように, 複素力学系において写像 $f(z) = g(z) - z$ が与えられたとき, ニュートン法による反復式:

$$z_{n+1} = z_n - \frac{g(z_n)}{g'(z_n)}$$

が有限の値を持つ解 z を複素平面にプロットしたものがジュリア集合であった. 従って, (12) 式で $z_n = z_n = z$ と置いたときに成立すべき関係式:

$$N(z) = \frac{g(z)}{g'(z)} = 0$$

を満たすべき解 z を求めることが⁶, この課題での目標であった. この複素多項式 $N(z)$ はどのように選んでもよく, 選ばれた $N(z)$ の関数形によって様々なジュリア集合が得られることになる. 従って, このジュ

⁶ 正確に言えば, 有限値の解を持つような初期条件の集合を求めたのであるが, この手の方程式を解かなければならないことは同じ.

リア集合自体は何の物理的意味は無いように思えてくるが、しかし、以下に示すように磁石の数理モデルの解析においては重要な物理的意味を持つ場合がある。ここではそれについて少し述べておきたい。

磁石が磁気をもち、磁石を熱していったときにその磁気が失われるというメカニズムは統計力学と呼ばれる方法論によって調べられてきている。磁石を素朴に数理モデルで表現すれば、図 19 のように上向き、下向きの 2 方向を持つ「原子磁石」が多数存在し、それらの向きが全て揃った場合には揃った方向 (矢印の向きが N 極) に磁気が生じることになる。さて、多数の原子磁石について考えると難しくなるので、問題を

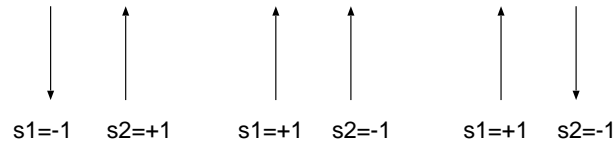


図 19: 2 つの原子磁石からなる系。

思いっきり簡単にして、図 19 のように 2 つの原子磁石が共存するような場合を考えよう。さらにこの系には上向きに磁場 h が加えられているものとする。このとき、この磁石の系のエネルギーと呼ばれる量 \mathcal{H} を $J, h > 0$ として

$$\mathcal{H} = -Js_1s_2 - hs_1 - hs_2$$

で定義すると、2 つの原子磁石が上向きの場合にエネルギーが最小となることがわかる。

しかし、この 2 つの原子磁石の置かれている環境の「温度」が高くなってくると、「熱揺らぎ」により原子磁石もその向きを頻繁に変化させ、それらがとる向きは確率的にしかわからなくなる。統計力学によれば、2 つの原子磁石が向き (s_1, s_2) をとる確率は規格化定数を $1/Z$ として

$$P(s_1, s_2) = \frac{e^{-\mathcal{H}/T}}{Z} = \frac{e^{(Js_1s_2 + hs_1 + hs_2)/T}}{Z} \quad (12)$$

となることがわかっている。 s_1, s_2 は上向きを $+1$ 、下向きを -1 とした 2 値をとるので、取りうる具体的な 4 つの場合の確率は (12) からそれぞれ

$$\begin{aligned} P(1, 1) &= \frac{e^{(J+2h)/T}}{Z} \\ P(1, -1) &= \frac{e^{-J/T}}{Z} \\ P(-1, 1) &= \frac{e^{-J/T}}{Z} \\ P(-1, -1) &= \frac{e^{(J-2h)/T}}{Z} \end{aligned}$$

となる。確率の規格化因子 Z は別名を分配関数と言い、今の場合に関しては

$$P(1, 1) + P(1, -1) + P(-1, 1) + P(-1, -1) = 1$$

より

$$Z = e^{(J+2h)/T} + e^{-J/T} + e^{-J/T} + e^{(J-2h)/T} \quad (13)$$

で与えられる。従って、2 つの原子磁石 s_1, s_2 が任意の配列をとる確率は結局

$$P(s_1, s_2) = \frac{e^{(Js_1s_2 + hs_1 + hs_2)/T}}{e^{(J+2h)/T} + e^{-J/T} + e^{-J/T} + e^{(J-2h)/T}}$$

となる。そこで、いくつかの自明な場合についてチェックしよう。まずは高温極限 $T \rightarrow \infty$ の場合

$$P(s_1, s_2) = \frac{1}{4}$$

となることが直ちにわかり、これは熱による揺らぎのため、 s_1, s_2 がデタラメに $+1, -1$ を取るので、可能な配列の組み合わせが 4 つが全て等確率で現れることを意味する。一方、 $h > J/2$ のとき、絶対ゼロ度 $T = 0$ を考えると

$$P(1, 1) = 1$$

となり、これは確率 1 で 2 つの原子磁石が共に上向きをとることを意味している。

ところで、単なる規格化因子と思われがちな分配関数 Z は極めて基本的で重要な量であり、この Z の対数を取って符合を変えたものは自由エネルギーと呼ばれ、この自由エネルギーから様々な物理量を求めることができる。また、磁石が磁気をもった状態（強磁性）から磁気を失った状態（常磁性）へ磁場 h や結合 J を変化させたときに性質が変わること — 相転移 — に関する情報は分配関数 $Z = 0$ から得られる場合がある。

今の場合にこれを見るために、 $e^{-J/T} = t, e^{-2h/T} = z$ として (13) 式で与えられる分配関数 Z を書き直すと

$$Z = z^{-1}t^{-1}(z^2 + 2tz + 1)$$

となり、従って、分配関数をこの場合の複素多項式 $Z(z)$ とみたとき、 $Z = 0$ となる z (Lee-Yang's zero) は

$$z = -t \pm i\sqrt{1-t^2}$$

で与えられ、複素平面内で原点を中心とする半径 1 の円となる。これを Lee-Yang の定理と呼び、相転移に関する研究ではしばしば重要な結果を与える。

6 参考文献

ここでは本実験に関連する参考書で、現在、井上が所有しているものの中からいくつかを挙げておきます。

まずは本実験を行った後でフラクタルについて、もっと多くのことについて学びたい人は以下の文献 [1][2] を読んでみて下さい。ただし、はじめに入門書である [1] を読み、ついで文献 [2] のトピックスの中から面白そうなものを拾い読んでいく、という段階を踏むと、とっつき易いし理解しやすいと思います。

[1] 「フラクタル」 高安秀樹 著 朝倉書店 (1986).

[2] 「フラクタル科学」高安秀樹 編著 朝倉書店 (1987).

菌糸成長に関して多くの知識が得られるものとしては [3] を、「砂山崩し」などの自己組織臨界現象も含めた比較的に最近の話題も多数載っているものとしては [4] があります。

[3] 「フラクタル成長現象」タマス・ヴィチェック 著, 宮島佐介 訳, 朝倉書店 (1990).

[4] 「フラクタル」本田勝也 著 朝倉書店 (2002).

複素力学系に関しては次のものに比較的平易に書かれています。

[5] 「フラクタルと数の世界」西沢清子 他著 海文堂 (1991).

パーコレーション, 及び, 確率モデルに関しては次を挙げておきます. [8][11] はあまり数学が苦にならない人にはお勧めです. はじめは [9][10] あたりを読んでから [6][7] に進むという順番が良いのではないかと思います. [11] は比較的年代が古いので入手が難しいかもしれませんが, その場合には言っていただければお貸しします.

[6] 「パーコレーションの科学」小田垣孝 著 嘗華房 (1993).

[7] *Introduction to percolation theory : revised 2nd edition*, by D. Stauffer and A. Aharonoy, (Tayler & Francis, 1994).

[8] 「パーコレーション：ちょっと変わった確率論入門」樋口保成 著 遊星社 (1996).

[9] 「確率モデルって何だろう」今野紀雄 著 ダイヤモンド社 (1995).

[10] 「複雑系を解く確率モデル」香取真理 著 講談社ブルーバックス (1997).

[11] 「秩序・無秩序の世界」黒田耕嗣 著 丸善 (1987).

7 課題レポート提出にあたって (重要)

- 5 つの必修課題はその全てをやって提出すること。なお、6 つの追加課題に関しては時間が余り、余裕がある場合に行い提出してください。当然、追加課題を多く提出して下さった方の得点は高くなります。提出期限は翌週の 木曜日正午。
- 提出先は情報科学研究科棟 8-13 のポストの中へ。
- 全てのプログラムをプリントアウトし、結果の図に添付すること。テキストファイルのプリントアウトの仕方は

% a2ps [ファイル名] |lpr

です。

- 追加課題も終わってしまい、さらに余裕のある者は下記の発展課題をしてみてください。さらに余分に点を与えます。

発展課題

菌系の成長では正方格子を用いたが、他の格子、例えば、一つのユニットが正三角形の三角格子の場合にはどのような形の菌ができるであろうか。また、このときのフラクタル次元は正方形の場合と同じであろうか、あるいは異なるであろうか。以上を確かめよ。

- 井上の電子メールアドレスは

j_inoue@complex.eng.hokudai.ac.jp

です。何かあれば連絡すること。なお、subject：には念のため「情報工学実験 II に関する質問」とお書きください。添付ファイルは送らないように。