Über die Resolvente der Volterraschen Integralgleichung

Von

Yoshiro Ikeda.

(eingegangen am 10 Okt. 1927.)

In der vorliegenden Arbeit wollen wir eine Methode darstellen, durch die die Resolvente der Volterraschen Integralgleichung zu gewinnen ist.

Es seien

$$(1) \qquad u^{(m)}+a_1u^{(m-1)}+\ldots\ldots+a_mu=o,$$

$$(2) \qquad v^{(m)}+b_1v^{(m-1)}+\ldots\ldots+b_mv=o$$

lineare Differentialgleichungen m-ter Ordnung, deren Koeffizienten a und b keinen singulären Punkt zwischen a und x besitzen, und es seien u_1, $u_2,\ldots\ldots,$ u_m die unabhängigen Lösungen der Differentialgleichungen (1).

Nun lässt sich die Differentialgleichung (2) in der Form

$$(3) \qquad \begin{aligned} &v^{(m)}(\xi)+a_1(\xi)v^{(m-1)}(\xi)+\ldots\ldots+a_m(\xi)v(\xi) \\ &\qquad =(a_1(\xi)-b_1(\xi))v^{(m-1)}(\xi)+\ldots\ldots+(a_m(\xi)-b_m(\xi))v(\xi) \end{aligned}$$

schreiben.

Wir setzen

$$(4) \qquad \triangle=\begin{vmatrix} u_1^{(m-1)}(\xi), & u_2^{(m-1)}(\xi),\ldots\ldots, & u_m^{(m-1)}(\xi) \\ u_1^{(m-2)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ u_1^{(1)}(\xi),\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ u_1\ (\xi),\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(\xi) \end{vmatrix},$$

und

$$(5)\qquad D(x,\ \xi)=\begin{vmatrix} u_1(x), & u_2(x),\ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(x) \\ u_1^{(m-2)}(\xi), & u_2^{(m-2)}(\xi),\ \ldots\ldots, & u^{(m-2)}(\xi) \\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ u_1^{(1)}(\xi), & u_2^{(1)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1(\xi), & u_2(\xi),\ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(\xi) \end{vmatrix}\div\triangle.$$

Wir multiplizieren die beiden Seiten der Gleichung (3) mit $D(x,\ \xi)$ und integrieren von a bis x.

Da

$$\int v^{(m)}(\xi)D(x,\xi)d\xi=v^{(m-1)}(\xi)D(x,\xi)+(-1)v^{(m-2)}\frac{\partial}{\partial\xi}D(x,\xi)+\ldots\ldots$$
$$+(-1)^{m-1}v\frac{\partial^{m-1}}{\partial\xi^{m-1}}D(x,\xi)+(-1)^m\int v(\xi)\frac{\partial^m}{\partial\xi^m}D(x,\xi)d\xi,$$

$$\int a_1v^{(m-1)}D(x,\xi)d\xi=v^{(m-2)}a_1D(x,\xi)+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(-1)^{m-2}v\frac{\partial^{m-2}}{\partial\xi^{m-2}}\Big\{a_1D(x,\xi)\Big\}+(-1)^{m-1}\int v(\xi)\frac{\partial^{m-1}}{\partial\xi^{m-1}}\Big\{a_1D(x,\xi)\Big\}d\xi,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int a_mvD(x,\xi)d\xi=\int a_mvD(x,\xi)d\xi$$

ist, so folgt

$$(6)\quad \int\Big\{v^{(m)}+a_1v^{(m-1)}+\ldots\ldots+a_mv\Big\}D(x,\xi)d\xi$$
$$=v^{(m-1)}D(x,\xi)+(-1)v^{(m-2)}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}D(x,\xi)+(-1)a_1D(x,\xi)\right]+\ldots\ldots$$
$$+v(-1)^{m-1}\left[\frac{\partial^{m-1}}{\partial\xi^{m-1}}D(x,\xi)+(-1)^1\frac{\partial^{m-2}}{\partial\xi^{m-2}}\Big\{a_1D(x,\xi)\Big\}+\ldots+(-1)^{m-1}a_{m-1}D(x,\xi)\right]$$
$$+\int(-1)^mv\left[\frac{\partial^m}{\partial\xi^m}D(x,\xi)+(-1)^1\frac{\partial^{m-1}}{\partial\xi^{m-1}}\Big\{a_1D(x,\xi)\Big\}+\ldots+(-1)^ma_mD(x,\xi)\right]d\xi.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(7)\qquad f_0=D(x,\xi),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(8)\qquad f_n=\frac{\partial^n}{\partial\xi^n}D(x,\xi)+(-1)^1\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}}\Big\{a_1D(x,\xi)\Big\}+\ldots\ldots+(-1)^na_nD(x,\xi),$$

und

$$(9)\qquad F_1(x,\xi)=v^{(m-1)}f_0+(-1)v^{(m-2)}f_1+\ldots\ldots+(-1)^{m-1}vf_{m-1},$$

$$(10)\qquad F_2(x,\xi)=(-1)^m f_m,$$

$$(11)\qquad F_3(\xi)=(a_1-b_1)v^{(m-1)}+\ldots\ldots+(a_m-b_m)v,$$

so erhalten wir aus (3) und (6)

$$(12)\qquad F_1(x,x)-F_1(x,a)+\int_a^x F_2(x,\xi)v(\xi)d\xi=\int_a^x D(x,\xi)F_3(\xi)d\xi.$$

Um die Funktionen $F_1(x,\xi)$ und $F_2(x,\xi)$ zu berechnen, betrachten wir nachstehende Determinante:

$$(13)\qquad A_n=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0, & u_1(x), & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(x) \\ 0, & u_1^{(m-1)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m-1)}(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & u_1^{(m-n-1)}(\xi) & \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m-n-1)}(\xi) \\ 0, & u_1^{(m-n-2)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & u_1(\xi), & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(\xi) \end{vmatrix}$$

Differentiieren wir jede Zeile der Determinante A_n, so erhalten wir nur zwei von Null verschiedene Determinanten:

$$(14)\qquad (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0, & u_1(x), & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(x) \\ 0, & u_1^{(m)}(\xi) & \ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m)}(\xi) \\ 0, & u_1^{(m-2)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m-2)}(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & u_1^{(m-n-1)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m-n-1)}(\xi) \\ 0, & u_1^{(m-n-2)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & u_1(\xi) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(\xi) \end{vmatrix},$$

und

$$
(15) \qquad (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 0, & u_1(x), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(x) \\ 0, & u_1^{(m-1)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m-1)}(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & u_1^{(m-n-1)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m-n-1)}(\xi) \\ 0, & u_1^{(m-n-1)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m-n-1)}(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & u_1(\xi), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(\xi) \end{vmatrix},
$$

wenn $n \neq 0$ und $n < m-1$. Im Falle wo $n=0$ ist, haben wir nur eine Determinante:

$$
(16) \qquad (-1)^{1} \begin{vmatrix} 0, & u_1(x), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(x) \\ 1, & u_1^{(m-1)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m-1)}(\xi) \\ 0, & u_1^{(m-1)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m-1)}(\xi) \\ 0, & u_1^{(m-3)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m-3)}(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & u_1(\xi), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(\xi) \end{vmatrix},
$$

ebenso im Falle wo $n=m-1$ ist:

$$
(17) \qquad (-1)^{m} \begin{vmatrix} 0, & u_1(x), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(x) \\ 0, & u_1^{(m)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m)}(\xi) \\ 0, & u_1^{(m-2)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m-2)}(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & u_1(\xi), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(\xi) \end{vmatrix}.
$$

Denn die übrigen $m-2$ bzw. $m-1$ Determinanten müssen sämtlich verschwinden, weil zwei Zeilen einander gleich sind.

Da die Determinante ihren Wert nicht ändert, wenn man zu den Elementen einer Zeile die mit einem beliebigen gemeinschaftlichen Faktor multiplizierten entsprechenden Elemente einer anderen Zeile addiert, so lässt sich die Determinante (14) in der Form

$$(18) \qquad (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0, & u_1(x), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & u^m(x) \\ a_{n+1}, & c_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & c_m \\ 0, & u_1^{(m-2)}(\xi), \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m-2)}(\xi) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 1, & u_1^{(m-n-1)}(\xi), \ldots\ldots, & u_m^{(m-n-1)}(\xi) \\ 0, & u_1^{(m-n-2)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0, & u_1(\xi), \ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(\xi) \end{vmatrix}$$

schreiben, wobei

$$c_i = u_i^{(m)} + a_2 u_i^{(m-2)} + \ldots\ldots + a_m u_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Also folgt aus (1)

$$c_i = -a_1 u_i^{(m-1)}, \qquad i = 1, 2, \ldots\ldots, m.$$

Daher wird die Determinante (18) folgendermassen dargestellt

$$-(-1)^{n+1} a_{n+1}\begin{vmatrix} u_1(x), \ldots\ldots, u_m(x) \\ u_1^{(m-2)}(\xi), \ldots, u_m^{(m-2)}(\xi) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u(\xi), \ldots\ldots\ldots, u_m(\xi) \end{vmatrix} - a_1(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0, & u_1(\xi), \ldots\ldots, u_m(x) \\ 0, & u_1^{(m-1)}(\xi), \ldots, u_m^{(m-1)}(\xi) \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1, & u_1^{(m-n-1)}(\xi), \ldots\ldots\ldots \\ 0, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, & u_1(\xi), \ldots\ldots, u_m(\xi) \end{vmatrix}.$$

Aus (13) folgt also;

die erste Determinante $= -a_{n+1} A_0 (-1)^{n+1}$,

die zweite Determinante $= -a_1 A_n$.

In analoger Weise folgt aus (16)

$$(19) \qquad \frac{\partial A_{m-1}}{\partial \xi} = -a_m A_0 (-1)^m - a_1 A_{m-1},$$

und

$$(20) \qquad \frac{\partial \triangle}{\partial \xi} = \begin{vmatrix} u_1^{(m)}(\xi), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m)}(\xi) \\ u_1^{(m-2)}(\xi), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m-2)}(\xi) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ u_1(\xi), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(\xi) \end{vmatrix} = -a_1 \triangle.$$

Endlich betrachten wir die Determinante (15). Durch Vergleich mit (13), kann man leicht sehen, dass sie gleich A_{n+1} ist.

Also erhalten wir aus (14), (15) und (18),

$$\frac{\partial A_n}{\partial \xi} = -a_{n+1}A_0(-1)^{n+1} - a_1 A_n + A_{n+1}, \qquad [n \neq 0,\ n < m-1]. \tag{21}$$

Aus (16)

$$\frac{\partial A_0}{\partial \xi} = A_1 \tag{22}$$

Daraus

$$\frac{\partial D(x,\xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{\frac{A_0}{\triangle}\right\} = \frac{\partial A_0}{\partial \xi}\,\frac{1}{\triangle} - \frac{A_0}{\triangle^2}\,\frac{\partial \triangle}{\partial \xi} = \frac{A_1}{\triangle} + \frac{A_0}{\triangle}a_1,$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial \xi}D(x,\xi) - a_1 D(x,\xi) = \frac{A_1}{\triangle}. \tag{23}$$

Nimmt man an

$$\frac{\partial^n}{\partial \xi^n}D(x,\xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi^{n-1}}\left\{a_1 D(x,\xi)\right\} + \ldots\ldots + (-1)^n a_n D(x,\xi) = \frac{A_n}{\triangle}, \tag{24}$$

so wird

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial \xi^{n+1}}D(x,\xi) - \frac{\partial^n}{\partial \xi^n}\left\{a_1 D(x,\xi)\right\} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{a_n D(x,\xi)\right\}$$
$$= \frac{\partial A_n}{\partial \xi}\,\frac{1}{\triangle} - \frac{A_n}{\triangle^2}\,\frac{\partial \triangle}{\partial \xi},$$

gemäß (20) und (21)

$$= -a_{n+1}(-1)^{n+1}\frac{A_0}{\triangle} - a_1\frac{A_n}{\triangle} + \frac{A_{n+1}}{\triangle} + \frac{A_n}{\triangle}a_1.$$

Also

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial \xi^{n+1}}D(x,\xi) - \frac{\partial^n}{\partial \xi^n}\left\{a_1 D(x,\xi)\right\} + \ldots\ldots + (-1)^{n+1}a_{n+1}D(x,\xi) = \frac{A_{n+1}}{\triangle}$$

Damit wird die Annahme (24) bestätigt. Nach (9) lautet die Formel

$$f_n = \frac{A_n}{\triangle} \tag{24$^\times$}$$

Im Falle wo $n=m-1$ ist, erhält man aus (19) und (20)

$$\frac{\partial^m}{\partial\xi^m}D(x,\xi)-\frac{\partial^{m-1}}{\partial\xi^{m-1}}\Big\{a_1D(x,\xi)\Big\}+\ldots\ldots+(-1)^{m-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\Big\{a_{m-1}D(x,\xi)\Big\}$$
$$=-(-1)^m\frac{a_mA_0}{\triangle}-a_1\frac{A_{m-1}}{\triangle}+a_1\frac{A_{m-1}}{\triangle}.$$

Also

(25) $$\frac{\partial^m}{\partial\xi^m}D(x,\xi)-\frac{\partial^{m-1}}{\partial\xi^{m-1}}\Big\{a_1L(x,\xi)\Big\}+\ldots\ldots+(-1)^m a_mD(x,\xi)=0,$$

oder nach (9)

($25^\times$) $$f_m=0.$$

Endlich schliessen wir aus (9) und ($24^\times$)

(26) $$F_1(x,\xi)=\frac{v^{(m-1)}A_0+v^{(m-2)}A_1+\ldots\ldots+vA^{m-1}}{\triangle},$$

und aus (10) und (25)

$$F_2(x,\xi)=0.$$

Die Gleichung (26) lässt sich in der Form

(27) $$F_1(x,\xi)=-\begin{vmatrix} 0, & u_1(x), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(x) \\ v^{(m-1)}(\xi), & u_1^{(m-1)}(\xi), & \ldots\ldots, & u_m^{(m-1)}(\xi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v^{(1)}(\xi), & u_1^{(1)}(\xi), & \ldots & \ldots \\ v(\xi), & u_1(\xi), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(\xi) \end{vmatrix}\div\triangle$$

darstellen.

Folglich ist

$$F_1(x,x)=v(x).$$

Daher bekommen wir

(28) $$v(x)=F_1(x,\alpha)+\int_\alpha^x D(x,\xi)F_3(\xi)d\xi.$$

Nimmt man die Anfangsbedingungen wie folgend an,

$$v_i(\alpha)=u_i(\alpha),\ v_i^{(1)}(\alpha)=u_i^{(1)}(\alpha),\ldots\ldots,\ v_i^{(m-1)}(\alpha)=u_i^{(m-1)}(\alpha),$$

so lautet die Gleichung (28):

$$v_i = u_i + \int_\alpha^x D(x,\xi) F_3(\xi) d\xi. \tag{29}$$

Satz I. u_i und v_i seien die Funktionen, welche verschiedenen linearen Differentialgleichungen m-ter Ordnung genügen. Nimmt man an, dass v_i und die höheren Ableitungen von v_i nach x bis zur $(m-1)$ -ten in $x=\alpha$ folgendermassen vorgeschrieben sind

$$v_i(\alpha) = u_i(\alpha),\ v_i^{(1)}(\alpha) = u_i^{(1)}(\alpha), \ldots\ldots,\ v_i^{(m-1)}(\alpha) = u_i^{(m-1)}(\alpha),$$

so sind die Funktionen u_i und v_i durch die Integralgleichung

$$v_i(x) = u_i(x) + \int_\alpha^x D(x,\xi) F_3(\xi) d\xi \tag{30}$$ [1]

miteinander verknüpft.

Setzen wir

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots\ldots + a_m u_m,$$
$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots\ldots + a_m v_m,$$

so können wir $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_m$ so wählen, dass u und die höhere Ableitungen von u nach x bis zur $(m-2)$ ten einschliesslich in $x=\alpha$ verschwinden.

Aus (13) und (24) folgt, dass die Funktion $D(x,\xi)$ und die höheren Ableitungen von $D(x,\xi)$ nach ξ bis zur $(m-2)$-ten einschliesslich in $\xi = x$ verschwinden.

Daher wird

$$\int_\alpha^x D(x,\xi) F_3(\xi) d\xi = \int_\alpha^x K(x,\xi) v(\xi) d\xi,$$

wobei zur Abkürzung

$$K(x,\xi) = D(x,\xi)(a_m - b_m) - \frac{\partial}{\partial\xi}\Big\{D(x,\xi)(a_{m-1} - b_{m-1})\Big\} + \ldots\ldots + (-1)^{m-1} \frac{\partial^{m-1}}{\partial\xi^{m-1}}\Big\{D(x,\xi)(a_1 - b_1)\Big\} \tag{31}$$

1) Diese Gleichung kann man auch durch die Variation der Konstanten aus der Gleichung (1) gewinnen.

gesetzt ist.

Es gilt also:

Satz II. u_i und v_i seien die Funktionen, welche verschiedenen linearen Differentialgleichungen m-ter Ordnung genügen. Nimmt man an, dass v_i und die höheren Ableitungen von v_i nach x bis zur $(m-1)$-ten in $x=a$ folgendermassen vorgeschrieben sind

$$v_i(a)=u_i(a),\ v_i^{(1)}(a)=u_i^{(1)}(a),\ldots\ldots,\ v_i^{(m-1)}(a)=u_i^{(m-1)}(a),$$

so sind die Funktionen u und v durch die Volterrasche Integralgleichung

$$v(x)=u(x)+\int_a^x K(x,\xi)v(\xi)d\xi \tag{32}$$

miteinander verknüpft.

Der soeben bewiesene Satz muss offenbar gültig bleiben, auch wenn man u_i und v_i miteinander vertauscht. Es seien v_1, v_2,...v_m die unabhängigen Lösungen der differentialgleichung (2) und wir setzen

$$\triangle_1=\begin{vmatrix} v_1^{(m-1)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & v_m^{(m-1)}(\xi) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ v_1^{(1)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & v_m^{(1)}(\xi) \\ v_1(\xi), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & v_m(\xi) \end{vmatrix}, \tag{33}$$

$$D_1(x,\xi)=\begin{vmatrix} v_1(x), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & v_m(x) \\ v^{(m-2)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & v_m^{(m-2)}(\xi) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ v_1^{(1)}(\xi), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & v_m^{(1)}(\xi) \\ v_1(\xi), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & v_m(\xi) \end{vmatrix} \div \triangle_1. \tag{34}$$

Nach Satz II. erhalten wir die Volterrasche Integralgleichung

$$u(x)=v(x)+\int_a^x S(x,\xi)u(\xi)d\xi, \tag{35}$$

wobei

$$S(x,\xi)=\Big[D_1(x,\xi)(b_m-a_m)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Big\{D_1(x,\xi)(b_{m-1}-a_{m-1})\Big\} \tag{36}$$
$$+\ldots\ldots+(-1)^{m-1}\frac{\partial^{m-1}}{\partial\xi^{m-1}}\Big\{D_1(x,\xi)(b_1-a_1)\Big\}\Big].$$

Es gilt also:

Satz III. Wenn die Funktionen u_i und v_i den Anfangsbedingungen genügen, so ist der Kern der Integralgleichung (32) die Resolvente des Kerns der Integralgleichung (35). Also

$$S(x,\xi)=\text{der Resolvente des Kerns } K(x,\xi).$$

Da a ein Punkt der Bestimmtheit von den Gleichungen (1) und (2) ist, so gibt es immer die Funktionen, welche imstande sind, den Anfangsbedingungen zu genügen. Ferner $D(x,\xi)$ und auch $D_1(x,\xi)$ sind gegenüber allgemeinen linearen Substitutionen

$$\begin{aligned} U_1 &= a_{11}u_1+a_{12}u_2+\ldots\ldots+a_{1m}u_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_m &= a_{m1}u_1+a_{m2}u_2+\ldots\ldots+a_{mm}u_m, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} V_1 &= b_{11}v_1+b_{12}v_2+\ldots\ldots+b_{1m}v_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ V_m &= b_{m1}v_1+b_{m2}v_2+\ldots\ldots+b_{mm}v_m, \end{aligned}$$

invariant. Daher kann man die Annahme in Satz III beseitigen. Der soeben bewiesene Satz lässt sich also so aussprechen:

Satz IV. Es seien u_1, $u_2,\ldots\ldots,u_m$ die unabhängigen Lösungen der Gleichung

$$u^{(m)}+a_1u^{(m-1)}+\ldots\ldots+a_mu=o,$$

und es seien v_1, $v_2,\ldots\ldots$, v_m die unabhängigen Lösungen der Gleichung

$$v^{(m)}+b_1v^{(m-1)}+\ldots\ldots+b_mv=o.$$

Bilden wir zwei Kerne $K(x,\xi)$ und $S(x,\xi)$, so ist

$$K(x,\xi)=\text{der Resolvente des Kerns } S(x,\xi),$$

bzw.

$$S(x,\xi)=\text{der Resolvente des Kerns } K(x,\xi),$$

wobei $K(x,\xi)$ in (31) und $S(x,\xi)$ in (35) gegeben sind.

Als einfaches Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^2u}{dx^2}+u=o.$$

Die Lösungen sind

$$u_1=\sin x, \qquad u_2=\cos x.$$

Aus (4), (31) und (36) folgt:

$$D(x,\xi)=\sin(x-\xi),$$

(37) $$K(x,\xi)=\sin(x-\xi)(1-b_2)+\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\sin(x-\xi)b_1\right\},$$

(38) $$S(x,\xi)=D_1(x,\xi)(b_2-1)-\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{D_1(x,\xi)b_1\right\},$$

wobei

$$D_1(x,\xi)=\frac{\begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1(\xi) & v_2(\xi)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v_1'(\xi) & v_2'(\xi) \\ v_1(\xi) & v_2(\xi)\end{vmatrix}},$$

und v_1, v_2 die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2v}{dx^2}+b_1\frac{dv}{dx}+b_2v=o$$

sind.

1. Ist

$$K(x,\xi)=k\sin(x-\xi)$$

ein Kern, so folgt aus (37)

$$1-b_2=k, \qquad b_1=o.$$

Daraus

$$\frac{d^2v}{dx^2}+(1-k)v=o,$$

$$v_1=\sin\sqrt{1-k}\,x, \qquad v_2=\cos\sqrt{1-k}\,x,$$

und folglich ist:

$$D_1(x,\xi)=\frac{\begin{vmatrix} \sin\sqrt{1-k}\,x & \cos\sqrt{1-k}\,x \\ \sin\sqrt{1-k}\,\xi & \cos\sqrt{1-k}\,\xi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sqrt{1-k}\cos\sqrt{1-k}\,\xi & -\sqrt{1-k}\sin\sqrt{1-k}\,\xi \\ \sin\sqrt{1-k}\,\xi & \cos\sqrt{1-k}\,\xi \end{vmatrix}}=\frac{\sin\sqrt{1-k}\,(x-\xi)}{\sqrt{1-k}}.$$

Aus (38) ist die Resolvente

$$\text{für } 1-k>0,\quad S(x,\xi)=-\frac{k}{\sqrt{1-k}}\sin\sqrt{1-k}(x-\xi),$$

$$\text{für } 1-k=0,\quad S(x,\xi)=-(x-\xi),$$

$$\text{für } 1-k<0,\quad S(x,\xi)=-\frac{k}{\sqrt{k-1}}\sin h\sqrt{k-1}(x-\xi).$$

2. Ist

$$K(x,\xi)=2k\cos(x-\xi)$$

ein Kern, so folgt aus (37)

$$1-b_2=0, \qquad b_1=-2k.$$

Daraus

$$v''-2kv'+v=0,$$

$$v_1=e^{(k+\sqrt{k^2-1})x},\quad v_2=e^{(k-\sqrt{k^2-1})x},$$

und folglich ist:

$$D_1(x,\xi)=\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}\,e^{k(x-\xi)}\,\frac{e^{\sqrt{k^2-1}(x-\xi)}-e^{-\sqrt{k^2-1}(x-\xi)}}{2}.$$

Also

$$\text{für } k^2-1<0,\ D_1(x,\xi)=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\,e^{k(x-\xi)}\sin\sqrt{1-k^2}(x-\xi),$$

$$\text{für } k^2-1=0,\ D_1(x,\xi)=e^{(x-\xi)}(x-\xi),$$

$$\text{für } k_2-1>0,\ D_1(x,\xi)=\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}\,e^{k(x-\xi)}\sinh\sqrt{1-k^2}(x-\xi).$$

Aus (38) folgt, dass die Resolvente des Kerns $K(x,\xi)$

$$\text{für } k^2-1<0,\quad S(x,\xi)=\frac{2k}{\sqrt{1-k^2}}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{e^{k(x-\xi)}\sin\sqrt{1-k^2}(x-\xi)\right\},$$

$$\text{für } k^2-1=0,\quad S(x,\xi)=2\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{e^{(x-\xi)}(x-\xi)\right\},$$

$$\text{für } k^2-1>0,\quad S(x,\xi)=\frac{2k}{\sqrt{k^2-1}}\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{e^{k(x-\xi)}\sin h\sqrt{k^2-1}(x-\xi)\right\}$$

ist.

Ist also eine Differentialgleichung gegeben, so kann man, wie schon erwähnt, einen Kern bilden, zu dem eine Resolvente (36) korrespondiert. Aber wie kann man die Resolvente finden, wenn der Kern zuerst gegeben ist? Ist der Kern in der Gestalt

$$K(x,\xi)=u_1(x)A_1(\xi)+u_2(x)A_2(\xi)+\ldots\ldots+u_m(x)A_m(\xi), \tag{39}$$

zu schreiben, so kann man eine lineare Differentialgleichung, deren Lösungen $u_1,u_2,\ldots\ldots,\ u_m$ sind, bilden.

Diese Gleichung sei

$$u^{(m)}+a_1u^{(m-1)}+\ldots\ldots+a_mu=0.$$

Da $D(x,\xi)$ in der Form

$$D(x_1\xi)=u_1(x)B_1(\xi)+u_2(x)B_2(\xi)+\ldots\ldots+u_m(x)B_m(\xi) \tag{40}$$

dargestellt wird, so erhält man durch Vergleich des Kerns (31) mit (39)

$$\begin{aligned}A_i(\xi)=B_i(\xi)(a_m-b_m)&-\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{B_i(\xi)(a_{m-1}-b_{m-1})\right\}\\ &+\ldots\ldots+(-1)^{m-1}\frac{\partial^{m-1}}{\partial\xi^{m-1}}\left\{B_i(\xi)(a_1-b_1)\right\},\\ &i=1,\ 2,\ldots\ldots,\ m.\end{aligned} \tag{41}$$

Aus diesen linearen Differentialgleichungen kann man die Lösungen b_1, $b_2,\ldots\ldots,\ b_m$ gewinnen.

Hiermit bilden wir

$$v^{(m)}+b_1v^{(m-1)}+\ldots\ldots+b_mv=0.$$

Wenn man die Lösungen $v_1,\ v_2,\ldots\ldots,\ v_m$ bekommen kann, so erhält man aus (34) und (36) $D(x,\xi)$ und $S(x,\xi)$.

Als einfächstes Beispiel betrachten wir den Kern

(42) $$K(t,\tau)=a_1\alpha^2k(\tau)e^{-\alpha^2\int_\tau^t k(t)dt}.$$

Differentiiert man $K(t,\tau)$ nach t und multipliziert es mit $1/-\alpha^2k(\tau)$, so erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt}-\alpha^2k(t)u=0.$$

Daraus haben wir

$$u=e^{-\alpha^2\int_0^t k(t)dt},$$

$$D(t,\tau)=\frac{e^{-\alpha^2\int_0 k(t)dt}}{e^{-\alpha^2\int_0^\tau k(t)dt}}=e^{-\alpha^2\int_\tau^t k(t)dt},$$

$$K(t,\tau)=(\alpha^2k(\tau)-b)e^{-\alpha^2\int_\tau^t k(t)dt}.$$

Durch Vergleich mit (42) kann man b bestimmen

$$b=-\alpha^2k(\tau)(a_1-1),$$

daraus

$$\frac{dv}{dt}-(a_1-1)\alpha^2k(\tau)v=0,\quad v=e^{(a_1-1)\alpha^2\int_0 k(t)dt}.$$

Also ist die Resolvente

$$S(t,\tau)=a_1\alpha^2k(\tau)e^{(a_1-1)\alpha^2\int_\tau^t k(t)dt}.$$

Zusammenfassend kann man sagen:

Satz V. Es sei der Kern in der Form

$$K(x,\xi)=u_1(x)A_1(\xi)+\ldots\ldots+u_m(x)A_m(\xi)$$

gegeben. Wir bilden nachstehende lineare Differentialgleichung

$$M \equiv \begin{vmatrix} u^{(m)}(x), & u_1^{(m)}(x), \ldots\ldots\ldots, & u_m^{(m)}(x) \\ u^{(m-1)}(x), & u^{(m-1)}(x), \ \ldots\ldots, & u_m^{(m-1)}(x) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ u(x), & u_1(x), \ldots\ldots\ldots\ldots, & u_m(x) \end{vmatrix} \div \triangle(x).$$

Wir schreiben

$$a_i(x) = \frac{\partial M}{\partial \left\{ u^{(i)}(x) \right\}},$$

und

$$B_i(\xi) = \frac{\partial D(x,\xi)}{\partial \left\{ u_i(x) \right\}}.$$

Aus den m linearen Differentialgleichungen:

$$A_i(\xi) = B_i(\xi)(a_m - b_m) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{ B_i(\xi)(a_{m-1} - b_{m-1}) \right\} + \ldots\ldots + (-1)^{m-1} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \xi^{m-1}} \left\{ B_i(\xi)(a_1 - b_1) \right\},$$

$$\left[i = 1, \ 2, \ldots\ldots, m \right]$$

bestimmen wir $b_1, \ b_2, \ldots\ldots, \ b_m$. Daraus

$$v^{(m)} + b_1 v^{(m-1)} + \ldots\ldots + b_m v = 0.$$

Nach (36) bilden wir $S(x,\xi)$ mit den Lösungen

$$S(x,\xi) = D_1(x\xi)(b_m - a_m) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left\{ D_1(x,\xi)(b_{m-1} - a_{m-1}) \right\} + \ldots\ldots + (-1)^{m-2} \frac{\partial^{m-1}}{\partial \xi^{m-1}} \left\{ D_1(x,\xi)(b_1 - a_1) \right\}.$$

Dann ist $S(x,\xi)$ die Resolvente.

Als Beispiel wollen wir einen Kern betrachten:

$$K(x,\xi) = a_0(\xi) + a_1(\xi)(\xi - x) + \ldots\ldots + a_{n-1}(\xi) \frac{(\xi - x)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Nach Satz V. ist

$$\frac{du^n}{dx^n}=o,$$

$$D(x,\xi)=\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)\,!},$$

$$K(x,\xi)=\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)\,!}(-b_{n-1})-\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)\,!}(-b_{n-2})\right\}+$$
$$\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}}\left\{\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)\,!}(-b_1)\right\}.$$

Durch Vergleich mit dem gegebenen Kern erhalten wir

$$(-1)^{n-i-1}a_{n-i-1}=(-1)^{n-1}(-b_1)^{(n-1-i)}c^i_{n-1}+(-1)^{n-2}(-b_2)^{(n-2-i)}c^i_{n-2}+\ldots\ldots$$
$$+(-1)^{n-1-i}(-b_{n-1-i}),$$

$$v^{(n)}+b_1v^{(n-1)}+\ldots\ldots+b_{n-1}v=o,$$

$$S(x,\xi)=D_1(x,\xi)b_{n-1}-\frac{\partial}{\partial\xi}\left\{D_1(x,\xi)b_{n-2}\right\}+\ldots\ldots+(-1)_{n-1}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi^{n-1}}\left\{D_1(x,\xi)b_1\right\},$$

$$S(x,\xi)=D_1(x,\xi)a_{n-1}+a_{n-2}\frac{\partial}{\partial\xi}D_1(x,\xi)+\ldots\ldots+a_o\frac{\partial^{n-1}}{\partial\xi^n}D_1(x,\xi)^{1)}.$$

Aus (25) folgt

$$\frac{d^nD_1(x,\xi)}{d\xi^n}+a_1\frac{d^{n-1}D_1(x,\xi)}{d\xi^{n-1}}+\ldots\ldots+a_{n-1}D_1(x,\xi)=o.$$

Ist der Kern

$$K(x,\xi)=a_o(x)+a_1(x)(x-\xi)+\ldots\ldots+\frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1},$$

so wird die Resolvente nach Satz IV berechnet.

$$\frac{d^nu}{dx^n}=o,$$

$$\frac{d^nv}{dx^n}-(a_o\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}+\ldots\ldots+a_{n-1}v)=o,$$

$$v(x)=u(x)+\int_a^x\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)\,!}\left\{a_o(\xi)v^{(n-1)}(\xi)+a_1(\xi)v^{(n-2)}(\xi)+\ldots\ldots+a_{n-1}(\xi)v(\xi)\right\}d\xi.$$

---

1) Die Resolvente ist in dem Buch von Goursat „Cours d'Analyse," III. S. 330 gegeben.

Daraus haben wir

$$a_o(x)v^{n-1}(x)+a_1(x)v^{(n-2)}(x)+\ldots\ldots+a_{n-1}(x)v(x)$$
$$=a_o(x)u^{(n-1)}(x)+\ldots\ldots+a_{n-1}(x)u(x)+\int_\alpha^x K(x,\xi)\Big\{a_o v^{(n-1)}+\ldots\ldots+a_{n-1}v\Big\}d\xi,$$

oder

$$v^{(n)}(x)=\Big\{a_o(x)u^{(n-1)}(x)+\ldots\ldots+a_{n-1}(x)u(x)\Big\}+\int_\alpha^x K(x,\xi)v^{(n)}(\xi)d\xi.$$

Aus (34) und (35) folgt

$$u(x)=v(x)-\int_\alpha^x D_1(x,\xi)\Big\{a_o(\xi)u^{(n-1)}(\xi)+\ldots\ldots+a_n(\xi)u(\xi)\Big\}d\xi.$$

Daraus erhalten wir

$$\Big\{u^{(n-1)}(x)a_o(x)+\ldots\ldots+a_{n-1}(x)u(x)\Big\}=v^{(n)}-\int_o^x\Big\{a_o\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}D_1(x,\xi)+\ldots\ldots$$
$$+a_{n-1}D(x,\xi)\Big\}\times\Big\{a_o(\xi)u^{(n-1)}(\xi)+\ldots\ldots+a_{n-1}(\xi)u(\xi)\Big\}d\xi.$$

Hieraus ergibt sich:

$$S(x,\xi)=-\Big\{a_o(x)\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}D_1(x,\xi)+\ldots\ldots+a_n(x)D_1(x,\xi)\Big\},$$

oder

$$S(x,\xi)=-\frac{\partial^n}{\partial x^n}D_1(x,\xi).$$