HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	電刷子の彈性振動と固體粘性係數
Author(s)	林, 邦雄
Citation	Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido University, 8(1), 58-74
Issue Date	1948-02-20
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/37744
Type	bulletin (article)
File Information	8(1)_58-74.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

電刷子の彈性振動と固體粘性係數*

教授 林 邦 雄

(昭和22年1月15日)

On the elastic vibrations and solid viscosities of electrical brushes.

Kunio Hayashi

Abstract

It is favorable for a good commutation to obtain a better contact between the commutator and the brush. Of course, it is necessary to minimize the reactance voltage and the armature reaction. Already it is known that if the modulus of elasticity of the brush is small, it contacts theoretically to the commutator more closely, and a good commutation is obtained by experiments. But, for a high speed machine it is difficult to oftain a good contact by the brush vibration. The authour expressed that the solid viscosity plays the roll to minimize the vibrations by calculations. And he measured the coefficients of solid viscosities of many carbon brushes by the method of free vibrations.

The natural graphitic brush has the largest solid viscosity; and the order of the value is 10^6 c.g.s.,and the amorphous carbon brush has the smallest value of the order 10^5 c.g.s and the electro-graphitic brush has the medium value of the two.

He thinks that the reason why the natural graphitic brush is the fittest to the very high speed machine is that it has the lowest friction and the largest viscosity.

Content

I Introduction 58
II Theory 59
A. Longitudinal vibration 59
B. Transverse vibration 63
III Measurement 64
IV Conclusion 67
Appendix 68

I. 緒 論

回轉電氣機械の故障の多くは電刷子に關係したものであるが電刷子の性能として要求されるは無火花整流低摩擦係數無研磨性耐磨耗性機械的强度チヤツタリングを生ぜぬ事等である。是等は相互に關連して居て是等の總てを滿足する樣な優秀な刷子は未だ現はれて居ない。しかも是等の個々のものに就ての究明も未だ進捗して居ない。電刷子の整流現象に於て刷子が整流子に全面的に接觸す

* 文部省科學研究費，服部報公會研究費に依つて行つた。

ることが望ましいが實際に於ては刷子の曲率と整流子のそれとが異なる爲に摺動面の一部分しか接觸して居らぬ[1]。又其の上刷子は整流子面の不齊及び摩擦によつて絶えず振動して居る爲良好な接觸は行はれて居ない。彈性率の小さい刷子は刷子と整流子の曲率に差があつても密着しやすいので整流が良好なる場合が多い。電刷子の振動は低速機に於てはさして問題とならぬが高速機に於ては非常に起り易く其の結果火花發生刷子破損騒音發生整流子面の過度の溫度上昇等を惹起する。從來かゝる振動に就て多くの文献があり，夫等の結果は電刷子のみならず刷子保持器との合成體の振動が電刷子の働作に關係する事を結論して居る。又其等研究によれば整流子一回轉を一周期とする現象が認められるが[2]周波數の高い刷子の彈性振動に關してはあまり認められてゐない。彈性振動の存在を證據立てるものとしては Neukirchen[1] がその著書に整流子に存在する波形の模樣を寫眞にのせてゐる。

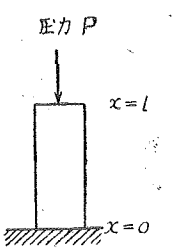
本論文は先づ刷子が保持器との間に摩擦力を受ける事なく自由に振動し得るものとして理想的な場合について計算を進めた。而して，其の振動の抑制作用をするものとして固體粘性係數を導入した。此の固體粘性が大きければ同一保持器で他の條件が同一なる場合には，振動が生じ難い事を示した。次に種々の刷子材について空氣中にて横振動に對する固體粘性係數を測定した。

II. 理　　論

使用狀態に於ける電刷子は保持器に收められスプリングで壓力を受けて居る，而して保持器との間にも摩擦力が存在する。かるが故に刷子の運動は刷子自體のみの運動ではなく又刷子と保持器とを固定した合成體の運動でもない。其の中間に位する樣に思はれる。かゝる複雜な問題は以上二つの兩極端の場合を調べてそれより推論するが良からうと思はれる。刷子自體の運動として考へられるのは整流子面の不齊に基づく振動と摩擦振動とであつて，是は縱振動と横振動とに分解しうる。以下夫に就て述べる。

A. 縱　振　動　電刷子の密度を ρ 彈性率を E 縱方向の變位を u 固體粘性係數を ξ 時間を t 距離を x とすれば其の縱振動の運動方程式は次の如く表はし得る。[8]

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\xi\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$



第　一　圖

1. 整流子面より $u_0\sin\omega t$ なる振動が與へられる場合

整流子面が正弦波的に凹凸が存在すれば回轉によつて刷子は上下運動をする。刷子壓力 P が充分大きくて刷子が整流子面を離れぬものとすれば其の振動は附錄 I に依り次の如くなる（刷子壓しのスプリングの質量は無視する）。

$$u=-\frac{P}{E}x+u_0\varepsilon^{j\omega t}\frac{\cos b(l-x)\cosh a(l-x)+j\sin b(l-x)\sinh a(l-x)}{\cos bl\cosh al+j\sin bl\sinh al}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\text{但し}\quad \left.\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{E^2+\omega^2\xi^2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{E^2+\omega^2\xi^2}-E\right)} \\ b &= \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{E^2+\omega^2\xi^2}}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{E^2+\omega^2\xi^2}+E\right)} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (3)$$

l は刷子長である。若し (2) 式に於て $\xi=0$ 即ち完全彈性體であれば

$$u = -\frac{P}{E}x + u_0 e^{jwt}\frac{\cos b(l-x)}{\cos bl} \cdots\cdots (4)$$

となる。上式で若し

$$bl = \frac{\pi}{2}(2n+1) \qquad (n=0,\ 1,\ 2\ \cdots\cdots) \cdots\cdots (5)$$

となれば同調現象を呈する。(5) 式に於て $n=0$ の場合をとれば

$$l = \frac{\pi}{2b} = \frac{\pi v_0}{2\omega} = \frac{v_0}{4f} = \frac{\lambda}{4} \cdots\cdots (5)'$$

$$\text{但し}\quad \lambda = v_0/f,\quad v_0 = \sqrt{E/\rho}$$

(5)′ は刷子長が四分の一波長に於て同調現象を呈する事を示して居る。次に固體粘性を考慮に入れて同調時に於ける變位を算出すれば

$$v_l \cong -\frac{P}{E}l + u_0 e^{jwt}\frac{1}{\sinh al} \cdots\cdots (6)$$

上式の al は附錄 (35) 式によれば

$$al \cong \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+\alpha^2}-1}{\sqrt{1+\alpha^2}}} \cdots\cdots (7)$$

$$\text{但し}\quad \alpha \equiv \frac{\omega\xi}{E} \cdots\cdots (8)$$

なる關係にある。此の式により種種 α のに對して $1/\sinh al$ を算出して第一表が得られた。

第 1 表

$\alpha = \frac{\omega\xi}{E}$	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.08
$\frac{1}{\sinh al}$	2.88	3.42	4.52	6.53	12 7	15.9

此の表は刷子の下端に整流子面から與へられた振幅と同調によつて上端に生ずる振幅との比を示す數である。

實際の數値を用ひて見る, $E=612\ \mathrm{kg/mm^2}$ $\rho=1.5$ なる刷子を用ひるものとする, 整流子周邊速度を 32 m/s セグメントの幅を 4mm とすれば整流子周波數 f は $f=8000\sim$ となり是に縱振動で同調する刷子長は (5)′ 式によつて $l=6.3$ cm となる。是は實際の機械に就て容易に起り得る場合

である。固體粘性係數は後記せる測定によれば $10^5 \sim 10^6$ である。それを用ひて $1/\sinh al$ を求めれば前者に於て 15 倍後者に於て 2.1 倍である。

第1表を見ると $1/\sinh al$ は α のみに關係し同一材質に就ては同調周波數が小さい程大きい値を取る。即ち長さの長い刷子で同調が生じれば短い刷子の場合よりも振幅比が大きくなる事を示して居る。低速機に於ても整流子周波數の二次又は三次高調波による同調は容易に起り得るものと考へられる。斯る同調が起きれば刷子を壓してゐる發條は振動によつて跳び上り其の結果刷子が整流子から離れる事も豫期される。

2. 刷子上面に壓力 P が急に印加される場合

回轉機の運動中刷子が振動して其の結果刷子の上面に發條の力 P が急に印加される場合も考へられる。但し茲では發條には質量がないものと假定する。附錄 II によつて

若し

$$\xi^2 < \frac{4\rho E l^2}{n^2\pi^2} \quad (n = 1, 2, 3\cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots (9)$$

ならば

$$u = \frac{P}{E}\left[-x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\varepsilon^{-\frac{\xi\lambda_n^2}{2\rho}t}\sin\lambda_n x\,\frac{\sin\theta_n t + \sqrt{\frac{4\rho E}{\xi^2\lambda_n^2} - 1}\cdot\cos\theta_n t}{\sqrt{\frac{4\rho E}{\xi^2\lambda_n^2} - 1}}\right] \cdots (10)$$

但し $\theta_n = \lambda_n\sqrt{\frac{E}{\rho} - \left(\frac{\xi\lambda_n}{2\rho}\right)^2}$

$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$

次に若し

$$\xi^2 > \frac{4\rho E l^2}{n^2\pi^2} \quad (n = 1, 2, 3\cdots\cdots) \qquad \cdots\cdots (11)$$

ならば

$$u = \frac{P}{E}\left[-x + 2\sum_{n}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\varepsilon^{-\frac{\xi\lambda_n^2}{2\rho}t}\sin\lambda_n x\,\frac{\sinh\theta_n' t + \sqrt{1 - \frac{4\rho E}{\xi^2\lambda_n^2}}\cdot\cosh\theta_n' t}{\sqrt{1 - \frac{4\rho E}{\xi^2\lambda_n^2}}}\right] \cdots (12)$$

但し $\theta_n' = \lambda_n\sqrt{\left(\frac{\xi\lambda_n}{2\rho}\right)^2 - \frac{E}{\rho}}$

$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$

以上2式を通じて ξ が大きければ過渡現象の項は速かに減衰してしまふのが肯かれる。

3. 刷子が V なる速度で整流子面に衝突する時

衝突の瞬間を $t = 0$ に選べば刷子が整流子面に接觸してゐる間は

$$\xi^2 < \frac{4\rho E l^2}{(2m+1)^2\pi^2} \qquad (m=0,\ 1,\ 2\ \cdots\cdots) \quad \cdots\cdots (13)$$

ならば

$$u = \sum_0^m \frac{8lV}{\pi^2(2m+1)^2}\,\varepsilon^{-\frac{\xi\lambda_m^2}{2\rho}t}\sin\lambda_m x\,\frac{\sin\theta_m t}{\sqrt{\frac{E}{\rho}-\left(\frac{\xi\lambda_m}{2\rho}\right)^2}} \quad \cdots\cdots (14)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{但し} \quad \lambda_m = (2m+1)\frac{\pi}{2l} \\ &\qquad\quad \theta_m = \lambda_m\sqrt{\frac{E}{\rho}-\left(\frac{\xi\lambda_m}{2\rho}\right)^2} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (15)$$

ξ が大きければ上式の示す如く振動は速に減衰する。又若しも

$$\xi^2 > \frac{4\rho E l^2}{(2m+1)^2\pi^2} \qquad (m=0,\ 1,\ 2\cdots\cdots) \quad \cdots\cdots (16)$$

ならば

$$u = \sum \frac{8lV}{\pi^2(2m+1)^2}\,\varepsilon^{-\frac{\xi\lambda_m^2}{2\rho}t}\sin\lambda_m x\,\frac{\sinh\theta'_m t}{\sqrt{\left(\frac{\xi\lambda_m}{2\rho}\right)^2-\frac{E}{\rho}}} \quad \cdots\cdots (17)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{但し} \quad \theta'_m = \lambda_m\sqrt{\left(\frac{\xi\lambda_m}{2\rho}\right)^2-\frac{E}{\rho}} \\ &\qquad\quad \lambda_m = (2m+1)\frac{\pi}{2l} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (18)$$

(17) 式は振動の解ではないが ξ の増加と共に u は小さくなり ξ が ∞ となれば u は 0 となる。上式を利用すれば 刷子が振流子面に V なる速度で衝突して反跳する速度 V' を求める事が出來る。

$$V' \fallingdotseq -\frac{8V}{\pi^2}\sum\frac{1}{(2m+1)^2}\,\varepsilon^{-\frac{\xi(2m+1)^2\pi^2}{4l\rho b_m}} \quad \cdots\cdots (19)$$

$$\text{但し} \quad b_m = \sqrt{\frac{E}{\rho}-\left(\frac{\xi\lambda_m}{2\rho}\right)^2}$$

更に (19) 式を利用して，整流子面の不齊の原因に依り靜止して居る刷子が上方に衝擊を受けた場合を解く事が出來る。整流子面の上方の分速度を V とし刷子の得る速度を V' とすれば

$$V' = V\left[1+\sum\frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{1}{(2m+1)^2}\,\varepsilon^{-\frac{\xi(2m+1)^2\pi^2}{4l\rho b_m}}\right] \quad \cdots\cdots (20)$$

若しも刷子が完全彈性體ならば $V' = 2V$ となる。次に刷子が整流子面に衝突した時其の衝突面の

受ける最大の力は (14) を利用して

$$\left[E\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\ t=l/b_m}}=\frac{4VE}{\pi}\sum_{0}^{m}\frac{(-1)^m\,\varepsilon^{-\frac{\xi(2m+1)^2\pi^2}{4l\rho\,b_m}}}{(2m+1)b_m} \quad \cdots\cdots (21)$$

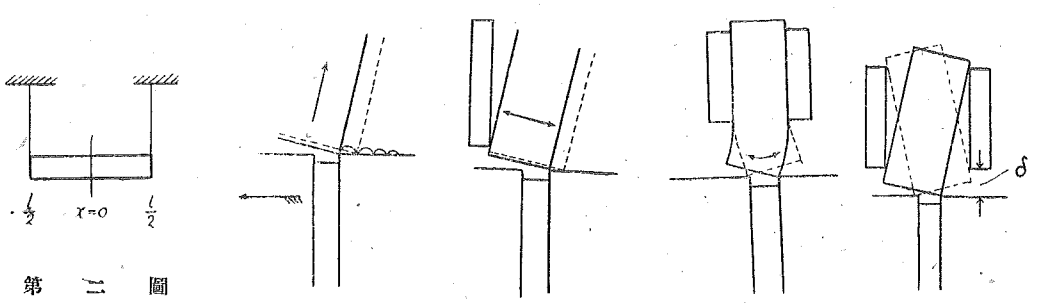
完全彈性體の場合は

$$E\,\partial u/\partial x=V\sqrt{E\rho} \quad \cdots\cdots (22)$$

(22) 式に實際に近い數値を入れる。$V=5$ m/s $E=600$ kg/mm^2 $\rho=1.5$ を入れると (22) の値は 150 kg/cm^2 となる。

Neukirchen に依れば整流子面に等間隔に細い平行線が見られる事があるが，刷子の下端の衝撃によつて作られたものと解せられる。是は縱振動によるものか横振動によるものか又は厚み振動によるものか明かでない。筆者の經驗では 3000 r.p.m. 1000 V 高壓直流發電機に於て火花の烈しかつたものに就き保持器を整流子面に近づけ（第三圖の δ を小さく）て火花を大いに抑制した事がある。(b) 圖の樣な横振動による原因もかなり大きいのであらうと想像する。

B. 横 振 動 刷子保持器中で刷子がどの樣な横振動をなすか？ 一定の支持點も固定點もないので横振動は明かでない。基礎運動方程式は



第 二 圖

a. 縱振動ニヨル反跳　b. 厚ミ振動　c. 横 振 動

第 三 圖

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+Ek^2\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\xi k^2\frac{\partial^5 y}{\partial t\partial x^4}=0 \quad \cdots\cdots (23)$$ [8]

k は刷子斷面の回轉半徑である。此の式の解は周知の如く兩端支持の場合は

$$y=A\varepsilon^{-\frac{\pi^4\xi k^2}{2\rho l^4}t}\left\{\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\right\}\sqrt{\frac{\pi^4Ek^2}{\rho l^4}-\frac{\pi^8\xi^2k^4}{4\rho^2l^8}}\,t\cdot\cos\frac{\pi x}{l} \quad \cdots\cdots (24)$$

l は刷子長である。一端固定他端自由なる場合には

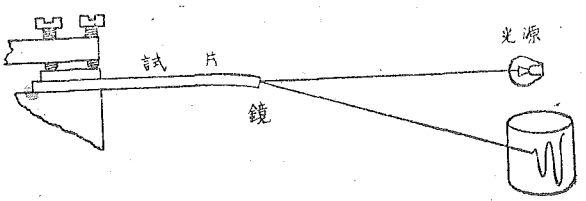
$$y=A\varepsilon^{-\frac{\xi k^2Z_1^4}{2\rho l^4}t}\sin\left(\sqrt{\frac{Ek^2Z_1^4}{\rho l^4}-\left(\frac{\xi k^2Z_1^4}{2\rho l^4}\right)^2}\cdot t+\alpha\right) \quad \cdots\cdots (25)$$

A は定數, $Z_1 = 1.8750$ である。

以上横振動に於ても縱振動と同樣に固體粘性が振動抑制作用を營む事が證明された。

III. 測 定

固體粘性係數の測定法としては强制振動による方法と自由振動による方法がある。前者に於ては縱横兩振動に就て行ふ事が出來るが後者に於ては縱振動に就ては測定困難である。强制振動による方法は外力の周波數を變化せしめ同調曲線を求めその半價幅より求め[3], 自由振動に依る方法はその振動を記錄し, 其の對數減衰率入より算定する。電刷子の固體粘性の測定に關しては宗宮教授が發表されて居るのみで他には未だ見受けられない。同教授の採用したのは自由振動法[7]であつて, 筆者も其の共同實驗をしたのであるが以下述べる方法も自由振動法を採用した。刷子の試片として



第 四 圖

は厚 1.8 mm 幅 4 mm 有効長 5.5 cm を用ひ先端に小鏡を取附け空氣中に於て自由振動をさせてオシログラフペーパに撮影した。附錄 IV に示す樣に片持梁の先端に小質量を取附けた場合の減衰定數 α は是を取附けない場合の値と補正係數とから

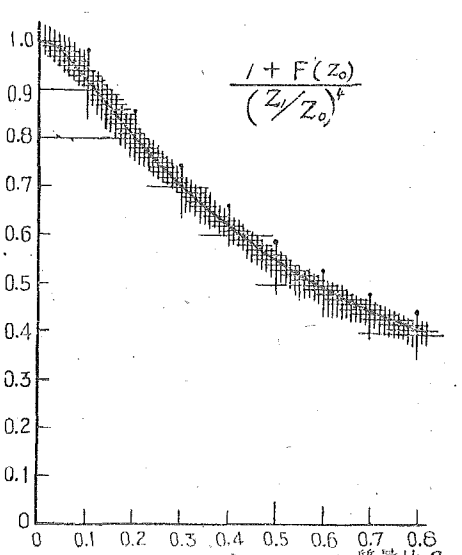
$$\alpha = \frac{Z_1^4 \xi k^2}{2\rho l^4} \cdot \frac{1 + F(Z_0)}{(Z_1/Z_0)^4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (26)$$

但し $Z_1 \equiv 1.8750$

(26) 式で α は二項の積となつて居るが後の項は補正係數で第五圖に示してある。横軸には試片質量に對する附加質量の比 C をとつてあるので C が決まれば圖より直ちに補正係數が求められる

裝 置 試料の一端を固定して自由振動をせしめる, 此の取附けには充分の注意を必要とする。試片を壓着する面が完全に密着して居なければ E, ξ の算定に誤差が導入される (圖參照)。

試片の大さは實驗上 ξ がその大さの影響を受ける事が知られたので略一定のものを用ひる事とし厚 1.8 幅 4 長 55 mm とした。以前行つた實驗に



第 五 圖

於ては 1 mm 程度の眞空中に於ては ξ に對する空氣の影響が見られなかつたので今度も空氣中に於て測定した。試片に取付けられた小鏡は 55.3 mg 試片は約 500 mg 程度である。試片の先端に取付けた鏡で光を反射して試片の振動を感光紙に撮したが鏡と感光紙の距離は 96.5 cm とした。

實測値　試片の長さがξ の値に影響するか否かを確める爲に◎EG-3 なる刷子材で有効長を變へて測定した。其れを第二表に掲げる (厚 0.144 cm 幅 0.388 cm 密度 1.55)。

第　二　表

有効長 cm	二倍振幅 cm	周期 sec	E kg/mm²	ξ (*c.g.s.*)
3.47	0.47～6.16	0.0038	540	(4.72～ 8.85)×10⁵
3.98	0.34～7.18	0.00462	600	(5.47～12.7)×10⁵
4.45	0.35～5.76	0.00559	600	(6.31～14.7)×10⁵
4.97	0.35～5.76	0.00714	540	(7.12～15.6)×10⁵
5.52	0.30～6.10	0.00893	510	(9.17～20.0)×10⁵

表二第の振幅は感光紙上の振幅をさす。同一の素材につき厚さを厚くしたものについては第三表に示す。

第　三　表

厚 1.44 mm 幅 3.87 mm		厚 1.91 mm 幅 3.82 mm	
二重振幅 cm	ξ	二重振幅 cm	ξ
6.10		6.32	
	20.4×10⁵		14.0×10⁵
4.81		5.11	
	17.3×10⁵		11.9×10⁵
3.51		3.90	
	15.7×10⁵		10.5×10⁵
2.18		2.62	
	13.2×10⁵		9.4×10⁵
1.46		1.85	

第　四　表

ϕ 2703 (長 5.5cm 厚 0.178cm 幅 0.4cm 密度 1.58) のξ

波番號の	二重振幅 cm	λ_{mean}	ξ
0	6.22		
		0.0311	5.4×10⁵
2	5.85		
		0.0324	5.6 〃
5	5.33		
		0.0260	4.5 〃
10	4.68		
		0.0245	4.3 〃
20	3.66		
		0.0230	4.0 〃
30	2.91		
		0.0214	3.7 〃
40	2.35		
		0.0189	3.3 〃
60	1.61		
		0.0178	3.1 〃
80	1.13		
		0.0174	3.0 〃
100	0.78		

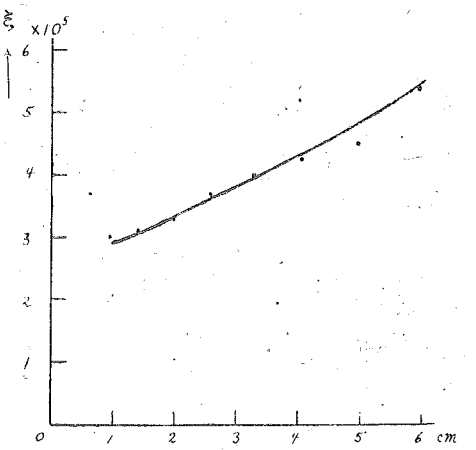
上表で見る如く厚長振幅等異るに伴つて ξ の値が變化してゐる。材質の比較試驗としては出來るだけ同一條件で行はねばならぬので厚さ 0.18 幅 0.4 長 5.5 cm として行ふ事にした。併し工作は總て手によつたので多少の不同は免れなかつた。斯くして行つた試驗の一例を擧げれば第四表となる。

第四表に於て對數減衰率 λ は數個の波の平均値を取り又周期 T は測定範圍に於ける平均値を採用した。此の測定に於ては周期は振幅に依つて影響を受け振幅の大となるに伴つて大きくなつた。是を第五表に載せる。

第 五 表　振動周期の振幅に依る變化

◎*EG*—3　　$l=5.52$cm

二重振幅 cm	周期 sec
6.7 ~ 4.0	0.00861
4.0 ~ 2.7	0.00852
2.7 ~ 1.4	0.00835
1.4 ~ 0.8	0.00826
0.8 ~ 0.5	0.00831



二 倍 振 幅

第 六 圖

振幅による影響 ϕ 2703 使用

第五表の如く T が變化する事は彈性限界を超へて E が見掛上小さくなるのに基因とすると考へられる。次に以上の如くして得た結果を第六表に記す。

第 六 表　各種電刷子の固體粘性係數 ξ

刷子名	厚 cm	幅 cm	長 cm	密度	彈性率 kg/mm²	二倍振幅 cm	$\xi\times10^{-5}$ c.g.s.
ϕ 602	0.181	0.409	5.50	1.51	290	0.6~3.0~6.4	6.8~8.2~10.9
NCC 259	0.178	0.379	4.00	1.54	445	0.6~3.0~5.5	4.2~7.2~9.1
ϕ 2703	0.178	0.400	5.50	1.57	930	0.9~3.8~6.4	2.7~4.3~6.1
同上一次	0.180	0.395	〃	1.47	980	1.0~3.5~6.8	1.0~1.2~1.3
◎ *EG—GS*	0.183	0.415	〃	1.47	414	0.5~3.6	4.8~7.7
同上一次	0.196	0.396	〃	1.39	534	0.3~4.3~7.1	4.3~6.0~6.2
◎ *EG*—1	0.176	0.361	〃	1.65	794	0.5~4.0~6.5	5.1~7.8~9.2
◎ *EG*—3	0.194	0.382	〃	1.59	559	0.3~3.9~6.3	4.6~1.1~1.4
同上一次			〃	1.48	870	0.8~3.3~7.1	5.5~7.8~8.7
◎ *EG*—5	0.161	0.376	〃	1.58	693	0.6~3.6~7.1	6.3~9.6~1.3
同上一次	0.179	0.400	〃	1.50	960	0.9~3.3~7.8	5.3~7.6~9.3
◎ *EG*—9	0.177	0.391	〃	1.66	1100	0.6~3.8~6.6	6.2~7.2~8.4
◎ *EG—AS*	0.176	0.396	〃	1.66	2370	0.7~3.7~7.3	2.9~3.6~4.9
◎ *EE*—41	0.181	0.399	4.50	1.65	774	0.5~3.4~5.2	4.5~8.4~10

◎ *EG*—26	0.182	0.385	5.50	1.65	696	0.5 ～3.3～6.5	6.2～9.3～13
φ 2600	0.177	0.390	〃	1.57	450	0.35～2.9～7.4	6.9～10.1～13
油煙	0.178	0.409	〃	1.46	460	0.43～3.6～6.8	3.7～5.6～6.7
ピツチコークス	0.180	0.405	〃	1.65	918	0.73～3.8～6.5	3.4～6.0～8.8
中間品	0.175	0.396	〃	1.35	432	1.0 ～3.3～6.2	2.3～2.9～4.4
◎ *G*—2	0.180	0.384	〃	1.42	712	0.48～3.3～5.3	18～29～34
◎ *G*—3	0.180	0.355	〃	1.69	1220	0.62～3.5～5.3	22～36～50
◎ *G*—6	0.180	0.391	〃	1 57	654	0.37～3.4～5.5	14～28～37

註 一次トハ一次燒成ノ儘ニテ未黑鉛化ヲ指ス。彈性率ハ振動法ニヨリ測定シタ ξ ノ値ガ三箇アルハ振幅ノ三箇ノ値ニ夫々對應スル。
油煙，ピツチコークストアルハ是ヲ原料トシ，タールヲ粘着劑トシ又中間品トアルハ兩者ヲ等量混合シ夫ヲ同樣ニタールヲ粘着劑トシテ製シタ電氣黑鉛刷子デアル。

第六表を見れば ξ の最も大なるは天然黑鉛系のもので 10^6 程度であつて電氣黑鉛が次位に在り一次燒成のみのものは一番小さい樣である。勿論是は大體の傾向であるから多少の例外もある。天然黑鉛刷子が高速機に賞用せられる所以は摩擦係數の小さい事にもよるが同時に又 ξ が格段に大きい値を示す事によるものと思はれる。又同一原料で一次燒成濟のものと其れを電氣黑鉛化したものとを比較すると後者は固體粘性と共に彈性率が小さい。タールを粘結劑としてピツチコークスを用ひたものと油煙を用ひたものとを比較すると ξ には大差ないが E は前者の方が遙かに大きい。

油煙を原料として造粒工程を經た電氣黑鉛刷子は優秀な整流性能を示すがその一因は E が小さく ξ が比較的大きい事と思はれる。

IV. 結　　論

電刷子の彈性振動は整流子面の不齊に依る衝擊及び摩擦力に依るものと考へられるが，其の振動は刷子材質の固體粘性係數が大であれば生じ難い，又刷子が衝擊に依り整流子面より跳び上る場合 ξ が大きければ反跳する量が少ない事を計算式によつて示した。又種々の電刷子の ξ を實測せる結果其の最も大なるは天然黑鉛系の刷子であつて 10^6 程度であり電氣黑鉛質が是につぎ一次燒成のみを終つた未黑鉛化刷子は最も小さい値を示す。天然黑鉛質が高速機に適するは摩擦係數の小さい事と共に ξ が大きい事に理由が存すると思はれる。此の實際に關し工學士石田秀雄君は在學中終始熱心に援助された事を深く感謝する。

附 錄

I

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \quad \cdots\cdots (27)$$

に於て

$$u = U(x)\, \varepsilon^{jwt} \quad \cdots\cdots (28)$$

と置けば

$$E \frac{d^2 U}{dx^2} + j\omega\xi \frac{d^2 U}{dx^2} + \rho\omega^2 U = 0 \quad \cdots\cdots (29)$$

更に $U = \varepsilon^{\nu x}$ と置けば ν の二つの値が決まる，夫を $\pm(a+jb)$ とすれば

$$U = A_1 \varepsilon^{(a+jb)x} + A_2 \varepsilon^{-(a+jb)x} \quad \cdots\cdots (30$$

但し $$a = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{E^2 + \omega^2\xi^2}} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{E^2 + \omega^2\xi^2} - E\right)}$$

$$b = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{E^2 + \omega^2\xi^2}} \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{E^2 + \omega^2\xi^2} + E\right)}$$

境の條件として

$$\left.\begin{array}{ll} x = 0 \text{ にて} & U = u_0 \\ x = l \text{ にて} & \partial U / \partial x = 0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (31)$$

(31 に依つて A_1, A_2 が決定する。即ち

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = \dfrac{\varepsilon^{-(a+jb)l}}{\varepsilon^{(a+jb)l} + \varepsilon^{-(a+jb)l}} u_0 \\ A_2 = \dfrac{\varepsilon^{+(a+jb)l}}{\varepsilon^{(a+jb)l} + \varepsilon^{-(a+jb)l}} u_0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (32)$$

是に刷子發條の壓力 P に依る變位を重疊して

$$u = -\frac{P}{E} x + u_0 \varepsilon^{jwt} \frac{\cos b(l-x) \cosh a(l-x) + j \sin b(l-x) \sinh a(l-x)}{\cos bl \cosh al + j \sin bl \sinh al} \quad \cdots\cdots (33)$$

上式の第二項を u_2 とし同調時の $x = l$に於ける値を求めれば

$$(u_2)_{x=l} = u_0 \sin \omega t \frac{1}{\sinh al} \quad \cdots\cdots (34)$$

偖て al を變形すれば（同調時には）

$$al = \frac{\omega l}{\sqrt{2}\, v_0} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\alpha^2} - 1}{\sqrt{1+\alpha^2}}} \cong \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+\alpha^2} - 1}{\sqrt{1+\alpha^2}}} \quad \cdots\cdots (35)$$

但し $$\alpha = \frac{\omega\xi}{E}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \cdots\cdots (36)$$

上二式に依つて刷子に同調現象が起きておれば ξ の上端の振動の大さは下端に加へられる振動と $\alpha = \omega\xi / E$ とによつて決定されるのである。

Ⅱ 壓力 P を急に印加する場合の解

基礎方程式 (27) に於て

$$u = T(t)\,X(x) \quad \cdots\cdots (37)$$

と置けば次の如く分解する事が出來る。

$$\frac{\rho\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2}}{ET + \xi\dfrac{\partial T}{\partial t}} = \frac{1}{X}\,\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\lambda_n^2 \quad \cdots\cdots (38)$$

λ_n は任意の常數で後に決定せられる。(38) 式で X を解けば

$$X_n = A_n \sin(\lambda_n x + \varphi_n) \quad \cdots\cdots (39)$$

A_n, φ_n は常數である。T に就ては

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho}\,\xi\lambda_n^2\,\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{E}{\rho}\,\lambda_n^2\,T = 0 \quad \cdots\cdots (40)$$

此式は

$$T = \varepsilon^{\nu t} \quad \cdots\cdots (41)$$

と置けば二根 ν_1, ν_2 が決まりそれを $\lambda_n(a + jb)$ と置く

$$\nu_{1,2} = -\frac{\xi\lambda_n^2}{2\rho}\left[-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\rho E}{\xi^3\lambda_n^2}}\right] = \lambda_n(a \pm jb) \quad \cdots\cdots (42)$$

是により

$$T_n = B_{n1}\,\varepsilon^{\nu_1 t} + B_{n2}\,\varepsilon^{\nu_2 t} \quad \cdots\cdots (43)$$

(39), (43) により

$$u = \sum_n A_n \sin(\lambda_n x + \varphi_n)\,(B_{n1}\,\varepsilon^{\nu_1 t} + B_{n2}\,\varepsilon^{\nu_2 t}) \quad \cdots\cdots (44)$$

(44) の常數を決定せねばならぬが其の條件としては $t = 0$ に於て $u = 0$, $\partial u / \partial t = 0$ であり又定常狀態に於ては刷子發條の壓力 P によつて $u = -Px / E$ なる變位となる事を考へて u_s, u_t なる二つの和とする。前者は定常解後者は過渡解である。

$$u = u_s + u_t \quad \cdots\cdots (45)$$

$u_s = -Px / E$ を定數決定に便ならしむる爲 0 から l の範圍で Fourier 級數に展開する

$$u_s = -\frac{2P}{E}\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x \quad \cdots\cdots (46)$$

偖て初條件として $t = 0$ にて $u = 0$ であるから

$$\left[u_t\right]_{t=0} = -u_s = \frac{2P}{E}\sum^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x = \sum(B_{n1} + B_{n2})\,A_n \sin(\lambda_n x + \varphi_n) \quad \cdots\cdots (47)$$

$$\therefore \qquad \varphi_n = 0, \qquad \lambda_n = n\pi / l, \quad (B_{n1} + B_{n2})\,A_n = \frac{2P}{E}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \cdots\cdots (48)$$

又一方 $t=0$ で $\partial u/\partial t=0$

$$\left[\frac{\partial u_t}{\partial t}\right]_{t=0}=0=\sum(B_{n1}\nu_{n1}+B_{n2}\nu_{n2})\,A_n\sin\lambda_n x \quad\cdots\cdots (49)$$

$$\therefore\quad B_{n1}\nu_{n1}+B_{n2}\nu_{n2}=0 \quad\cdots\cdots (50)$$

即ち

$$B_{n1}=-B_{n2}\nu_{n2}/\nu_{n1}$$

$$\text{但し}\quad A_{n1}B_{n2}\left[1-\frac{\nu_{n2}}{\nu_{n1}}\right]=\frac{2P}{E}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad\cdots\cdots (51)$$

$$\therefore\quad u_t=\sum\frac{2P}{E}\,\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{\nu_{n2}}{\nu_{n1}}}\sin\lambda_n x\left[\varepsilon^{\nu_{n2}t}-\frac{\nu_{n2}}{\nu_{n1}}\varepsilon^{\nu_{n1}t}\right]$$

$$=\sum\frac{P}{E}\cdot\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\,\frac{1+\left(\sqrt{1-\frac{4\rho E}{\xi^2\lambda^2}}\right)\varepsilon^{\nu_{n1}t}+\left(-1+\sqrt{1-\frac{4\rho E}{\xi^2\lambda^2}}\right)\varepsilon^{\nu_{n2}t}}{\sqrt{1-\frac{4\rho E}{\xi^2\lambda^2}}} \quad\cdots\cdots (52)$$

若し

$$\xi^2<\frac{4\rho El^2}{n^2\pi^2}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\quad\text{ならば}$$

$$\therefore\quad u=u_s+u_t$$

$$=-\frac{P}{E}\left[x-2\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x\,\varepsilon^{\frac{\xi\lambda_n^2}{2\rho}t}\,\frac{\sin\theta_n t+\sqrt{\frac{4\rho E}{\xi^2\lambda^2}-1}\cdot\cos\theta_n t}{\sqrt{\frac{4\rho E}{\xi^2\lambda_n^2}-1}}\right]\cdots \quad\cdots\cdots (53)$$

$$\text{但し}\quad \theta_n=\lambda_n\sqrt{\frac{E}{\rho}-\left(\frac{\xi\lambda_n}{2\rho}\right)^2},\quad \lambda_n=\frac{n\pi}{l} \quad\cdots\cdots (54)$$

若しも $\xi^2>\frac{4\rho El^2}{n^2\pi^2}$ ならば

$$u=-\frac{P}{E}\left[x-2\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x\,\varepsilon^{-\frac{\xi\lambda_n^2}{2\rho}t}\,\frac{\sinh\theta'_n t+\sqrt{1-\frac{4\rho E}{\xi^2\lambda_n^2}}\cosh\theta_n' t}{\sqrt{1-\frac{4\rho E}{\xi^2\lambda_n^2}}}\right] \quad\cdots\cdots (55)$$

$$\text{但し}\quad \theta_n'=\lambda_n\sqrt{\left(\frac{\xi\lambda_n}{2\rho}\right)^2-\frac{E}{\rho}},\quad \lambda_n=\frac{n\pi}{l}$$

Ⅲ 刷子が V なる速度を以つて整流子面に衝突する場合

上述の (44) 式を用ひ條件に合致する樣定數を決定すればよいのである。その條件としては

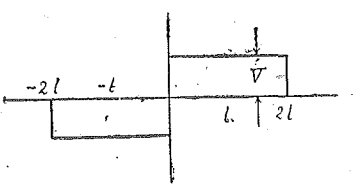
$$\left.\begin{array}{lll} \text{(i)} & \left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=l}=0 & \\ \text{(ii)} & t=0 \text{ にて} & \dfrac{\partial u}{\partial t}=V \\ \text{(iii)} & \text{且} & u=0 \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots (56)$$

(i) により

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0}=\sum A_n \sin(\lambda_n x+\varphi_n)\,(B_{n1}\nu_1\, B_{n2}\nu_{n2})=V \quad \cdots\cdots (56)'$$

定數決定に便ならしむる爲 V を 0 から $2l$ の間で Fourier 級數に展開する, 即ち

$$V=\frac{2V}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x \quad \cdots\cdots (57)$$



第 七 圖

(56)′ 及 (57) に依り

$$\varphi_n=0,\quad \lambda_n=\frac{n\pi}{2l} \quad \cdots\cdots (58)$$

$$A_n(B_{n1}\nu_{n1}+B_{n2}\nu_{n2})=\frac{2V}{\pi}\cdot\frac{1+(-1)^{n+1}}{n} \quad \cdots\cdots (59)$$

次に (ii) の條件より

$$(u)_{t=0}=0=\sum A_n \sin\lambda_n x\,(B_{n1}+B_{n2}) \quad \cdots\cdots (60)$$

$$\therefore \qquad A_n(B_{n1}+B_{n2})=0$$

$$A_n\neq 0 \text{ より} \qquad -B_{n1}=B_2 \quad \cdots\cdots (61)$$

且つ

$$A_n B_{n2}(\nu_{n2}-\nu_{n1})=\frac{2V}{\pi}\cdot\frac{1+(-1)^{n+1}}{n}$$

即ち

$$A_n B_{n1}=\frac{2V}{\pi}\cdot\frac{1+(-1)^{n+1}}{n\,(\nu_{n2}-\nu_{n1})} \quad \cdots\cdots (62)$$

(iii) の條件より

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l}=0=\sum A_n B_n \lambda_n \cos\lambda_n l\left(\varepsilon^{\nu_{n2}t}-\varepsilon^{\nu_{n1}t}\right) \quad \cdots\cdots (63)$$

$$\therefore \qquad \lambda_n l=(2m+1)\frac{\pi}{2} \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots)$$

$$\therefore \qquad \lambda_n=(2m+1)\frac{\pi}{2l} \quad \cdots\cdots (64)$$

然るに $\lambda_n = n\pi / 2l$ より $n = (2m+1)$ とせねばならぬ。以後 $(2m+1)\pi / 2l = \lambda_w$ と置く

以上に依つて

$$u = \sum A_n B_{n2} \sin \lambda_n x \left(\varepsilon^{\nu_{n2} t} - \varepsilon^{\nu_{n1} t}\right)$$

$$= \sum \frac{2V}{\pi} \frac{1 + (-1)^{2(m+1)}}{(2m+1)(\nu_{n2} - \nu_{n1})} \left(\varepsilon^{\nu_{n2} t} - \varepsilon^{\nu_{n1} t}\right) \sin \lambda_n x \quad \cdots\cdots (65)$$

$1 - \dfrac{4\rho E}{\xi^2 \lambda_n^2} < 0$ ならば

$$u = \sum_{m=0}^{m} \frac{8lV}{\pi^2 (2m+1)^2} \varepsilon^{-\frac{\xi \lambda_m^2}{2\rho} t} \frac{\mathrm{sni}\ \theta_m t}{\sqrt{\dfrac{E}{\rho} - \left(\dfrac{\xi \lambda_m}{2\rho}\right)^2}} \sin \lambda_n x \quad \cdots\cdots (66)$$

但し $\theta_m = \lambda_m \sqrt{\dfrac{E}{\rho} - \left(\dfrac{\xi \lambda_m}{2\rho}\right)^2}$

$$\lambda_m = \frac{(2m+1)\pi}{2l}$$

若しも

$1 - \dfrac{4\rho E}{\xi^2 \lambda^2} > 0$ ならば

$$u = \sum_{m=m}^{\infty} \frac{8lV}{\pi^2 (2m+1)^2} \varepsilon^{-\frac{\xi \lambda_m^2}{2\rho} t} \frac{\sinh \theta'_m t}{\sqrt{\left(\dfrac{\xi \lambda_m}{2\rho}\right)^2 - \dfrac{E}{\rho}}} \sin \lambda_m x \quad \cdots\cdots (67)$$

但し $\theta'_m = \lambda_m \sqrt{\left(\dfrac{\xi \lambda_m}{2\rho}\right)^2 - \dfrac{E}{\rho}}$

$$\lambda_m = \frac{(2m+1)\pi}{2l}$$

以上の式に依つて刷子が整流子面に衝突して反跳する時の速度を求める。今其れを V' とすれば運動量保存則より，反跳して刷子が將に整流子面より離れんとする瞬間に於て

$$\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} (\rho dx) = \rho l V' \quad \cdots\cdots (68)$$

(66) 式により

$$\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} dx = \sum \frac{8lV}{(2m+1)^2 \pi^2 b_m} \cdot \frac{2l}{(2m+1)\pi} \cdot \varepsilon^{-\frac{\xi \lambda_m^2}{2\rho} t}$$

$$\times \left[-\left(\frac{\xi \lambda_m^3}{2\rho}\right) \sin (\lambda_m b_m t) + \lambda_m b_m \cos (\lambda_m b_m t) \right] \quad \cdots\cdots (69)$$

但し $b_m = \sqrt{\frac{E}{\rho} - \left(\frac{\xi\lambda_m}{2\rho}\right)^2}$

$t = \frac{2l}{b_m}$ を入れると (69) は

$$= -\sum \frac{8lV}{(2m+1)^2\pi^2}\,\varepsilon^{-\frac{\xi l\lambda_m^2}{\rho b_m}} = lV' \quad \cdots\cdots (70)$$

$$\therefore \quad V' = -V\frac{8}{\pi^2}\sum\frac{1}{(2m+1)^2}\,\varepsilon^{-\frac{\xi l\lambda_m^2}{\rho b_m}} \quad \cdots\cdots (71)$$

完全彈性體に於ては $\xi = 0$ として

$$V' = -V \quad \cdots\cdots (72)$$

Ⅳ 棒の先端の附加錘が棒の横振動の減衰常數に及す影響

片持梁の先端に質量を附加した場合の振動周期を求める方法は次の方程式を滿足する Z より算出する[5]ことが行はれてゐる。

$$CZ = \frac{1 + \cosh Z \cos Z}{\cosh Z \sin Z - \sinh Z \cos Z} \quad \cdots\cdots (73)$$

$$\text{但し} \quad C = \frac{\text{附加質量}}{\text{棒の質量}} \quad \cdots\cdots (74)$$

併し此の方法は $\xi = 0$ なる場合に適用されるものであつて $\xi \neq 0$ に對して多少の近似計算を行へば次式を導出し得る。

$$CZ(1 + jqZ^2) = \frac{1 + \cos Z \cosh Z}{\cosh Z \sin Z - \cos Z \sinh Z} \quad \cdots\cdots (75)$$

$$\text{但し} \quad q = \frac{\xi k}{l^2\sqrt{\rho E}} \quad \cdots\cdots (76)$$

q は此の實驗の範圍では 10^{-6}〜10^{-3} であつて 1 に比して非常に小さい。今 $q = 0$ なる時の Z を Z_0 とし Taylor の展開をなしその第二項迄取れば

$$Z \cong Z_0\left[1 - \frac{jZ_0^2(1 + \cos Z_0 \cosh Z_0)^2 q}{(1 + \cos Z_0 \cosh Z_0)^2 + CZ_0^2(\sin Z_0 + \sinh Z_0)^2}\right] \quad \cdots\cdots (77)$$

Z は此の様に複素數となる。Z より周波數を算出するには p を角速度とすれば(時間の係數を ε^{jpt} とす) 次の様な關係がある。

$$Z^4 = \frac{\rho p^2 l^4}{Ek^2 + jp\xi k^2} \quad \cdots\cdots (78)$$

p は $\xi = 0$ ならば (87), (88) より實數となるが $\xi \neq 0$ なる時には複素數となる, 其れを

$$p = \beta + j\alpha \quad \cdots\cdots (79)$$

とすれば β が周波數を決定し α が減衰定數となる, 即ち此の α が所要量となる。

$$\alpha \fallingdotseq \frac{\xi k^2 Z_0^4 \left[1 + F(Z_0)\right]}{2\rho l^4} = \frac{Z_1^4 k^2 \xi}{2\rho l^4} \cdot \frac{1 + F(Z_0)}{\left(\frac{Z_1}{Z_0}\right)^4} \quad \cdots\cdots (80)$$

茲に

$$F(Z_0) = \frac{4\,(1 + \cos Z_0 \cosh Z_0)}{(1 + \cos Z_0 \cosh Z_0)^2 + CZ_0^2 (\sin Z_0 + \sin \mathrm{h} Z_0)^2} \quad \cdots\cdots (81)$$

(80) に於て Z_1 は $C=0$ なる場合の Z_0 値（但し基本振動に對するもの）であつて $Z_1 \equiv 1.8750$ である。$Z_1^4 k^2 \xi / 2\rho l^4$ は C が零なる場合の減衰常數を示し $(1+F)/(Z_1/Z_0)^4$ は $C \neq 0$ なる爲の補正係數である。即ち (80) は一端固定の棒の横振動に於て棒の先端に質量を附加した場合の減衰常數を示すものである。

文　　献

1. Neukirchen, Die Kohlenbürsten
2. Hunter Brown & Hews, J. I. E. E. vol. 71 (1932).
3. F. Krügel, Zeits.f. Phys. S. 58 Bd. 110 (1938).
4. K. Sezawa, Rep. Aeron. Res. Inst. Tokyo No. 45 (1928).
5. Prescott, Applied elasticity.
6. 植松時雄, 彈性體の振動に關する研究.
7. 宗宮知行, 日本學術振興會編 電機用刷子の研究 I.
8. Schröter, Arch. f. Elekt. Vol. 18 (1927).
9. W. C. Kalb, E. E. Vol. 56 (1937).
10. Timoshenko, Vibration problems in Engineering.