北海道大学大学院教育学研究院
紀要　第108号　2009年 7 月

高等学校の積分指導におけるいくつかの問題

大　田　邦　郎*

Instruction of Integral in Secondary School

Kunio OTA

【目次】

はじめに
1　積分概念の回避
2　微分法と積分法の関係
3　運動の解析と積分法

【キーワード】高校数学，積分，運動の解析

はじめに

中等数学教育への微積分の導入は，20世紀初頭からの世界的な数学教育改革運動の成果のひとつである。日本においては1942年の中学校数学教授要目の改訂により，1944年度発行の旧制中学校4年生と5年生の教科書に，微積分の初歩が取り入れられた(1)。

これ以降，第二次世界大戦後の新制高等学校においても，微積分は今日に至るまで数学のカリキュラムの中で重要な位置を占めてきた。しかしながら，多くの高校生にとって微積分は難しいものであった。このことは，旧制高等学校時代から言い伝えられてきたと思われる「微分は微かに分る，積分は分った積り」という冗談に端的に表されている。

学習指導要領の上では微積分を含む科目は必修とされてこなかったが，ほとんどの高校ではそれを必修または必履修としてきた。しかし，1970年代ごろから微積分を含む科目を必履修としない，あるいは名目上履修したことにしてしまう高校が増えてきた。

この背景には，高校生の「低学力化」という問題がある。1960年代の高校の「多様化」政策，「選択の自由」を名目とした小学区制から中・大学区制への移行，進学指導における「偏差値」の利用を背景に，1970年代には高校の「偏差値輪切り」といわれるランク付けがはじまる。そして「受験校」と「底辺校」への二極化が進んでいく。この結果，「低学力」に加えて「低意欲」ともいうべき状態が蔓延していく。

1968 / 69年の「現代化」学習指導要領は，小学校と中学校の数学教育に現代数学の装いをこらし，多くの内容を盛り込んだ。しかし，1970年の高等学校学習指導要領は「行列」「平面幾何の公理的構成」など代数・幾何で現代数学の装いをこらす一方，解析は内容を軽減する。

カリキュラムの面では，1960年指導要領では「数学Ⅰ」が必修得であったが，1970年指導要領は新設の「数学一般」と「数学Ⅰ」のいずれかを必履修にした。これは，「数学基礎」

* 千葉大学教育学部

を新設して「数学Ⅰ」とのいずれかを必履修とした 1999 年指導要領を想起させる。「数学一般」も「数学基礎」も次の改訂では消え去る。

さらに，1960 年指導要領は普通科で微積分を含む「数学ⅡA」または「数学ⅡB」を必履修としていたが，1970 年指導要領からは必履修でなくなった。1970 年指導要領ははじめから「多様化」と「低学力化」を見越していたようである。

もちろん，微積分を含む科目を履修すれば良いというものではない。その内容が問題である。とくに 1970 年学習指導要領では「数学Ⅱ」で無限級数を扱わなくなったため，定積分をリーマン和の極限として説明することが困難になった。その結果，定積分の概念を説明せずに計算の仕方だけを天下りに与える教科書が大多数になっている。

概念を教えないまま計算の仕方だけを教える数学教育は，「数学は公式を覚えて問題を解く科目である」という誤った数学観を形成してしまう。暗記主義の教育を受けて大学生になったものが，そのまま教師になって暗記主義の教育をしているという状況すら生まれている。

もともと「分った積り」とは分っていないことを自覚したうえで自嘲する言い方であった。しかしいまでは，文字どおり公式を暗記したことで「分った積り」になっているのが実態である。

高校生の「低学力」および「低意欲」問題は，「底辺校」の生徒だけの問題ではない。本当は分っていないにもかかわらず，暗記をしたことで「分った積り」になり，「やり方だけ教えてくれればいい」という「受験校」の生徒もまた，実は低学力であり低意欲なのである。

1　積分概念の回避

現在の高等学校の教科書は，積分の概念の説明を回避している。現行の「数学Ⅱ」の教科書の大多数における積分の扱いは，およそ以下のようである。

微分法の次が積分法である。そして，積分法の最初に導関数が $f(x)$ となる関数を $f(x)$ の原始関数または不定積分

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad [1]$$

とする（すなわち，$F'(x) = f(x)$）。そのうえで，$f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad [2]$$

と定義するのである。さらに，この定義を公式として用い，具体的な関数と数値をあてはめて計算していく。

ここでは、そもそも定積分とは何であるかが説明されず，定積分の計算の仕方が天下りに与えられているだけである。

小島順は，上の定義は「 $f(x)$ の原始関数が（積分法と無関係に微分法の枠内で）x の式として見つかった場合の，定積分の“計算法”として用いられる。その限りにおいて，積分法を一方的に微分法に従属させている」(2) という。

高校の教科書は，昔からこのような説明をしていたわけではない。1960 年学習指導要領は「数学ⅡB」に数列の極限や無限級数を位置づけていた。そのため，この時期までの教科書はその延長上で区分求積法や積分の本来の意味（リーマン和の極限）を扱うことができた。

私自身，この時期の教科書[(3)]で微積分を学んだが，微分法につづいての積分法の最初が区分求積法であった。つぎに，定積分が関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸，および 2 直線 $x=a$，$x=b$ に囲まれた面積として，リーマン和の極限によって定義された。すなわち，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x=\int_a^b f(x)\,dx\left(a=x_0,\,b=x_n,\,\Delta x=\frac{b-a}{n}\right)\quad[3]$$

このあと，「定積分の値を数列の極限として求めることは，一般に，めんどうなことが多い」として，定積分の上端を変数 x とした $S(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ を考える。

$S(x)$ は具体的には関数 $y=f(t)$ と t 軸，および 2 直線 $t=a$，$t=x$ に囲まれた面積で，x の関数である。この $S(x)$ の増分 $\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)$ を Δx で割って極限をとると，

$$S'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=f(x)\qquad[4]$$

であることが示される（証明略）。

ここで［1］の原始関数が定義される。$S(x)$ は $f(x)$ のひとつの原始関数であり，さらに $f(x)$ のもうひとつの原始関数 $F(x)$ が求められたとすると，$S(x)=F(x)+C$。$S(a)=F(a)+C=0$ より $C=-F(a)$。

よって，$S(x)=F(x)-F(a)$ であるから，$S(b)=F(b)-F(a)$。

ゆえに，$S(b)=\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$ であり，変数 t を x におきかえれば

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

これでようやく［2］が導かれた。

いまの私はこの論理をなんとか追うことができる。この説明のミソは，定積分 $\int_a^b f(t)\,dt$ の上端を変数 x として，$\int_a^x f(t)\,dt$ を関数にすることにある。しかし，高校時代の私は「分った積り」になるしかなかった。

もっとも，この教科書は積分法を微分法とは独立したものとして導入したうえで，これらの関係を考察しているという点で，現行教科書とはまったく異なっている。

高校進学率がはじめて 90 %を超えたのが 1974 年度である。そして，前述のような「偏差値輪切り」によって不本意入学者が増えていく。1973 年度の入学者から適用された 1970 年高等学校学習指導要領のもとで，教科書が上のような難解な説明を避けるようになったのは，賢明であったのかも知れない。

大学 4 年生のとき，私は教育実習で商業高校定時制の 4 年生に定積分を教えることになった。教科書はもう，定積分を天下りに［2］で定義するものになっていた。

私は，$\int_0^1 x^2dx$ は $0\leqq x\leqq 1$ における $y=x^2$ のグラフの下の面積を表すのだと言って，方眼紙の上にグラフを描いてコピーして配り，グラフの下の方眼の数を数えさせた。しかし，そこから［2］まで導くことはできなかった。

当時の私は［２］を天下りに与えたうえで，$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$ の計算結果と，方眼を数えた結果が近い値になることを確認するのが精一杯だった。

2　微分法と積分法の関係

定積分は［３］のようにリーマン和の極限として定義するのが普通である。しかし，その値を求めるためにいちいち極限計算をするのは面倒である。関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ がわかれば，［２］を用いると簡単に計算ができる。

現行の教科書のようにはじめから［２］を定積分の定義とするのではなく，［３］から［２］を導く過程を 1960 年代の教科書よりもわかりやすく説明することが，微積分の初歩の指導において重要な課題となる。

［３］から［２］を導く過程でカギになるのは，1960 年代の教科書にも出てきた，定積分の上端を変数とした次の積分の形である。

$$\int_a^x f(x)\,dx \quad [5]$$

(4)

田村二郎はつぎのようにいう。

「初等的な段階では，不定積分と原始関数をしばしば混同するけれども，両者はもともと異なる概念である。積分の値を上端の関数とみなすとき，関数 $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ を不定積分というのが普通の定義である。」(5)

もっとも，小平邦彦は「不定積分の定義は確定していないようである」という。「“岩波数学辞典　第３版”，p. 522 によれば，x の関数 $\int_a^x f(x)\,dx$ を $f(x)$ の不定積分という。高木貞治“解析概論”, pp. 101－102 では，$\int_a^x f(x)\,dx$ の下限 a を指定しない場合にそれを $\int f(x)\,dx$ と書いて $f(x)$ の不定積分とよんでいる。この“解析入門”では藤原松三郎“微分積分学Ⅰ”，p. 293 にしたがって，不定積分はすなわち原始関数である、と定義したのである。」(6)

なるほど，高校の教科書の大多数が原始関数と不定積分を同じものとするのはあながち根拠がないわけではないようだ。しかし，原始関数とはそもそも逆導関数であって，積分の概念とは本来，無関係である。

また，原始関数と不定積分を同じものとすることによって［５］の $\int_a^x f(t)\,dt$ の位置づけが不当に低くなっている。不定積分という用語が何を指し示すかということよりも，［５］を微積分の初歩の指導過程にどう位置づけるかが重要である。

小平の引用にはないが，高木は『解析概論』で定積分につづけて［５］を示し，これを「積分函数」(7)とよんでいる。つまり，田村（および岩波数学辞典）の「不定積分」と，高木の「積分函数」はともに［５］を意味しているのである。

私自身は，田村にならって［５］の $\int_a^x f(x)\,dx$ を不定積分と呼ぶことにする（「積分関数」

でもかまわないのだが）。微分係数 $f'(a)$（定数）と導関数 $f'(x)$（関数）の関係に対応させて，$\int_a^b f(x)\,dx$ を定積分（定数），$\int_a^x f(x)\,dx$ を不定積分（関数）とするのが自然だと考えるからである。

それでは，$S(x)=\int_a^x f(x)\,dx$ として，$f(x)$ から $S(x)$ を求めるにはどうしたらよいだろうか。$f(x)$ が定数または一次関数，二次関数，三次関数であれば，［３］と２乗和，３乗和などの公式によってリーマン和の極限を計算すれば $S(x)$ が求められる。しかし，他の関数はこの方法では困難である。

ここで微分法が役に立つ。［４］から，$S(x)=\int_a^x f(x)\,dx$ のとき $S'(x)=f(x)$ であることが示される。つまり，$f(x)$ の不定積分 $S(x)=\int_a^x f(x)\,dx$ は $f(x)$ の原始関数である(8)。前節でみたように［４］から［２］が導かれるから，$f(x)$ の原始関数 $S(x)$ が得られさえすれば，定積分は簡単な代入計算で求められるのである。

しかし［４］の証明はわかりやすいとはいえない。関数のグラフの下の面積を表す関数を $S(x)$ としたとき，その導関数が $f(x)$ だというのはピンとこない。

この証明に具体性を与えるのが運動である。時刻 t における速度を表す関数を $v(t)$ とすると，定積分 $\int_a^b v(t)\,dt$ は時刻 a から b までに進む距離を表す。$v(t_k)\cdot\Delta t$ は速度×時間に他ならないからである。時刻 a から t までに進む距離は，不定積分 $s(t)=\int_a^t v(t)\,dt$ で表される。

また，時刻 t までに進む距離が関数 $s(t)$ で表されるとき，時刻 t における速度 $v(t)$ は

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=s'(t)$$

$s(t)=\int_a^t v(t)\,dt$（速度の積分が距離）で，$s'(t)=v(t)$（距離の微分が速度）であるから，積分計算と微分計算が互いに逆の演算であることは直観的に明らかである。

このことは，次の命題で端的に表される。

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(a)\,dt=f(t) \qquad [6]$$

小島はこの命題を「微積分の基本定理Ⅰ」とし，「微積分の基本定理Ⅱ」を，以下の命題とする。

微分方程式 $\frac{dy}{dx}=f(x)$，$y(a)=c$ の解 $y=F(x)$ は，

$$F(x)=c+\int_a^x f(t)\,dt \qquad [7]$$

で与えられる。

さらに，「微積分の基本定理Ⅲ」が一般に「微積分の基本定理」といわれる［２］であり，これは「微積分の基本定理Ⅱ」から派生する系であるという(9)。

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \quad (F'(x) = f(x)) \qquad [\,2\,]$$

たしかに，微分法と積分法が互いに逆の演算であることを直接的に表しているのは［６］である。これから見れば，［２］は定積分を求める手続きを示しているにすぎない。

もちろん，いずれも微積分の指導において基本的な命題であるが，私はとくに，積分法の指導においては［７］の微分方程式を解く形を積極的に位置づけたいと考える。

3　運動の解析と積分法

微積分学の成立は，微分法と積分法とが逆演算であることの発見だけによるのではない。ライプニッツにおいては現在の微積分で用いられている記号体系をつくったこと，そしてニュートンにおいては力学を記述したことも，微積分学の成立の契機とみなされているのである。このことからも，微積分の初歩の指導においては力学と結びつけた内容構成を考えたい。

日本の中等数学教育に初めて微積分が導入された際の，1944 年の旧制中学校４年の教科書(10)は，「系列の考察」において区分求積法を扱い，「連続的変化」において＜速度－時間グラフ＞から移動距離を概算したり，＜距離－時間グラフ＞から速度を求めたりする。そして，速度を求める方法として微分法を，距離を求める方法として積分法を説明する。

この教科書は「読んでわからない教科書」ともいわれ，具体的な問題について考えながら，教師と生徒のやりとりの中で一般的な方法を見いだすスタイルを取っている。積分法の肝心な部分も，$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$であることは生徒自身が説明すべきこととされ，教科書には説明がない。

戦時下における中等学校制度の改編に伴い，1943 年に教授要目が改訂され，教科書も国定化された。微積分を扱う中学校４年生の教科書は，戦後の 1946 年に暫定教科書（折り畳み教科書）版で発行された(11)。

この教科書は 1944 年の教科書のスタイルを踏襲しているが，説明が詳しくなり，読めばある程度趣旨が理解できるものとなった。この教科書で注目すべきは，運動の解析を基本としていることである。

まず，t 秒後の速さ vm／秒が $v = t^2$ で表される場合，出発後５秒間に進む距離を区分求積法で求める。つぎに，極限の記号は用いないものの，実質的に［３］の形のリーマン和の極限として，定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を定義する。そして，区分求積法を用いて一次関数，二次関数，三次関数の定積分の計算練習をする。

しかし，区分求積法が困難な場合でも「簡単に積分できる方法を工夫しよう」として，定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ の上端 b を変数 x とし，関数 $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ を考える。

ここで「運動を例にとって調べよう」という。「$y_1 = f(x)$が時間 x と速さ y_2 との関係を示すものとみなせば，$y_2 = F(x)$ は時間 x と道程 y_2 の関係を示すものと考えられる。従って，$F(x)$ は微分して $f(x)$になる函数であると推察される。」

そして，$\int_a^x x^3 dx$ を区分求積法で求め，得られた関数を微分して上記のことが成り立つかどうか，確かめる問題が続く。このあと，［4］を証明し，原始関数の概念を示してから［2］を導くのである。

この教科書は微分法と積分法を独立に導入したうえで，運動を例に考えて互いの関係を明らかにするという展開をとっているのである。

この暫定版の国定教科書は 1946 年度だけの使用であったが，内容は 1947 年度の旧制中等学校用教科書『数学　解析編（Ⅱ）』(12) に基本的に引き継がれ，1948 年の新制高等学校発足後もしばらくの間使用された。

中等数学教育に微積分が導入された初期の段階では，物体の運動を具体例としていたことがわかった。しかし，民間の教科書会社から様々な教科書が発行されるようになると，「厳密性」を重視し，具体例も接線と面積を中心とする教科書が増えていく。その行き着く先が前述の 1960 年代の教科書である。

この教科書でも微分法の応用として，時間と距離の関係から速度を求める方法についての記述があった。高校生の私にもこれは理解できた。しかし，積分法の応用で速度を積分して距離を求める方法については理解に苦しんだ。いくら教科書を読んでもその理由が理解できなかった（いま読み返してみても，説明が不十分であり，高校生に理解できるとは思われない）。

その私が，北大教育学部教育方法学研究室と北星学園余市高等学校との共同研究において「二次関数と微積分」の授業書を作成し，実験授業(13) を実施することになる。1978 年，私は大学院修士課程の 2 年目であった。高校時代に速度の積分が距離になることが理解できなかったこと，そして，学部時代に教育実習で積分がうまく教えられなかったことへの再挑戦の機会となった。

修士論文のための研究の一環として作成したこの授業書は，「速度から距離を求める積分法」，「距離から速度を求める微分法」の順序で構成した。積分法は，微分方程式を解いていく形をとった。すなわち，加速度 a ＝一定，速度 $v(t) = at + b$，距離 $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$ の順序である。

この授業書では $\int_a^b v(t)\,dt$ を定積分，$\int_a^t v(t)\,dt$ を不定積分とした。参考になったのは 1924 年の柴垣和三雄『実践数学』(14) である。この本は，定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ ，微分法，不定積分 $\int_a^x f(x)\,dx$ ，基函数（原始関数），基本定理（［2］の式）という順序で展開していた。

授業書「二次関数と微積分」では，原始関数は扱わなかった。積分計算が，区分求積法（実際には三角形の面積を求めること）で間に合ったからである。微分法と積分法が逆演算であることも，運動の解析を基礎にしたこと，二次関数までの範囲であることから自明であった。

これを多項式関数まで拡張して，少なくとも「数学Ⅱ」の微積分の範囲をカバーできる授業プランを作成することが当面の課題である(15)。もちろん，指数・対数関数(16) や微分方程式など，楽しい宿題もたくさん残されている。

おわりに

本稿の題名は，大田「小学校の分数指導におけるいくつかの問題」（『数学教室』 1976 年 3 月号，国土社）の題名になぞらえた。この論文は，私が学部 3 年生のときのゼミの議論をまとめたものである。

当時助手になったばかりの須田勝彦さんの指導のもとで，1975 年度の教授学研究グループ数学サブゼミは，数概念の指導について研究していた。分数のわり算の指導を卒論のテーマにしようとしていた私は，まず分数概念の導入のあり方からレポートした。

「3 つ分で 1 mの長さが$\frac{1}{3}$ m，$\frac{1}{3}$ mが 2 つで$\frac{2}{3}$ m。」

「なんでよ。3 つ分で 1 mの長さが$\frac{1}{3}$ mだったら，$\frac{2}{3}$ mは 3 つ分で 2 mだべや。」

a 個で b になる大きさが $\frac{b}{a}$ という「商分数の論理」を，分数の導入段階で位置づけることになった。また，加減算を同分母と異分母で分けずにまとめて計算体系を構成することは，須田さんの以前からの構想のようだった。

この 2 つの新しい視点を中心に，夏休み前には分数の導入から異分母加減までの指導に関する構想がまとまった。それを私は数学教育協議会の全国大会に出かけて報告してきた。その後，同会の機関誌『数学教室』の編集部から執筆依頼が舞い込んだのである。

私は 400 字詰め原稿用紙 18 枚分の下書きを書いて数学サブゼミに提出した。須田さんは，私の文章を一字一句ごとに検討してくれた。題名は須田さんが考えてくれたように思う。このとき，私は論文の書き方を初めて教わった。これが私の研究生活の出発点となったのである。

この分数プランを小樽の小学校で実験授業にかける話が進み，私が授業書化して実験結果をまとめることになった。しかし，授業書の作り方というものがわからない。私は指導案風に発問と予想される反応の系列を書いてみた。

須田さんは「それでもいいんだけど，こうやるんだよ」と紙に書きはじめた。「問題 1 テープの長さは何メートルでしょう。」図も書いて，これが 1 ページ目だという。2 ページ目はまとめで，「3 つ分で 1 mの長さを三分の一メートルといい，$\frac{1}{3}$ mと書きます。」

私はこれをまねて続きをつくっていった。同分母と異分母を一緒にした加減算の計算体系は，まだ誰もつくっていなかった。これを実際につくってみることで，水道方式の計算体系の意義と限界（計算体系の範囲の設定自体は水道方式の理論から導かれない）がよくわかった。

結局，これが私の卒業論文(17)となった。もともとやりたかった分数のわり算は，のちに私が千葉大学で指導する卒業論文で，新しい試みをすることになる(18)。

須田さんが「教授学研究はまだ徒弟制の段階だ」と言うのを聞いたことがある。私は論文の書き方，授業書のつくり方を教わったことを思い出して納得したものである。私自身もいま，論文の書き方，授業書のつくり方を学生・院生に同じように教えている。そして，教えながら自分自身もより深く学んでいることに気づく。

私たちの徒弟制は，決して教員の研究の下請けに学生・院生を利用するものではない。そ

れは，教員にとっては教えながら，学生・院生にとっては教わりながらの，共同研究のあり方に他ならないのである。

注

(1) この経緯については，大田邦郎「数学教育の内容史研究における試論」『北海道大学教育学部紀要　第44号』1984年。
(2) 小島順「不定積分の位置づけについて」『数学教室』1991年5月号，国土社，89ページ。
(3) 以下，功刀金次郎他『改訂版　高等学校　数学ⅡB』1969年，数研出版による。
(4) $\int_a^x f(x)\,dx$ は $\int_a^x f(t)\,dt$ の変数 t をはじめから x で表したもので，どちらも同じ意味で用いられる。
(5) 田村二郎「微積分学の基本定理」『数学セミナー』1980年4月号，日本評論社，9ページ。
(6) 小平邦彦『解析入門Ⅰ』1993年，岩波書店，165ページ。
(7) 高木貞治『解析概論』1961年改訂版，岩波書店，100ページ。
(8) $\int_a^x f(x)\,dx$ を不定積分と定義するとき，不定積分ですべての原始関数を表すことはできない。(5) を参照。
(9) (3) 88～89ページ。また，小島順『微積分入門（上）』1996年，日本評論社を参照。
(10) 『数学　4　第一類　中学校用』1944年，中等学校教科書株式会社。
(11) 『中等数学　四　第一類　前・中・後』1946年，文部省。原文は旧仮名遣いのカタカナ文。
(12) 形式的には中等学校教科書株式会社発行の検定教科書であるが，実質的には文部省著作教科書である。
(13) 1980年版の授業書とその授業分析が，大田邦郎「高等学校における微積分の初歩としての二次関数の指導」『北海道大学教育学部紀要　第40号』1982年。
(14) 柴垣和三雄『実践数学』1924年，丸善。
(15) その試みとして，大田邦郎『読むだけ微積分』2009年，学習研究社を参照。
(16) 大田邦郎「自然対数とその指導」『北海道大学教育学部紀要　第62号』1994年で少し試みている。
(17) 授業書とその解説は，大田邦郎「小学校の分数指導における新しい試み」『教授学研究シリーズ　第3号』1978年，北大教育方法学研究室。
(18) 大田邦郎・佐藤洋子「授業のプログラミングに関する実証的研究」『千葉大学教育工学研究　第9号』1988年。