特集⊙力学系理論——応用数理における新しい展開

格子力学系の最近の進展

Shui-Nee Chow[†1]　John Mallet-Paret[†2]（和訳：西浦 廉政）

要　約

格子力学系理論における最近の進歩を概観する．とりあげる話題は，パターン形成，空間カオス，分岐パターン，進行波及び伝播停止現象である．さらにモザイク解と呼ばれる平衡状態についても論ずる．モザイク解とは各格子の要素が，+1, −1 及び 0 のみからなる定常状態であり，そのような解の安定性の判定基準も与える．また，任意の安定解に対する空間エントロピー h を定義し，パラメータによっていかにこの値が変化して行くかも考察する．系は，h の値が，0（パターン形成）か正の値（空間カオス）かにより定性的に区別される．

1　序

この論文では，最近の**格子力学系**（LDS）理論の最近の発展について概観す

［筆者紹介］

シュイ ニー チャウ．1965年シンガポール大学卒業．1970年にメリーランド大学にて Ph. D. を取得．その後，1988年までミシガン・ステート大学にて研究を行い，1988年より現在のジョージア工科大学・数学教室の主任を務める．力学系理論及び非線形微分方程式が主たる研究対象である．Methods of Bifurcation Theory（J. Hale と共著，シュプリンガー，1982年），Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields（C. Li 及び D. Wang と共著，ケンブリッジ大学出版，1994年）他多くの仕事がある．ミシガン・ステート大学より Distinguished Professor Award を受賞し，北京大学他より名誉教授の称号を授与されている。

ジョン マレ パレ．1971年アルバータ大学卒業．1974年にミネソタ大学にて Ph. D. を取得し，1974年から現在に至るまでブラウン大学応用数学教室にて研究を行う．1979年より教授となる．主たる研究領域は力学系理論，分岐理論，微分方程式及び非線形関数解析である．

［英文タイトル］　Receht Progress of Lattice Dynamical Systems.

［訳者］　にしうら やすまさ．北海道大学電子科学研究所．

†1　Partially supported by NSF Grant DMS-90-05420.

†2　Partially supported by NSF Grant DMS-96-23093, and by ONR Contract N00014-92-J-1481.

る．格子力学系とは，格子 $\Lambda\subseteq\mathbf{R}^d$ の空間構造に付随する無限次元常微分方程式系であり，電子回路，物質科学，生物学といった幅広い分野で適応されている([6],[9],[15],[18])．LDS は，ある特別な極限として偏微分方程式を含むが，それらには見られない独自な現象も多く見られる．ここでは，定常状態や，進行波解に焦点をあてる．実際，規則的なパターン(パターン形成)や，空間的にカオス的なパターン(空間カオス)といったような安定平衡状態は，ことのほか興味深いものである．なお，以下に述べる多くの結果は，V. S. Afraimovich, J. W. Cahn, W. Shen, E. S. Van Vleck の諸氏との共同研究によってえられたものである．

2 格子力学系

我々の様々な結果や手法は，整数格子 $\mathbf{Z}^d\subseteq\mathbf{R}^d$ や，$\mathbf{R}^2$ 上の六方格子，$\mathbf{R}^3$ 上の結晶状の格子を含むさまざまな格子やその上の方程式に適用されるが，ここでは特に，定義として $\Lambda=\mathbf{Z}^2\subseteq\mathbf{R}^2$ ととり，簡単のため，次のモデルを考える．

$$\left.\begin{aligned} \dot{u}_{i,j} &= -\beta^+\Delta^+u_{i,j}-\beta^\times\Delta^\times u_{i,j}-f(u_{i,j}), \qquad (i,j)\in\mathbf{Z}^2,\\ \Delta^+u_{i,j} &= u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{i,j},\\ \Delta^\times u_{i,j} &= u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1}-4u_{i,j}, \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

これはスカラー変数 $u(i,j)$ に関する無限次元常微分方程式系である．ここで，Δ^+ と $\Delta^\times$ は，$\mathbf{Z}^2$ 上の離散的な 2 次元のラプラス作用素であり，(＋と×の記号によりその平均をとる方向が表されている．) β^+ と $\beta^\times$ は，正負および 0 の値を取りうる結合係数である．非線形項 f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ としては，典型的には N 型のグラフを持つ次の原点対称な三次式，

$$f(u)=\gamma u+u^3, \tag{2.2}$$

$(\gamma<0)$ や，より単純な単調増加の場合 $(\gamma>0)$，さらに，$a(-1<a<1)$ によってその対称性を崩すことのできる

$$f(u)=(u-a)(u^2-1), \tag{2.3}$$

のようなものもよく用いられる．

一般に，f がリプシッツ連続ならば，初期値問題(2.1)は，$l^\infty=l^\infty(\mathbf{Z}^2)$ において，適切であり，解 $u(t)$ (t は，時間パラメータ)は，$\beta^+,\beta^\times$ の値にかかわりなく $t=0$ の前後で局所的に一意に存在する．また，式(2.1)は，格子内の平行移動に対して不変なので，$u(t)$ が解であることと，$S_\alpha u(t)$ が解であることとは同値である．(ここで，$\{S_\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{Z}^2}$ は l^∞ 上に $(S_\alpha u)_\eta=u_{\alpha+\eta}$ と作用する平行移動の群．) [1]および[12]で，平行移動の群を用いて，系の平衡状態が調べられている．関連する次の方程式の数値実験が[4]でおこなわれている．

$$\dot{u}_{i,j}=-\Delta_B(-\Delta_A u_{i,j}-f(u_{i,j})), \qquad (i,j)\in\mathbf{Z}^2,$$

ここで，係数は，$\Delta_B=\Delta^++\Delta^\times$, $\Delta_A=\alpha_0\Delta^++\alpha_1\Delta^\times$，非線形項は(2.2)に似た $(fu)=\log((1+u)/(1-u))+(\gamma+2)u$ であり，$u(i,j)$ の取り得る値は，$-1<$

$u(i,j)<1$ である．実験は，$\mathbf{Z}^2$ 上の有限な部分格子の上で，ノイマン条件および周期境界条件の下でおこなわれ，初期値としては，ランダム値を採用する．α_0, α_1, および σ の様々な値に対し，2種類の秩序パターン(縞(ストライプ)模様と市松模様)や，空間カオスが十分時間が経った後観測されている．

3 市松模様と縞模様の分岐

前節で述べたモデルで，秩序パターンがいかにして出現するかを分岐理論をもちいてあきらかにする．その解析は局所的ではあるが，その豊かで複雑な構造があきらかになる．

いま，(2.1)において $f(0)=0$, $f(u)=\gamma u+g(u)$, $\gamma=f'(0)$, $\gamma>0$ を仮定する．今，M として 2×2 の空間周期をもつ，4次元の l^∞ の部分空間

$$M=\{u\in l^\infty | u_{i,j}=u_{i+2,j}=u_{i,j+2} \text{ すべての } (i,j)\in\mathbf{Z}^2\}$$

をとる．任意の $u\in M$ は，次のように表現される．

$$u_{i,j}=(-1)^{i+j}w+(-1)^j x+(-1)^i y+z$$

この式は，M を表現する座標系 $(w,x,y,z)\in\mathbf{R}^4$ をあたえる．ちなみに，w, x, y, z は実際に平面に表示した際に，それぞれ，市松や，水平縞，垂直縞，一様な平面に対応する．(2.1)を，M 上に制限した場合，式は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}\dot{w}&=(8\beta^+-\gamma)w+g_1\\ \dot{x}&=(4\beta^++8\beta^\times-\gamma)x+g_2\\ \dot{y}&=(4\beta^++8\beta^\times-\gamma)y+g_3\\ \dot{z}&=-\gamma z+g_4\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

ここで，$g_k=g_k(w,x,y,z)(1\le k\le 4)$ は，原点の近傍では少なくとも2次以上の非線形項である．$\gamma>0$ なので，$(w,x,y,z)=(0,0,0,0)$ をとおる三次元の中心多様体 $z=\Phi(w,x,y,\beta^+,\beta^\times)$ が$(\beta^+,\beta^\times)=(\gamma/8,\gamma/16)$ の付近で存在することがわかる．すなわち，z は，w,x,y の値からきまる．[3]において，(3.1)の中心多様体に制限した力学系の挙動が調べられており，様々な平衡状態の存在について調べられている．平衡状態としては，安定な市松模様，縞模様があり，同時に種々様々な複雑な形をした不安定な模様がある．f として(2.2)をとれば，分岐点の近傍では $8\beta^+>\gamma$ のとき市松模様を，$4\beta^++8\beta^\times>\gamma$ のときには水平，および垂直の縞模様をとることがわかっている．

4 進行波解と伝播停止

進行波解は，重要な解のクラスであり，しばしば数値計算で観測される．[4]において，2つの異なるパターンの間(例えば反対位相をもつ市松模様)の界面の進行波解が調べられている．Zinner の初期の業績である[23]([13]および[24]も参照)は，整数格子上での進行波について，理論的考察を行っている．[21], [22]では，大変興味ある進行波解や，渦巻波が数値計算および実際の(電

気的)実験で得られている．(2.1)の進行波解とは，次のような形のものをいう．

$$u_{i,j} = \varphi(i \cos \theta + j \sin \theta - ct) \tag{4.1}$$

ここで，φ: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $c\in\mathbf{R}$ は波の速さ，$\theta\in\mathbf{R}$ は運動の方向を示す．θ があらかじめ与えられたパラメータであるのに対して，速さ c は求めねばならない解の一部であり，0 またはそれ以外の値をとりうる．仮に $c=0$ であれば，解は単なる平衡状態に過ぎない．(4.1)を(2.1)に代入すると $c\neq 0$ ならば，

$$\begin{aligned} -c\varphi'(\xi) = &-\beta^+(\Delta_\kappa\varphi(\xi)+\Delta_\sigma\varphi(\xi))-\beta^\times(\Delta_{\kappa+\sigma}\varphi(\xi)+\Delta_{\kappa-\sigma}\varphi(\xi)) \\ &-f(\varphi(\xi)), \quad \xi\in\mathbf{R} \end{aligned} \tag{4.2}$$

のような関数微分方程式となる．ここで，$\Delta_\gamma\varphi(\xi)=\varphi(\xi+\gamma)+\varphi(\xi-\gamma)-2\varphi(\xi)$ であり，$\kappa=\cos\theta$, $\sigma=\sin\theta$ である．典型的な境界条件として，$\varphi(\pm 1)=\pm\infty$ がある．(2.3)より，$f(\pm 1)=0$ であり，これは2つの安定した平衡状態を結ぶことに対応する．[13]では，$\beta^+, \beta^\times<0$，および，ある一般の f のクラスに対して一次元格子(つまり，$\theta=0$ の場合)での(4.2)の解の存在 (φ, c) が示されている．証明には，位相的不動点定理がもちいられている．さらに最近，高次元での進行波の存在と，その一意性が無限次元メルニコフ法を用いるホモトピー的アプローチにより，[16], [17]において示された．

次に重要な現象として，**伝播停止**をあげたい．Keener は，[14]において，パラメータがある範囲にあれば，進行波解が動かなくなる($c=0$)現象について述べている．たとえば，(2.3)のような f に対しては，ある $a^*\in(0,1)$ が存在して $-a^*\leq a\leq a^*$ の範囲において，$c=c(a)=0$，すなわち伝播停止が生じ，$a^*<\pm a<1$ の範囲においては $\pm c(a)>0$ となることがわかっている．これは，$a\neq 0$ なら $c\neq 0$ となる放物型の偏微分方程式とは対照的である．伝播停止が始まるあたり，すなわち，c が0に十分近いとき方程式(4.2)は，特異摂動問題となる．著者の1人と R. Nussbaum との共同研究により，遅れの項のみを含む特異摂動型の関数微分方程式が研究されている([19], [20]参照)．[5]において，(2.3)を単純化した次の非線形項に対し

$$f(u, a) = u - \mathrm{sgn}\,(u-a) \tag{4.3}$$

伝播停止の向き θ への依存性が研究されており，次の結果が示されている．ここで述べる $a^*(\theta)$ の奇妙な特徴は，(2.3)をはじめとする，一般の滑らかな f についても，成立するものと思われる．

定理 1. 非線形項として(4.3)をとり，$\beta^+<0, \beta^\times=0$ としたとき，パラメータ a に関して伝播停止の始まる値を，$a^*=a^*(\theta)$ と定義すると，$a^*(\theta)$ は，θ の関数として，傾き $\tan\theta$ が無理数のとき連続であり，$\tan\theta$ が有理数および $\pm\infty$ であるとき不連続である．

(4.3)の場合は $\tan\theta_0$ が有理数か $\pm\infty$ のとき $\liminf_{\theta\to\theta_0} a^*(\theta)>a^*(\theta_0)$ が示

されており，それゆえ，無理数方向に向かって進む波より，有理数方向に進む波の方が，止まりやすい傾向をもつことがわかる．このことは，結晶成長の言葉で説明することも可能である．また定理1の証明には，力学系の一般的な手法(メルニコフ法や，比較法を含む)が用いられている．[7]において，1次元格子 $\mathbf{Z}$ にそって連続的に移動する座標系を用いて，進行波解の安定性と摂動の一般的な問題が研究されている．特に(2.1)に，離散時間を(Euler 法のように)用いたときの無理数速度の進行波解が研究されている．(有理数の速度の場合の結果は[11]を参照されたい．)移動する座標系の構成は，決して自明ではなく，l^∞ の線形同型群 $GL(l^\infty)$ の連結性に依存している．

5　モザイク解

パターン形成と，空間カオスの形成を，大域的に理解するために，平衡解のある特別なクラスを考える．それはモザイク解と呼ばれるもので，[8]において紹介，研究され，[10]においても調べられている．系(2.1)の非線形項として，次の集合値関数をとり

$$f(u)=\begin{cases} (-\infty,-\gamma) & \text{if}\quad u=-1 \\ \{\gamma u\} & \text{if}\quad -1<u<1 \\ [\gamma,\infty] & \text{if}\quad u=1 \\ \phi & \text{if}\quad |u|>1 \end{cases} \tag{5.1}$$

モザイク解を，次のように定義する．

定　義

f として(5.1)を採用した系(2.1)において，各 $(i,j)\in\mathbf{Z}^2$ で，$u_{i,j}\in\{-1,0,1\}$ となる平衡解を**モザイク解**と呼ぶ．一般に，$u:\mathbf{Z}^2\to\{-1,0,1\}$ となる任意の関数を**モザイク**と呼び，それらの集合を $\mathscr{M}_2=\{-1,0,1\}^{\mathbf{Z}^2}$ と表す．

系(2.1)の非線形項として，(5.1)をとり，さらに，$=$ を $\in$ と置き換えそれを微分包含式と解釈しよう．これは，正の時間方向の初期値問題として適切であると同時に，リアプノフの安定性も意味を持つ．非線形項(5.1)の利点は，安定平衡状態に対する陽的な判定条件が組み合わせ論的な形式で与えられることである．任意のモザイク $u\in\mathscr{M}_2$ において，次の整数量を定義する．

$$\sigma^+_{i,j}=(\Delta^+u_{i,j})+4u_{i,j},\quad \tau^+_{i,j}=|\Delta^+u_{i,j}|,$$
$$\sigma^\times_{i,j}=(\Delta^\times u_{i,j})+4u_{i,j},\quad \tau^\times_{i,j}=|\Delta^\times u_{i,j}|,$$
$$z^+_{i,j}=\mathrm{card}\,\{(a,b)\in\mathbf{Z}^2|u_{a,b}=0\text{ 及び }|a-i|+|b-j|=1\}$$
$$z^\times_{i,j}=\mathrm{card}\,\{(a,b)\in\mathbf{Z}^2|u_{a,b}=0\text{ 及び }|a-i|=|b-j|=1\}$$

ここで，$-4\le\sigma^+_{i,j},\sigma^\times_{i,j}\le 4,\ 0\le\tau^+_{i,j},\ \tau^\times_{i,j}\le 8$，及び $0\le z^+_{i,j},z^\times_{i,j}\le 4$ に注意しよう．以上の定義により，[8]で得られた次の結論が導かれる．ここで，安定性は，リアプノフ安定を意味する．

定理 2. モザイク $u\in\mathscr{M}_2$ は，非線形項を(5.1)とした方程式(2.1)の平衡解である為の必要十分条件は，任意の $(i,j)\in\mathbf{Z}^2$ において，つぎが成り立つことである．

$u_{i,j}=\pm1$ であるならば，$\tau^{+}_{i,j}\beta^{+}+\tau^{\times}_{i,j}\beta^{\times}\geq\gamma$，及び $u_{i,j}=0$ ならば，

$$\sigma^{+}_{i,j}\beta^{+}+\sigma^{\times}_{i,j}\beta^{\times}=0 \tag{5.2}$$

更に，(5.2)の全ての不等号が真に成り立ち，かつ次の条件がみたされるならば，u は安定である．

$u_{i,j}=0$ の時，

$$4\beta^{+}+z^{+}_{i,j}|\beta^{+}|+4\beta^{\times}+z^{\times}_{i,j}|\beta^{\times}|<\gamma \tag{5.3}$$

定理 2 の安定性は比較定理と，平衡解をはさむ上解と下解を作ることで証明される．この結果はさらに，(5.1)のグラフの近くにあるような連続な非線形項についても拡張できる．同時にその証明は，各平衡解の吸引領域を簡単かつ陽に与える．では，いくつかのパターンの例を考えて見よう．市松模様のモザイク $u_{i,j}=(-1)^{i+j}$ に対しては，各 (i,j) において，$(\tau^{+}_{i,j},\tau^{\times}_{i,j})=(8,0)$ となる．定理 2 から，市松模様は $8\beta^{+}\geq\gamma$ の時に限って平衡解になることがわかっている．分岐論的手法により[3]において同じ条件が得られている．また，真に不等号が成り立てば安定である．つぎに，縞モザイク $u_{i,j}=(-1)^{i}$, $u_{i,j}=(-1)^{j}$ に対しては，各 (i,j) において $(\tau^{+}_{i,j},\tau^{\times}_{i,j})=(4,8)$ となり，これらは，$4\beta^{+}+8\beta^{\times}\geq\gamma$ のとき，またそのときに限り([3]においても同様に)平衡解であり，更に不等号が成り立てば安定であることがわかる．

いま，図 1 のように，値 0 の縦の列で区切られた市松模様の縦縞模様を考える．(記号＋, －, 0 は，各々 $u_{i,j}=1,-1,0$ を意味する．)各市松模様の幅は少なくとも 2 以上の任意の値とする．市松模様は，各 0 の界面を横切るごとに，“相変化” しなくてはならない．定理 2 の結果より([8]を参照)もし次の不等式

$$8\beta^{+}>\gamma,\quad 7\beta^{+}+2\beta^{\times}>\gamma,\quad 4\beta^{+}+2|\beta^{+}|+4\beta^{\times}<\gamma \tag{5.4}$$

が全て成り立つならば，そのようなモザイクは全て安定平衡解となる．任意の γ について，(5.4)の不等式が $(\beta^{+},\beta^{\times})$ 平面の，空でないある部分集合を定めることが，容易にわかる．

図 1 に加えて，[4]において数値的に観測された多くのパターンは，パラメータ $(\beta^{+},\beta^{\times},\gamma)$ のある開集合のなかで，(2.1), (5.1)の安定なモザイク解とし

＋－＋0－＋－＋－0＋－0＋
－＋－0＋－＋－＋0－＋0－
＋－＋0－＋－＋－0＋－0＋
－＋－0＋－＋－＋0－＋0－
＋－＋0－＋－＋－0＋－0＋
－＋－0＋－＋－＋0－＋0－
＋－＋0－＋－＋－0＋－0＋
－＋－0＋－＋－＋0－＋0－

図 1　垂直界面をもつ安定な市松模様型モザイク解

+ − + − + − + 0	+ − + − + + + +	0 + − + − + − 0
− + − + − + 0 −	+ − + − 0 − − −	− 0 − + − + 0 +
+ − + − + 0 − +	+ − + − + + + +	+ + 0 + − 0 − −
− + − + 0 − + −	+ − + − 0 − − −	− − − 0 0 + + +
+ − + 0 − + − +	+ − + − + + + +	+ + + 0 0 − − −
− + 0 − + − + −	+ − + − 0 − − −	− − 0 − + 0 + +
+ 0 − + − + − +	+ − + − + + + +	+ 0 + − + − 0 −
0 − + − + − + −	+ − + − 0 − − −	0 − + − + − + 0

図 2　安定なモザイク解の例

$$
\begin{array}{cccccccc}
- & + & + & - & + & + & + & - \\
- & - & + & - & - & + & + & - \\
+ & + & + & + & - & - & + & - \\
- & - & - & + & + & - & - & + \\
- & + & + & + & + & - & + & - \\
+ & + & - & - & - & + & + & - \\
+ & - & - & - & + & - & - & + \\
- & - & + & + & - & + & - & +
\end{array}
$$

図 3　空間的に無秩序なモザイク解

て存在することが[8]によって示されている．図 2 にそれらの例のいくつかをあげる．ここでは，縞やチェックの様々な種類の配列がみてとれる．さて，いま $\beta^{+}>\gamma$ かつ $\beta^{\times}>\gamma,\ \gamma>0$ と仮定しよう．このとき (5.3) の不等式は決して満たされないので，定理 2 より任意の (i, j) について $u_{i,j}=\pm 1$ でなくてはならない．すると，$(\tau_{i,j}^{+}, \tau_{i,j}^{\times})\neq(0,0)$ の場合又その時に限り条件 (5.2) が満たされる．これは次の，3×3 のタイルパターンが

$$
\begin{array}{ccc}
+++ & \qquad\qquad & --- \\
+++ & & --- \\
+++ & & ---
\end{array}
\tag{5.5}
$$

モザイクのどこにも現れないことと同値である．しかし，これら以外の＋, −の配列は許される．図 3 は，そのようなモザイクパターンの一部を表している．そこには規則的パターンはどこにもない．多くのこの類いのモザイクは，定理 2 によってこのパラメータ領域では安定平衡状態であることがわかり，容易に作ることができる．これは，**空間カオス**の例であり，次の節で正確に定義したい．

$\mathscr{T}$ を $\{-1, 0, 1\}$ からなる 3×3 行列の有限集合とし，任意にパラメータ $(\beta^{+}, \beta^{\times}, \gamma)$ を選ぶと，(5.2), (5.3) より，部分集合 $\mathscr{T}_0=\mathscr{T}_0(\beta^{+}, \beta^{\times}, \gamma)\subseteq T$ が決まる．ここで，要素 $v\in\mathscr{T}$ は，$(i, j)\in\mathbf{Z}^2$ を中心とする 3×3 近傍へのモザイク u の制限と同一視するものとする．$\gamma\neq 0$ を固定して，$c^{+}\beta^{+}+c^{\times}\beta^{\times}=\gamma$($c^{+}, c^{\times}\in\{0, 1, 2, \cdots, 8\}$ かつ $(c^{+}, c^{\times})\neq(0, 0)$ の 80 の直線は $(\beta^{1}, \beta^{\times})$ 平面を 2041 の開領域に分解する．各領域は，ある部分集合 $\mathscr{T}_0\subseteq\mathscr{T}$ に相当し $(q^{+}\beta^{+}+q^{\times}\beta^{\times}=0$, $q^{+}, q^{\times}\in\{-4, -3, -2, \cdots, 4\}$ かつ $(q^{+}, q^{\times})\neq(0, 0)$ となるような行をその領域

から取り除けば，(5.2)の第2行目は自動的に成り立つ.)，(5.2), (5.3)を満たすモザイク集合のなかの部分集合 $\mathscr{U}(\beta^+, \beta^\times, \gamma)\subseteq\mathscr{M}_2$ が $\mathscr{T}_0$ によって決められるので，パラメータ空間の開部分集合に相当する．たかだか2041という有限の場合のみ考慮すればよい．それにもかかわらず，$\mathscr{T}_0$ から $\mathscr{U}(\beta^+, \beta^\times, \gamma)$ を決めるのは自明なことではない．実際，これより一般的な問題(ドミノ問題)は論理的に解くことができないことが[2]のなかで示されている．

6 エントロピーの計算

ここでは，安定解の空間エントロピーを用いて空間カオスおよびパターン形成の定義を行う([25]参照)．いま，モザイク空間 $\mathscr{M}_2$ の空でない任意の部分集合 $\mathscr{V}$ をとり，平行移動 S に対して不変，すなわち任意の $\alpha\in\mathbf{Z}^2$ に対し $S_\alpha(V)=\mathscr{V}$ となるものとする．いま，任意の正の整数の組合せ (m, n) をとり，$\mathbf{Z}^2$ の上で $m\times n$ の窓をつくり，それを通して要素 $u\in\mathscr{V}$ をながめてみる．その際，この窓のなかにみられる相異なるパターンの数を $c(m, n)$ と定めることにする．$0<c_{m,n}\leq 3^{mn}$ である．ここで，$\mathscr{V}$ の**空間エントロピー** $h=h(\mathscr{V})$ を，次のように定める．

$$h(\mathscr{V}) = \lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{mn} \log c_{m,n} \tag{5.6}$$

この極限は常に存在し，$0\leq h\leq \log 3$ となる．また，各 $(\log c_{m,n})/(mn)$ は，h の上界となる．任意の $(\beta^+, \beta^\times, \gamma)$ において，(5.2), (5.3)を満たすモザイク解の集合のエントロピー $h(\mathscr{U}(\beta^+, \beta^\times, \gamma))$ が計算可能である．これにより，二つの正反対の振舞いを区別することができる．

定　義　あるパラメータの組合せ $(\beta^+, \beta^\times, \gamma)$ において，方程式(2.1)及び(5.1)の平衡状態のエントロピーが $h(\mathscr{U}(\beta^+, \beta^\times, \gamma))=0$ であるときを，**パターン形成**，$h(\mathscr{U}(\beta^+, \beta^\times, \gamma))>0$ であるときを**空間カオス**と呼ぶ．

これよりパターン形成は，安定な平衡状態のほんのごく一部をしめるにすぎない．そしてそれゆえに，空間に現れるバリエーションは限られている．他方，空間カオスは，無秩序な形をした安定パターンが無数に存在することを意味している．

一次元格子(整数 $\mathbf{Z}$)においては，$\mathscr{V}\subseteq\mathscr{M}_1$ が有限型のサブシフト，すなわちマルコフ連鎖である時は，遷移行列の最大固有値を用いて，$h(\mathscr{V})$ は明解に計算できる．しかし，2次元以上になると，そのような明解な計算方法は存在しなくなる．しかしながら，$h(\mathscr{U}(\beta^+, \beta^\times, \gamma))$ の厳密な評価は可能である．例えば，$\gamma>0$ として，$\beta^+>\gamma, \beta^\times>\gamma$ となる領域を考える．ここでは $\mathscr{U}(\beta^+, \beta^\times, \gamma)$ より，全てのモザイクは，$u_{i,j}=\pm 1$ となるように構成されており，なおかつ(5.5)のような 3×3 パターンは除外されている．よって，$c_{3,3}=2^9-2=510$ となり，上限は $h\leq(\log c_{3,3})/9\approx(.99937)\log 2$ であることがわかる．一方，下限

は，次のように考えることによって求められる．すなわち，2つのレンガ $\boxed{+\ -}$ および $\boxed{-\ +}$ からなる $(2m)\times n$ の部分格子のタイリングを全て考える．(5.5)に現れる禁止されたパターンを全て除くと，$c_{2m,n}$ の下限 2^{mn} が得られる．つまり，$c_{2m,n}\geq 2^{mn}$ となり，(5.6)から $h\geq(\log 2)/2$ が得られる．

[10]において，幅 m の無限の帯縞で2次元格子 $\mathbf{Z}^2$ を，近似することちによって，かなり詳細な $h(U(\beta^+,\beta^\times,\gamma))$ の数値評価がえられることが述べられている．($\beta^+,\beta^\times>\gamma>0$ の場合，$h\approx(.9904)\log 2$ となる．) 縞模様 $\{(i,j)\in\mathbf{Z}^2|0\leq i<m\}$ を考えることによって，遷移行列 A_m を持つ一次元問題が得られる．A_m の最大固有値を λ_m とすると，エントロピー $h(\mathscr{U}(\beta^+,\beta^\times,\gamma))$ は，$\log\lambda_m$ によって近似される．遷移行列 A_m は，適度な値 m に対してさえ，$2^{2m+2}\times 2^{2m+2}$ というかなり大きなサイズを持つ．他方で，A_m の各列は，0でない値はせいぜい2つしか存在しないので，λ_m の計算は，メモリーは必要なものの，比較的速くおこなわれる．

[参考文献]

[1] Afraimovich, V. S., Chow, S. N., and Shen, W., Hyperbolic homoclinic points of $\mathbf{Z}^d$ actions in lattice dynamical systems, International J. Bifurcation and Chaos, 6(1996), 1059-1075.

[2] Berger, R.,The undecidability of the domino problem, Mem. Amer. Math. Soc., 66 (1966).

[3] Cahn, J. W., Chow, S. N., Mallet-Paret, J., and Van Vleck, E. S., Bifurcation phenomena in lattice differential equations, in preparation.

[4] Cahn, J. W., Chow, S. N., and Van Vleck, E. S., Spatially discrete nonlinear diffusion equations, Rocky Mount. J. Math., 25(1995), 87-118.

[5] Cahn, J. W., Mallet-Paret, J., and Van Vleck, E. S., Traveling wave solutions for systems of ODE's on a two-dimensional spatial lattice, SIAM J. Appl. Math., to appear.

[6] Chow, S. N., and Mallet-Paret, J., Pattern formation and spatial chaos in lattice dynamical systems: I, IEEE Trans. Circuits Syst., 42(1995).

[7] Chow, S. N., Mallet-Paret, J., and Shen, W., Traveling waves in lattice dynamical systems, preprint.

[8] Chow, S. N., Mallet-Paret, J., and Van Vleck, E. S., Pattern formation and spatial chaos in spatially discrete evolution equations, Random & Computational Dynamics, 4 (1996), 109-178.

[9] Chow, S. N., Mallet-Paret, J., and Van Vleck, E. S., Dynamics of lattice differential equations, Int. J. Bifur. Chaos, 6(1996), 1605-1621.

[10] Chow, S. N., Mallet-Paret, J., and Van Vleck, E. S., Spatial entropy of stable mosaic solutions for a class of spatially discrete evolution equations, in preparation.

[11] Chow, S. N., and Shen, W., Stability and bifurcation of traveling wave solutions in coupled map lattices, Dyn. Syst. Appl., 4(1994), 1-26.

[12] Chow, S. N., and Shen, W., Dynamics in a discrete Nagumo equation-spatial chaos, SIAM J. Appl. Math., 55(1995), 1764-1781.

[13] Hankerson, D., and Zinner, B., Wavefronts for a cooperative tridiagonal system of differential equations, J. Dyn. Diff. Eq., 5(1993), 359-373.

[14] Keener, J. P., Propagation and its failure in coupled systems of discrete excitable cells, SIAM J. Appl. Math., 22(1987), 556-572.

[15] Mallet-Paret, J., Spatial patterns, spatial chaos, and traveling waves in lattice differential equations, in: Stochastic and Spatial Structures of Dynamical Systems, 105-129, (van Strien, S. J., and Verdyum Lunel, S. M., eds.), North-Holland, Amsterdam, 1996.

[16] Mallet-Paret, J., The global structure of traveling waves in spatially discrete systems, preprint.

[17] Mallet-Paret, J., The Fredholm alternative for functional differential equations of mixed type, preprint.

[18] Mallet-Paret, J., and Chow, S. N., Pattern formation and spatial chaos in lattice dynamical systems: II, IEEE Trans. Circuits Syst., 42(1995).
[19] Mallet-Paret, J., and Nussbaum, R. D., Global continuation and asymptotic behaviour for periodic solutions of a differential-delay equation, Ann. Mat. Pura ed Appl., 145(1986), 33-128.
[20] Mallet-Paret, J., and Nussbaum, R. D., Multiple transition layers in a singularly perturbed differentialdelay equation, Proc. Roy. Soc. Edin. 123A(1993), 1119-1134.
[21] Pérez-Muñuzuri, A., Pérez-Muñuzuri, V., Pérez-Villar, V., and Chua, L. O., Spiral waves on a 2-d array of nonlinear circuits, IEEE Trans. Circuits Syst., 40(1993), 872-877.
[22] Pérez-Muñuzuri, V., Pérez-Villar, V., and Chua, L. O., Propagation failure in linear arrays of Chua's circuits, Int. J. Bifur. Chaos, 2(1992), 403-406.
[23] Zinner, B., Existence of traveling wavefront solutions for the discrete Nagumo equation, J. Diff. Eq., 96(1992), 1-27.
[24] Zinner, B., Harris, G., and Hudson, W., Traveling wavefronts for the discrete Fisher's equation, J. Diff. Eq., 105(1993), 46-62.
[25] Eizenberg, A., Kifer, Y., and Weiss, B., Large deviations for $\mathbf{Z}^d$-actions, Comm. Math. Phys., 164, 3(1994), 433-454.

[Abstract]

We survey recent advances in the theory of lattice dynamical systems. Among the topics discussed are pattern formation and spatial chaos, bifurcation of patterns, and traveling waves and propagation failure. We also discuss a class of equilibria called mosaic solutions, which are composed of the elements $+1$, -1, and 0, placed at each lattice point. A stability criterion for such solutions is given. The spatial entropy h of the set of all such stable solutions is defined, and we study how this quantity varies with parameters. Systems are qualitatively distinguished according to whether $h=0$ (termed pattern formation), or $h>0$ (termed spatial chaos).