日本神経回路学会誌　Vol. 15, No. 4（2008），272–288

解　　説

相互作用するミクロなトレーダ群のマクロな振る舞い

マイノリティ・ゲームに基づく金融市場の確率モデルとその動力学

井　上　純　一

北海道大学 大学院情報科学研究科*

Macroscopic behaviour of interacting microscopic traders
A probabilistic model of financial markets based on minority games

Jun-ichi Inoue

Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University*

概要

マイノリティ・ゲームと呼ばれる金融市場の数理モデルの動力学を「ミクロ情報とマクロ情報の絡み合い」という観点から解説する.

1. は じ め に

全結合型神経回路網の連想記憶の記憶容量やフィードフォーワード型神経回路の学習曲線に関する解析評価の成功で注目を浴びた脳科学への統計力学的アプローチ[1]は現在では地道な研究に移った趣もあるが, ここで研究対象をニューラルネットワークから少しばかり広げて俯瞰すると, 多くの分野にまたがる広汎な研究対象に対し, 方法論, 考え方としての統計力学の有効性が見えてくる. 多くの脳研究者にとって対象である脳は不変であり, そこへの接近法を様々に変えることはあっても, 逆に自分の得意技とする方法論に立脚して研究対象を広げていく試みはあまりなされてこなかったのではあるまいか.

統計力学に関して言えば, 多くの要素が複雑に絡み合って存在するシステムは何も脳だけに限らず, 情報通信や画像処理[2–5], 組み合わせ最適化[6], パターン認識[7]など, 多くの情報科学/工学の分野に対しても, その方法の有効性が明らかにされつつある. さらに, この情報統計力学の方法[2] の適用範囲はこれらにとどまらず, 経済現象, 金融活動などの社会科学的な諸問題にもその考え方を応用することができる[8]. その際の基本的考え方, 目標はミクロな構成要素の動きから系のマクロな振る舞いを説明すること. つまり, 市場に参加する膨大な数のトレーダ (エージェント) の意思決定の方式をミクロに与えて, そこから市場価格変動等のマクロな経済現象を定性的に, 可能ならば定量的に説明することである. 言い換えると「トレーダ (ミクロ情報) ⇒ 市場 (マクロ情報)」の向きでの深い理解を目指したい. このとき, 神経回路網の構成要素がパーセプトロンのような単純素子であった一方, ここでの構成要素であるトレーダは何しろ「人間」の数理モデルであるため, 彼らの意思決定方式のミクロな定式化はより複雑になることが予想されるが, ここでも, まずは可能な限り単純で扱いやすいモデルから出発する. 当然, その後, 得られたマクロな振る舞いを金融データなどと照らし合わせてチェックすることにより数理モデル自体を検証し, 必要とあらば, より複雑化, 精密化していくこともできる. そこで, 本稿ではマイノリティ・ゲーム[9–12]と呼ばれる繰り返しゲームのもつダイナミックスに関し, 線形パーセプトロンのオンライン学習方程式との形式的類似点/相違点にも着目しつつ, その数理的側面を可能な限り平易に紹介してみたい.

本稿の構成は以下の通りである. まず, 次の第 2 節では市場におけるミクロ情報とマクロ情報を為替レートの変動を例に説明する. 続く第 3 節では本稿で扱うマイノリティ・ゲームを紹介し, 第 4 節において, 市場の履歴をともなうマイノリティ・ゲームをある種のスピン系の数理モデルとして定式化する. 続く第 5 節では各トレーダの意思決定方程式を導出し, ミクロ変数とマクロ変数についての更新式において, 両者が複雑

* 〒 060–0814　札幌市北区北 14 条西 9 丁目

な形で絡み合っていることを確かめる．また，ここではこの状態更新式と神経回路網の学習方程式の形式的類似点/相違点についても言及する．続く第 6 節では計算機シミュレーションにより，具体的にゲームの動的振る舞いをボラティリティ等の時間発展として調べる．第 7 節では母関数の経路積分表示によるダイナミックスの厳密な解析法について紹介する．最後の第 8 節は簡単なまとめである．

2. 市場におけるミクロ情報とマクロ情報

日常行われている株や貨幣などの商取引きに代表される「トレーダ (エージェント) のミクロな意思決定」における合理的判断とは何かを系統的に調べ，その判断がマクロに見てどのような結果を引き起こすのかを調べる学問分野は，今日では**ゲーム理論**[13–16] と呼ばれ，従来の経済学 (ミクロ経済学) にとどまらず，数学や社会学，心理学，生物学や物理学など多くの学問間を横断する研究分野となっている． 例えば，図 1 に載せたグラフは後にこの講義で見る**インターネット・トレーディングシステム**を採用するソニー銀行の円ドル為替レートであるが[17]，全てのトレーダに提示される，この「為替レートの変動」という「マクロ情報」はその起源をミクロに遡れば，個々のトレーダの「売り」「買い」の意思決定の結果であると考えることができる．従って，市場に参入するトレーダは公に提供されるこのレート変動の情報をもとに手持ちの貨幣を「円」または「ドル」に変えることで自らの資産を有効に運用しょうとする．よって，公に開示される為替レートの情報に基づく戦略を個々のトレーダが採用する限り，それらの戦略とそれに基づく行動結果がマクロなレート変動に(ある程度の時間差を伴って) フィードバックされることになる．その結果，ここで言う「マクロ情報」と「ミクロ情報」はけっして無相関ではなく，互いに複雑な形で絡み合っており，ミクロなトレーダの行動様式がマクロな情報をどのように変えるのか，あるいは，「為替レート変動間隔」のようなマクロな情報における確率変数の統計的性質にどのように影響するのか[18–21]，を調べることが金融市場を定量的に分析し，そこから何らかの規則性や法則性を探り出す上で重要になる．

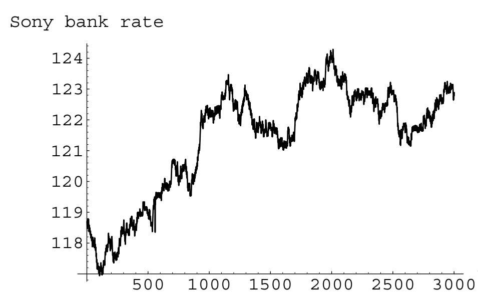

Fig. 1 ソニー銀行 (http://moneykit.net) の円ドル為替レート．佐塚直也氏 (ソニー) 提供．

本稿では紙面の都合上，ゲーム理論のいくつかの典型的な問題とその性質，基本的概念を細かく説明していく余裕がないので，ゲーム理論が対象とする様々なゲーム (システム) の中でも**マイノリティ・ゲーム**[9–12] と呼ばれる繰り返しゲームの一種に注目し，これをここでの中心的題材に据え，それを情報統計力学の観点から計算機実験により調べてみることにする．この繰り返しゲームはシステムにおけるトレーダの動きに ‘ノイズ’ やある種の ‘ランダムネス’ が介在し，そのような確率的要素がシステム全体の振る舞いに影響を与えるという意味において，確率的素子からなる神経回路網と同様，情報統計力学の考え方が役立つ一例となっている．

3. マイノリティ・ゲーム

マイノリティ・ゲームとは **El-Farol bar の問題**を起源とするゲームの一種である．El-Farol bar とは米国サンタフェにあるバー (酒場) の名前で，毎週週末に楽団による演奏会が行われる．そのとき，店内が満員では客はなかなか演奏を楽しむことができないので，バーには出かけずに自宅で楽しむ方が良いと考える．一方，店内が空いていればバーで演奏会を楽しむのが，ここでの好ましい選択となる．これは自分のとるべき行動の決定が他の人々の行動によって左右され (つまり「今晩は人気の楽団のコンサートが行われるので人出が多そうだから自宅でゆっくり過ごそう」だとか)，逆に自分の取った行動が他の人々にも影響されるという状況の典型例となっている．我々がここで考えるマイノリティ・ゲームではこれを単純化したものであり

マイノリティ・ゲーム

N(奇数) 人が「売り」「買い」いずれかの判断を行い，少数派グループに属した者が勝つ．

と簡単に書くことができる．ここで人数が奇数なのは，少数派の決定に対して都合が良いためにである (偶数だと少数派が決まらない場合もありうる)．もちろん，我々

がこれから具体的に「ゲーム」としてその数理を楽しんで行くためには, いくつかの取り決め, つまり, ここに書いた「判断」とはどのように行われるのか, 「勝ち」「負け」とはどのように定義されるのか等, 実際に数理モデル化する際に決めなくてはならない部分も多々あるが, ゲームの基本的内容はおおかたこの一行で表すことができる．サンタフェ研究所の Arthur は 1994 年に複雑系の一つの題材として El farol bar の問題を紹介したが[9], これを受けて Challet and Zhang (1997)[10] はこのゲームをスピン変数で表現し, 統計力学の研究者にとって見慣れたスピン系の問題に再定式化した．これがその後, 多くの物理学者がこの問題に参入するきっかけとなった．このあたりはかつて Hopfield が連想記憶モデルをスピングラス磁性におけるエネルギー概念を導入することで再定式化し, その後, 多くの人々が連想記憶の問題に取り組んだ状況といくらか似ているかもしれない[22, 23]．

以下では, このマイノリティ・ゲームに各トレーダの意思決定がマクロ情報を介して履歴に蓄積され, トレーダ群がその情報を共有し, 自らの未来の意思を決定するような, より現実に近い数理モデルを導入し, そのような「仮想市場」「人工市場」のマクロな挙動や安定性を計算機を用いた簡単な数値シミュレーションで調べてみたい．

4. 市場履歴が参照可能なマイノリティ・ゲーム

ここでは市場の履歴が各トレーダの意思決定に反映するような繰り返しゲームとしてのマイノリティ・ゲームを導入する．問題設定とその定式化がやや複雑なので, 各変数が何を意味しているのかに注意しながら, ときには変数に具体的な数字を当てはめながら読み進めて行くと良いであろう．

4.1 数理モデルによる定式化

先に一行で定義した問題を式を用いて定義しておく．まず, 各トレーダ i : $(i=1,\cdots,N)$ は各ゲーム・ラウンド l で自分の**入札価格** : $b_i(l) \in \Re$ を決める．ここでは入札価格 $b_i(l)$ は ±1 の 2 値 ($+1$:「売り」, -1 :「買い」) をとるものとして考えるが, この 2 値 (±1) を多値, もしくは連続する実数一般に拡張して考えても構わない．つまり, ここでの「入札」の解釈を「$b_i(l)$ が正のある値を取るならば, 繰り返しゲームのラウンド l でトレーダ i は商品を価格 b_i で売りたいと考えている」とするわけである．もちろん, 逆に入札価格 $b_i(l)$ が負であるならば,「繰り返しゲームのラウンド l でトレーダ i は商品を価格 b_i で買いたいと考えている」ということになる．どちらを採用するかは, もちろん, どのような取引きを問題にするのかにも依存するし, このシステムの何に着目し, どのような物理量を観測したいのか, にもよる．このとき, 各トレーダからなるシステム全体の入札価格の総和を

$$A(l) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N} b_i(l) \tag{1}$$

と定義しよう．この $1/\sqrt{N}$ のファクタは $A(l)$ が $\mathcal{O}(1)$ の量となるために付けた．この統計量 $A(l)$ が正の値を持つとき, 市場はそのラウンドで「売り超過」にあり, 逆にこの量が負の値を持つとき, 市場は「買い超過」にあることに注意しよう．今の場合, N を奇数に選んだ関係で, 売り手数, 買い手数間の「同点」はあり得ず, 必ず市場は「売り超過」か「買い超過」にある．

さて, 各トレーダはステップ l での自分の意思決定に際し, 過去の M ステップまで遡って定義される**情報ベクトル**:

$$\vec{\lambda}_{l,A,Z} = \left(\begin{array}{c} \mathrm{sgn}[(1-\zeta)A(l-1)+\zeta Z(l,1)] \\ \mathrm{sgn}[(1-\zeta)A(l-2)+\zeta Z(l,2)] \\ \cdots \\ \cdots \\ \mathrm{sgn}[(1-\zeta)A(l-M)+\zeta Z(l,M)] \end{array} \right) \tag{2}$$

を共有する．ここに, $\mathrm{sgn}(\cdots)$ は符号関数, $Z(l,\lambda)$: $\lambda=1,\cdots,M$ はホワイト・ノイズであり

$$\langle Z(l,\lambda)Z(l^{'},\lambda^{'})\rangle = \delta_{l,l'}\delta_{\lambda,\lambda'} \tag{3}$$

が成り立つ． 括弧 $\langle\cdots\rangle$ は Z の従う分布での平均を意味する． $\zeta = 1$ の場合には市場の履歴は実質的にノイズからの寄与だけしかなくなり, トレーダ達のとった行動をマクロに表す $A(l)$ の履歴情報 : $A(l-1), A(l-2), \cdots, A(l-M)$ はトレーダ達には見えなくなっている．一方, $\zeta=0$ の場合にはノイズはゼロであるから, この情報ベクトルはトレーダ達のとった行動が $A(l-1), A(l-2), \cdots, A(l-M)$ を介して反映されることになる．ζ は $0 \le \zeta \le 1$ の値をとるのだが, この値が 1 に近ければ近いほど, トレーダ達にとって利用可能な市場の情報はノイズに埋まってしまうことになる．以降ではこの場合を「偽市場履歴」と呼ぶことにしよう．これ以外にも市場の履歴をゲームに取り込む様々な方法が採られているが[24, 25], 後に議論するように, そのどれを用いるかは数理モデル化によって説明しょうとする金融データの性質に依存する．以下では簡単のため, この $\zeta=0$ の場合, つまり, 「真市場履歴」につき, この情報ベクトルの意味するところを考えてみよう．

例えば, 過去に遡る M ステップでの $\mathrm{sgn}[A(l-\lambda)]$, $\lambda=1,\cdots,M$ の値が全て $+1$ の場合, これをベクトルで書くと

$$\overline{\vec{\lambda}}_{l,A,Z} = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ \cdots \\ \cdots \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

となるが, この情報ベクトルの意味するところは「過去 M ラウンドで市場は常に『売り超過』にあった」という事実である．この手の情報が各ラウンドで全てのトレーダに利用可能な情報として提示されることになる[X*X]．情報ベクトル $\vec{\lambda}_{l,A,Z}$ の個数 $|\vec{\lambda}_{l,A,Z}|$ は, ベクトルの各成分が ±1 の 2 値であるから

$$|\vec{\lambda}_{l,A,Z}| = \underbrace{2\cdot2\cdot2\cdots2}_{M\ 個} = 2^M \ \ (個)$$

あり, 全トレーダは各ラウンドでこの中から一つ選択される情報ベクトル $\vec{\lambda}_{l,A,Z}$ を参照し, 自分の決定に役立てる．ところで, 各トレーダはどのように自分の行動を決定するのであろうか?

例えば, 上に見た特定のベクトル $\overline{\vec{\lambda}}$ がトレーダに提示された場合, 市場は過去 M ラウンドにおいて常に「売り超過」にあるわけであるから, この場合の「マイノリティ・グループ」は「買い」の行動をとった方であり, あるトレーダはこの情報ベクトルに対して「次も『売り超過』のはずだろうから自分は買おう (-1 を入札価格としよう)」と考えるかもしれないし, 別のトレーダは「次のラウンドあたりには市場は『買い超過』に転じるはずである」と状況を裏読みし, $+1$ を入札価格にするかもしれない．このように提示された情報ベクトルに対する各トレーダのとる行動はトレーダの思惑, つまり, 戦略に依存する．今の場合, 各トレーダの行動は「売る」か「買う」かの 2 通りしかないが, 便宜上, 提示された情報ベクトル $\vec{\lambda}$ に対し, S 通りの戦略が取れるものとし[†], 各ゲーム・ラウンド l においてトレーダ i 毎に定義される S 次元の**戦略ベクトル**：

$$\vec{R}^i_{\vec{\lambda}_{l,A,Z}} = (R^1_{\vec{\lambda}_{l,A,Z}},\cdots,R^S_{\vec{\lambda}_{l,A,Z}}) \tag{5}$$

を考えよう．これは各トレーダ毎に可能な情報ベクトル $\vec{\lambda}_{l,A,Z}$ の数 $P=2^M$ 個だけ保有されており, ベクトルの各成分は ±1 をとり, ここで我々が考えている 2 値入札価格モデル $b_i(l)=\pm1$ では, この成分値 $R^a_{\vec{\lambda}_{l,A,Z}}=\pm1$ はそれぞれトレーダが「売る」か「買う」かに対応することになる．すると, 上で見た特定の情報ベクトル $\overline{\vec{\lambda}}$ に対し, トレーダ i は例えば $\vec{R}^i_{\overline{\vec{\lambda}}_{l,A,Z}}=(1,-1,1,\cdots,1)$ という戦略ベクトルを持つことになり, 別の情報ベクトル $\underline{\vec{\lambda}}$ に対しては $\vec{R}^i_{\underline{\vec{\lambda}}_{l,A,Z}}=(-1,-1,-1,\cdots,1)$ を持っている．従って, トレーダ i は各ラウンドで提示された情報ベクトル $\vec{\lambda}_{l,A,Z}$ に対応する戦略ベクトル $\vec{R}^i_{\vec{\lambda}_{l,A,Z}}$ の S 個の成分の中から一つを選ぶことで, その成分値を次のラウンドにおける自分の行動 (「売る」か「買う」か) とする．

それでは, このシステム解析を実行していくにあたり, 各トレーダの戦略ベクトルの各成分 ±1 をどのような値に選んだらよいでろうか? この指針として, 実際に何人かのトレーダにゲームの状況を説明したのちに戦略ベクトルを作成してもらっても良いが, システムのマクロな振る舞いを調べる限りはトレーダ数が十分に大きな場合において, 確率 1/2 で各成分 ±1 を割り振ってもよいであろう．そこで, ここではそれらの成分を上記の意味でランダムに割り振り, その値はゲームの開始前に与えられ, ゲームを通して固定された一定値をとるものとして話を進める．以上により, この戦略ベクトルを可能な情報ベクトルの個数だけ縦に並べたものは

$$\vec{R}^i = \begin{pmatrix} R^{i1}_1 & R^{i2}_1 & \cdots & R^{iS}_1 \\ R^{i1}_2 & R^{i2}_2 & \cdots & R^{iS}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R^{i1}_{2^M} & R^{i2}_{2^M} & \cdots & R^{iS}_{2^M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & +1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ +1 & +1 & \cdots & +1 \end{pmatrix} \quad \text{(各成分はゲーム開始時に固定)} \tag{6}$$

のような $S\times2^M$ のサイズの行列となり, ここではこれを**ルックアップ・テーブル**と呼ぶことにする．

[X*X] 「売り超過」といっても, この数理モデルの場合, $A(l)$ の符号を各成分に持つベクトルを導入したので, 市場がどの程度「売り」に傾いているのかまではわからない．例えば, 101 人のトレーダがいる場合, あるラウンドで買い手 1 人, 売り手 100 人でも「売り超過」だし, 買い手 50 人, 売り手 51 人でも「売り超過」である．

[†] ここでは, ある戦略 A と戦略 B に対応する行動が双方ともに「買い」でも構わないとする．

以下では簡単のため, $S=2$, すなわち, 各トレーダは $a=1$ あるいは $a=2$ の 2 つの戦略のうちの一つを各ラウンド l で選択し, 自分の行動を決定する状況を考え, システムの振る舞いを計算機実験によって調べていくことにしょう.

5. 各トレーダの利得の更新と行動決定

各トレーダはゲームの各ラウンド (ステップ) l で次の決定方程式に従って戦略 $a(=1,2)$ を選択した場合の**利得**：$p_{ia}(l)$ を更新する.

$$p_{ia}(l+1) = p_{ia}(l) - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}} b_i(l) A(l) \tag{7}$$

$$b_i(l) = \sum_{\vec{\lambda}=1}^{P} \delta_{\vec{\lambda},\vec{\lambda}_{l,A,Z}} R_{\vec{\lambda}}^{i\tilde{a}_i(l)} \tag{8}$$

ここで, $\delta(x,y)$ はクロネッカ・デルタであり, $\tilde{\eta}$ は更新の重みで, ここでは簡単のため $\tilde{\eta}=1$ として話を進めることにする. $\tilde{a}$ は次で与えられる「利得を最大化する」という意味での**最適戦略**である.

$$\tilde{a}_i(l) = \mathop{\mathrm{argmax}}_{a} [p_{ia}(l)] \tag{9}$$

クロネッカ・デルタの性質:

$$\sum_{vec\lambda} \delta_{\vec{\lambda},\vec{\lambda}_{l,A,Z}} f(\vec{\lambda}) = f(\vec{\lambda}_{l,A,Z}) \tag{10}$$

から, $b_i(l)$ の値は, 各ラウンド l で選ばれた情報ベクトル $\vec{\lambda}_{l,A,Z}$ に対し, 自分の所有するルックアップ・テーブルの中の該当戦略 $R_{\vec{\lambda}_{l,A,Z}}^{i\tilde{a}_i(l)} \in \pm 1$ の値に相当する. 従って, この更新式は各ラウンドで自分の入札価格の符号 (つまり, 「売る」か「買う」か) と総入札価格 $A(l)$ が逆符号になるとき (つまり, 自分が少数派の選択を行った場合), その戦略に対して得られる利得 p_{ia} を増加させるという意味を持っている‡ . これは各トレーダにとって合理的な行動と言えるであろう.

このときの最適戦略とは, (8) で各ラウンドで自分の各戦略 (ここでは $a=1,2$) に対する利得が決まった際, その利得を最大とするような (今の 2 戦略系の場合には「最大とする方の」) 戦略が選ばれるということである. 従って, 各トレーダ i は各ステップ l で更新式 (8) に従って, 自分の入札価格 $b_i(l)$ と多数派の判定 $A(l)$ が逆になるように, 自らの持つ各戦略 a に対する利得 p_{ia} を定め, これらを最大にするような最適戦略を (9) 式に従って決める, という一連の行動をとって行くことになる.

‡ 先に「入札価格」という言葉を用いて各トレーダの提示する判断 (価格)：$b_i(l)$ を導入したが, 通常の「オークション」では各トレーダからの入札価格を参照し, 最も高い値で「買い」を出したトレーダがその商品を「落札」する. 従って, そこでの勝者は最終的に落札したトレーダであって, ここで考えている勝者であるところの「少数派」とは異なる. しかし, 我々がここで調べようとしている「総入札価格：$A(l)$」あるいはそれの「揺らぎ (ボラティリティ)」に注目する限りは勝者を一人選び出す必要はなく, その意味でこのマイノリティ・ゲームはオークションの一面をも合わせ持った数理モデルであると言うこともできる.

5.1 神経回路モデルとの形式的類似点と相違点

この解説の読者のなかには脳科学, 特にニューラルネットワークを専門とされる方が多いであろう. そこで, ここでは簡単に上記トレーダの意思決定の方程式と神経回路の学習方程式との形式的類似点/ 相違点について言及しておこう. 例えば, 結合ベクトルが $\vec{w}=(w_1,\cdots,w_N)$ で与えられる単純線形パーセプトロンが結合ベクトル $\vec{w}^*=(w_1^*,\cdots,w_N^*)$ を持つ教師単純線形パーセプトロンからオンライン・ヘッブ学習に基づき結合を更新する場合, 入力ベクトルを $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_N), |\vec{x}|=1$ とし, 学習係数を η とすれば, その学習方程式は次で与えられた.

$$w_i(l+1) = w_i(l) + \frac{\eta}{\sqrt{N}} x_i \sum_{j=1}^{N} \frac{w_j^* x_j}{\sqrt{N}} \tag{11}$$

つまり, 生徒パーセプトロンは自らの結合を, 教師機械の出力に入力ベクトルを掛け合わせた量だけ増加させることにより更新する. このとき, 再度 (7)(8) を見ると

$$A(l) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j b_j(l) \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j w_j^* x_j \tag{12}$$

$$\tilde{\eta}\, b_i(l) \leftrightarrow -\eta\, x_i \tag{13}$$

とそれぞれ読み替えることで, 利得の更新式は「反ヘッブ学習」と形式的類似点を持つことが容易にみてとれる. しかし, 両者は本質的な部分において異なる. ヘッブ学習においては入力ベクトル $\vec{x}$ は各ステップでランダムに与えられるのに対し, 利得の更新式では, これに対応する入札価格 $b_i(l)$ がステップ l に依存し, さらに, (9)(7)(8) 式を介して各時刻での利得成分に依存することでシステムに複雑なフィードバックがかかる部分が決定的に異なる点であり, この事実により, $A(l)$ に中心極限定理などを用いることができず, 従って, オンライン学習[2, 26] のような比較的簡易な解析ですら困難になる.

5.2 ミクロ変数とマクロ変数の時間発展式

さて, いま我々は 2 つの戦略が選択できる場合を考

えているわけであるから, 具体的には次の 2 本の方程式で $a=1,2$ それぞれの戦略の利得を決めて行くことになる.

$$p_{i1}(l+1) = p_{i1}(l) - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}}\left(\sum_{\vec{\lambda}=1}^{P}\delta_{\vec{\lambda},\vec{\lambda}_{l,A,Z}}R_{\vec{\lambda}}^{i1}\right)A(l) \tag{14}$$

$$p_{i2}(l+1) = p_{i2}(l) - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}}\left(\sum_{\vec{\lambda}=1}^{P}\delta_{\vec{\lambda},\vec{\lambda}_{l,A,Z}}R_{\vec{\lambda}}^{i2}\right)A(l) \tag{15}$$

そこで

$$q_i(l) = \frac{1}{2}(p_{i1}(l)-p_{i2}(l)) \tag{16}$$

で 2 つの戦略間の利得の差 $q_i(l)$ を定義し,

$$\xi_{\vec{\lambda}}^{i} = \frac{1}{2}(R_{\vec{\lambda}}^{i1}-R_{\vec{\lambda}}^{i2}) \tag{17}$$

とおくと, (14)(15) 式を辺々引くことにより

$$q_i(l+1) = q_i(l) - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{\lambda}=1}^{P}\delta_{\vec{\lambda},\vec{\lambda}_{l,A,Z}}\xi_{\vec{\lambda}}^{i}A(l) \tag{18}$$

と $q_i(l)$ に関する更新式に書き直すことができる. この方程式 (18) をこのシステムを記述するための基本方程式の一つとしよう.

さて, 式 (18) は入札価格の総和 $A(l)$ を含むので, 我々は次にこれに関する更新式を求めることにする. まず, その定義より

$$A(l) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}b_i(l) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\vec{\lambda}=1}^{P}\delta_{\vec{\lambda},\vec{\lambda}_{l,A,Z}}R_{\vec{\lambda}}^{i\tilde{a}_i(l)} \tag{19}$$

であることに注意しよう. また, 次で定義される新しい変数 $w_{\vec{\lambda}}^{i}$:

$$w_{\vec{\lambda}}^{i} = \frac{1}{2}(R_{\vec{\lambda}}^{i1}+R_{\vec{\lambda}}^{i2}) \tag{20}$$

を導入すると

$$R_{\vec{\lambda}}^{i\tilde{a}(l)} = w_{\vec{\lambda}}^{i} + \mathrm{sgn}[q_i(l)]\xi_{\vec{\lambda}}^{i} \tag{21}$$

が成り立つ. 実際, $q_i(l)>0$, つまり, $p_{i1}(l)>p_{i2}(l)$ で戦略 1 が選ばれるならば, 式 (21) より, $R_{\vec{\lambda}}^{i\tilde{a}(l)}=R_{\vec{\lambda}}^{i1}$ となるし, 逆に, $q_i(l)<0$, $p_{i2}(l)>p_{i1}(l)$ で戦略 2 が選ばれるならば, 式 (21) より, $R_{\vec{\lambda}}^{i\tilde{a}(l)}=R_{\vec{\lambda}}^{i2}$ でつじつまが合っている. 従って, 入札価格の総和 $A(l)$ に関する方程式は

$$A(l) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\vec{\lambda}=1}^{P}\delta_{\vec{\lambda},\vec{\lambda}_{l,A,Z}}\left\{w_{\vec{\lambda}}^{i}+\mathrm{sgn}[q_i(l)]\xi_{\vec{\lambda}}^{i}\right\} \tag{22}$$

となる. 従って, 我々がここで調べている市場履歴をともなったマイノリティ・ゲームのシステムは式 (18)(22) でミクロかつマクロに記述されることになる. ここで強調しておきたいのは, この方程式 (18)(22) を良く見てみると, 個々のトレーダの利得決定方程式であるミクロな式 (18) の中には, マクロな量である総入札価格 $A(l)$ が現れており, 逆に, 市場のマクロな情報を担う総入札価格 $A(l)$ の方程式 (22) の中にはミクロな情報である個々のトレーダの利得 $q_i(l)$ (正確に言えば, 2 つの戦略による利得の差) が現れている. このことは, 我々が当初予想したように, 市場においてはミクロな情報とマクロな情報は無相関ではなく, 互いに絡み合っているという事実が, ここで導かれた決定方程式に反映されていることを意味する. これは, EM アルゴリズム等により, 大自由度統計モデルにおけるハイパーパラメータ (マクロ変数) およびパラメータ (ミクロ変数) を決定する際の状態更新式にも似た数理構造である[27].

6. 計算機シミュレーション

ここからの我々の目標はミクロな意思決定方程式を何らかの方法によって解析し, 市場のマクロな振る舞いをそこから導き出し, 様々な統計的性質を調べていくことである. その際の方法としては計算機による数値シミュレーションが有力である.

6.1 ボラティリティとその時間変化

我々はシステムの時間変化を式 (18)(22) から知ることになるが, どのような物理量に着目したら良いのであろうか? $q_i(l)$, あるいはその符号を取った $\mathrm{sgn}[q_i(l)]$ はトレーダ i が時刻 l に $a=1,2$ どちらの戦略をとったかという情報であるから, この値そのもので言えば, $(1,-1,1,-1,-1,\cdots,-1,\cdots)$, あるいは, この時間変化を各トレーダの採用した戦略の時系列パターンに直した $(1,2,1,2,2,\cdots,2,\cdots)$ 等を表している. しかし, これはトレーダ個人の意思決定の時系列であり, その意味でミクロな量である. 従って, このような, ある特定のトレーダの挙動にのみ着目しても, システム全体のマクロな振る舞いは当然わからない. そこで, 統計力学的な考え方 — ミクロな構成要素の挙動にはふれな

いで, マクロに定義される量の変化を追う — という精神のもとに, まずは各エージェントからの入札価格の総和 $A(l)$ に着目し, これを有限のサイズの系 (ここでは $N=2^{10}+1=1025$ とする) に対し, (18)(22) を計算機上でシミュレートすることにより調べてみよう.

6.2　総入札価格の時間変化

まずはそのダイナミックスが (22) 及び (18) で記述される総入札価格の時間変化を調べよう. 図 2 に総入札価格 $A(l)$ とその符号 $\mathrm{sgn}[A(l)]$ の時間変化を示した. 真市場履歴の場合 $(\zeta=0)$, 各トレーダはここに示した $\mathrm{sgn}[A(l)]$ の過去 M ステップにわたる履歴 (図の破線) をもとに自分の意思決定を行うことになる. $A(l)$ の動きは複雑であるが, 全体的な変動幅はトレーダの参照できる履歴数が少ないほど大きく, 時間軸の所々で急激な変化が起こることが見てとれる.

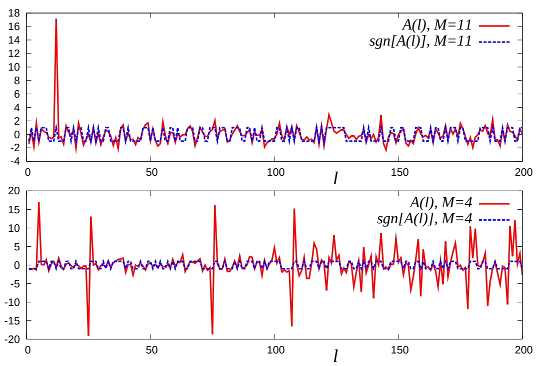

Fig. 2　総入札価格 $A(l)$, および, その符号 $\mathrm{sgn}[A(l)]$ の時間変化. 下図は $M=4\,(P=16)$, 上図は $M=11\,(P=2048)$. システムサイズは $N=2^{10}+1=1025$. 真市場履歴 $\zeta=0$ の場合. この繰り返しゲームの各ラウンドにおいて, 各トレーダが情報ベクトルとして共有する市場のマクロ情報は破線で与えられる.

次に, より詳しい時間変化の構造を調べるため, この総入札価格 $A(l)$ の値が連続する 2 つの時刻間 $A(l)$,$A(l+1)$ でどのような分布をするのかをそれぞれ縦軸と横軸に重ね打ちして調べてみよう. まずは偽市場履歴 $\zeta=1$ の場合の結果を図 3 に示す. この図より, 遡った市場の履歴数 M が比較的小さい場合 $(M=3,4)$ には, この図 3 の左図より, $A(l)$-$A(l+1)$ のプロットはかなり広範囲に分散したものになる. 一方, 参照できる履歴数 M が多くなり, $M=11$ となるとこの広がりは小さくなっている. しかし, さらに履歴数を増やすと, この分散は若干ではあるが増加に転じる. 図 4 には $\zeta=0$ の真市場履歴の場合の結果を載せる. 履歴数 M が大きい領域の振る舞いは偽記憶の場合と変わらないが, M が小さい場合の $A(l+1)$-$A(l)$ は偽記憶の場合と比べてより複雑な構造を示すことがわかる.

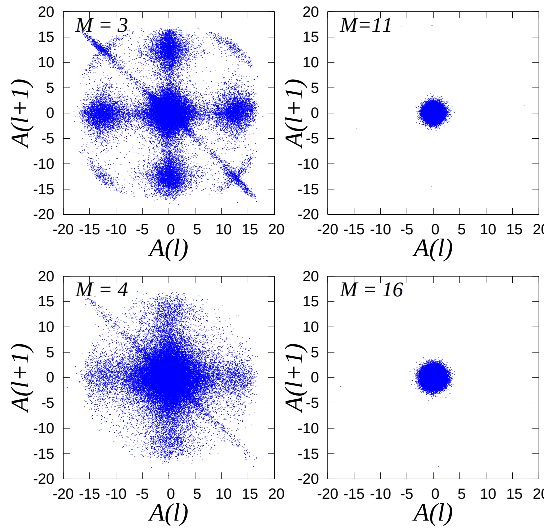

Fig. 3　総入札価格の連続する 2 ラウンド間の値: $A(l)$ と $A(l+1)$ のプロット. それぞれ, $M=3\,(P=2^3=8), M=4\,(P=2^4=16), M=11\,(P=2^{11}=2048), M=16\,(P=2^{16}=65536)$. $\zeta=1$ の偽市場履歴の場合. システムサイズは $N=2^{10}+1=1025$.

これらの結果より, 明らかに総入札価格 $A(l)$ のばらつきはトレーダの用いることのできる履歴数 M に依存する. 次節ではこの事実を総入札価格の揺らぎの観点から考察する.

6.3　ボラティリティ: 総入札価格の揺らぎ

図 3 の結果から, 我々が着目すべきなのは総入札価格それ自体の時間変化ではなく, その「揺らぎ」であることがわかった. つまり, 我々は次の量:

$$\sigma^2(L) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} A(l)^2 - \left\{\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} A(l)\right\}^2 \qquad (23)$$

で総入札価格の「揺らぎ (分散)」を定義し, これをラウンド L まで累積した量とし, L の関数として調べてみようというわけである. この量 σ^2 を金融工学[8, 28]では**ボラティリティ**と呼んでいる§. このボラティリ

§ 通常, ボラティリティσ^2 とは $\sigma^2(L)$ でラウンド数 L を無限大にした極限で定義される. しかし, ここではこの量が定常状態へ向かうプロセスにも興味があるので,

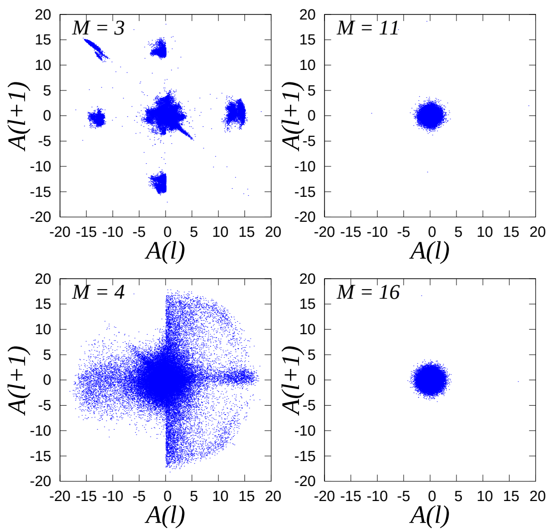

Fig. 4　総入札価格の連続する 2 ラウンド間の値: $A(l)$ と $A(l+1)$ のプロット．それぞれ，$M = 3\,(P = 2^3 = 8), M = 4\,(P = 2^4 = 16), M = 11\,(P = 2^{11} = 2048), M = 16\,(P = 2^{16} = 65536)$. $\zeta = 0$ の真市場履歴の場合．システムサイズは $N = 2^{10} + 1 = 1025$.

ティはここで示したような，ある金融商品の不安定性を示す量であり，ボラティリティが大きい商品に対して各トレーダは大きく勝つ場合もあるけれども，何しろ価格の揺らぎが大きいので，ひどく負けるケースもかなりの頻度で現れ，商品の取引き自体がギャンブル的要素を持つようになる．図 5 にボラティリティの時間変化を示した．下は真市場履歴 ($\zeta = 0$) の場合で上が偽市場履歴 ($\zeta = 1$) の場合に対応する．それぞれ $M = 4\,(P = 2^4 = 16)$, 及び, $M = 8\,(P = 2^8 = 256)$ に対してプロットしてあるのだが，明らかに遡る履歴数が大きい場合の方がボラティリティは小さい．この傾向は真市場履歴 ($\zeta = 0$) でも偽市場履歴 ($\zeta = 1$) でも変わらない．ところで，履歴を過去まで遡って利用すればするほどボラティリティを小さく押さえること，言い方をかえれば，市場を安定化させることができるであろうか? 直観的にその予想は正しそうではあるが，この問い具体的に答えるために，次節ではボラティリティの履歴数 M 依存性について調べてみよう．

6.4　ボラティリティの履歴数依存性

図 6 に真市場履歴 ($\zeta = 0$) の場合のボラティリティ:

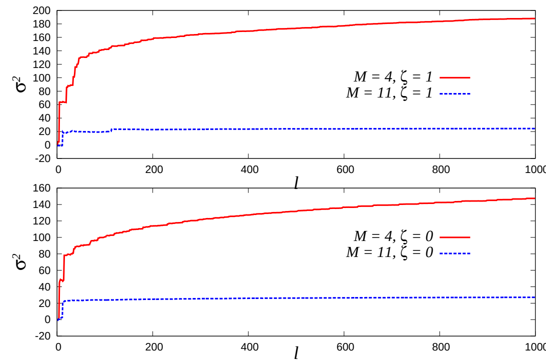

Fig. 5　ボラティリティの時間変化．下は真市場履歴 ($\zeta = 0$) の場合で上が偽市場履歴 ($\zeta = 1$) の場合．$M = 4\,(P = 2^4 = 16)$, 及び, $M = 11\,(P = 2^{11} = 2048)$ に対してプロットしてある．異なる線は異なる情報ベクトル，初期値に対応している．システムサイズ (トレーダ数) は $N = 2^{10} + 1 = 1025$.

$$\sigma^2 = \lim_{L \to \infty} \sigma^2(L) \tag{24}$$

の履歴数 M 依存性をプロットした．この図より，ボラ

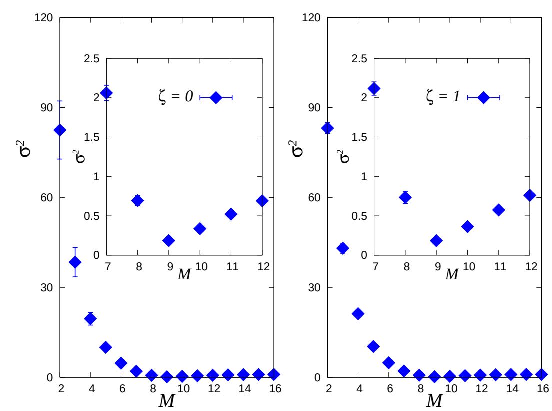

Fig. 6　ボラティリティの履歴数 M 依存性．左図は真市場履歴 ($\zeta = 0$)，右図は偽市場履歴 ($\zeta = 1$) の場合．挿入図は図の $7 \le M \le 12$ の領域を拡大したものである．これらの挿入図より，ボラティリティの非単調性が確認できる (この場合，どちらも $M = 9$). $N = 2^{10} + 1 = 1025$, 図中の誤差棒は 10 回の独立試行に基づき算出した．

ティリティを最小化するような最適な履歴数 M が存在すること (ボラティリティの非単調性) がわかる¶．ま

$\sigma^2(L)$ と σ^2 をともにボラティリティと呼ぶことにする．

¶ つまり，ネット上に公開する株価をコンピュータ上に蓄

た, 意外なことに, この依存性は真市場履歴 ($\zeta = 0$) でも偽市場履歴 ($\zeta = 1$) でも変わらない.

6.5　情報ベクトルの選択頻度分布

さて, ゲームの各ラウンドでトレーダは情報ベクトル $\vec{\lambda}$ の一つを選び, それをもとに自分の戦略を決定する. その情報ベクトルの決定はマクロな量である総入札価格 $A(l)$ の現在から遡ること M ステップ前までの値に依存する. 既に述べたように, M ステップ前までの過去において, 市場が「売り超過」であれば, 情報ベクトルは $\vec{\lambda} = (1, 1, \cdots, 1)$ であり, この「売り超過」状態が以後もしばらく続くのであれば, トレーダに提示される情報ベクトルは常に $\vec{\lambda} = (1, 1, \cdots, 1)$ である. 逆に「売り超過」「買い超過」がある程度ランダムに起こるのであれば, 全ての状態ベクトルがおおよそ等確率で現れるようになるであろう.

従って, ゲームを通じて $P = 2^M$ 通りの戦略ベクトルのうち, どれがどのくらいの頻度で選ばれるかを調べてみることで, 市場のマクロな性質を議論することは興味深い. そこで, ここでは少し見方を変えて, ダイナミックスを通じての情報ベクトル $\vec{\lambda}$ の選択頻度:

$$\pi_{\vec{\lambda}}(A, Z) = \lim_{L \to \infty} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L} \delta_{\vec{\lambda}, \vec{\lambda}(l, A, Z)} \tag{25}$$

を考えてみよう. これは時間間隔 L のうち, ある特定の情報ベクトル $\vec{\lambda}$ がどれくらい出現したのかを表す量であり, 当然, $\pi_{\vec{\lambda}}(A, Z)$ を全ての取りうる情報ベクトルについて合計したものは

$$\sum_{\vec{\lambda}=1}^{P} \pi_{\vec{\lambda}}(A, Z) = 1 \tag{26}$$

となる. また, $P = 2^M$ 個の各々の情報ベクトルが等確率で出現する極限では $\pi_{\vec{\lambda}}(A, Z) = P^{-1}$ であることに注意しよう. そこで, ここではこの情報ベクトルの選択頻度の分布:

$$\rho(f) = \lim_{P \to \infty} \sum_{\vec{\lambda}=1}^{P} \frac{1}{P} \ll \delta[f - p\pi_{\vec{\lambda}}(A, Z)] \gg_{\{A, Z\}}$$

を計算機シミュレーションで調べてみることにする. ここに, $\ll \cdots \gg_{A,Z}$ は様々な A, Z の出現の仕方についての平均を表す. ここで, 情報ベクトルの選択が等確率で行われ, その意味で市場の履歴を考慮しない場合には, $\rho(f) = \delta(f - 1)$, つまり, $f = 1$ の周りに鋭いピークを持つ分布になることに注意されたい. 図 7 に偽市場履歴の場合 ($\zeta = 1$) の結果を載せる. この図より, $\alpha = P/N$ が比較的大きい場合, つまり, 過去に渡って参照できる市場履歴が長い場合, 情報ベクトルの使用頻度分布 $\rho(f)$ は $f = 1$ の周りの正規分布に従い, α の減少とともに履歴数が浅くなるにつれ ($M \to 0$), $\rho(f)$ は情報ベクトルのランダム選択極限 $\rho(f) = \delta(f - 1)$ に近づくことがわかる. 一方, $\zeta = 0$ の真市場履歴の場合は, 図 8 に示すように, α が大きい場合にはガウス分布とは異なる非自明な振る舞いを見せる. しかし, 当然, α の小さな極限では偽市場履歴の場合と同様, $\rho(f)$

積された過去数年にわたる履歴まで遡って顧客に提示する場合, 「その履歴が長ければ長いほど価格が安定化する」ということは言えないことになる.

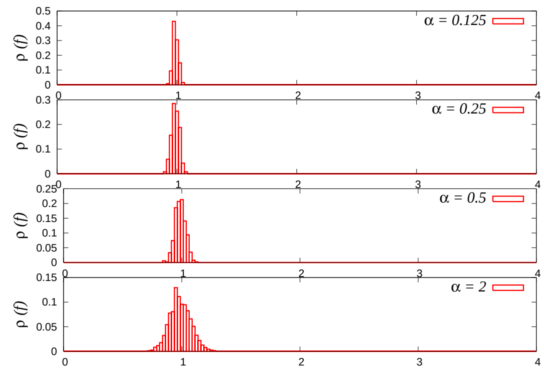

Fig. 7　情報ベクトルの使用頻度の分布. 偽市場履歴の場合. $N = 2^{10} + 1 = 1025, L = 220000$ に選び, $\ll \cdots \gg_{\{Z\}}$ に関しては 1 つの実現値に対してプロットしてある.

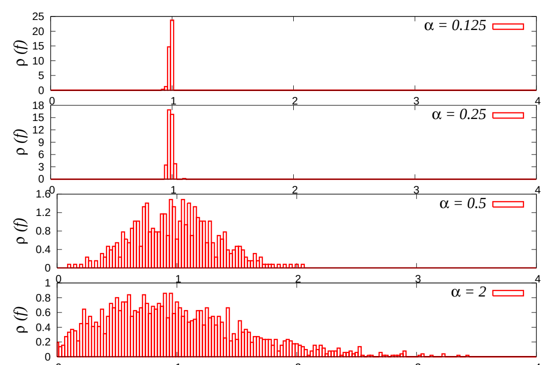

Fig. 8　情報ベクトルの使用頻度の分布. 真市場履歴の場合. $N = 2^{10} + 1 = 1025, L = 220000$ に選び, $\ll \cdots \gg_{\{A\}}$ に関しては 1 つの実現値に対してプロットしてある. α が大きなとき, 偽市場履歴の場合と比べて非自明な分布の形状が見てとれる.

は情報ベクトルのランダム選択極限 $\rho(f)=\delta(f-1)$ に近づくことがわかる．

7．母関数の方法による時間発展の厳密解

ここまで主に計算機シミュレーションを用いてマイノリティ・ゲームのダイナミックスについて調べてきた．しかし, 扱う数理モデルを可能な限りシンプルにし, 数学的に厳密な結果を得ておくことは, どのような対象に取り組む際にも重要であろう．そこで, ここでは市場履歴をトレーダ群が参照できない場合に関し, 母関数の経路積分表示による解析により, 数ステップ目までの時間発展が厳密に追跡できることを見ておこう[12, 29]．この手法は技巧的ではあるが汎用性が高く, スピングラス磁性体の緩和過程[30], 連想記憶の想起過程[31, 32]などの解析に威力を発揮してきたが, 最近では CDMA マルチユーザ復調器[33]や画像復元[34]等, 確率的情報処理の処理過程の解析に対しても積極的に適用されている．

7.1　解析にあたってのセットアップ

既に述べたように, 市場の履歴を考慮しない場合, 状態ベクトル $\vec{\lambda}_{l,A,Z}$ は市場のマクロな情報 $\{A,Z\}$ に依存せず, ゲームのラウンド l にのみ依存するので, $\vec{\lambda}_{l,A,Z}=\vec{\lambda}_l$, $|\vec{\lambda}_l|=P$ であり, トレーダ i の参照するルックアップ・テーブルは

$$\vec{R}^i = \left(\begin{array}{cccc} R_1^{i1} & R_1^{i2} & \cdots & R_1^{iS} \\ R_2^{i1} & R_2^{i2} & \cdots & R_2^{iS} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_P^{i1} & R_P^{i2} & \cdots & R_P^{iS} \end{array}\right) \tag{27}$$

と書けることに注意しょう．この各成分 $R_\mu^{ia(l)}$ はランダムに ±1 をとり, ゲームの開始時に固定される．また, ゲームの繰り返しの過程で全てのトレーダは各ラウンドにおいて参照可能な $\mu\in\{1,\cdots,P=\alpha N\}$ 個の情報のなかの一つを共有し (ルックアップ・テーブルの特定の一行を選ぶ), 対応する戦略ベクトルの S 個の成分のなかから最適な戦略を選ぶことで, そのラウンドでの自分の行動を決める．以下では簡単のため, 戦略数が $S=2$ の場合を考えよう．このとき, $\vec{R}^{i1}=(R_1^{i1},R_2^{i1},\cdots,R_P^{i1})^\dagger$, $\vec{R}^{i2}=(R_1^{i2},R_2^{i2},\cdots,R_P^{i2})^\dagger$ に対し[‖],

$$\vec{\omega}^i = \frac{1}{2}(\vec{R}^{i1}+\vec{R}^{i2}) \tag{28}$$

‖ † は「転置」を表すものとする．

$$\vec{\xi}^i = \frac{1}{2}(\vec{R}^{i1}-\vec{R}^{i2}) \tag{29}$$

で定義すると, ラウンド l での最適戦略 $\tilde{a}(l)=\arg\max_a p_{ia}(l)$ に対する戦略ベクトルは

$$R^{i\tilde{a}(l)} = \vec{\omega}^i+\mathrm{sgn}[q_i(l)]\vec{\xi}^i \tag{30}$$

$$q_i(l) = \frac{1}{2}(p_{i1}(l)-p_{i2}(l)) \tag{31}$$

と書けるので, 総入札価格が $A(l)=(1/\sqrt{N})\sum_i b_i(l)=(1/\sqrt{N})\sum_i R_\mu^{i\tilde{a}(l)}$ となることに注意してラウンド l でトレーダ群が情報 μ を共有した場合の利得の更新式:

$$p_{i1}(l+1) = p_{i1}(l)-R_\mu^{i1}A(l) \tag{32}$$

$$p_{i2}(l+1) = p_{i2}(l)-R_\mu^{i2}A(l) \tag{33}$$

の辺々の差をとることにより,

$$q_i(l+1) = q_i(l) - \xi_\mu^i\left[\Omega_\mu+\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_j\xi_\mu^j s_j(l)\right] \tag{34}$$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_i\vec{\omega}^i,\ \ s_i(l)=\mathrm{sgn}[q_i(l)] \tag{35}$$

が得られるが, N ラウンド後に利得差 q_i に $\mathcal{O}(1)$ の変化が現れるように時間スケールを l から t へと変えよう．具体的には

$$J_{ij} \equiv \frac{2(\vec{\xi}^i\cdot\vec{\xi}^j)}{N}=\frac{2}{N}\sum_{\mu=1}^P\xi_\mu^i\xi_\mu^j \tag{36}$$

$$h_i \equiv \frac{2(\vec{\xi}^i\cdot\vec{\Omega})}{\sqrt{N}}=\frac{2}{\sqrt{N}}\sum_{\mu=1}^P\xi_\mu^i\Omega_\mu \tag{37}$$

に対し, (34) 式を書き直した

$$q_i(t+1) = q_i(t)-h_i-\sum_j J_{ij}s_j(t) \tag{38}$$

が今後の解析で中心となるミクロな状態 $\vec{q}$ の方程式となる．以下では母関数の経路積分表示により, システムの時間発展の様子が相関関数や応答関数などのマクロな量で厳密に書けることを段階的に示していく．

まずは, 時刻 t にシステムのミクロな状態を表す利得差ベクトルが $\vec{q}=(q_1,\cdots,q_N)$ をとる確率を $P_t(\vec{q})$ とすると, この確率は $P_{t+1}(\vec{q})$ と遷移確率 (行列) $W(\vec{q}|\vec{q}^{'})$ を介し, 次のチャップマン-コルモゴロフ方程式で結ばれることに注意する．

$$P_{t+1}(\vec{q}) = \int d\vec{q}^{'}\,W(\vec{q}|\vec{q}^{'})p_t(\vec{q}^{'}) \tag{39}$$

今の場合, ミクロな状態 $\vec{q}$ の更新式が (38) 式で '決定論的' に (確率 1 で) 与えられることから, 遷移確率 (行列) はデルタ関数を用いて

$$\begin{aligned} W(\vec{q}|\vec{q}') &= \prod_{i=1}^{N} \delta\left(q_i - q_i' + h_i + \sum_j J_{ij} s_j'\right) \\ &= \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^N} \\ &\times \mathrm{e}^{i\sum_{i=1}^{N} \hat{q}_i (q_i - q_i' + h_i + \sum_j J_{ij} s_j')} \end{aligned} \quad (40)$$

と書ける. ここに $d\vec{q} \equiv dq_1 dq_2 \cdots dq_N$ であり, プライム付きのミクロな状態を $q_i' = q_i(t)$, プライム無しの状態を一単位時刻後の状態 $q_i = q_i(t+1)$ で略記していることに注意されたい. また, 第 1 行目から第 2 行目への変形ではデルタ関数のフーリエ変換表示を用いている.

7.2 母関数の経路積分表示

ここで, このシステムの母関数を次で定義する.

$$\begin{aligned} Z[\vec{\psi}] &= \int \prod_t [d\vec{q}(t) W(\vec{q}(t+1)|\vec{q}(t))] P_0(\vec{q}(0))] \\ &\times \mathrm{e}^{i\sum_t \sum_i \psi_i(t) q_i(t)} \\ &\equiv \left\langle \mathrm{e}^{i\sum_t \sum_i \psi_i(t) q_i(t)} \right\rangle \end{aligned} \quad (41)$$

$$\vec{\psi} = (\psi_1(t), \psi_2(t), \cdots, \psi_N(t)) \quad (42)$$

上記は変数 $i\psi_i(t)$ で微分するごとに, 利得差 $q_i(t)$ の任意の次数のモーメントを算出することができることから, **母関数**と呼ばれる. ここで $\langle \cdots \rangle$ は利得差の状態ベクトル $\vec{q}$ についての汎関数 $(\cdots)$ (今の場合には $\mathrm{e}^{i\sum_t \sum_i \psi_i(t) q_i(t)}$) を初期状態 $\vec{q}(0)$ から出発する時空間上の一本の経路: $\vec{q}(0) \to \vec{q}(1) \to \cdots \to \vec{q}(t)$ ごとの重み

$$\begin{aligned} &P_t(\vec{q}(t)) = W(\vec{q}(t)|\vec{q}(t-1)) W(\vec{q}(t-1)|\vec{q}(t-2)) \\ &\quad \times \cdots \times W(\vec{q}(1)|\vec{q}(0)) P_0(\vec{q}(0)) \end{aligned}$$

をつけて平均することを意味し, 母関数の上記表現を**経路積分表示**と呼んでいる. 自明ではあるが, 後に用いる事実:

$$Z[\vec{\psi} = 0] = \langle \mathrm{e}^0 \rangle = \langle 1 \rangle = 1 \quad (43)$$

に注意して次に進もう.

7.3 母関数の戦略ベクトルに関する配位平均

上で定義した母関数は (36)(37) 式, および, (28)(29) 式を介して, ゲームの開始時に固定された戦略ベクトル $\vec{R}^{i1}, \vec{R}^{i2}$ に依存する. 従って, 戦略ベクトルの選び方によらない形でこのシステムのダイナミックスを議論するためには, 上記の母関数 $Z[\vec{\psi}]$ をこれら変数に関して平均しなければならない. この平均 $\overline{Z[\vec{\psi}]}$ は母関数 $Z[\vec{\psi}]$ を

$$\begin{aligned} Z[\vec{\psi}] &= \int \mathcal{D}\vec{w}\, \mathcal{D}\vec{\hat{w}}\, \mathcal{D}\vec{x}\, \mathcal{D}\vec{\hat{x}} \\ &\times \mathrm{e}^{i\sum_{t,\mu} [\hat{w}_t^\mu w_t^\mu + \hat{x}_t^\mu x_t^\mu + w_t^\mu (2\Omega_\mu + x_t^\mu)]} \\ &\times \int \mathcal{D}\vec{q}\, \mathcal{D}\vec{\hat{q}}\, P_0(\vec{q}(0)) \\ &\times \mathrm{e}^{\frac{-2i}{\sqrt{N}} \sum_{i,\mu} \xi_\mu^i \sum_t [\hat{w}_t^\mu \hat{q}_i(t) + \hat{x}_i^\mu s_i(t)]} \\ &\times \mathrm{e}^{i\sum_{i,t} \{\hat{q}_i(t)[q_i(t+1) - q_i(t) - \theta_i(t)] + \psi_i(t) q_i(t)\}} \end{aligned} \quad (44)$$

と書き直すことで, ξ_μ^i, Ω_μ についての平均操作 ((28)(29)(35) 式参照) が具体的に実行できる. ここでは後の計算の便宜上, 変数 w_t^μ, x_t^μ を

$$w_t^\mu = \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_i \hat{q}_i(t) \xi_\mu^i \quad (45)$$

$$x_t^\mu = \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_i s_i(t) \xi_\mu^i \quad (46)$$

として定義し, これらを恒等式:

$$\begin{aligned} &\int dw_t^\mu \delta\left(w_t^\mu - \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_i \hat{q}_i^t \xi_\mu^i\right) \\ &= \int \frac{d\hat{w}_t^\mu dw_t^\mu}{2\pi} \mathrm{e}^{i\hat{w}_t^\mu (w_t^\mu - \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_i \hat{q}_i^t \xi_\mu^i)} = 1 \end{aligned} \quad (47)$$

を用いて $Z[\vec{\psi}]$ に取り込んだ ((47) の左辺をかけ合せることで '1' をかけた). また, このときの積分測度を $\mathcal{D}\vec{q} \equiv \prod_{i,t} dq_i(t)/\sqrt{2\pi}, \mathcal{D}\vec{w} \equiv \prod_{\mu,t} dw_t^\mu/\sqrt{2\pi}$, および, $\mathcal{D}\vec{x} \equiv \prod_{\mu,t} dx_t^\mu/\sqrt{2\pi}$ 等で定義した**. また, $\theta_i(t)$ はこの母関数のこの変数による微分操作により, $\hat{q}_i(t)$ の任意の次数のモーメントを算出できるために付加した項であり, 計算の終局でゼロと置くことになる. あとは具体的に戦略ベクトルについての平均操作を行うだけである.

母関数 $Z[\vec{\psi}]$ の表示の中から注意深く戦略ベクトルを含む部分をピックアップすると

$$\prod_{i,\mu} \mathrm{e}^{\frac{2i}{\sqrt{N}} \sum_t \{w_t^\mu (R^{i1} + R^{i2}) - (R^{i1} - R^{i2})[\hat{t}^\mu \hat{q}_i(t) + \hat{x}_t^\mu s_i(t)]\}}$$

** それぞれに共役な変数 $\vec{\hat{q}}, \vec{\hat{w}}, \vec{\hat{x}}$ についての積分測度もそれぞれ同様に定義する. また, ここでは $\mathcal{D}\vec{q}$ はガウス積分の測度でないことに注意.

のみが戦略ベクトルに依存することがわかるので，これを R^{i1}, R^{i2} がそれぞれ確率 $1/2$ で独立に ± 1 をとる確率分布で平均すればよい．ここでは 平均をとるべき変数は全て指数関数の肩 (有効ラグランジアン) に現れるので，レプリカ法等によらず，厳密に遂行することができる．トレーダ数 N が十分大きな場合に成り立つ恒等式:

$$\exp\left[N\log\cos\left(\frac{\delta}{\sqrt{N}}\right)\right] = \mathrm{e}^{-\frac{\delta^2}{2}+\mathcal{O}(N^{-1})}$$

に注意すれば，直ちに次が得られる．

$$\begin{aligned}\overline{Z[\vec{\psi}]} &= \int \mathcal{D}\vec{C}\,\mathcal{D}\vec{\hat{C}}\,\mathcal{D}\vec{K}\,\mathcal{D}\vec{\hat{K}}\,\mathcal{D}\vec{L}\,\mathcal{D}\vec{\hat{L}} \\ &\quad\times\ \mathrm{e}^{N[\Psi+\Phi+\Omega]+\mathcal{O}(N^0)}\end{aligned} \tag{48}$$

ここに関数 Ψ, Φ, Ω はそれぞれ次で定義される．

$$\Psi = \sum_{tt'}(\hat{C}_{tt'}C_{tt}+\hat{K}_{tt'}K_{tt'}+\hat{L}_{tt'}L_{tt'}) \tag{49}$$

$$\begin{aligned}\Phi = \alpha\log\Bigg[&\int \mathcal{D}\vec{w}\,\mathcal{D}\vec{\hat{w}}\,\mathcal{D}\vec{x}\,\mathcal{D}\vec{\hat{x}} \\ &\times\mathrm{e}^{i\sum_t(\hat{w}_r w_t+\hat{x}_t x_t+w_t x_t)} \\ &\times\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{tt'}(w_t w_{t'}+\hat{w}_t L_{tt'}\hat{w}_{t'}+2\hat{x}_t K_{tt'}\hat{w}_{t'}+\hat{x}_t C_{tt'}\hat{x}_{t'})}\Bigg]\end{aligned}$$

(α は $\alpha = P/N$ で定義されたことに注意) (50)

$$\begin{aligned}\Omega = \log\Bigg[&\int \mathcal{D}\vec{q}\mathcal{D}\vec{\hat{q}}\,P_0(\vec{q}(0)) \\ &\times\mathrm{e}^{i\sum_t \hat{q}(t)(q(t+1)-q(t)-\theta(t))+i\sum_t\psi_i(t)q(t)} \\ &\times\mathrm{e}^{-i\sum_{tt'}[s(t)\hat{C}_{tt'}s(t')+s(t)\hat{K}_{tt'}\hat{q}(t')+\hat{q}(t)\hat{L}_{tt'}\hat{q}(t')]}\Bigg]\end{aligned}$$

(ここで外場 $\theta_i(t)$ の i 依存性を落とした) (51)

平均操作によってトレーダのインデックス i ごとに指数関数が積の形で分離され，結果として上記の式中に i は現れないことに注意しょう． また，ここでは $C_{tt'}, K_{tt'}, L_{tt'}$ を

$$C_{tt'} = \frac{1}{N}\sum_i s_i(t)s_i(t') \tag{52}$$

$$K_{tt'} = \frac{1}{N}\sum_i s_i(t)\hat{q}_i(t') \tag{53}$$

$$L_{tt'} = \frac{1}{N}\sum_i \hat{q}_i(t)\hat{q}_i(t') \tag{54}$$

でそれぞれ定義し，恒等式:

$$\begin{aligned}&\int dC_{tt'}\,\delta\left(C_{tt'}-\frac{1}{N}\sum_i s_i(t)s_i(t')\right) \\ &= \int\frac{dC_{tt'}\,d\hat{C}_{tt'}}{2\pi}\mathrm{e}^{i\hat{C}_{tt'}\left(C_{tt'}-\frac{1}{N}\sum_i s_i(t)s_i(t')\right)} \\ &= 1\end{aligned} \tag{55}$$

等を用いて $\overline{Z[\vec{\psi}]}$ にとりこんだ ((55) の左辺をかけ合せることで ‘1’ をかけた)． また，$\mathcal{D}C_{tt'} \equiv \prod_{tt'} dC_{tt'}/\sqrt{2\pi}$ 等で積分測度を定義してあることにも注意しておく．

さて，トレーダ数 $N \to \infty$ の極限で $\overline{Z[\vec{\psi}]}$ をその鞍点で評価しょう．$\partial(\Phi+\Psi+\Omega)/\partial\hat{C}_{tt'} = 0$ 等の単純な微分操作により，直ちに

$$C_{tt'} = \langle s(t)s(t')\rangle_* \tag{56}$$

$$K_{tt'} = \langle s(t)\hat{q}(t')\rangle_* = -i\frac{\partial\langle s(t)\rangle_*}{\partial\theta(t')} \equiv -iG_{tt'} \tag{57}$$

$$L_{tt'} = \langle\hat{q}(t)\hat{q}(t')\rangle_* \tag{58}$$

$$\langle\cdots\rangle_* \equiv \frac{\int\mathcal{D}q\mathcal{M}[\{q,\hat{q}\}](\cdots)}{\int\mathcal{D}q\mathcal{M}[\{q,\hat{q}\}]} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}[\{q,\hat{q}\}] \equiv P_0(q(0))\,\mathrm{e}^{-i\sum_{tt'}s(t)\hat{C}_{tt'}s(t')} \\ &\times\int\mathcal{D}\hat{q}\,\mathrm{e}^{-i\sum_{tt'}\hat{q}(t)\hat{C}_{tt'}\hat{q}(t')} \\ &\times\ \mathrm{e}^{i\sum_t\hat{q}(t)[q(t+1)-q(t)-\theta(t)-\sum_{tt'}\hat{K}_{tt'}s(t')]}\end{aligned} \tag{60}$$

の各々が得られる． ここに現れる $C_{tt'}$ は**相関関数**，$G_{tt'}$ は**応答関数**と呼ばれる物理量である． また，$\langle\hat{q}(t)\hat{q}(t')\rangle_* = \partial^2\overline{Z[\vec{\psi}=0]}/\partial\theta(t)\partial\theta(t')$ であることに注意し，$\overline{Z[\vec{\psi}=0]} = Z[\vec{\psi}=0] = 1$ であったことを思い出すと ((43) 式参照)，$\langle\hat{q}(t)\hat{q}(t')\rangle_* = 0$，すなわち

$$L_{tt'} = 0 \tag{61}$$

であることがわかる．

さて，相関関数と応答関数についての計算を進めるためには，$\mathcal{M}[\{q,\hat{q}\}]$ の中に含まれる $\hat{C}_{tt'}, \hat{K}_{tt'}, \hat{L}_{tt'}$ を求めなければならないが，これらは，鞍点方程式により

$$\hat{C}_{tt'} = i\frac{\partial\Phi}{\partial C_{tt'}} \tag{62}$$

$$\hat{K}_{tt'} = i\frac{\partial\Phi}{\partial K_{tt'}} \tag{63}$$

$$\hat{L}_{tt'} = i\frac{\partial\Phi}{\partial L_{tt'}} \tag{64}$$

において $C_{tt'}, K_{tt'}, L_{tt'}$ と関係を持つから, 汎関数 Φ の評価をさらに進める必要がある．そこで, 以下では (62)(63)(64) 式を評価するために Φ を簡略化することを考えよう．

7.4 汎関数 Φ の簡略化と鞍点方程式

ここで問題となる Φ を指数の肩が w_t についての 2 次形式になるように

$$\begin{aligned}\Phi &= \alpha\log\int\mathcal{D}w\mathcal{D}\hat{w}\\ &\times\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{tt'}w_t[\vec{1}+\vec{C}]_{tt'}w_{t'}-\sum_{tt'}[\vec{1}-i\vec{K}]_{tt'}\hat{w}_{t'}w_t}\\ &\times\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{tt'}\hat{w}_tL_{tt'}\hat{w}_{t'}} \qquad (65)\end{aligned}$$

と書き直し, $\mathcal{D}w=\prod_t dw_t/\sqrt{2\pi}$ に関するガウス積分を実行すると, $L_{tt'}\to 0$ に注意して

$$\begin{aligned}\Phi &= \alpha\log\int\mathcal{D}\hat{w}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{tt'}\hat{w}_tL_{tt'}\hat{w}_{t'}}}{\det\sqrt{[(\vec{1}+\vec{G})^\dagger\vec{D}^{-1}(\vec{1}+\vec{G})]}}\\ &\times\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{tt'}\hat{w}_t[(\vec{1}+\vec{G})^\dagger\vec{D}^{-1}(\vec{1}+\vec{G})]_{tt'}\hat{w}_{t'}}\\ &-\ \frac{\alpha}{2}\left(\log\det\vec{D}+\log\det[(\vec{1}+\vec{G})^\dagger\vec{D}^{-1}(\vec{1}+\vec{G})]\right)\\ &=\ \alpha\log\int\mathcal{D}\hat{w}\frac{1-\frac{1}{2}\sum_{tt'}\hat{w}_tL_{tt'}\hat{w}_{t'}+\mathcal{O}(L^2)}{\det\sqrt{[(\vec{1}+\vec{G})^\dagger\vec{D}^{-1}(\vec{1}+\vec{G})]}}\\ &\times\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{tt'}\hat{w}_t[(\vec{1}+\vec{G})^\dagger\vec{D}^{-1}(\vec{1}+\vec{G})]_{tt'}\hat{w}_{t'}}\\ &-\ \frac{\alpha}{2}\left(\log\det\vec{D}+\log\det[(\vec{1}+\vec{G})^\dagger\vec{D}^{-1}(\vec{1}+\vec{G})]\right)\\ &=\ \alpha\log\left\{1-\frac{1}{2}\sum_{tt'}L_{tt'}\int\mathcal{D}\hat{w}\right.\\ &\times\left.\ \frac{\hat{w}_t\hat{w}_{t'}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{tt'}\hat{w}_t[(\vec{1}+\vec{G})^\dagger\vec{D}^{-1}(\vec{1}+\vec{G})]_{tt'}\hat{w}_{t'}}}{\det\sqrt{[(\vec{1}+\vec{G})^\dagger\vec{D}^{-1}(\vec{1}+\vec{G})]}}\right\}\\ &-\ \frac{\alpha}{2}\mathrm{tr}\log[(\vec{1}+\vec{G})^\dagger(\vec{1}+\vec{G})]+\mathcal{O}(L^2) \qquad (66)\end{aligned}$$

が得られるが, 最後に $\mathcal{D}\hat{w}\equiv\prod_t\hat{w}_t/\sqrt{2\pi}$ に関するガウス積分を実行し, 任意の行列 $\vec{U}$ に関する恒等式: $\log\det\vec{U}=\mathrm{tr}\log\vec{U}$ に注意すれば, 汎関数 Φ は

$$\begin{aligned}\Phi &= -\alpha\,\mathrm{tr}\log(\vec{1}+\vec{G})\\ &-\ \frac{\alpha}{2}\sum_{tt'}L_{tt'}[(\vec{1}+\vec{G})^\dagger\vec{D}^{-1}(\vec{1}+\vec{G})]^{-1}_{tt'} \qquad (67)\end{aligned}$$

のように簡略化される．

従って, 鞍点方程式 (62)(63)(64) は任意の行列 $\vec{U}$ に対して $\partial\,\mathrm{tr}\log\vec{U}/\partial U_{tt'}=(\vec{U}^{-1})_{t't}$ が成り立つことに注意して

$$\hat{C}_{tt'}\ =\ 0 \qquad (68)$$

$$\hat{K}_{tt'}\ =\ -\alpha(\vec{1}+\vec{G})^{-1}_{t't} \qquad (69)$$

$$\hat{L}_{tt'}\ =\ -\frac{i\alpha}{2}[(\vec{1}+\vec{G})^{-1}D(\vec{1}+\vec{G}^\dagger)^{-1}]_{tt'} \qquad (70)$$

となる．

7.5 有効シングル・トレーダ方程式への縮約

$\hat{C}_{tt'}, \hat{K}_{tt'}, \hat{L}_{tt'}$ を具体的に求めることができたので, (56)(57) 式で相関関数, 応答関数を求めるための平均操作 $\langle\cdots\rangle_*$ に関する密度 $M[\{q,\hat{q}\}]$ を相関関数, 応答関数の関数として書くことができ, 従って, これらマクロな動的関数について閉じた方程式が得られることになる．具体的に (68)(69)(70) 式を (60) に代入すると

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\{q,\hat{q}\}] &= P_0(q(0))\int\mathcal{D}\hat{q}\\ &\times\ \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}\sum_{tt'}\hat{q}(t)[(\vec{1}+\vec{G})^{-1}\vec{D}(\vec{1}+\vec{G}^\dagger)^{-1}]_{tt'}\hat{q}(t)}\\ &\times\ \mathrm{e}^{i\sum_t\hat{q}(t)[q(t+1)-q(t)-\theta(t)+\alpha\sum_{t'}(\vec{1}+\vec{G})^{-1}_{tt'}s(t')]}\\ &=\ P_0(q(0))\int\prod_t\frac{d\eta(t)}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{D}\hat{q}\,\mathrm{e}^{i\sqrt{\alpha}\sum_t\hat{q}(t)\eta(t)}\\ &\times\ \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}\sum_{tt'}\hat{q}(t)[(\vec{1}+\vec{G})^{-1}\vec{D}(\vec{1}+\vec{G}^\dagger)^{-1}]_{tt'}\hat{q}(t)}\\ &\times\ \mathrm{e}^{-i\sqrt{\alpha}\sum_t\hat{q}(t)\eta(t)}\\ &\times\ \mathrm{e}^{i\sum_t\hat{q}(t)[q(t+1)-q(t)-\theta(t)+\alpha\sum_{t'}(\vec{1}+\vec{G})^{-1}_{tt'}s(t')]} \qquad (71)\end{aligned}$$

が得られるが, $\mathcal{D}\hat{q}\equiv\prod_t d\hat{q}(t)/\sqrt{2\pi}$ についてのガウス積分を実行すると

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\{q,\hat{q}\}] &= P_0(q(0))\int\prod_t\frac{d\eta(t)}{\sqrt{2\pi}}\\ &\times\ \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}\sum_{tt'}\eta(t)[(\vec{1}+\vec{G})^{-1}\vec{D}(\vec{1}+\vec{G}^\dagger)^{-1}]_{tt'}\eta(t')}}{\sqrt{\det(\vec{1}+\vec{G})^{-1}\vec{D}(\vec{1}+\vec{G}^\dagger)^{-1}}}\\ &\times\ \prod_{t\geq 0}\delta\left[q(t+1)-q(t)-\theta(t)\right.\\ &+\left.\ \alpha\sum_{t'}(\vec{1}+\vec{G})^{-1}_{tt'}s(t')-\sqrt{\alpha}\,\eta(t)\right] \qquad (72)\end{aligned}$$

が得られる． $s(t)=\mathrm{sgn}[q(t)]$ であったことを思い出すと, この式からトレーダ群の典型的な振る舞いはトレーダ数 N が無限大の極限で, 実質的に利得差に関する次の有効シングル・トレーダ方程式:

$$\begin{aligned}q(t+1) &= q(t)+\theta(t)\\ &-\ \alpha\sum_{t\geq t'}(\vec{1}+\vec{G})^{-1}_{tt'}\mathrm{sgn}[q(t')]+\sqrt{\alpha}\eta(t) \qquad (73)\end{aligned}$$

に従うことがわかる．ここで, $\eta(t)$ は (73) 式から明ら

かに平均ゼロ, 分散共分散行列が

$$\langle \eta(t)\eta(t^{'})\rangle = [(\vec{1}+\vec{G})^{-1}\vec{D}(\vec{1}+\vec{G}^{\dagger})^{-1}]_{tt'} \equiv \Sigma_{tt'} \tag{74}$$

で与えられる正規雑音である.

7.6 数ステップ目までの厳密解

ここまでで数ステップ目までの厳密解を求まるための準備ができたので, 具体的にそれを計算してみよう. その際, もう一度, (57) 式で与えられた応答関数を見てみると

$$G_{tt'} = \frac{\partial}{\partial\theta(t^{'})}\langle s(t)\rangle_{*} \tag{75}$$

であるから, この関数は時刻 $t^{'}$ における外場 $\theta(t)$ の変化に対する, 時刻 t での物理量 $\langle s(t)\rangle_{*}$ を介してのシステムの応答を表している. 従って, システムの応答は外場の変化より先に来てはいけないという '因果律' (未来の出来事が過去に影響を及ぼしてはいけない) を考慮すると, 常に

$$G_{tt'} = 0 \quad (t^{'} > t) \tag{76}$$

が成り立たなければならない. 以下この事実を用いて計算を進めよう.

まず, (74) 式で与えられる分散共分散行列 $\Sigma_{tt'}$ の評価を行う. 行列に関する恒等式:

$$(\vec{1}+\vec{G})^{-1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^{n}\vec{G}^{n} \tag{77}$$

$$(\vec{1}+\vec{G}^{\dagger})^{-1} = \sum_{n^{'}\geq 0}(-1)^{n^{'}}(\vec{G}^{\dagger})^{n^{'}} \tag{78}$$

に注意すると, $\Sigma_{tt'}$ は

$$\begin{aligned}\Sigma_{tt'} &= \sum_{n\geq 0}\sum_{n^{'}\geq 0}(-1)^{n+n^{'}} \\ &\quad\times \sum_{s,s^{'}}[\vec{G}^{n}]_{ts}[\vec{D}]_{ss'}[\vec{G}^{n^{'}}]_{t^{'}s^{'}}\end{aligned} \tag{79}$$

と書き直すことができる. また, 因果律の要請より $[\vec{G}^{n}]_{ts} = 0\ (s > t-n)$, $[\vec{G}^{n^{'}}]_{t^{'}s^{'}} = 0\ (s^{'} > t^{'}-n^{'})$ であるから, $\Sigma_{tt'}$ への非ゼロの寄与のみ考えて

$$\begin{aligned}\Sigma_{tt'} &= \sum_{n\geq 0}\sum_{n^{'}\geq 0}(-1)^{n+n^{'}} \\ &\quad\times \sum_{s=0}^{t-n}\sum_{s^{'}=0}^{t^{'}-n^{'}}[\vec{G}]_{ts}[\vec{D}]_{ss'}[\vec{G}]_{t^{'}s^{'}}\end{aligned} \tag{80}$$

が成り立つ. この式を用いて $\Sigma_{00}, \Sigma_{10}, \Sigma_{11}$ を具体的に計算して行くと, $\vec{D} = \vec{1}+\vec{C}$ であったことを思い出し, 相関関数の定義より $[\vec{C}]_{tt} = C_{tt} = \langle s(t)^{2}\rangle_{*} = \langle \mathrm{sgn}[q(t)]^{2}\rangle_{*} = \langle 1\rangle_{*} = 1$ に注意して

$$\begin{aligned}\Sigma_{00} &= (-1)^{0+0}[\vec{G}]_{00}[\vec{D}]_{00}[\vec{G}]_{00} \\ &= [\vec{D}]_{00} = [\vec{1}+\vec{C}]_{00} = 2\end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{10} &= (-1)^{0}\sum_{s=0}^{1}[\vec{G}^{0}]_{1s}[\vec{D}]_{s0}[\vec{G}^{0}]_{00} \\ &+ (-1)^{1}\sum_{s=0}^{0}[\vec{G}^{1}]_{1s}[\vec{D}]_{s0}[\vec{G}^{0}]_{00} \\ &= [\vec{1}]_{10}[\vec{D}]_{00}[\vec{G}]_{00} + [\vec{1}]_{11}[\vec{D}]_{10}[\vec{1}]_{00} \\ &- [\vec{G}]_{10}[\vec{D}]_{00}[\vec{1}]_{00} = [\vec{D}]_{10} - [\vec{G}]_{10}[\vec{D}]_{00} \\ &= [\vec{1}+\vec{C}]_{10} - 2[\vec{G}]_{10} \\ &= 1 + C_{10} - 2G_{10}\end{aligned} \tag{82}$$

$$\begin{aligned}\Sigma_{11} &= (-1)^{0}\sum_{s=0}^{1}\sum_{s^{'}=0}^{1}[\vec{G}^{0}]_{1s}[\vec{D}]_{ss'}[\vec{G}^{0}]_{1s^{'}} \\ &+ (-1)^{1}\sum_{s=0}^{0}\sum_{s^{'}=0}^{1}[\vec{G}]_{1s}[\vec{D}]_{ss'}[\vec{G}^{0}]_{1s^{'}} \\ &+ (-1)^{0}\sum_{s=0}^{1}\sum_{s^{'}=0}^{0}[\vec{G}^{0}]_{1s}[\vec{D}]_{ss'}[\vec{G}]_{1s^{'}} \\ &+ (-1)^{2}\sum_{s=0}^{0}\sum_{s^{'}=0}^{0}[\vec{G}]_{1s}[\vec{D}]_{ss'}[\vec{G}]_{1s^{'}} \\ &= [\vec{D}]_{11} - [\vec{G}]_{10}[\vec{D}]_{01} - [\vec{D}]_{10}[\vec{G}]_{10} \\ &+ [\vec{G}]_{10}[\vec{D}]_{00}[\vec{G}]_{10} \\ &= 2 - 2G_{10}(1+C_{10}) + 2(G_{10})^{2}\end{aligned} \tag{83}$$

が得られる. 一方, 有効シングル・トレーダ方程式 (73) は因果律を考慮すると

$$\begin{aligned}q(t+1) &= q(t) + \theta(t) \\ &- \alpha\sum_{t\geq t^{'}}\sum_{n=0}^{t-t^{'}}(-1)^{n}[\vec{G}]_{tt'}\mathrm{sgn}[q(t^{'})] \\ &+ \sqrt{\alpha}\,\eta(t)\end{aligned} \tag{84}$$

と書き直すことができるので, $t = 1, 2$ に対して

$$q(1) = q(0) + \theta(0) + \sqrt{\alpha}\,\eta(0) - \alpha\,\mathrm{sgn}[q(0)] \tag{85}$$

$$q(2) = q(1) + \theta(1)$$

$$
\begin{aligned}
&- \alpha \sum_{n=0}^{1} (-1)^n [\vec{G}]_{10} \mathrm{sgn}[q(0)] \\
&- \alpha \sum_{n=0}^{0} (-1)^n [\vec{G}]_{11} \mathrm{sgn}[q(1)] \\
&+ \sqrt{\alpha}\, \eta(1) \\
&= q(0) + \theta(0) + \sqrt{\alpha}\, \eta(0) + \theta(0) \\
&- \alpha\, \mathrm{sgn}[q(0)] - \alpha G_{10}\, \mathrm{sgn}[q(0)] \\
&- \mathrm{sgn}[q(0) - \theta(0) + \sqrt{\alpha}\, \eta(0) - \alpha\, \mathrm{sgn}[q(0)]]
\end{aligned} \tag{86}
$$

が得られる．

さて，相関関数と応答関数 C_{10}, G_{10} を求めるためには，(72) で与えられる密度関数に対する期待値 (59) を計算しなければならない．しかし，C_{10} は (85) 式より，$s(0)s(1) = \mathrm{sgn}[q(0)]\mathrm{sgn}[q(1)] = \mathrm{sgn}[q(0)]\mathrm{sgn}[q(0) + \theta(0) + \sqrt{\alpha}\,\eta(0) - \alpha\,\mathrm{sgn}[q(0)]]$ であるから，$\eta(0)$ のみの積分で済み，簡単のため初期条件を $q(0) > 0$ に選んで具体的に書き下すと

$$
\begin{aligned}
C_{10} &= \langle s(0)s(1) \rangle_* \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\eta(0)}{\sqrt{2\pi\Sigma_{00}}}\, \mathrm{e}^{-\frac{\eta(0)^2}{2\Sigma_{00}}}\, \mathrm{sgn}[q(0)] \\
&\times\ \mathrm{sgn}[q(0) + \theta(0) + \sqrt{\alpha}\,\eta(0) - \alpha\,\mathrm{sgn}[q(0)]] \\
&= 2H\left(\frac{\alpha - q(0) - \theta(0)}{\sqrt{2\alpha}}\right) - 1
\end{aligned} \tag{87}
$$

が得られる．ここに $\Sigma_{00} = 2$ を用いた．また，ここで用いた関数 $H(x)$ は

$$
H(x) \equiv \int_{x}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}} \tag{88}
$$

で定義される誤差関数である．従って，応答関数 G_{10} は $q(0) > 0$ の初期条件のもとで

$$
\begin{aligned}
G_{10} &= \frac{\partial}{\partial\theta(0)} \langle \mathrm{sgn}[q(1)] \rangle_* \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta(0)} \langle \mathrm{sgn}[q(0) + \theta(0) + \sqrt{\alpha}\,\eta(0) - \alpha] \rangle_* \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta(0)} C_{10} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(\alpha - q(0) - \theta(0))^2}{2\alpha}}}{\sqrt{\pi\alpha}}
\end{aligned} \tag{89}
$$

のように計算される．また，簡単な計算により，ボラティリティは $\sigma_t^2 = \overline{\langle (A(t) - \langle A(t) \rangle)^2 \rangle} = (1/2)\Sigma_{tt}$ と書けるので，$0, 1$ ステップ後のボラティリティは $\sigma_0^2 = 1, \sigma_1^2 = (1/2)\Sigma_{11}$ である．

ここまで長い道のりではあったが，以上をまとめると，数ステップ目までの厳密解は

$$
C_{00} = 2 \tag{90}
$$

$$
C_{10} = 2H\left(\frac{\alpha - q(0)}{\sqrt{2\alpha}}\right) - 1 \tag{91}
$$

$$
G_{10} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(\alpha - q(0))^2}{2\alpha}}}{\sqrt{\pi\alpha}} \tag{92}
$$

$$
q(1) = q(0) + \sqrt{\alpha}\,\eta(0) - \alpha \tag{93}
$$

$$
\begin{aligned}
q(2) &= q(0) + \sqrt{\alpha}\,(\eta(0) + \eta(1)) \\
&- \alpha + \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(\alpha - q(0))^2}{2\alpha}} \\
&- \alpha\,\mathrm{sgn}[q(0) + \sqrt{\alpha}\,\eta(0) - \alpha]
\end{aligned} \tag{94}
$$

$$
\sigma_0^2 = 1 \tag{95}
$$

$$
\sigma_1^2 = 1 - G_{10}(1 + C_{10}) + (G_{10})^2 \tag{96}
$$

で与えられる．ただし，外場を $\theta(0) = \theta(1) = 0$ と置いたことに注意されたい．相関関数 C_{10}，応答関数 G_{10}，ボラティリティσ_1^2 の α 依存性を図 9 に示す．

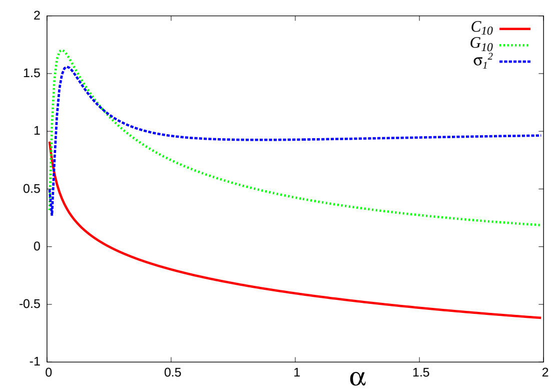

Fig. 9　相関関数 C_{10}，応答関数 G_{10}，ボラティリティσ_1^2 の α 依存性．$q(0) = 0.25 > 0$ に選んだ．

なお，さらにこの解析を進めて，これ以降の発展方程式を陽に導出するためには，相関関数 $C_{tt'}$ や応答関数 $G_{tt'}$ に反映される長い時間相関をも含む様々な相関を取り込んで (59)(72) 式で期待値 $\langle \cdots \rangle_*$ を計算し，それらの相関/応答関数，利得差 $q(t)$ 等を自己無矛盾な形で決定していかなければならない．このような相関/応答関数等の個数はステップ数の増加とともに急激に増加するので，厳密解を求めることが非常に困難になる．

8. おわりに

マイノリティ・ゲームの動力学について解説した．こ

こに示した結果は金融市場で公に開示される履歴情報が総入札価格の安定性 — 市場の安定性 — に及ぼす影響を調べるための有益な指針, より数学的/解析的に調べていくための動機づけを与えるものと位置づけられる．もちろん, 実際の金融市場では公開される各商品の価格変動に対し, 各トレーダが「売り」「買い」のマイノリティ・グループへ属することを目標として行動するわけではないし, また, 各ラウンドで提示される情報も「売り」「買い」の 2 値化された符号ではなく, 直前の数ラウンドからどの程度入札価格が上がったか下がったか, などの変動幅それ自体である場合が多いと思われる[††]．また, ここでゲームの開始から終了まで固定した各トレーダの戦略ベクトルも, 変化の時間スケールは緩やかではあるけれども時間的に変化する (各トレーダの市場からの「学習効果」により変化する) と考えた方が, より現実の状況に近いかもしれない．しかし, そのような場合でもここで紹介したゲームを逐次改良, 拡張することにより, そうした状況を反映した数理モデルの振る舞いを計算機実験などで解析し, トレーダの動きである「ミクロ情報」から市場の振る舞いである「マクロ情報」の性質を調べていくことは可能であるように思われる．

そのような模型の改良の際に我々の指針となるべきなのは, やはり, 実際の金融データである．経済学が実証的科学である以上, そのような実データの存在を無視することはできないだろう．よって, マクロな市場の情報を担う金融データそのものの解析も, 経済現象を説明する数理モデルを提案し, それに基づく理論を構築していく上で必要である．つまり, 実験データ解析, 計算機実験, 理論解析による多角的, 重層的なアプローチが必要である．脳科学において実験/理論双方の研究者間の共同作業がそうであるように, 経済 (物理) においても, 実務家と数理モデル研究者の継続的な対話が研究の新しい方向性を生み出すかもしれない．今後の進展に期待したい．

謝　辞　マイノリティ・ゲーム, 特にそのダイナミックスに関する母関数の方法による厳密な取り扱いについて多くの御教示を頂いたロンドン大学キングスカレッジ数学教室の A.C.C. Coolen 氏に感謝します．また, ソニー株式会社の佐塚直也氏, イタリア東ピアモンテ大学 E. Scalas 氏との金融実データ解析に関する議論は本稿を執筆する上で有益でした．ここに感謝します．

最後に, 本稿を書く機会を与えてくださった広島市立大学情報科学部の三村和史先生に深く感謝いたします．

[††] 例えば Google 検索で「株価 ソニー」と打ち込むとソニーの株価が表示されるが, 多くのトレーダは株価の上がり下がりの 2 値化された情報に基づき行動するのではなく,「株価自体がどれくらいの幅で上がり続けているか (あるいは逆に下がり続けているか)」という, 中・短期間にわたる「トレンド」を参考にする場合が多いのではないだろうか．しかし, その一方で, 文献[35]では円ドル為替レートの時系列をレートが各時刻で「上がったか」「下がったか」の 2 値に粗視化し, その「アップ」「ダウン」の 2 値時系列の確率構造を詳細に調べることで, レート変動を予測する試みも行われている．

参　考　文　献

1) Hertz, J., Krough, A. and Palmer, R.G. (1990): Introduction of the theory of neural computation, Perseus Books, Cambridge, Massachusetts
2) 西森秀稔 (1999): スピングラス理論と情報統計力学, 新物理学選書, 岩波書店
3) 堀口剛，佐野雅己 (2000)：大学院情報理工学 2 情報数理物理，講談社
4) 田中和之 (編著) (2006): 確率的情報処理と統計力学, 臨時別冊・数理科学, SGC ライブラリ 50, サイエンス社
5) 田中和之 (2006)：確率モデルによる画像処理技術入門，森北出版
6) Hartmann, A.K. and Weight, M. (2005): Phase Transitions in Combinatorial Optimization Problems, WILEY-VCH
7) Bishop, C.M. (2006): Pattern Recognition and Machine Learning, Springer, Singapore
8) Bouchaud, J.-P. and Potters, M. (2000): Theory of Financial Risk and Derivative Pricing, Cambridge University Press
9) Arthur, W.B. (1994): Inductive Reasoning and Bounded Rationarity (The El Farol Problem), Am. Econ. Rev., Vol.84, pp. 488-500
10) Challet, D. and Zhang, Y.-C.(1997): Physica A, Vol. 246, pp.407-418
11) Challet, D., Marsili, M. and Zhang, Yi.-C. (2005): Minority Games, Oxford University Press
12) Coolen, A.C.C.(2005): The Mathematical Theory Of Minority Games: Statistical Mechanics Of Interacting Agents, Oxford University Press
13) von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1947): Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press
14) 船木由喜彦 (2001): エコノミックゲームセオリー — 協力ゲームの応用 —, 臨時別冊・数理科学, SGC ライブラリ 11, サイエンス社
15) 梶井厚志, 松井彰彦 (2000): ミクロ経済学 — 戦略的アプローチ, 日本評論社
16) Weibull, J.W. (1995): Evolutionary Game Theory, The MIT Press

17) Sazuka, N. (2007): On the gap between an empirical distribution and an exponential distribution of waiting times for price changes in a financial market, Physica A, Vol. 376, pp. 500-506
18) Sazuka, N. and Inoue, J. (2007): Fluctuations in time intervals of financial data from the view point of the Gini index Physica A, Vol. 383, pp. 49-53
19) Inoue, J. and Sazuka, N. (2007): Crossover between Levy and Gaussian regimes in first-passage processes, Physical Review E Vol. 76, 021111 (9 pages)
20) Inoue, J. and Sazuka, N. (2008): Queueing theoretical analysis of foreign currency exchange rates Quantitative Finance, 印刷中
21) Sazuka, N., Inoue, J. and Scalas, E. (2008): The distribution of first-passage times and durations in FOREX and future markets, Working paper, arXiv:0808.0372
22) 甘利俊一, 二木和久, 篠本滋, 岡田真人, 麻生英樹 (2005): 座談会：ニューロコンピューティングから生まれたもの, 電子情報通信学会誌, Vol.88, No.4 pp. 222-233
23) 外山敬介, 甘利俊一, 篠本滋 (2008): 脳のテーブル, 京都大学出版会
24) Cavagna, A. (1998): Irrelevance of memory in the minority game, Physica Review E, Vol. 59, pp. R3783-R3786
25) Coolen, A.C.C. and Shayeghi, N. (2008): Generating functional Analysis of minority games with inner product strategy definitions, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol. 41, No.32, pp. 324005 (30pages)
26) Inoue, J., Nishimori, H. and Kabashima, Y. (1997): On-line learning of non-monotonic rules by simple perceptron, Journal of Physics A: Mathematical and General, Vol. 30, pp. 3795-3816
27) 井上純一 (2005): EM アルゴリズムの動的性質 — 確率推論におけるミクロとマクロの絡み合い – 電子情報通信学会誌, Vol.88, No.9, pp. 719-723.
28) 今野浩 (2000): 金融工学の挑戦, 中公新書
29) Heimel, J.A.F. and Coolen, A.C.C. (2001): Generating functional analysis of the dynamics of the batch minority game with random external information, Physical Review E, Vol.63, 056121(16pages)
30) De Deomenicis, C. (1978): Dynamics as a sustitute for replicas in systems with quenched random impurities, Physical Review B, Vol. 18, pp. 4913-4919
31) Derrida, B., Gardner, E. and Zippelius, A. (1987): An Exactly Soluble Asymmetric Neural Network Model, Europhysics Letters, Vol. 4, pp. 167-173
32) Kree, R. and Zippelius, A. (1992): Asymmetricall Diluted Neural Networks, in Models of Neural Networks, E. Domany, J.L.van Hemmen and S. Schulten (Eds.), Cpapter 6, pp. 193-212, Springer-Verlag, Heidelberg
33) Mimura, K. and Okada, M. (2005): Generating functional analysis of CDMA detection dynamics, Journal of Physics A: Mathematical and General, Vol.38, No. 46, pp. 9917-9930
34) 倉沢光 (2007): 確率的情報処理におけるハイパパラメータ推定に関する研究, 修士論文, 東北大学大学院情報科学研究科
35) Ohira, T., Sazuka N,, Maruo, K., Shimizu, T., Takayasu M. and Takayasu, H. (2002): Predicability of currency market exchange, Physica A, Vol. 308, pp. 368-374