HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	電磁界の廻折, 散亂, 輻射の理論の究明と其の例題
Author(s)	松本, 正
Citation	北海道大學工學部彙報, 1, 90-114
Issue Date	1948-12-20
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/40446
Type	bulletin (article)
File Information	1_90-114.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

電磁界の廻折，散亂，輻射の理論の究明と其の例題

教授 松本 正

Further Research of the Theory of Diffraction, Scattering and Radiation of Electro-magnetic Waves and their Examples

Tadashi Matsumoto

Abstract

In this paper a new method of calculation for the problems of diffraction through a hole, scattering by a metal plate and radiation through a hole or an openning in the case of electro-magnetic waves is developed.

The idea of this new method is based upon the theory of radiation by electric and magnetic current distributions. When the source distribution is in a plane, this method makes the calculation very convinient.

In §1 and §2 the theoretical proof and analysis of this method are shown and some convinient formulae are derived.

In next section, practical calculations of many applicable examples are shown.

目次

緒言 …… 91

§1. 不連續面分布に依る輻射理論の基本的考察 …… 91

§2. 電磁流面素の輻射の計算公式の誘導 …… 94

例題 1. 無限平面導體板に作られた矩形開口を通しての廻析 …… 97

例題 2. 無限平面導體板に作られた圓形開口を通しての廻析 …… 100

例題 3. 二次元の拋物面鏡 …… 101

例題 4. 細隙輻射系 …… 103

例題 5. 矩形導體板に依る電波の散亂 …… 103

例題 6. 矩形筒導波管の開端からの輻射 (H_{01} 波の場合) …… 104

例題 7. 圓筒導波管の開端からの輻射 (H_{lm} 波の場合) …… 107

例題 8. 廻轉拋物面鏡 …… 109

例題 9. 同軸ケーブルの開端からの輻射 …… 113

緒　言

金屬板に作られた窓を通しての電波の廻折や，金屬板に依る散亂や，或は最近問題になつてゐる細隙輻射系等[1),2),3)]の問題に對しては，嚴密には境界値問題としての解法[4),5)]があり，又近似的には Huygens の原理が利用せられてゐる．後者の方法は，古くは J. Larmor[6)] や F. Kottler[7)] 等が，又近年に J. A. Stratton[8),9)] が論じてゐる．

Huygens の原理に從ふこれらの方法は，何れも廻折窓や輻射開口面に沿ふて，一次波源としての電磁界分布，或はそれを代表するヘルツベクトルの樣な一つのベクトル量の分布を與へ，これに依る輻射場を計算するものであつて，その內容の物理的意味を吟味すると，開口面上の波源分布を後述の樣に開口の面及び周に沿ふて適當に定められた面電磁流，面電磁荷及び線電磁荷の密度分布に置き換へ，これらに依つて輻射場內の觀測點に生ずるベクトルポテンシヤル及びスカラーポテンシヤルを與へ，是等のポテンシヤルの場としての電磁場を求める事になるのである．この樣に面密度分布としての電流，磁流，電荷及び磁荷の四つの量と，線密度分布としての電荷及び磁荷の二つの量とがあり，是等六つの量の中電流と磁流に依つてはベクトルポテンシヤルを，電荷と磁荷に依つてはスカラーポテンシヤルを生じ，場の計算には面密度分布に對しては開口面全面に亙る面積分を，又線密度分布に對しては開口の周圍に沿ふ線積分が必要となる．この樣に計算は甚だ煩雜である．筆者は從來の方法を究明し，且つ解析を進めて上述の問題を開口面上の電流及び磁流だけで取扱ふ事が出來，且つ輻射の計算には電流及び磁流空中線の基礎理論を其儘通用して解き得る事を知つた．斯くして計算方法は甚だ簡潔となり，又其の物理的意味も明瞭にする事が出來た．この方法は波源が平面分布である場合には特に便利であつて，平面導體板に作られた穴からの廻折，有限の平面狀導體板に依る散亂や廻折，細隙輻射系からの輻射，拋物面反射鏡に依る輻射場，導波管の開口端からの輻射等の計算に適用出來る．

§1. 不連續面分布に依る輻射理論の基本的考察

閉じた面を S とし，この面は無限遠に於て閉じてゐてもよいものとする．今この面上に閉曲線 C を畫き C の內部 S_1 を窓とし，ここから曲面 S で圍まれた領域內に電磁波が侵入するものとする．今一次波源の分布は窓の面 S_1 上にのみ與へられてゐるものとし，これを $\boldsymbol{E}_1$ 及び $\boldsymbol{H}_1$ で示すものとすると，觀測點 (x', y', z') に於ける電磁界は次式で與へられる[9)]．

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(x', y', z') &= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{1}{4\pi}\oint_C \nabla\phi\cdot\boldsymbol{H}_1\,d\boldsymbol{s} \\
&\quad -\frac{1}{4\pi}\int_S\Big[-j\omega\mu(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1)\phi+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1)\times\nabla\phi+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_1)\nabla\phi\Big]da \\
\boldsymbol{H}(x', y', z') &= -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{1}{4\pi}\oint_C \nabla\phi\cdot\boldsymbol{E}_1\,d\boldsymbol{s} \\
&\quad -\frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\Big[j\omega\varepsilon\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1)\phi+(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1)\times\nabla\phi+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}_1)\nabla\phi\Big]da
\end{aligned}\right\}\cdots(1)$$

或はこれを書き直して

$$\left.\begin{aligned}4\pi\,\boldsymbol{E}(x',y',z') &= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\oint_C \nabla\phi\,\boldsymbol{H}_1\,d\boldsymbol{s} + \oint_C \phi\,\boldsymbol{E}_1\times d\boldsymbol{s} \\ &\quad - \int_{S_1}\left(\boldsymbol{E}_1\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial\boldsymbol{E}_1}{\partial n}\right)da \\ 4\pi\,\boldsymbol{H}(x',y',z') &= \frac{-1}{j\omega\mu}\oint_C \nabla\phi\,\boldsymbol{E}_1\,d\boldsymbol{s} + \oint_C \phi\,\boldsymbol{H}_1\times d\boldsymbol{s} \\ &\quad - \int_{S_1}\left(\boldsymbol{H}_1\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial\boldsymbol{H}_1}{\partial n}\right)da\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(2)$$

但し $\boldsymbol{n}$ は面 S_1 の外向法線とし，da は S_1 の面素，$d\boldsymbol{s}$ は S_1 の周圍 C のベクトル線素とし，その向きは $\boldsymbol{n}$ に對し右螺子の廻轉方向に定められるものとする．又波源面素或は線素と觀測點の距離を r とし $\phi = e^{-jkr}/r$ である．

(1) 式或は (2) 式は Stratton が Maxwell の電磁界方程式を直接に積分して得たものであるが，その內容の物理的意味を究明して見よう．

今面 S_1 上には電磁流及び電磁荷の面密度を，又面 S_1 の周に沿ふては電磁荷の線密度を假想し是等の諸量を次の樣に定義するものとする．即ち

$$\left.\begin{array}{lll}\text{電流面密度} & \boldsymbol{K}\text{ は} & \boldsymbol{K} = -\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1 \\ \text{磁流面密度} & \boldsymbol{K}^*\text{ は} & \boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1 \\ \text{電荷面密度} & \eta\text{ は} & \eta = -\varepsilon\cdot\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}_1 \\ \text{磁荷面密度} & \eta^*\text{ は} & \eta^* = -\mu\cdot\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{H}_1 \\ \text{電荷線密度} & \sigma\text{ は} & \sigma\,ds = \boldsymbol{H}_1\cdot d\boldsymbol{s}/j\omega \\ \text{磁荷線密度} & \sigma^*\text{ は} & \sigma^*\,ds = -\boldsymbol{E}_1\cdot d\boldsymbol{s}/j\omega\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(3)$$

この時是等の諸量に依つて觀測點に生ずるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}^*$ 及びスカラーポテンシャル Φ と Φ^* は次式で與へられる．

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\boldsymbol{K}\,\phi\,da \\ \boldsymbol{A}^* &= \frac{1}{4\pi}\int_{S_1}\boldsymbol{K}^*\,\phi\,da \\ \Phi &= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{S_1}\eta\,\phi\,da + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_C \sigma\,\phi\,ds \\ \Phi^* &= \frac{1}{4\pi\mu}\int_{S_1}\eta^*\,\phi\,da + \frac{1}{4\pi\mu}\int \sigma^*\,\phi\,ds\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(4)$$

この關係を用ひて (1) 式を書き直すと

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}(x',y',z') &= -\nabla'\times\boldsymbol{A}^* - \nabla'\Phi - j\omega\mu\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{H}(x',y',z') &= \nabla'\times\boldsymbol{A} - \nabla'\Phi^* - j\omega\varepsilon\boldsymbol{A}^*\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (5)$$

となる．但し ∇' は x', y', z' に關する ∇ 記號である．斯くして Stratton がマツクスウエル方程式の直接積分法を考案して求め得た (1) 式は，結局その物理的內容を檢討すると (3) 式で定義される樣な電磁荷に依つて生ずるベクトルポテンシヤル及びスカラーポテンシヤル等を重疊したポテンシヤルの場と一致してゐる事が知られる．更に (3) で定義される諸量は如何なる物理的意味を持つかを考へるに，是等の量は面 S_1 の內側にのみ一次波源の分布 $(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{H}_1)$ が與へられて居り，且つ S の外部領域には全く電磁界がないと考へた時，S_1 面上及びその周圍上に假設せられねばならぬ不連續量に相當してゐる事がわかる[9]．この樣にして (1) 式の物理的意味が明かになつたわけである．

扨て實際の例題を解くに當つて，從來 (1) 式或は (3) 式が多く利用されてゐるが，筆者は更に解析を進めて上述の樣な問題は S_1 面上に電流及び磁流のみを假設し，是等の輻射に對しては電流又は磁流空中線の基礎理論を其儘適用する事の出來る事を知つた．即ち

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= j\omega\varepsilon\boldsymbol{\Pi}\\ \Phi &= -\nabla'\cdot\boldsymbol{\Pi}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (6)$$

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}^* &= j\omega\mu\boldsymbol{\Pi}^*\\ \Phi^* &= -\nabla'\boldsymbol{\Pi}^*\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (7)$$

と置き，$k = 2\pi/\lambda$ とすると

$$\left.\begin{aligned}\nabla'^2\Phi &= -k^2\Phi & \nabla'^2\Phi^* &= -k^2\Phi^*\\ \nabla'^2\boldsymbol{A} &= -k^2\boldsymbol{A} & \nabla'^2\boldsymbol{A}^* &= -k^2\boldsymbol{A}^*\\ \nabla'^2\boldsymbol{\Pi} &= -k^2\boldsymbol{\Pi} & \nabla'^2\boldsymbol{\Pi}^* &= -k^2\boldsymbol{\Pi}^*\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (8)$$

となり，從つて (5) 式を書き直すと

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{E}(x',y',z') &= -j\omega\mu\nabla'\times\boldsymbol{\Pi}^* + \nabla'\times\nabla'\times\boldsymbol{\Pi}\\ \boldsymbol{H}(x',y',z') &= \nabla'\times\nabla'\times\boldsymbol{\Pi}^* + j\omega\varepsilon\nabla'\times\boldsymbol{\Pi}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (9)$$

玆に

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi} &= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{1}{4\pi}\int_{S_1}(-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1)\,\phi\,da\\ \boldsymbol{\Pi}^* &= \frac{1}{j\omega\mu}\frac{1}{4\pi}\int_{S_1}(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1)\,\phi\,da\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (10)$$

となる．從つて (9) 式の電磁界は，S_1 面上に $\boldsymbol{K} = -\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1$ として定められる電流密度分布の輻射界

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}(x', y', z') &= \nabla' \times \nabla' \times \boldsymbol{\Pi} \\ \boldsymbol{H}(x', y', z') &= j\omega\varepsilon\, \nabla' \times \boldsymbol{\Pi} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (11)$$

と S_1 面上に $\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1$ として定められる磁流密度分布の輻射界

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}(x', y', z') &= -j\omega\mu\, \nabla' \times \boldsymbol{\Pi}^* \\ \boldsymbol{H}(x', y', z') &= \nabla' \times \nabla' \times \boldsymbol{\Pi}^* \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (12)$$

との兩輻射界の重疊で與へられる事を知る. 特別に窓 S_1 が大きくなつて閉曲面 S と一致した場合は, contour C は收縮して消滅して凡ての線積分はなくなり, 又面積分の範圍は全閉曲面 S となるわけでであるが, この場合にも $S_1 \to S$ とする丈で (9) 及び (10) 式は其儘成立するのである.

§2. 電磁流面素の輻射の計算公式の誘導

原點に於て Z 軸に一致して置かれたモーメント M_z なる電流要素に依つて, 遠方の觀測點 (r, θ, φ) に生ずる輻射界は

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j\eta \frac{M_z}{2\lambda} \phi \sin\theta \\ H_\varphi &= E_\theta/\eta \quad , \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (13)$$

である事は周知の通りであるが, 次に電流要素が x 軸或は y 軸に一致して原點に置かれた場合には, これらの要素のモーメントを夫々 M_x 及び M_y とすると, 輻射界は夫々 (14) 式及び (15) 式の形となる.

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= -j\eta \frac{M_x}{2\lambda} \phi \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi \\ E_\varphi &= j\eta \frac{M_x}{2\lambda} \phi \cdot \sin\varphi \\ H_\theta &= -E_\varphi/\eta \quad , \quad H_\varphi = E_\theta/\eta \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (14)$$

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= -j\eta \frac{M_y}{2\lambda} \phi \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi \\ E_\varphi &= -j\eta \frac{M_y}{2\lambda} \phi \cdot \cos\varphi \\ H_\theta &= -E_\varphi/\eta \quad , \quad H_\varphi = E_\theta/\eta \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (15)$$

又原點に置かれた磁流要素 M_z^*, M_x^*, M_y^* に對しては, 夫々 (16), (17) 及び (18) の諸式が得られる.

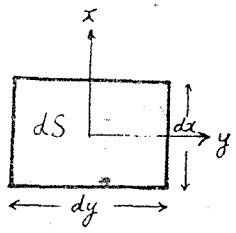
$$\left.\begin{aligned} E_\varphi &= -j\,\frac{M_z^*}{2\lambda}\,\phi\cdot\sin\theta \\ H_\theta &= -E_\varphi/\eta \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j\,\frac{M_x^*}{2\lambda}\,\phi\cdot\sin\varphi \\ E_\varphi &= j\,\frac{M_x^*}{2\lambda}\,\phi\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi \\ H_\theta &= -E_\varphi/\eta\ , \qquad H_\varphi = E_\theta/\eta \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= -j\,\frac{M_y^*}{2\lambda}\,\phi\cdot\cos\varphi \\ E_\varphi &= j\,\frac{M_y^*}{2\lambda}\,\phi\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi \\ H_\theta &= -E_\varphi/\eta\ , \qquad H_\varphi = E_\theta/\eta \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

扨て原點に於て xy 面に一致して dS なる微小面積があつて，この面素 dS に波源 $\boldsymbol{E}_1$ 及び $\boldsymbol{H}_1$ が與へられてゐるものとする（第一圖）．この時 $\boldsymbol{E}_1$ 及び $\boldsymbol{H}_1$ を，夫々磁流密度 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}_1$ 及び電流密度 $-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H}_1$ で置き換へ，この微小面積のもつ電流モーメント及び磁流モーメントを作れば

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -H_{1y}\,dS \qquad & M_y &= H_{1x}\,dS \\ M_x^* &= E_{1y}\,dS \qquad & M_y^* &= -E_{1x}\,dS \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (19)$$



第一圖

となる．茲に E_{1x}, E_{1y}, H_{1x}, H_{1y} は $\boldsymbol{E}_1$ 及び $\boldsymbol{H}_1$ の dS の面に平行な座標成分である．從つて是等全部に依る輻射界は (14), (15), (17) 及び (18) の諸式を重疊して

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j\,\frac{1}{2\lambda}\left[\left(E_{1x}\cos\varphi + E_{1y}\sin\varphi\right) - \left(H_{1x}\sin\varphi - H_{1y}\cos\varphi\right)\eta\cos\theta\right]\phi\,dS \\ E_\varphi &= -j\,\frac{1}{2\lambda}\left[\left(H_{1x}\cos\varphi + H_{1y}\sin\varphi\right)\eta + \left(E_{1x}\sin\varphi - E_{1y}\cos\varphi\right)\cos\theta\right]\phi\,dS \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

特に $\boldsymbol{E}_1$ 及び $\boldsymbol{H}_1$ が z 方向に進む平面横波の等相面上にとられてゐる値とすると

$$E_{1x} = \eta H_{1y}\ , \qquad E_{1y} = -\eta H_{1x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

の關係があるから (20) 式は次の様になる．

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j\,\frac{\phi}{2\lambda}\left(1+\cos\theta\right)\left[E_{1x}\cos\varphi + E_{1y}\sin\varphi\right]dS \\ E_\varphi &= -j\,\frac{\phi}{2\lambda}\left(1+\cos\theta\right)\left[E_{1x}\sin\varphi - E_{1y}\cos\varphi\right]dS \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

又 $\boldsymbol{E}_1$ 及び $\boldsymbol{H}_1$ が導波管の直截開口端の面上にとられてゐて

$$E_{1x} = Z_0 H_{1y} \quad , \quad E_{1y} = -Z_0 H_{1x} \qquad \cdots\cdots (23)$$

但し　Z_0 は導波管の特性インピーダンス

の關係がある場合は (20) 式は次の様になる.

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j\frac{\phi}{2\lambda}\left(1+\frac{\eta}{Z_0}\cos\theta\right)\left[E_{1x}\cos\varphi + E_{1y}\sin\varphi\right]dS \\ E_\varphi &= -j\frac{\phi}{2\lambda}\left(\cos\theta+\frac{\eta}{Z_0}\right)\left[E_{1x}\sin\varphi - E_{1y}\cos\varphi\right]dS \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (24)$$

この式で特別に $Z_0 = \eta$ の場合には (23) 式と同じ形となる.

次に無限に廣い導體板に作られた穴からの廻折又は輻射に就て考へて見る. 今この導體板が平面であるとし, xy 面と一致して置かれてゐるものとし, 穴は原點附近にあるものとする. この時穴の面上の界分布として E_{1x}, H_{1y} が與へられてゐるものとすると, この時穴の面上の面素 dS に依る輻射界は (20) 式より

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j\frac{\phi}{2\lambda}\left(E_{1x} + H_{1y}\,\eta\cos\theta\right)\cos\varphi\cdot dS \\ E_\varphi &= -j\frac{\phi}{2\lambda}\left(E_{1x}\cos\theta + H_{1y}\,\eta\right)\sin\varphi\cdot dS \\ H_\theta &= -E_\varphi/\eta \quad , \quad H_\varphi = E_\theta/\eta \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (25)$$

となるが, 然しこの電磁界の導體板上 ($\theta = \pi/2$) で滿さるべき境界條件 ($E_\varphi = 0$, $H_\theta = 0$) を滿足しない. そこでこの條件を滿足する様な解を得るために, Stratton は電磁波は導體表面で完全反射すると云ふ思想に基き上式の解を $E'_\theta(\theta)$, $E'_\varphi(\theta)$ とし, これに反射波として $E'_\theta(\pi-\theta)$, $-E'_\varphi(\pi-\theta)$ を重疊して解とした[8]. 即ち

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= E'_\theta(\theta) + E'_\theta(\pi-\theta) \\ E_\varphi &= E'_\varphi(\theta) - E'_\varphi(\pi-\theta) \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (26)$$

故に

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j\frac{\phi}{2\lambda}\left(2E_{1x}\right)\cos\varphi\cdot dS \\ E_\varphi &= -j\frac{\phi}{2\lambda}\left(2E_{1x}\cdot\cos\theta\right)\cdot\sin\varphi\cdot dS \\ H_\theta &= -E_\varphi/\eta \quad , \quad H_\varphi = E_\theta/\eta \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (27)$$

が得られる. この界は導體表面に於て境界條件を滿足してゐるものである事がわかる. 更にこの事を一般的に考へて見ると, $E'_\theta(\theta)$, $E'_\varphi(\theta)$ は (25) 式で表される界であつて, その波源は

$$M_x = -H_{1y}\,dS \quad , \qquad M_y^* = -E_{1x}\,dS \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (28)$$

である．一方反射界 $E_\theta(\pi-\theta)$, $E_\varphi(\pi-\theta)$ を波源に還元して見ると，この様な電磁界を生ずる波源は $-M_x$, M_y^* である事を知る．從つて dS 面上で是等の波源を重疊すると電流波源はなくなり $2M_y^*$ なる磁流モーメントのみが殘る．從つて一般に無限平面導體板に作られた穴の面 S からの廻折，又は輻射の問題を解くには $\boldsymbol{K}^* = \boldsymbol{n}\times(2\boldsymbol{E}_1)$ なる磁流密度分布からの輻射界を求めれば宜しく

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}(x',y',z') &= -j\omega\mu\,\nabla'\times\boldsymbol{\Pi}^* \\ \boldsymbol{H}(x',y',z') &= \nabla'\times\nabla'\times\boldsymbol{\Pi}^* \\ \boldsymbol{\Pi}^* &= \frac{1}{j\omega\mu}\,\frac{1}{4\pi}\int_S \boldsymbol{n}\times(2\boldsymbol{E}_1)\,\phi\,dS \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (29)$$

となる．

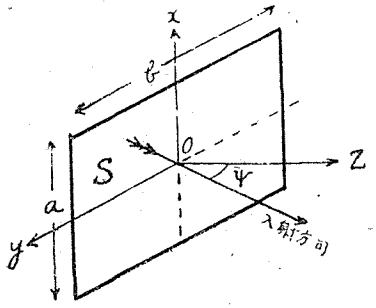
(27) 式は開口面の一次波源として E_{1x}, H_{1y} を考へた時の公式であるが，若し一次波源として E_{1y}, H_{1x} がとられてゐると

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j\,\frac{\phi}{2\lambda}\left(2E_{1y}\right)\sin\varphi\cdot dS \\ E_\varphi &= j\,\frac{\phi}{2\lambda}\left(2E_{1y}\right)\cos\varphi\cdot\cos\theta\,dS \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (27)'$$

となる．

例題 1.　無限平面導體板に作られた矩形開口を通しての廻折[8]

xy 面に沿ふて無限平面の導體板を置き座標原點の所に第二圖の様に矩形の穴を作る．この矩形の各邊は x 軸或は y 軸に平行であるとする．今平面横波が yz 面に平行に，且つ z 軸とは Ψ なる角度で z の負の側より入射して來るものとする．



第 二 圖

i)　入射波の電界が x 方向を向つてゐる場合

z 軸と Ψ なる角度で進行して來る平面横波を座標成分で示すと

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_1\,e^{-jk(y\sin\Psi + z\cos\Psi)} \\ H_y &= E_x\cos\Psi/\eta \\ H_z &= -E_x\sin\Psi/\eta \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (30)$$

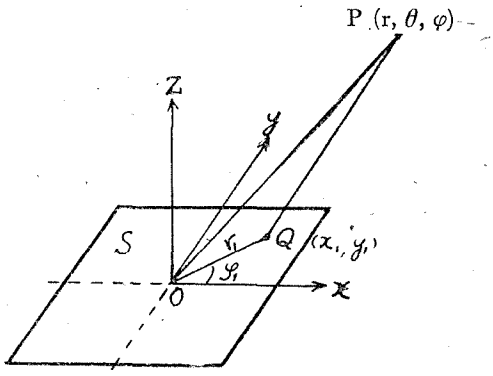
である．この問題に對しては (27) 式の公式が適用され得る．從つて波源としては開口面上 $(z=0)$ に於ける入射波の電界の切線成分だけを考へればよく，夫れは

$$E_{1x} = E_1 \, e^{-jky \sin \Psi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (31)$$

である．勿論開口に於ける界分布は導體板がないとした時の其の位置に於ける界と全く同一であると假定してゐる．

扨て開口面上の $Q(x_1, y_1)$ 點に於ける面素 dS の部分に依つて觀測點 $P(r, \theta, \varphi)$ に生ずる電磁界を考へて見る（第三圖）．今原點と P 點の距離を r とし，面素と P との距離を r' とすると，其の差は

$$\delta = r - r' = r_1 \cos(\varphi - \varphi_1) \cdot \sin \theta$$
$$= (x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi) \sin \theta$$



第三圖

である．從つて Q 點の面素が P 點に及ぼす作用は，原點のものに比して位相が $e^{jk\delta}$ だけ進むが，又開口面上に於て Q 點の持つ位相は $e^{-jky_1 \sin \Psi}$ であるから，結局 Q 點の作用は原點のものより

$$e^{jk\delta'} = e^{jk\delta - jky_1 \sin \Psi}$$

茲に

$$\delta' = \delta - y_1 \sin \Psi = x_1 \cos \varphi \cdot \sin \theta + y_1 (\sin \varphi \sin \theta - \sin \Psi)$$

たけ位相が進む事になる．從つて (27) 式に於て

$$\phi \cdot E_{1x} = \frac{e^{-jkr}}{r'} E_1 \, e^{-jky_1 \sin \Psi}$$

$$\fallingdotseq \frac{e^{-jkr + jk\delta}}{r} E_1 \, e^{-jky_1 \sin \Psi} = \frac{e^{-jkr}}{r} E_1 \, e^{+jk\delta'}$$

となるから，結局開口面全體として輻射は

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j \frac{1}{2\lambda} (2E_1) \cos \varphi \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} \int_S e^{jk\delta'} dx_1 \, dy_1 \\ E_\varphi &= -j \frac{1}{2\lambda} (2E_1) \cos \theta \cdot \sin \varphi \, \frac{e^{-jkr}}{r} \int_S e^{jk\delta} dx_1 \, dy_1 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (32)$$

となる．上式中の面積分を計算して見ると

$$\int e^{jk\delta'} dx_1 \, dy_1 = \int_{x_1 = -\frac{a}{2}}^{x_1 = \frac{a}{2}} \int_{y_1 = -\frac{b}{2}}^{y_1 = \frac{b}{2}} e^{jk[x_1 \cos \varphi \cdot \sin \theta + y_1 (\sin \varphi \cdot \sin \theta - \sin \Psi)]} \cdot dx_1 \, dy_1$$

$$= ab \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\beta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (33)$$

但し

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= (\pi a/\lambda)\cos\varphi\cdot\sin\theta \\ \beta &= (\pi b/\lambda)\cdot(\sin\varphi\cdot\sin\theta-\sin\Psi) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (34)$$

從つて E_θ, E_φ の大きさは

$$\left.\begin{aligned} |E_\theta| &= \frac{E_1 ab}{\lambda r}\cos\varphi\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta} \\ |E_\varphi| &= \frac{E_1 ab}{\lambda r}\cos\theta\cdot\sin\varphi\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (35)$$

となり，垂直面内 (xz 面内) では $\varphi=0$ であるから

$$\left.\begin{aligned} |E_\theta| &= \frac{E_1 ab}{\lambda r}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\Psi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin\Psi} \\ |E_\varphi| &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (36)$$

水平面内では $\varphi=\pi/2$ であるから

$$\left.\begin{aligned} |E_\rho| &= \frac{E_1 ab}{\lambda r}\cdot\cos\theta\,\frac{\sin\left[\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\theta-\sin\Psi)\right]}{\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\theta-\sin\Psi)} \\ |E_\vartheta| &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (37)$$

ii) 入射波の磁界が x 方向を向いてゐる場合

磁界が x 方向を向く平面横波が z 軸と Ψ なる角度で進行して來る場合には，この入射波を座標成分で示すと

$$\left.\begin{aligned} H_x &= H_1\,e^{-jk(y\sin\Psi+Z\cos\Psi)} \\ E_y &= -\eta H_x\cos\Psi \\ E_z &= \eta H_x\sin\Psi \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (38)$$

である．この場合も波源としては開口面上の入射波の電界の切線成分だけを考へればよく，夫れは

$$\begin{aligned} E_{1y} &= -\eta H_1\cos\Psi\cdot e^{-jky\sin\Psi} \\ &= E_1\cos\Psi\cdot e^{-jky\sin\Psi} \end{aligned}$$

但し． $E_1 = -\eta H_1 \quad \cdots\cdots (39)$

である．從つて i) の場合と同様に，開口面全體に依る輻射界は (27)′ 式に依り

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j\frac{1}{2\lambda}(2E_1\cos\Psi)\cdot\sin\varphi\cdot\frac{e^{-jkr}}{r}\int_S e^{jk\delta'}dx_1\,dy_1 \\ E_\varphi &= j\frac{1}{2\lambda}(2E_1\cos\Psi)\cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot\frac{e^{-jkr}}{r}\int_S e^{jk\delta'}dx_1\,dy_1 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (40)$$

となる．故に

$$\left.\begin{aligned} |E_\theta| &= \frac{E_1 ab}{\lambda r}\cos\Psi\cdot\sin\varphi\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta} \\ |E_\varphi| &= \frac{E_1 ab}{\lambda r}\cos\Psi\cdot\cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (41)$$

茲に α, β は (34) 式で表されてゐるものである．

垂直面 (xz 面) 内指向性は $\varphi=0$ として

$$|E_\varphi| = \frac{E_1 ab}{\lambda r}\cos\Psi\cdot\cos\theta\,\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\Psi\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin\Psi} \quad \cdots\cdots\cdots (42)$$

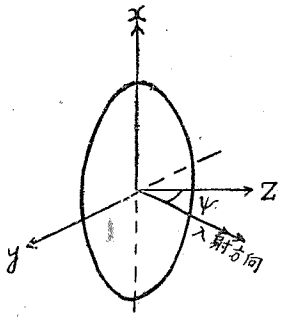
水平面内指向性は $\varphi=\frac{\pi}{2}$ と置いて

$$|E_\theta| = \frac{E_1 ab}{\lambda r}\cos\Psi\,\frac{\sin\left[\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\theta-\sin\Psi)\right]}{\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\theta-\sin\Psi)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (43)$$

となる．

例題 2. 無限平面導體板に作られた圓形開口を通しての廻折

この例題は，例題 1 の開口の形が圓形になつただけであるから (第四圖)，例へば例題 1 の i) の場合に對しては，この場合も (32) 式が成立する．唯面積分の範圍 S が半徑 a なる圓の面にとられるだけである．從つて δ' を圓形開口上の座標 r_1, φ_1 で表はすと



第四圖

$$\begin{aligned} \delta' &= r_1\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta + r_1\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi\cdot\sin\theta - r_1\sin\varphi_1\cdot\sin\Psi \\ &= r_1\left[\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi\cdot\sin\theta + \sin\varphi_1(\sin\varphi\cdot\sin\theta-\sin\Psi)\right] \end{aligned}$$

となるが，今便宜上

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi\cdot\sin\theta - \sin\Psi &= d\sin\delta \\ \cos\varphi\cdot\sin\theta &= d\cos\delta \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (45)$$

と置くと

$$\delta' = r_1 d \cos(\varphi_1 - \delta)$$

となり，面積分は

$$\int_S e^{jk\delta'} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^a e^{jkr_1 d\cos(\varphi_1-\delta)} r_1\, d\varphi_1\, dr_1$$

$$= \int_0^a 2\pi J_0(kr_1 d)\, r_1\, dr_1 = \frac{\lambda a}{d} J_1(kad) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (46)$$

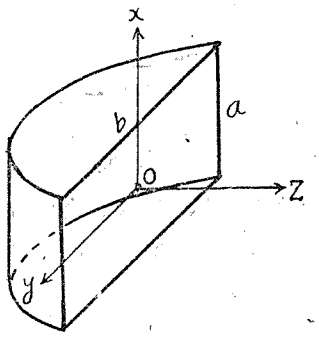
となるから

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j\frac{a}{d} E_1 \cos\varphi \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} J_1(kad) \\ E_\varphi &= -j\frac{a}{d} E_1 \sin\varphi \cdot \cos\theta \cdot \frac{e^{-jkr}}{r} J_1(kad) \\ \text{茲に}\quad d &= \left[\left(\sin\varphi\cdot\sin\theta - \sin\Psi\right)^2 + \left(\cos\varphi\cdot\sin\theta\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (47)$$

この問題は戰時中小谷正雄[10]氏が (2) 式を利用して解き，上記 (47) 式と同じ結果を得てゐる．

例題 3. 二次元の拋物面鏡

二次元拋物面鏡の開口端は矩形である．今座標點を第五圖に示す樣に開口端の重心の位置にとり座標軸を同圖に示す樣に定める．この拋物面鏡の焦點軸上に電流投射器が置かれてゐるものとする．この時この投射器の拋物面鏡に對する鏡像は xy 面に平行な平面上にあり，且つ x 軸の方向を向いて連續的に配列してゐる．從つて今投射器からの直接輻射を除くと，鏡像に依る輻射は開口面上に E_{1x}, H_{1y} の等位相の連續分布を考へこれを波源として計算する事が出來る．今簡單のためこの開口面上の E_{1x}, H_{1y} は更に等振幅であると假定すると (22) 式を利用して輻射界は



第五圖

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j\frac{1}{2\lambda} E_{1x}(1+\cos\theta)\cos\varphi \cdot \frac{e^{-jkr}}{r}\int_S e^{jk\delta} dx_1\, dy_1 \\ E_\varphi &= -j\frac{1}{2\lambda} E_{1x}(1+\cos\theta)\sin\varphi \cdot \frac{e^{-jkr}}{r}\int_S e^{jk\delta} dx_1\, dy_1 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (48)$$

但し　$\delta = (x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi)\sin\theta$

上式の面積分は

$$\left.\begin{aligned} \int_S e^{jk\delta}\, dx_1\, dy_1 &= ab\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta} \\ \text{茲に}\qquad \alpha &= \frac{\pi a}{\lambda}\cos\varphi\cdot\sin\theta \\ \beta &= \frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi\cdot\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (49)$$

故に

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j\,\frac{E_{1x}\,ab}{2\lambda r}(1+\cos\theta)\cos\varphi\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta}\cdot e^{-jkr} \\ E_\varphi &= -j\,\frac{E_{1x}\,ab}{2\lambda r}(1+\cos\theta)\sin\varphi\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta}\cdot e^{-jkr} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (50)$$

従つて水平面内の指向性は $\varphi=\pi/2$ と置いて

$$E_\varphi \propto (1+\cos\theta)\,\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin\theta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (51)$$

で與へられる．従つて水平面内のビーム角 $2\theta_0$ は

$$\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta_0\right)=0 \qquad \text{即ち} \qquad \frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta_0=\pi$$

に依り與へられ

$$2\theta_0 = 2\sin^{-1}(\lambda/b) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (52)$$

となる．

上記の方法では，開口面上に同相等振幅の E_{1x}, H_{1y} の分布を波源として考へたが，開口面上に x 方向に流れる一様な電流分布を假定する場合もある．この場合は開口面上に H_{1y} の分布だけを考へる事と同じ事であつて，その場合には (20) 式で H_{1y} 以外の電磁界成分を零と置いて計算すればよい．即ち

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j\,\frac{\eta}{2\lambda}H_{1y}\cos\theta\cdot\cos\varphi\,\frac{e^{-jkr}}{r}\int_S e^{jk\delta}\,dx_1\,dy_1 \\ E_\varphi &= -j\,\frac{\eta}{2\lambda}H_{1y}\sin\varphi\cdot\frac{e^{-jkr}}{r}\int_S e^{jk\delta}\,dx_1\,dy_1 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (53)$$

茲に面積分は (49) 式で與へられる．故に水平面内の指向性は

$$E_\varphi \propto \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin\theta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (54)$$

で與へられ[11]，ビーム角は (52) 式と同一である．

例題 4. 細隙輻射系[1),2),3)]

第六圖に示す様に，無限に廣い導體板を yz 面に一致せしめ，この面上に z 軸に沿ふて矩形狀の細隙を作り，この細隙の長さを丁度半波長とし，其の二つの長邊の中點間に電源を接續して勵振するものとする．今座標原點を細隙の中央に選定すると，細隙面上の電界分布は細隙の兩端で消滅する様な分布となり

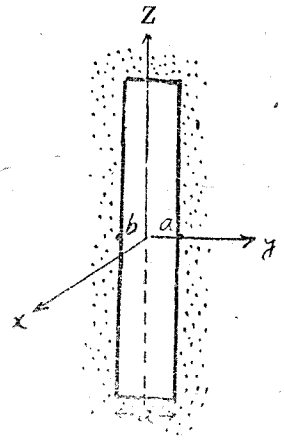
$$E_{1y} = -E_1 \cos kz \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (55)$$

今これを磁流分布に置き換へて (29) 式を適用するため磁流密度を求めると，これは z 方向を向いてゐて

$$i_z^* = 2E_1 \cos kz$$

となる．從つて上式の兩邊に細隙幅 a を乘じて全磁流分布 I_z^* が得られ

$$I_z^* = 2aE_1 \cos kz = 2V_0 \cos kz \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (56)$$



第六圖

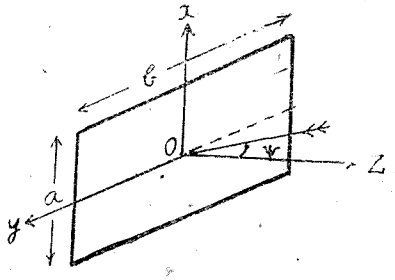
となる．玆に $V_0 = aE_1$ にして V_0 は鎖電點の電壓である．結局上述の様な細隙空中線は半波長同調磁流空中線として考へる事が出來，其の中央に於ける磁流の振幅 I_0^* は $I_0^* = 2V_0$ である．然るに例へば (13) 式と (16) 式を比較して見てもわかる様に，波源分布狀態が同一である様な電流空中線と磁流空中線の兩界は，電界と磁界を交換した形になつてゐて，電流空中線の式に於て電流 I_0 の代りに磁流 I_0^* で置き換へた後，$\boldsymbol{E}$ 及び $\boldsymbol{H}$ に夫々 ε/μ 及び -1 を乘ずると磁流空中線の $\boldsymbol{H}$ 及び $\boldsymbol{E}$ の式が得られる．斯くして次の事が知られる．即ち

磁流或は細隙空中線の輻射電界の方向は電流空中線の夫れとは直角であつて，空中線の長さの方向に直角となる．又電流空中線と同一の波源分布狀態を持つ磁流，又は細隙空中線の輻射指向性は對應電流空中線の夫れと同一である．

尙細隙輻射系の詳細は文獻 3) を參照願ひ度い．

例題 5. 矩形導體板に依る電波の散亂

今第七圖の様に，矩形の導體板を xy 面に一致させて置き其の板の重心の位置を原點に定める．且つ矩形板の各邊は x 軸或は y 軸に平行であるとする．今平面横波が yz 面に平行に，且つ z 軸とは ψ なる角度で z の正の側より入射して來て導體板に依つて散亂せられ，z の正の側に散亂の場を作るものとする．



第七圖

先づ入射波の磁界が x 軸の方向を向いてゐる場合，即ち電界が水平に偏極してゐる所謂水平偏波の場合を考へる

に，この入射波に依つて導體板上に生ずる波源は電流分布のみであるべき筈で，この導體板が例題1の穴の形と同形であるとすると，この場合に導體板上に波源として生ずる電流分布は例題1のiの場合の開口上の磁流分布と同一となるであらう．從つてこの電流分布に依つて生ずる散亂の場は(35)式の電磁界に於て $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ とを交換して得られる．同様に垂直偏波の入射の場合は例題1のii)の場合の(41)式の電磁界で，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{H}$ とを交換して求められる．即ち

i) 水平偏波に依る散亂の場

$$\left.\begin{aligned} |E_\theta| &\propto \cos\theta\cdot\sin\varphi\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta} \\ |E_\varphi| &\propto \cos\varphi\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (57)$$

茲に α, β は(34)式で表されてゐるものである．從つて水平面 $(\varphi=\pi/2)$ 内の指向性は

$$|E_\theta| \propto \cos\theta\,\frac{\sin\left[\dfrac{\pi b}{\lambda}(\sin\theta-\sin\psi)\right]}{\sin\theta-\sin\psi} \quad \cdots\cdots (58)$$

ii) 垂直偏波に依る散亂

$$\left.\begin{aligned} |E_\theta| &\propto \cos\psi\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta} \\ |E_\varphi| &\propto \cos\psi\cdot\sin\varphi\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\beta} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (59)$$

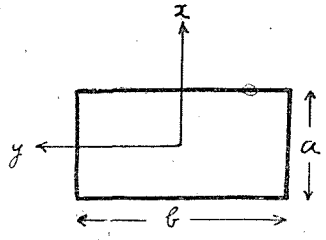
故に水平面内指向性は

$$|E_\varphi| \propto \cos\psi\,\frac{\sin\left[\dfrac{\pi b}{\lambda}(\sin\theta-\sin\psi)\right]}{\sin\theta-\sin\psi} \quad \cdots\cdots (60)$$

例題 6. 矩形筒導波管の開端からの輻射 (H_{01} 波の場合)

第八圖に示す様に，矩形筒導波管の開端面の中央に原點をとり，x 軸及び y 軸を圖の様に定め輻射は z の正方向へ行はれるものとする．この開端面上の電磁界としては，この導波管が無限に長いとした時の管内の進行 H_{01} 波の一等相面上の界を假定すると，開端面の電磁界の横成分は

$$\left.\begin{aligned} E_{1x} &= A\cos\frac{\pi}{b}y\,e^{jwt} \\ H_{1y} &= \frac{A}{Z_0}\cos\frac{\pi}{b}y\,e^{jwt} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (61)$$



第八圖

茲に A は任意定數であるが，入射波の電力 P が單位になる樣に定めると

$$P = \frac{1}{2}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} E_{1x}\cdot\widetilde{H}_{1y}\,dx\,dy = 1$$

より

$$A = 2\sqrt{Z_0/ab} \qquad \cdots\cdots (62)$$

となる．記號 ～ は共軛複素數にした事を示す．

(61) 式の波源に依つて生ずる輻射界は (24) 式を適用して ($E_{1y}=0$ と置いて) 同式を開端面上に積分して

$$\left.\begin{aligned}
E_\theta &= j\frac{A}{2\lambda}\left(\frac{\eta}{Z_0}\cos\theta+1\right)\cdot\cos\varphi\cdot\frac{e^{-jkr}}{r}\int_S\cos\frac{\pi}{b}y_1\cdot e^{jk\delta}dx_1\,dy_1\\
E_\varphi &= -j\frac{A}{2\lambda}\left(\frac{\eta}{Z_0}+\cos\theta\right)\cdot\sin\varphi\cdot\frac{e^{-jkr}}{r}\int_S\cos\frac{\pi}{b}y_1\cdot e^{jk\delta}dx_1\,dy_1\\
H_\theta &= -E_\varphi/\eta\quad,\qquad H_\varphi = E_\theta/\eta\\
&\text{但し}\qquad \delta = (x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi)\sin\theta
\end{aligned}\right\}\cdots (63)$$

然るに面積分を計算すると

$$\int_S\cos\frac{\pi}{b}y_1 e^{jk\delta}dx_1\,dy_1 = \frac{-ab\pi}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\beta^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \qquad \cdots\cdots (64)$$

$$\text{但}\qquad \left.\begin{aligned}\alpha &= \frac{\pi a}{\lambda}\cos\varphi\cdot\sin\theta\\ \beta &= \frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi\cdot\sin\theta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots (65)$$

故に (63) 式は

$$\left.\begin{aligned}
E_\theta &= -j\frac{Aab\pi}{4\lambda}\left(\frac{\eta}{Z_0}\cos\theta+1\right)\cos\varphi\cdot\frac{e^{-jkr}}{r}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\beta^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\\
E_\varphi &= j\frac{Aab\pi}{4\lambda}\left(\frac{\eta}{Z_0}+\cos\theta\right)\sin\varphi\cdot\frac{e^{-jkr}}{r}\cdot\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\beta^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\\
H_\theta &= -E_\varphi/\eta\quad,\qquad H_\varphi = E_\theta/\eta
\end{aligned}\right\}\quad (66)$$

となる．

i) 水平面内 (yz 面) の指向性

(66) 式で $\varphi=\pi/2$ と置いて

$$\left.\begin{aligned} |E_\varphi| &= |E_x| \propto \left(\frac{\eta}{Z_0}+\cos\theta\right)\frac{\cos\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin\theta-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \\ |E_\theta| &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (67)$$

従つてビーム角 $2\theta_0$ は

$$2\theta_0 = 2\sin^{-1}\frac{3\lambda}{2b} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (68)$$

ii) 垂直面内 (xz 面) の指向性

(66) 式で $\varphi=0$ と置いて

$$\left.\begin{aligned} |E_\theta| &= |E_y| \propto \left(\frac{\eta}{Z_0}\cos\theta+1\right)\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta} \\ |E_\varphi| &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (69)$$

従つてビーム角 $2\theta_0$ は

$$2\theta_0 = 2\sin^{-1}\frac{\lambda}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (70)$$

次に比較利得を計算して見る.

上記輻射界の z 軸に沿ふ電力密度 P は

$$P = \frac{1}{2\eta}\left(E_\varphi\cdot\tilde{E}_\varphi\right)_{\theta=0,\ \varphi=\pi/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (71)$$

今入射電力を 1 とすると振幅の任意定數 A は (62) 式で與へられる. 從つて

$$P = \frac{2ab}{\pi^2\lambda^2r^2}\frac{Z_0}{\eta}\left(\frac{\eta}{Z_0}+1\right)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (72)$$

一方ダイポールでは單位輻射電力に對する主方向電力密度 P_0 は

$$P_0 = \frac{3}{8\pi r^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (73)$$

故に比較電力利得 G は

$$G = \frac{P}{P_0} = \frac{16ab}{3\pi\lambda^2}\frac{Z_0}{\eta}\left(\frac{\eta}{Z_0}+1\right)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (74)$$

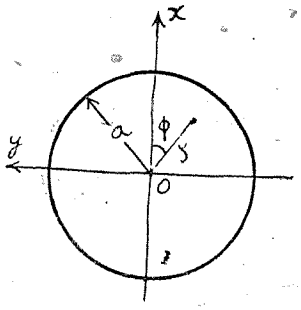
となる. 特に導波管が太くて $Z_0=\eta$ と考へられる程度であると

$$G \fallingdotseq 6.78\,S/\lambda^2 \qquad 茲に \qquad S = ab \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (74)'$$

例題 7. 圓筒導波管は開端からの輻射 (H_{lm} 波の場合)

圓筒導波管の開口の中心に原點をとり圓筒座標を ρ, ϕ, z とすると (第九圖), 開口面上の H_{lm} 波の横分値は

$$\left.\begin{aligned} E_\rho &= \frac{l}{\rho}\cdot J_l(\Omega\rho)\sin l\phi \\ E_\phi &= J_l'(\Omega\rho)\cos l\phi \\ H_z &= E_\rho/Z_0 \quad , \quad H_\rho = -H_\phi/Z_0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (75)$$



第九圖

但し $\quad J_l'(\Omega\rho) = \dfrac{d}{d\rho}J_l(\Omega\rho)$

$\quad \Omega = x'_{lm}/a \quad , \quad J'(x'_{lm}) = 0$

今 (75) 式の各成分より直角座標成分を作ると

$$\left.\begin{aligned} E_x &= E_\rho\cos\phi - E_\phi\sin\phi \\ E_y &= E_\rho\sin\phi + E_\phi\cos\phi \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (76)$$

(76) に (75) を代入し且つ計算の便宜上

$$\left.\begin{aligned} J_l(x) &= \frac{x}{2l}\left[J_{l+1}(x) + J_{l-1}(x)\right] \\ \frac{d}{dx}J_l(x) &= \frac{1}{2}\left[J_{l-1}(x) - J_{l+1}(x)\right] \end{aligned}\right\}$$

を利用して書き直すと

$$\left.\begin{aligned} E_x &= \frac{\Omega}{2}\left[J_{l-1}(\Omega\rho)\sin(l-1)\phi + J_{l+1}(\Omega\rho)\sin(l+1)\phi\right] \\ E_y &= \frac{\Omega}{2}\left[J_{l-1}(\Omega\rho)\cos(l-1)\phi - J_{l+1}(\Omega\rho)\cos(l+1)\phi\right] \\ H_y &= E_x/Z_0 \qquad H_x = -E_y/Z_0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (77)$$

故に開端面上に於けるこれらの波源に依る輻射界は (24) 式の利用に依り

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j\frac{1}{2\lambda}\left(1 + \frac{\eta}{Z_0}\cos\theta\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\int_S\left(E_x\cos\varphi + E_y\sin\varphi\right)e^{jk\delta}\rho\, d\phi\, d\rho \\ E_\varphi &= -j\frac{1}{2\lambda}\left(\cos\theta + \frac{\eta}{Z_0}\right)\frac{e^{-jkr}}{r}\int_S\left(E_x\sin\varphi - E_y\cos\varphi\right)e^{jk\delta}\rho\, d\phi\, d\rho \\ &\text{茲に} \qquad \delta = \rho\sin\theta\cdot\cos(\varphi-\phi) \end{aligned}\right\} (78)$$

として求められる. (78) 式の積分は

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin n\phi \cdot e^{jZ\cos(\phi-\alpha)}\, d\phi &= j^n\, 2\pi\, J_n(Z) \sin n\alpha \\ \int_0^{2\pi} \cos n\phi \cdot e^{jZ\cos(\phi-\alpha)}\, d\phi &= j^n\, 2\pi\, J_n(Z) \cos n\alpha\end{aligned}\right\}$$

の關係を利用して計算すると，結局 (78) 式より次式が得られる．

$$\left.\begin{aligned}E_\vartheta &= j^l \cdot \frac{l}{2r}\left(1+\frac{\eta}{Z_0}\cos\theta\right) J_l(\Omega a) \cdot \frac{J_l(ka\sin\theta)}{\sin\theta} \cdot \sin l\varphi \cdot e^{-jkr} \\ E_\varphi &= j^l \cdot \frac{ka}{2r}\left(\frac{\eta}{Z_0}+\cos\theta\right) J_l(\Omega a)\, \frac{J_l'(ka\sin\theta)/k\sin\theta}{1-\left(\frac{k\sin\theta}{\Omega}\right)^2} \cos l\varphi \cdot e^{-jkr}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots \quad (79)$$

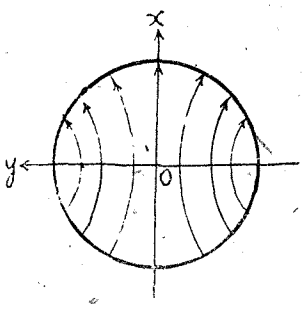
但し $\quad J_l'(ka\sin\theta) = \left[\frac{\partial}{\partial\rho} J_l(k\rho\sin\theta)\right]_{\rho=a}$

これが求める輻射界である．

特に $l=m=1$ 即ち H_{11} 波に依る輻射を考へて見る．H_{11} 波の開端面上の電界の有様は第十圖の様になつてゐる．

i) 垂直面内 ($\varphi=0$) の指向性

$$|E_\rho| \propto \frac{J_1'(ka\sin\theta)/k\sin\theta}{1-\left(\frac{k\sin\theta}{\Omega_{H11}}\right)^2}\left(\frac{\eta}{Z_0}+\cos\theta\right) \cdots \quad (80)$$



第十圖 H_{11} 波の電界

從つて $J_1'(ka\sin\theta)=0$ を與へる．$ka\sin\theta$ は

$$ka\sin\theta_0 = x'_{11}\ ,\quad x'_{12}\ \cdots\cdots$$
$$= 1.841\ ,\quad 5.332\ ,\ \cdots\cdots$$

x'_{11} の場合は (80) 式の分母も 0 となるから，この様な θ では電界は 0 とならない．從つて最初に電界が 0 となるのは $ka\sin\theta_0=5.332$ の時である．故にビーム角 $2\theta_0$ は

$$2\theta_0 = 2\sin^{-1}\left(\frac{5.332\,\lambda}{2\pi a}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (81)$$

ii) 水平面内 $\left(\varphi=\frac{\pi}{2}\right)$ の指向性

$$|E_\vartheta| \propto \frac{J_1(ka\sin\theta)}{\sin\theta}\left(1+\frac{\eta}{Z_0}\cos\theta\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (82)$$

ビーム角は

$$J_1(ka\sin\theta_0) = 0$$

より $ka\sin\theta_0=3.832$ となるから

$$2\theta_0 = 2\sin^{-1}\left(\frac{3.832\,\lambda}{2\pi a}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (83)$$

次に利得の計算をするため，先づ導波管を通して供給せられる H_{11} 波の電力を W とすると

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{Z_0}\int_0^a\int_0^{2\pi}(E_\rho\,\widetilde{E}_\rho - E_\phi\,\widetilde{E}_\phi)\,\rho\,d\phi\,d\rho \\ &= \frac{\pi}{4Z_0}(\Omega^2a^2-1)\,J_1^2(\Omega a) \qquad \text{但し} \quad \Omega = \Omega_{H11} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (84)$$

又輻射界の主方向に於ける電力密度 P' は

$$P' = \frac{1}{2\eta}\left(E_\theta\,\widetilde{E}_\theta\right)_{\theta=0,\ \varphi=\pi/2}$$

$$= \frac{(ka)^2}{32\,\eta r^2}\left(1+\frac{\eta}{Z_0}\right)^2 J_1^2(\Omega a)$$

故に單位供給電力に對する輻射界の主方向電力密度 P は

$$P = \frac{P'}{W} = \frac{Z_0(ka)^2}{8\pi\eta r^2}\left(\Omega^2a^2-1\right)^{-1}\left(1+\frac{\eta}{Z_0}\right)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (85)$$

故に比較電力利得 G は (73) 式の P_0 との比をとつて

$$G = \frac{P}{P_0} = \frac{Z_0\cdot(ka)^2}{3\eta}\left(\Omega^2a^2-1\right)^{-1}\left(1+\frac{\eta}{Z^0}\right)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (86)$$

茲に　$\Omega a = \Omega_{H11}\,a = x'_{11} = 1.841$

導波管が波長に比し充分太いものとすると $Z_0 \fallingdotseq \eta$ と置く事が出來るから

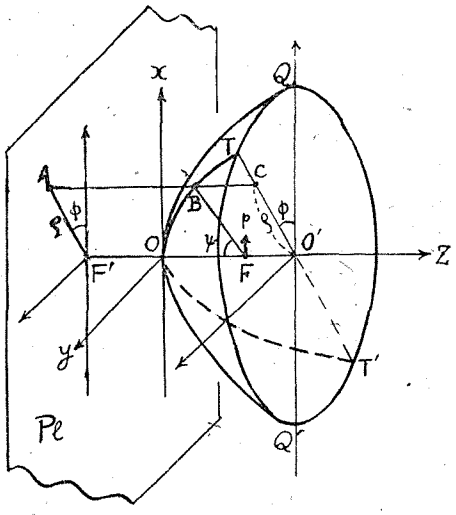
$$G \fallingdotseq 7.46\,\frac{S}{\lambda^2}\ ,\quad S = \pi a^2 \quad \cdots\cdots (87)$$

尙從來導波管の開端からの輻射を取扱つた既發表の文獻には 12), 13), 14), 15) 等があるから，これらを比較參照せられたい．

例題 8. 廻轉拋物面鏡

第十一圖の樣に，廻轉拋物面は xz 面内に描かれた拋物線 QOQ' を z 軸のまわりに廻轉して得られる樣なものであるとする．今焦點距離 $\overline{OF} = a$ とすると，任意の廻轉角 ϕ に對應する拋物線 TOT' の方程式は ρz 面内に於て

$$\rho^2 = 4az\ ,\quad \rho^2 = x^2+y^2 \quad \cdots\cdots (88)$$



第十一圖

には表される．今焦點 F に x 方向を向く電流要素(電流モーメントを p とする)があるものとすると p の鏡像は Z 軸に於て $Z=-a$ の點 F' を含み，Z 軸に直角なる準面 Pl 内にある事になる．例へば電波が F から出發し B 點で反射せられて開口面上の C 點に達する場合を考へると，焦點 F に於ける電流要素 p の鏡像は準面上の A 點に生ずる．今この A 點の鏡像を ρ, ϕ, Z の座標成分で示せば

$$\left.\begin{aligned} p_\rho &= -p\cos\phi\cdot\cos\psi \\ p_\phi &= p\sin\phi \\ p_z &= -p\cos\phi\cdot\sin\psi \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (89)$$

茲に　　$\psi = \angle BFO$

更に之等より x, y, z 座標成分で示せば

$$\left.\begin{aligned} p_x &= p_\rho\cos\phi - p_\phi\sin\phi = -p(\cos^2\phi\cdot\cos\psi + \sin^2\phi) \\ p_y &= p_\rho\sin\phi + p_\phi\cos\phi = -p(\cos\phi\cdot\sin\phi\cdot\cos\psi - \sin\phi\cdot\cos\phi) \\ p_z &= -p\cos\phi\cdot\sin\psi \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (90)$$

扨て反射鏡に依り集勢された電磁場を計算するには，反射鏡の開口面上の電磁界のこの面に平行な成分のみを知ればよい．尙この問題では開口面上の E_x, H_y の成分の作用が强勢で，これ丈を輻射の波源と考へて大體の樣子を知り得る事は容易に理解せられる．從つて以下に於ては開口面上の E_x, H_y 分布のみに着目し，E_y, H_x 成分は省略して考へて行く事にする．

先づ B 點に於ける反射直後の E_x 成分は A 點の p_x が B 點に生ずる輻射界に等しいから

$$\begin{aligned} E_x^{(B)} &= j\eta\frac{p_x}{2\lambda}\frac{e^{-jk(a+z)}}{a+z} \\ &= j\eta\frac{p_x}{2\lambda}\frac{4a\cdot e^{-jk(a+z)}}{4a^2+x^2+y^2} \end{aligned} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (91)$$

この界が B 點から C 點まで進行するのであるが BC 間は平行光線であるから，この距離に相當する電氣角だけ位相が遲れるだけである．尙開口面上では電波は同一位相となるのであるから，共通の位相量を取除き開口面上の E_x として次式が得られる．

$$E_x = \eta\frac{p_x}{\lambda}\frac{l_0}{l_0^2+x^2+y^2} \qquad 但し \quad l_0 = 2a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (92)$$

更に拋物線の性質に依り

$$\cos\psi = \frac{a-z}{a+z} = \frac{l_0^2-\rho^2}{l_0^2+\rho^2}, \qquad \cos\phi = \frac{x}{\rho}$$

であるから p_x を書き直して

$$p_x = -p\left[\frac{l_0^2+y^2-x^2}{l_0^2+x^2+y^2}\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (93)$$

故に

$$\left.\begin{aligned} E_x &= K\,l_0\,\frac{x_0^2-y_0^2-l_0^2}{(l_0^2+x^2+y^2)^2} \\ &= K\,l_0\,\frac{\rho^2\cos 2\phi-l_0^2}{(l_0^2+\rho^2)^2}\quad,\qquad K=-j\,\frac{\eta p}{\lambda} \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(94)$$

又開口面上の H_y は上式の E_x より $H_y=E_x/\eta$ の關係で求められる.

次に開口面上にこの E_x, H_y 分布が與へられた時の輻射界を計算すればよい. 今開口面 S の中心に新しく原點 O' を定め，開口面上の座標を (ρ,ϕ) とし，觀側點の座標を O' に對し (r,θ,φ) とすると輻射界は

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j\,\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}(1+\cos\theta)\cos\varphi\int_S E_x\cdot e^{jk\delta}\,dS \\ E_\varphi &= -\,j\,\frac{e^{-jkr}}{2\lambda r}(1+\cos\theta)\sin\varphi\int_S E_x\cdot e^{jk\delta}\,dS \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(95)$$

茲に $\qquad \delta = \rho\cos(\varphi-\phi)\sin\theta$

上式の面積分 (X) は開口面の半徑を R とすると

$$X=\int_0^R\int_0^{2\pi}E_x\,e^{jk\delta}\,\rho\,d\phi\,d\rho = K\,l_0\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2\cos\phi-l_0^2}{(l_0^2+\rho^2)^2}\,e^{jk\rho\cos(\varphi-\phi)\sin\theta}\,\rho\,d\phi\,d\rho$$

この計算は次の公式

$$\left.\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\cos 2\phi\,e^{jk\rho\sin\theta\cos(\varphi-\phi)}\,d\phi &= -\,2\pi\,J_2(k\rho\sin\theta)\cos 2\varphi \\ \int_0^{2\pi}e^{jk\rho\sin\theta\cos(\varphi-\phi)}\,d\phi &= 2\pi\,J_0(k\rho\sin\theta) \end{aligned}\right\}$$

を利用すると

$$X = -\,2\pi\,Kl_0\left[\cos 2\varphi\,F_2(\kappa)+F_1(\kappa)\right]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(96)$$

茲に

$$\left.\begin{aligned} F_2(\kappa) &= \int_0^{\frac{R}{l_0}}\frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,J_2(\kappa x)\,dx \\ F_1(\kappa) &= \int_0^{\frac{R}{l_0}}\frac{x}{(1+x^2)^2}\,J_0(\kappa x)\,dx \\ \kappa &= kl_0\sin\theta \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(97)$$

故に

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= \frac{-jK\pi l_0}{\lambda r}(1+\cos\theta)\cos\varphi\left[\cos 2\varphi\, F_2(\kappa) + F_1(\kappa)\right]e^{-jkr} \\ E_\varphi &= \frac{jK\pi l_0}{\lambda r}(1+\cos\theta)\sin\varphi\left[\cos 2\varphi\, F_2(\kappa) + F_1(\kappa)\right]e^{-jkr} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (98)$$

從つて垂直面内 $(\varphi=0)$ の指向性は

$$|E_\theta| = \frac{K\pi l_0}{\lambda r}(1+\cos\theta)\left[F_2(\kappa)+F_1(\kappa)\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (99)$$

にて與へられ，ビーム角 $2\theta_0$ は

$$F_2(\kappa) + F_1(\kappa) = 0$$

で與へられ，最小の θ_0 を與へる根は $\kappa = kl_0\sin\theta_0 = 6.2$ であるから

$$2\theta_0 = 2\sin^{-1}\left(\frac{6.2}{kl_0}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (100)$$

又水平面内 $(\varphi=\pi/2)$ 指向性は

$$|E_\varphi| = \frac{K\pi l_0}{\lambda r}(1+\cos\theta)\left[F_1(\kappa) - F_2(\kappa)\right] \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (101)$$

にて與へられビーム角は

$$F_1(\kappa) - F_2(\kappa) = 0$$

で與へられ，最小の θ_0 を與へる根は $\kappa = kl_0\sin\theta_0 = 3.7$

$$2\theta_0 = 2\sin^{-1}\left(\frac{3.7}{kl_0}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (102)$$

次に利得を計算する．電界は z 軸上 $(\theta=0)$ で最大であつて

$$\begin{aligned} E_{\max} &= \frac{2K\pi l_0}{\lambda r}\left[F_1(\kappa)+F_2(\kappa)\right]_{\theta=0} \\ &= \frac{\eta p\pi l_0}{\lambda^2 r}\,\frac{R^2}{l_0^2+R^2} \end{aligned}$$

一方モーメント p の電流要素の輻射界の主方向の値は

$$E'_{\max} = \frac{\eta p}{2\lambda r}$$

であるから利得 G は

$$G = \frac{E_{\max}}{E'_{\max}} = \frac{\pi l_0}{\lambda}\,\frac{2R^2}{l_0^2+R^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (103)$$

若し $R=l_0$ ならば $G=\pi l_0/\lambda$ となり，又 $R=\infty$ とすると $G=2\pi l_0/\lambda$ となり，前者の 2 倍になるに過ぎない．

例題 9. 同軸ケーブルの開端からの輻射

同軸ケーブル内の電磁界は一般に圓筒座標 ρ, φ, z の成分で示すと，E_ρ, E_z, H_φ の三成分であるが，開端面では導體電流は零であるから H_φ は消滅する．この事は嚴密に云へば輻射がある場合には成立しないが，其の輻射が餘り大きくない事を豫想して近似的に成立するものと考へる．從つて開端面では E_ρ のみを考へればよい事になる(第十二圖)．今 E_ρ を x 及び y 成分に分解すると

$$E_x = E_\rho \cos\phi \quad , \qquad E_y = E_\rho \sin\phi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (104)$$

又 E_ρ は ρ の函數であつて

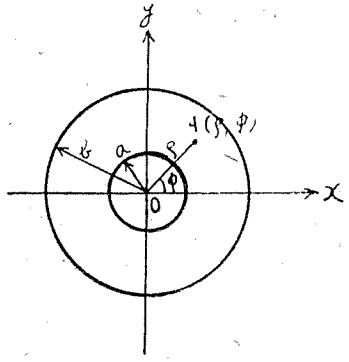
$$E_\rho = C/\rho \qquad C \text{は座標に無關係の量} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (105)$$

と置くと，內外兩導體間の電位差 V は

$$V = \int_a^b E_\rho \, d\rho = C \log \frac{b}{a}$$

であるから，之から

$$C = V/\log \frac{b}{a} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (106)$$



第十二圖

となる．扨て輻射界は (20) 式にて $H_x = H_y = 0$ と置いて開口面に積分して

$$\left.\begin{aligned} E_\theta &= j\,\frac{1}{2\lambda}\,\frac{e^{-jkr}}{r}\int_S (E_x\cos\varphi + E_y\sin\varphi)\, e^{jk\delta}\, dS \\ E_\varphi &= -j\,\frac{1}{2\lambda}\,\frac{e^{-jkr}}{r}\cos\theta\int_S (E_x\sin\varphi - E_y\cos\varphi)\, e^{jk\delta}\, dS \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (107)$$

E_θ を書き直せば

$$E_\theta = j\,\frac{C}{2\lambda}\,\frac{e^{-jkr}}{r}\int_a^b\int_0^{2\pi}\cos(\varphi-\phi)\cdot e^{jk\delta}\, d\rho\, d\phi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (108)$$

茲に

$$\delta = \rho\cos(\varphi-\phi)\sin\theta$$

同軸ケーブルに於てはケーブルの徑は波長に比して遙に小さく $\rho \ll \lambda$ であるから

$$e^{jk\delta} \fallingdotseq 1 + jk\delta = 1 + jk\rho\cos(\varphi-\phi)\sin\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (109)$$

之を (108) に代入して積分を行へば

$$E_\theta = -\frac{Ck\pi}{4\lambda r}(b^2-a^2)\sin\theta\cdot e^{-jkr} \quad , \qquad H_\varphi = E_\theta/\eta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (110)$$

同様にして E_φ を計算すると $E_\varphi = 0$ となる．從つて (110) 式が求むる界である．

又輻射全電力は

$$W = \frac{1}{2}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} E_\theta \tilde{H}_\varphi r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{C_0^2 \pi^3}{3\eta}\left(\frac{(b^2-a^2)\pi}{\lambda^2}\right)^2 \quad \cdots \quad (111)$$

即ち

$$W = \frac{\pi^3}{3\eta}\left(\frac{S}{\lambda^2 \log\frac{b}{a}}\right)^2 V_0^2 \quad \text{ワット} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (112)$$

茲に $S=(b^2-a^2)\pi=$ 開口面積, $C_0^2=C\tilde{C}$, $V_0^2=V\cdot\tilde{V}$ にして V_0 は電壓の振幅である.

輻射抵抗 R_r は開端の電壓の實數値を V_e とすると

$$R_r = \frac{V_e^2}{W} = \frac{V_0^2}{2W} = \frac{180}{\pi^2}\left(\frac{\lambda^2 \log\frac{b}{a}}{S}\right)^2 \quad \text{オーム} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (113)$$

故に開端から輻射がある時はこの R_r にて受端を終端せるものと考へてよい.

文 献

1) 淺見, 松本, 松浦: 細隙輻射系, 電學誌, 昭和 22 年, 第 67 卷, 第 6 冊, 第 707 號.
2) 淺見, 松浦: 電波の遮蔽に就て, 北海道大學工學部紀要, 第 8 冊, 第 1 號, 昭和 22 年 10 月.
3) 松本正: 細隙輻射系の理論, 電氣通信學會, 立體回路專門委員會資料, 第 2 輯, 昭和 22 年 10 月.
4) B. Seiger: Ann. d. Phy. 27, 626 (1908).
5) M. Morse & J. Rubenstein: Phy. Rev. 54, 595 (1938).
6) J. Larmor: Lond. Math. Soc. Proc. I. 1 (1903).
7) F. Kottler: Ann. d. Phy. 71, 457 (1923).
8) A. Stratton & J. Chu: Phy. Rev. 56, 99 (1939).
9) A. Stratton: Electro-magnetic Theory p. 464 – p. 470.
10) 小谷正雄: 戰研.
11) 森田清著: 超短波, 改訂版 303 頁.
12) W. L. Barrow & F. M. Greene: I.R.E. 26, 1494 (1938).
13) W. L. Barrow & L. J. Chu: I.R.E. 27, 51 (1939).
14) 園田忍: 電學誌, 昭和 14 年 9 月.
15) 園田忍: 電學誌, 昭和 14 年 12 月.