ベクトルポテンシヤルに依る電磁界の解析に就て

松本　　正
大根啓三

（昭和24年8月）

On the Analysis of Electro-magnetic Field by Vector-potential.

Tadashi MATSUMOTO
Keizo ONE

Synopsis

This is a theoretical study on the analysis of electromagnetic field by vector-potential In order to obtain useful solutions of Maxwell's equations under some boundary conditions, vector and scalar potentials may be introduced in the analysis frequently, and they are used to be combined each other by the so-called Lorenz Condition.

But this condition is not always convenient in any co-ordinate system. In this paper some conditions to combine vector and scalar potentials, and the ways to select a component of vector potential and resulting wave equations are discussed in detail.

内　　容

緒　言

直交曲線座標系における電磁界の解析には電磁ポテシヤルを用いるのが便利であり，それにはボルグニスの方法,(1)(2) ハンセンの方法,(3) 及び最近畔上氏により與へられた方法(4) などが

ある。此の論文では，もつとも普通に用いられているボルグーニスの方法について考察しその擴張とも言うべき方法についてのべる。即ちベクトルポテンシヤルとスカラーポテンシヤルを結ぶ所謂ローレンツの條件を異つた條件で置換へる事によりボルグーニスの方法が簡單明瞭に導かれその波動方程式とベクトル波動方程式との關係が明らかにされること，及びベクトルポテンシヤルとスカラーポテンシヤルを更に新しい條件式で結びつけるともつと便利な解を導くことが出來ること，についてのべる。以下ベクトルは太字であらはす。

§1. ローレンツの條件と波動方程式

マツクスウエルの方程式を M. K. S. 合理化單位を用いてあらはすと次の如くなる。

$$(\mathrm{I})\quad \nabla\times\mathbf{E}+\partial\mathbf{B}/\partial t=O,\qquad (\mathrm{III})\quad \nabla\cdot\mathbf{B}=O$$

$$(\mathrm{II})\quad \nabla\times\mathbf{H}-\partial\mathbf{D}/\partial t=J,\qquad (\mathrm{IIII})\quad \nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$$

更に E と D, H と B との間に次の關係が成立する場合を考へる。

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E},\qquad \mu\mathbf{H}=\mathbf{B} \tag{1}$$

こゝで電磁ポテシシヤル A, ϕ を導入すると

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A},\qquad \mathbf{E}=-\nabla\phi-\partial\mathbf{A}/\partial t$$
$$\mathbf{D}=-\varepsilon[\nabla\phi+\partial\mathbf{A}/\partial t]\qquad \mathbf{H}=\nabla\times\mathbf{A}/\mu \tag{2}$$

の如くベクトル $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, 及び H は電磁ポテンシルによりあらはされ又これらのポテンシヤルは次式を滿足せねばならない，即

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}+\mu\varepsilon\nabla\partial\phi/\partial t+\mu\varepsilon\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2=\mu J,$$
$$\nabla^2\phi+\nabla\cdot\partial\mathbf{A}/\partial t=-\rho/\varepsilon. \tag{3}$$

ベクトルポテンシヤル，スカラーポテンシヤルには任意性があるのでそれを利用して次の條件を假定する。

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\mu\varepsilon\partial\phi/\partial t=O \tag{4}$$

これが所謂ローレンツの條件である。これを假定すれば (3) は次の様に整頓される，

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}-\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}+\mu\varepsilon\partial^2\mathbf{A}/\partial t^2=\mu J$$
$$\nabla^2\phi-\mu\varepsilon\,\partial^2\phi/\partial t^2=-\rho/\varepsilon \tag{5}$$

即ちベクトル及びスカラー波動方程式が得られる。

波動方程式が導かれたので，問題に適當した座標系を用い微分演算子をその座標であらはしえられる方程式を與へられた境界條件の下で解いて電磁ポテンシヤルを求めそれから界成分を知ればよいわけである。而して (5) の中一方が解かれゝば他の一方は (3) を解くまでもなくローレンツの條件から求めればよいのであるが，このローレンツの條件を見ると $\mathbf{A}$ を知つて ϕ を求める事の容易なのに比べ，ϕ から $\mathbf{A}$ を導くことはむつかしい。それで取扱いにくいベクトル波動方程式の解を直接求め ϕ はローレンツの條件から求める方法の方が結局好都合である。ベクトル波動方程式は各成分に分けて 3 ケの聯立スカラー波動方程式に置換へられる。而して

ベクトルポテンシヤルが三つの成分を同時にもつときの解法は複雑で單一の成分のみを持つ場合に分けて考へる事が行われている。そしてその方法としてボルグニスの方法があるわけであるが併しこの方法はベクトル波動方程式(5)を用いず別の方程式を用いていて，しかも有用な解を導いている。そこでその原因はローレンツの條件にあり，電磁ポテンシヤルは必ずしもローレンツの條件によつて結び付けられる必要がないと云う事に注目してこの方法をしらべてみることにする。尚ハンセンの方法はボルグニスの方法とは逆で(5)から出發し而も ϕ を解きこの ϕ から $\mathbf{A}$ を導くものである。又最近畔上氏は(5)のベクトル波動方程式が同時に3つの成分をもつ場合を球座標などについて解き種々の異つた姿態による界のあらはし方について發表している。こゝではこれらの方法があることのみ指摘し，考察はボルグニスの方法に對してのみ進める。もつとも普通の解析方法としてはこのボルグニスの方法があげられるであろう。

§2. 座標系の性質

考察を右手系直交曲線座標系に屬する座標系に限定し，その座標を u_1, u_2, 及び u_3 とし線素を ds とすれば

$$(ds)^2=h_1^2(du_1)^2+h_2^2(du)^2+h_3^2(du_3)^2$$

こゝで h_i は座標系に特有な一般には u_1, u_2, u_3 の函數である。この h_i について座標系の性質をしらべてみると第1表の如くなる。但し必要な性質のみ上げ又特に u_1, h_1 に注目したため同じ座標系を幾つかに分けて上げてある。

第Ⅰ表 各座標系の h_i の性質

座標系	u_1	u_2	u_3	h_1	h_2/h_3	ボルグニスの條件	新しい條件
直角座標	x	y	z	$h_1=1$	u_1に無關係	成立	成立
圓壔座標 Ⅰ	z	r	θ	$h_1=1$	同上	〃	〃
〃 Ⅱ	r	θ	z	$h_1=1$	u_1に關係あり	不成立	不成立
〃 Ⅲ	θ	z	r	$h_1\neq 1$ 但u_1に無關係	u_1に無關係	〃	成立
楕圓座標	z	ξ	η	$h_1=1$	同上	成立	〃
拋物線座標	z	ξ	η	$h_1=1$	同上	〃	〃
二極座標	z	ξ	η	$h_1=1$	同上	〃	〃
球座標 Ⅰ	r	θ	ϕ	$h_1=1$	同上	〃	〃
球座標 Ⅱ	ϕ	r	θ	$h_1\neq 1$ 但u_1に無關係	同上	不成立	〃
長球座標	ϕ	ξ	η	$h_1\neq 1$ 但u_1に無關係	同上	〃	〃
扁球座標	ϕ	ξ	η	$h_1\neq 1$ 但u_1に無關係	同上	〃	〃

第1表中ボルグニスの條件と云うのは

$$h_1=1,\quad h_2/h_3=u_1 \text{ に無關係}$$

と云う條件が成立するか否かを示すものでこれはボルグニスの方法を適用出來るか否かをあらはすものでこれについては後にのべる。又最後の新しい條件と云う欄は

$$h_1,\ \text{及び}\ h_2/h_3\ \text{が}\ u_1\ \text{に無關係},$$

と云う性質があるかないかを示すものでこれは後に述べる如く新しい方法を適用出來るかどうかを示すものである。

次に各座標に關する単位ベクトルを $\mathbf{i}_j$ であらはしこれらのもつ性質の中必要なもののみをあらわすと第2表の如くなる。但し $\nabla\cdot\mathbf{i}$ が0となるか否かのみを示しその値は複雑なものもあるので示してない。これらの性質についても後に用いることにする。

第2表　各座標の i_j の性質

座標系	u_1	u_2	u_3	$\nabla\cdot\mathbf{i}_1$	$\nabla\cdot\mathbf{i}_2$	$\nabla\cdot\mathbf{i}_3$	$\nabla\times\mathbf{i}_1$	$\nabla\times\mathbf{i}_2$	$\nabla\times\mathbf{i}_3$
直角座標	x	y	z	0	0	0	0	0	0
圓壔座標	z	r	θ	0	$\neq 0$	0	0	0	$\neq 0$
球座標	r	θ	ϕ	$\neq 0$	$\neq 0$	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$
扁球座標	ϕ	ξ	η	0	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
長球座標	ϕ	ξ	η	0	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$

§3. ボルグニスの方法

ボルグニスの方法はもつともよく用いられているもので，これを原論文にしたがつて要點を示すと以下の通りである。以下各節では時間因子はすべて $e^{j\omega t}$ であるとする。直交曲線座標系でマツクウエルの方程式の(Ⅰ),(Ⅱ)を書きあらはすと，$J = gE$ として

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \frac{1}{g+j\omega\varepsilon}\frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 H_3)-\frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 H_2)\right], \\
&\qquad H_1 = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3 E_3)-\frac{\partial}{\partial u_3}(h_2 E_2)\right] \\
E_2 &= \frac{1}{g+j\omega\varepsilon}\frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 H_1)-\frac{\partial}{\partial u_1}(h_3 H_3)\right], \\
&\qquad H_2 = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 E_1)-\frac{\partial}{\partial u_1}(h_3 E_3)\right] \\
E_3 &= \frac{1}{g+j\omega\varepsilon}\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 H_2)-\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 H_1)\right], \\
&\qquad H_3 = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 E_2)-\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 E_1)\right]
\end{aligned}
\tag{6}
$$

更に $\rho = 0$ の場合を考へると

$$\nabla\cdot\mathbf{D} = 0, \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{7}$$

そこで座標系は次の條件を滿しているとする

$$h_1 = 1, \quad h_2/h_3 \text{ は } u_1 \text{ に無關係} \tag{8}$$

これをボルグーニスの條件と名付けるこれが成立する座標系は第1表の如くである。

界を2つの型に分ける，即ち $H_1 = O$ である型を E 型，$E_1 = O$ である型を H 型とすると一般には兩型の重疊により界はあらはされる。E 型をとり上げて見ると $H_1 = O$ であつて，この時あるスカラ ϕ を導入し次の如くあらはすと，即ち

$$h_2 E_2 = \partial\phi/\phi u_2, \quad h_3 E_3 = \partial\phi/\partial u_3 \tag{9}$$

なる時(6)から H_1 が消滅することが分る。更に次の如く，あるスカラー A を導入しよう，

$$\phi = \partial A/\partial u_1, \tag{10}$$

これから(9)より

$$h_2 E_2 = \partial^2 A/\partial u_2 \partial u_1, \quad h_3 E_3 = \partial^2 A/\partial u_3 \partial u_1 \tag{11}$$

これらを用いて(6)より界成分をすべて A であらはすことが出來る

$$H_2 = (g+j\omega\varepsilon)\frac{1}{h_3}\frac{\partial A}{\partial u_3}, \quad H_3 = -(g+j\omega\varepsilon)\frac{1}{h_2}\frac{\partial A}{\partial u_2}. \tag{12}$$

$$E_1 = k^2 A + \frac{\partial^2 A}{\partial u_1{}^2}, \quad H_1 = O \tag{13}$$

但，$k^2 = -j\omega\mu(g+j\omega\varepsilon)$ で $g = O$ の場合には $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$ である。而して A が求める界をあらはす爲には

$$\frac{\partial^2 A}{\partial u_1{}^2} + \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial A}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial A}{\partial u_3}\right)\right] + k^2 A = O \tag{14}$$

なる方程式が滿足されねばならない。逆に(14)を解いて A を求めそれから界成分を知ることが出來る。H 型の場合にも同樣にしてスカラー函數を導きそれにより界を知ることが出來る。こゝでこの方法に用いられるスカラー ϕ はスカラーポテンシヤルに，又 A はベクトルポテンシヤルの一成分に，(10)なる關係はローレンツの條件に，方程式(14)はベクトル方程式の分解スカラー方程式によく似ていることが分る。このボルグーニスの解法は第1表より分る如く例えば圓壔座標で u_1 として θ をとつたものに對してはボルグーニスの條件が成立しないから適用出來ないのである。又(10)なる條件はローレンツの條件と似てはいるが同じものでないことは特に注目される。

§4. ローレンツの條件とボルグニスの方法

ボルグーニスの方法では，用いたスカラー A はベクトルポテンシヤル $\mathbf{A}$ が u_1 成分のみもときの A_1 と似ていることが分つたが實際どの樣な關係になつているかしらべてみよう。さて

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}_1 A_1. \tag{15}$$

とおき以下では $\mathbf{A}$ は A_1 なる成分のみもつと考へる。マツクスウエルの方程式に於て第1節と全く同樣にして電磁ポテンシヤルを導入し只それらをローレンツの條件ではなく次の條件でむすびつける，即ち

$$[\mathbf{i}_1 \cdot \nabla A_1] + \mu\varepsilon\partial\phi/\partial t = O \tag{16}$$

$$[\mathbf{i}_1 \cdot \nabla A_1] + j\omega\varepsilon\mu\phi = O \tag{17}$$

とおく，するとベクトル波動式の代りに次がえられる

$$\nabla\times\nabla\times(\mathbf{i}_1 A_1) - \nabla[\mathbf{i}_1 \cdot \nabla A_1] - k^2 \mathbf{i}_1 A_1 = O \tag{18}$$

これをスカラー方程式の聯立系に置換へると

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{1}{h_1}\frac{\partial A_1}{\partial u_1}\right] + \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left\{\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left\{\frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 A_1)\right\}\right.\right] + k^2 A_1 = O \\
&\frac{1}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 A_1)\right] - \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\left[\frac{1}{h_1}\frac{\partial A_1}{\partial u_1}\right] = O \\
&\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 A_1)\right] - \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\left[\frac{1}{h_3}\frac{\partial A_1}{\partial u_1}\right] = O
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

となり，もしもボルクニスの條件が成立てばこの (19) において下の2つの式は恒等的に成立し而も第1式は

$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial u_1{}^2} + \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial A_1}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial A_1}{\partial u_3}\right)\right] + k^2 A_1 = O$$

となりこれは (14) 式に一致する。以上からボルグニスの條件が成立つ座標系で，ローレンツの條件の代り(16)と云う條件を用いればボルグニスの解法が完全に得られ，ボルグニスの方法におけるスカラー A はベクトルポテンシャルの成分以外の何者でもないことが分る。この場合の界成分の計算式はボルグニスの方法における試算式の A を A_1 でおきかへさへすればよいのである したがつてボルクニスの方法はローレンツの條件を (16) で置換へることによりえられる方法であると結論される。所でベクトル波動方程式(5)で $\mathbf{A} = \mathbf{i}_1 A_1$ とおいたものと (18) とを比べてみよう，$J = O$ とおいて再記すれば

$$\nabla\times\nabla\times(\mathbf{i}_1 A_1) - \nabla\nabla\cdot(\mathbf{i}_1 A_1) - R^2 \mathbf{i}_1 A_1 = O \tag{20}$$

スカラー方程式の聯立系に置換へると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1)\right] + \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left\{\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 A_1)\right\}\right. \\
&\qquad\qquad\left. + \frac{\partial}{\partial u_3}\left\{\frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 A_1)\right\}\right] + k^2 A_1 = O \\
&\frac{1}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 A_1)\right] - \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\left[\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1)\right] = O \\
&\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 A_1)\right] - \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\left[\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_1)\right] = O
\end{aligned} \tag{21}$$

これをボルグニスの條件の成立つ座標系で解くとボルグニスの方法とことなつた解がえられる 例へば第1表球座標 I に適用すると (21) の後の2つの方程式から $\partial A_r/\partial\theta = 0$，$\partial A_r/\partial\phi = 0$ が要求され全體として解は r のみの函數となるしたがつて θ，及び ϕ 方向に mode のある界は A_r のみではあらはしえず他の成分も必要となる。一方ボルグニスの方法では (19) で示した様

に後の2つの方程式は恒等的に成立し A_r は r, θ, 及び ϕ の函數となり從つて各方向に mode のある振動を與へる。

次にローレンツの條件と(16)の條件とを比べてみよう。さて

$$\nabla(\mathbf{i}_1 A_1) = \mathbf{i}_1 \cdot \nabla A_1 + A_1 \nabla \cdot \mathbf{i}_1$$

の様に分解出來るからもしも $\nabla\cdot \mathbf{i}_1$ が0ならば條件(16)はローレンツの條件に一致する。而し一般には第2表から分る通り $\nabla \cdot \mathbf{i}_j$ は必ずしも0にならない。

例へば直角座標成分に關する $\mathbf{i}_j$ はその發散は0であるが球座標の r 方向の $\mathbf{i}_r$ は發散が消滅しないのでローレンツの條件と(16)の條件はことなつており，しかもその相違は共變又は反變ベクトル成分であらわしても消滅しない。

條件(16)を3成分を有する場合について形式的にあらはすと

$$\mathbf{i}_1 \cdot \nabla A_1 + \mathbf{i}_2 \cdot \nabla A_2 + \mathbf{i}_3 \cdot \nabla A_3 + \mu\varepsilon \partial\phi/\partial t = 0$$

又計算の結果次の如くなる事はすぐ分る。

$$\mathbf{i}_1 \cdot \nabla A_1 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial A_1}{\partial u_1}$$

§5. 新しい條件式

ローレンツの條件式を(16)により置換へるとボルグニスの方法がえられ，ボルグニスの條件の成立する座標系で都合のよい解がえられることが分つたが，そこで更に廣範圍の座標系に對して都合よい解がえられる様に電磁ポテンシヤルを更に新しい條件式でしばりつけ異つた波動方程式を引出すことを試みる。それには次を假定しよう。$\mathbf{A}$ は A_1 成分のみもつとして

$$\frac{1}{h_1{}^2} \nabla [\mathbf{i}_1 \cdot \nabla (A_1 h_1{}^2)] + j\omega\mu\nabla\phi = 0 \tag{22}$$

こゝで $h_1 = 1$ ならばこれは條件(16)に一致することはあきらかである。さて(22)を假定すればベクトル方程式は

$$\nabla\times\nabla\times(\mathbf{i}_1 A_1) - \frac{1}{h_1{}^2} \nabla\{\mathbf{i}_1 \cdot \nabla(h_1{}^2 A_1)\} - k^2 \mathbf{i}_1 A_1 = 0 \tag{23}$$

スカラーの聯立方程式に置換へると

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{h_1{}^3} \frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1}(h_1{}^2 A_1)\right] + \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left\{\frac{h_3}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 A_1)\right\}\right. \\
&\qquad\qquad\left. + \frac{\partial}{\partial u_3}\left\{\frac{h_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 A_1)\right\}\right] + k^2 A_1 = 0 \\
&\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{h_3}{h_1 h_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 A_1)\right\}\right] - \frac{1}{h_1^2 h_2} \frac{\partial}{\partial u_2}\left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1}(h_1{}^2 A_1)\right] = 0 \\
&\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{h_2}{h_3 h_1}\left\{\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 A_1)\right\}\right] - \frac{1}{h_1{}^2 h_3} \frac{\partial}{\partial u_3}\left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial u_1}(h_1{}^2 A_1)\right] = 0
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

さてこゝで

$$h_1 \text{ 及び } h_2/h_3 \text{ が } u_1 \text{ に無關係} \tag{25}$$

と云う條件が成立つ座標系を考へてみる，この(25)は假に新しい條件と名付け第1表にこれを滿足する座標系を示してある。さて(25)が成立つならば(24)の下の2つの式は恒等的に成立することになり A_1 は次の方程式を解いて求めればよいことになる。即ち

$$\frac{1}{h_1^2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial u_1^2}+\frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left\{\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 A_1)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left\{\frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 A_1)\right\}\right\}\right]+k^2 A_1=0 \tag{26}$$

が A_1 を求める波動方程式である。

第1表から知られる如く新しい條件(22)を用いればボルグニスの方法では取扱へなかつたものの中で，取扱いうる樣になるものがある。例へば圓筒座標 III などはそれで A_θ 成分のみからなる場合この新しい方法で取扱いうるそしてこれは圓形に曲つた矩形切口導波管内の波の傳播と同一寸法の直線狀導波管のそれとの對應を示す場合に大變便利なものとなるのである。

界成分の計算式を求めておくことにしよう。以下やはり A が A_1 成分のみもつ場合を示すと

$$H=\frac{1}{\mu}\nabla(\mathrm{i}_1\times A_1),\qquad E=-\nabla\phi-j\omega\mathrm{i}_1 A_1$$

$$\nabla\phi=-\frac{1}{j\omega\varepsilon\mu}\frac{1}{h_1^2}\nabla\left(h_1\frac{\partial A_1}{\partial u_1}\right)$$

これより E 型波の界成分は

$$\left.\begin{aligned}
H_1&=0\\
H_2&=\frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 A_1)\right]\\
H_3&=-\frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 A_1)\right]\\
E_1&=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\left[\frac{1}{h_1^2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial u_1^2}+k^2 A_1\right]\\
E_2&=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\left[\frac{1}{h_1^2 h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_1\frac{\partial A_1}{\partial u_1}\right)\right]\\
E_3&=\frac{1}{j\omega\varepsilon}\left[\frac{1}{h_1^2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\left(h_1\frac{\partial A_1}{\partial u_1}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

以上 E 型の場合のみ取扱つたが H 型の場合についても同樣にして行へる。この場合のボクトルポテンシヤルを A^*，スカラーポテンシヤルを ϕ^* であらはすと

$$\mathbf{E}=-1/\varepsilon\nabla\times\mathbf{A}^*,\qquad \mathbf{H}=-\nabla\phi^*-j\omega\mathbf{A}^* \tag{28}$$

この場合の條件式，及びベクトル波動方程式等は $\mathbf{A}$を$\mathbf{A}^*$，ϕ を ϕ^*, A_i を A_i^* によつて置換へることによりえられ，即ち全く同じものであると云へる。H型の場合の界成分をA_1^*のみある場合について示すと次の如くなる。

$$E_1=O$$

$$\left.\begin{aligned}
E_2 &= -\frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 A_1^*)\right] \\
E_3 &= \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 A_1^*)\right] \\
H_1 &= \frac{1}{j\omega\mu}\left[\frac{1}{h_1{}^2}\frac{\partial^2 A_1^*}{\partial u_1{}^2}+k^2 A_1^*\right] \\
H_2 &= \frac{1}{j\omega\mu}\left[\frac{1}{h_1{}^2 h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_1\frac{\partial A_1^*}{\partial u_1}\right)\right] \\
H_3 &= \frac{1}{j\omega\mu}\left[\frac{1}{h_1{}^2 h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\left(h_1\frac{\partial A_1^*}{\partial u_1}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

§6. 新しい方法の適用例

新しい方法の適用例を上げてみる。ボルグニスの條件が成立つ場合にはこの方法はボルグニスの方法に一致する故この場合には標準の書物(5)にゆづりボルグニスの方法で取扱へずこの方法では取扱へる場合について概略をしらべ A_1 がどの様な函數になるか示してみる

○ 圓壔座標 Ⅲ

圓壔座標で A が θ 方向の成分からのみ成立つ場合には第1表の圓壔座標 Ⅲ にこの方法を適用すればよい。この場合の A_θ の方程式は

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta)\right]+\frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2}+k^2 A_\theta=0 \tag{30}$$

變數を分離することが出來る即ち

$$A_\theta = B_1(r)\cdot B_2(\theta)\cdot B_3(z)\cdot e^{j\omega t}$$

とおき

$$\frac{1}{B_3}\frac{\partial^2 B_3}{\partial z^2}=l^2, \qquad \frac{1}{B_2}\frac{\partial_2 B_2}{\partial\theta_2}=-m^2 \tag{31}$$

とすると B_1 については

$$\frac{\partial^2 B_1}{\partial(\Omega r)^2}+\frac{1}{\Omega r}\frac{\partial B_1}{\partial(\Omega r)}+\left(1-\frac{n^2}{r^2}\right)B_1=0 \tag{32}$$

$$\Omega^2 = l^2+k^2, \qquad n^2 = 1+m^2 \tag{33}$$

これはベツセルの方程式である。但し普通は物理的要求から正整數となるので(33)からは整數でない場合があり，したがつてベツセル函數の次數が非整數の實數の場合が生ずる。以上からこの場合の解をまとめて示すと

$B_1 = C_1 J_n(\Omega r) + C_2 Y_n(\Omega r)$　　定在波

$B_1 = C_1 H_n^{(1)}(\Omega r) + C_2 H_n^{(2)}(\Omega r)$　　進行波

$B_2 = \sin m\theta,\ \cos m\theta$　　定在波

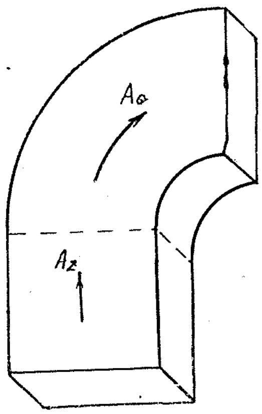
$B_2 = D_1 e^{jm\theta} + D_2 e^{-jm\theta}$　　進行波

$$B_3 = \sin\beta z\,,\quad \cos\beta z \qquad\qquad \text{定在波}$$

$$B_3 = E_1\,e^{lz} + E_2\,e^{-lz} \qquad\qquad \text{進行波}$$

$$\text{但し} \qquad m^2 + 1 = n^2$$

さてこの様にして得られた結果を圓壔座標(I)に適用した結果，即ちベクトルポランシヤルが A_z 成分のみ有する場合とを比べてみると，B_2，B_3 については同じ形であるが B_1 は異つている。A_z の場合には $m=n$ であるが，A_θ の時には $m^2+1=n^2$ となるのである。A_θ をとる時には m は一般に整數でなく取扱いが大變面倒であるが，第1圖の如く眞眞な矩形切口導波管と同一寸法の圓形に曲つた導波管との接續などを考へる場合には直線部の波は普通 A_z であらはされることから考えても，曲線部でも A_θ をとつた方が都合がよいであろうと云うことはすぐ想像される。



第1圖　圓形に曲つた矩形切口導波管

この様な圓形に曲つた矩形切口導波管又はそれから導かれる空洞共振器などの取扱いでは實は次數の函數としてベツセル函數を取扱はねばならないことになりそれは容易ではない。A_θ による圓形に曲つた矩形切口導波管については別にのべることにし以上解をうるにとどめる。

○　球座標Ⅱ，回轉楕圓體座標

これらの場合にも上と同様に考察を進めることが出來る。そして球座標(Ⅱ)では θ 方向に關する微分方程式は陪ルヂヤンドルの方程式においてその位數 m が正整數でない場合に相當する方程式があらはれ，又回轉楕圓體座標では陪 Mathieu の方程式の位數が正整數でない場合に相當する方程式がそれぞれあらはれてくる。これらについてはこゝではふれずにおくことにする。

結　　言

ローレンツの條件を異つた條件でおきかへることによりボルグニスの方法が簡單に與えられ又更にそれを擴張出來ることを述べたがその條件は形式的に複雜なことは確かである又第1表にはあまり示していないがこの様な新しい條件を假定しても取扱いえない座標成分は澤山ある例へば圓壔座標の如き簡單なものにおいてさへ A_r をとればこの方法は用いられないのである。又既にのべた適用例で分る様に新しい方法が特長を發揮すべき問題も，問題それ自體が複雜なものである故，數値計算なども容易ではなくしたがつてこの方法の効用も低いものである而しこの様にローレンツの條件を變更することにより異つた取扱いが可能であることは面白いことである。こゝには全然ふれてないがハンセンの方法も一見整然とはしているが適用出來る座標系はやはり非常な制限をうけている。最後に本論文の一部はすでに發表したものである[6][7]。

文献参照

1) F. Borgnis "Elektromagnetische Eigenschwingungen dielektrischer Räume" Annal. der Phy. 5 Folge, Band 35, 1939
2) E. U. Condon "Priciples of Microwave Radio" Rev. of Mod. phy. vol. 14, no. 4, oct, 1942
3) Stratton "Electromagnetic Theory"
4) 畔上道雄 "球座標による Maxwell 方程式の特解" 電氣學會雜誌 第729號, 昭和24年7月
5) 松本秋男 "電氣通信傳送論" 昭和22年
6) 松本正, 大根啓三 "電氣通信學會 立體回路專門委員會資料" 第8輯 昭和24年
7) 電氣學會東京支部聯合大會 "講演要旨" —A2 昭和24年10月