各種の方法による特殊多張間高層架構の振動解法

酒井忠明

(昭和25年9月28日)

Solutions of the Vibration of Special High Storied Bents with Multiple Bays by Various Kinds of Methods.

Tadaaki Sakai

Synopsis: There are the various kinds of methods for the solution of the vibration problems of structures. In this paper, author concluded that under the same assumption, quite the same difference equation of vibration can be induced from them for high storied special bents with beams of infinite stiffness and solving this equation he gave the calculation formula of natural vibration period for such special bents. He also compared this formula with other ones obtained under different assumptions.

緒言

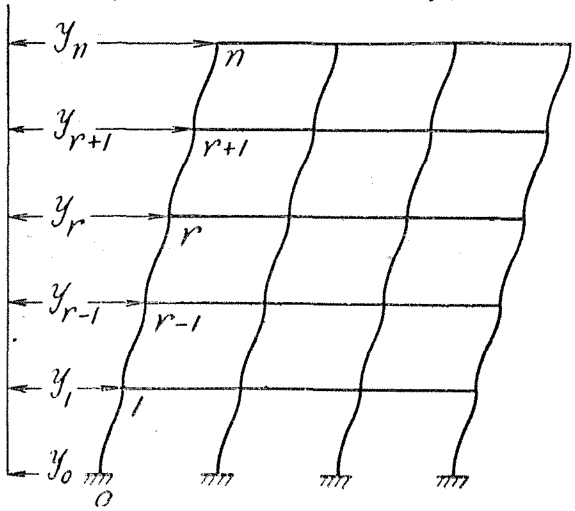
剛節架構即ちラーメンの振動問題の解法には種々あるが，從來この各種の解法の間における關係についてのべたものが少い。著者は本文において，各桁の剛度が特に大であり，各柱の剛度，層高及び床面質量が一様でかつ重要な質量が床の位置にあるような特殊多張間高層ラーメンの振動問題を質點系振動の加速度連結方程式による解法，棒の撓み振動に關する微分方程式による解法，剪斷振動による解法，更に撓角法による解法等各種の方法によつて解き，いずれも同一の階差方程式にて表はされることを述べこの種ラーメンの振動問題をとく場合には同一假定のもとにはいずれによるも全く同じ結果になることをしめしあわせて簡單な固有振動週期の公式を求めた。又假定のことなる他の二，三の方法によつて求めたものとの比較をも行つた。

1. 質點系振動の加速度連結方程式による解法

主要な質量が床の位置にあるものとして層數丈の質量のある質點系の振動として取扱うことが出來る。今 M_r を r 床面にをける質量，y を同じく r 床面にをける振動時の水平撓み，y_0 を地動，α_{ir} を第 i 番目の床面に振動方向に單位力が作用した場合の第 r 番目の床面の水平變

位とする。

第 I 圖　m張間n層ラーメン
(Bent with n Stories and m bays)



しかる時各床面に働く慣性力は

$$-M_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2},\quad -M_2\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2},\quad \cdots\cdots\ -M_r\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2},\quad \cdots\cdots\ -M_n\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2}$$

で從つて r 床面にをける基礎に對する彈性撓みは

$$y_r-y_0=-\alpha_{1r}M_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}-\alpha_{2r}M_2\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}-\cdots-\alpha_{rr}M_r\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2}\cdots-\alpha_{nr}M_n\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2}\quad\cdots(1)$$

$$(r=1,\ 2\cdots\cdots n)$$

このような方程式が層數丈けえられこれによつて强制振動であつても固有振動であつてもこれを解くことができるのであるが層數が多ければ實際問題として極めて面倒で 3，4 層位迄が限度である。

しかるに各桁の剛度即ちその部材長にてその斷面の慣性モーメントを除したものが特に大で，各柱の剛度，層高及び床面質量がいずれも一様なる特殊多張間高層ラーメンに對してはこれを次のように簡單に解決せしめることが出來る。即ちかゝる特殊ラーメンに對して α_{ir} を撓角法によつてもとめると，

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha_{ir}=r\alpha & (r\leqq i)\\ \alpha_{ir}=i\alpha & (r>i)\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

こゝに

$$\alpha=\frac{h^2}{12(m+1)EK}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

式中 m はラーメンの張間數，h は層高であり，K は各柱の剛度即ちその斷面の慣性モー

メントをその部材長にて除したもの，Eは材料の彈性係數である。又このラーメンの全層數はnとする。

(1)式にこの關係を代入すると，

$$y_r-y_0=-1.\ \alpha M\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}-2\,\alpha M\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}-\cdots-(r-1)\,\alpha M\frac{\partial^2 y_{r-1}}{\partial t^2}$$

$$-r\alpha M\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2}-r\alpha M\frac{\partial^2 y_{r+1}}{\partial t^2}-\cdots-r\alpha M\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

同様な式を y_{r-1} について求めると

$$y_{r-1}-y_0=-1.\ \alpha M\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2}-2\alpha M\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}-\cdots-(r-1)\,\alpha M\frac{\partial^2 y_{r-1}}{\partial t^2}$$

$$-(r-1)\alpha M\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2}-(r-1)\alpha M\frac{\partial^2 y_{r+1}}{\partial t^2}-\cdots-(r-1)\,\alpha M\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2}\ \cdots\cdots(5)$$

この(4)式から(5)式を引いて

$$y_r-y_{r-1}=\ -\alpha M\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2}-\alpha M\frac{\partial^2 y_{r+1}}{\partial t^2}-\cdots-\alpha M\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

從つて又

$$y_{r+1}-y_r=\ -\alpha M\frac{\partial^2 y_{r+1}}{\partial t^2}-\cdots-\alpha M\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

故に(7)－(6)から

$$y_{r+1}-2y_r+y_{r-1}=\ \alpha M\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2}$$

或は，

$$y_{r+1}-(2y_r+\alpha M\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2})+y_{r-1}=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$(r=2,\ 3\cdots\cdots n-1)$$

となり簡單な階差方程式で表はされることになる。この階差方程式の解法は後に一括して述べる。

2.　棒の撓み振動に關する微分方程式による解法

前節と同樣の特殊ラーメンにおいて，同樣な假定のもとに，各柱に對する撓み振動の微分方程式をつくると，柱自體の質量は考へないのであるから，

$$\frac{\partial^4 \eta_r}{\partial x_r{}^4}=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$(r=1,\ 2,\ \cdots\cdots\ n)$$

こゝに η_r は下から第 r 層にをける柱の下端から x_r なる點の振動時の水平變位である。(第2圖參照)。

この一般解は

$$\eta_r = (A_r + B_r x_r + C_r x_r^2 + D_r x_r^3)\, V(t) \quad \cdots\cdots (10)$$

$$(r = 1,\ 2,\ \cdots\cdots\ n)$$

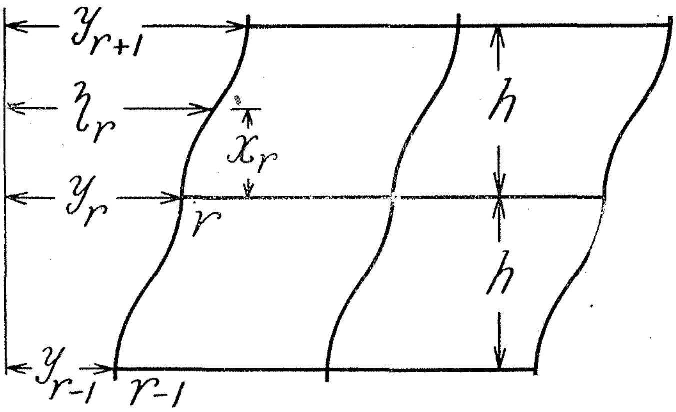
境界條件として，

$$x_r = 0,\ x_r = h \text{ にをいて，} \quad \frac{\partial \eta_r}{\partial x_r} = 0 \quad \cdots\cdots (11)$$

$x_r = h,\ x_{r+1} = 0$ において，

$$\eta_r = \eta_{r+1},\quad -EI\frac{\partial^3 \eta_{r+1}}{\partial x^3_{r+1}} = -EI\frac{\partial^3 \eta_r}{\partial x_r^3} + \frac{M}{m+1}\frac{\partial^2 \eta_r}{\partial t^2} \quad \cdots\cdots (12)$$

第 2 圖



(11) なる條件から，

$$B_r = 0$$

及び $2C_r h + 3D_r h^2 = 0$ 又は $C_r = -\frac{3}{2}D_r h$

(12) なる條件から，

$$A_r + C_r h^2 + D_r h^3 = A_{r+1}$$

及び $-6D_{r+1}V(t) = -D_r V(t) + \frac{M}{(m+1)EI}(A_r + C_r h^2 + D_r h^3)\frac{d^2V}{dt^2}$

これ等の四式から

$$(A_{r+2}V(t) - A_{r+1}V(t)) - (A_{r+1}V(t) - A_r V(t)) - \frac{Mh^3}{12(m+1)EI}A_{r+1}\frac{d^2V}{dt^2} = 0 \cdots (13)$$

次に各床面にをける水平變位を y_r で表はすと

$$y_r = (\eta_{r+1})_{x=0} = A_{r+1}V(t)$$

$$\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 \eta_{r+1}}{\partial t^2}\right)_{x=0} = A_{r+1}\frac{d^2V}{dt^2}$$

更に $K = \frac{I}{h}$

なる關係を用い (13) 式は結局

$$(y_{r+1}-y_r)-(y_r-y_{r-1})-\frac{Mh^2}{12(m+1)EK}\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2}=0$$

或は $$y_{r+1}-(2y_r+\alpha M\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2})+y_{r-1}=0 \quad\cdots\cdots (14)$$

$$(r=2,\ 3,\ \cdots\cdots\ n-1)$$

この式は前節にをいて求めたものと全く同じ階差方程式である。

3. 撓角法による解法

撓角法による解法はすでに水原博士によつて解かれているが次のごとくである。下から第 r 番目の柱に生ずる剪断力を Q_r とすれば，各床面に働く力は慣性力の

$$-M\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2}\quad (r=1,\ 2,\ \cdots\cdots\ n)$$

であるから，m 張間ラーメンにては

$$(m+1)Q_r=-M\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2}-M\frac{\partial^2 y_{r+1}}{\partial t^2}-\cdots-M\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} \quad\cdots\cdots (15)$$

同様に $$(m+1\ Q_{r+1}=\qquad -M\frac{\partial^2 y_{r+1}}{\partial t^2}-\cdots-M\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} \quad\cdots\cdots (16)$$

従つて (15)―(16) から

$$-M\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2}=(m+1)(Q_r-Q_{r+1}) \quad\cdots\cdots (17)$$

之に

$$\left.\begin{aligned} Q_r&=-\frac{1}{h}(M_{r,\,r-1}+M_{r-1,\,r})\\ M_{r,\,r-1},\ M_{r-1,\,r}&=2EK(\frac{3}{h}y_{r-1}-\frac{3}{h}y_r)\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots (18)$$

なる撓角法にをいて熟知な關係を代入すれば

$$y_{r+1}-(2y_r+\frac{Mh^2}{12(m+1)EK}\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2})+y_{r-1}=0$$

即ち $$y_{r+1}-(2y_r+\alpha M\frac{\partial^2 y_r}{\partial t2})+y_{r-1}=0 \quad\cdots\cdots (19)$$

となりこれもさきにもとめたものと同じ式である。

4. 剪断振動による解法

この方法も武藤博士により求められているが次のごとくである。h なる等間隔にて質量を分布せる剪断振動體があつてその斷面積 A，剛性係數 G なる場合各質點位置に働く力は慣性力の

$$-M\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2}\quad (r=1,\ 2,\ \cdots\cdots\ n)$$

で従つて下から第 r 番目の層に働く剪断力 Q_r は

$$Q_r = -M\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2} - M\frac{\partial^2 y_{r+1}}{\partial t^2} - \cdots - M\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} \quad \cdots\cdots (20)$$

同様に，

$$Q_{r+1} = \qquad -M\frac{\partial^2 y_{r+1}}{\partial t^2} - \cdots - M\frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} \quad \cdots\cdots (21)$$

從つて(20)−(21)より

$$-M\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2} = Q_r - Q_{r+1} \quad \cdots\cdots (22)$$

しかして剛性係數の定義から

$$Q_r = \frac{GA}{h}(y_r - y_{r-1}) \quad \cdots\cdots (23)$$

であるからこれを(22)式に代入して

$$y_{r+1} - \left(2y_r + \frac{Mh}{GA}\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2}\right) + y_{r-1} = 0 \quad \cdots\cdots (24)$$

こゝに取扱つている特殊ラーメンでは各層の撓度と剪力との關係は同一であつて單位剪力に對する各層の撓度は，撓角法より $h/12(m+1)EK$ であることがわかる。又こゝに取扱つた剪斷振動體の各質量間にをける撓度というべきものもいずれも同一で單位剪力に對して $1/GA$ である。從つて(24)式にをいて $1/GA$ の代りに $h/12(m+1)EK$ を代用すれば

$$y_{r+1} - \left(2y_r + \frac{Mh^2}{12(m+1)EK}\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2}\right) + y_{r-1} = 0$$

又は

$$y_{r+1} - \left(2y_r + \alpha M\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2}\right) + y_{r-1} = 0 \quad \cdots\cdots (25)$$

以上のようにいずれの方法によつても同じ階差方程式がえられた。この式は等間隔に多數の質點を有する絃の振動方程式と同形でこの場合には(24)式中の GA の代りに絃の張力 T となつている丈である。この解は Lord Rayleigh の Theory of Sound にも出ているが次のごとくである。

5. 階差方程式の解法

$$y_{r+1} - \left(2y_r + \alpha M\frac{\partial^2 y_r}{\partial t^2}\right) + y_{r-1} = 0$$

において　$y_r = U_r\ V(t)$ $\cdots\cdots (26)$

とおいて變數分離を行へば

$$\frac{d^2 V}{dt^2} = -p^2 V \quad \cdots\cdots (27)$$

$$U_{r+1} - (2-\beta)U_r + U_{r-1} = 0 \quad \cdots\cdots (28)$$

こゝに　$\beta = \alpha M p^2$ $\cdots\cdots (29)$

固有振動：

固有振動の第 s 次のものは (27) 式より

$$V_s(t)=a_s\cos(p_st-\xi_s) \quad\cdots\cdots (30)$$

又 (28) の階差方程式の解は

$$U_r=C_1\gamma_1{}^r+C_2\gamma_2{}^r \quad\cdots\cdots (31)$$

でこゝに γ_1, γ_2 は特性方程式

$$\gamma^2-(2-\beta)\gamma+1=0 \quad\cdots\cdots (32)$$

の二根を表はす。この式にをいて

$$2-\beta=2\cos\varphi \quad\cdots\cdots (33)$$

なる置換を行えば，

$$\gamma_2-2\cos\varphi_1\gamma+1=0$$

従つて　$\gamma_1,\gamma_2=\cos\varphi\pm\sqrt{\cos^2\varphi-1}$

$$=\cos\varphi\pm i\sin\varphi$$

故に　$U_r=C_1(\cos\varphi+i\sin\varphi)^r+C_2(\cos\varphi-i\sin\varphi)^r$

$$=C_1(\cos r\varphi+i\sin r\varphi)+C_2(\cos r\varphi-i\sin r\varphi)$$

或は　$U_r=A\cos r\varphi+B\sin r\varphi \quad\cdots\cdots (34)$

A, B は境界條件よりきめるもので

$$\left.\begin{array}{lll} r=0 & \text{にをいて} & U_o=0 \\ r=n & \text{にをいて} & U_n=U_{n+1} \end{array}\right\} \quad\cdots\cdots (35)$$

なる關係から

$$A=0$$

及び　$B\{\sin(n+1)\varphi-\sin n\varphi\}=0 \quad\cdots\cdots (36)$

又は　$2B\cos\frac{1}{2}(2n+1)\varphi\sin\frac{1}{2}\varphi=0 \quad\cdots\cdots (37)$

このためには

$$\cos\frac{1}{2}(2n+1)\varphi=0$$

又は　$\varphi_s=\frac{2s-1}{2n+1}\pi \qquad (s=1,\ 2\cdots n) \quad\cdots\cdots (38)$

従つて，(34) 式は

$$U_r=\sin\frac{(2s-1)\pi}{2n+1}r \quad\cdots\cdots (39)$$

又 (26) 式は

$$y_{sr}=a_s\sin\frac{(2s-1)\pi}{2n+1}r\cos(p_st-\xi_s) \quad\cdots\cdots (40)$$

式中の p_s は (38) 式を (33) 式に代入して

$$2-\beta=2\cos\frac{2s-1}{2n+1}\pi$$

更に(29)式の關係を用い

$$2-\alpha Mp^2=2\cos\frac{2s-1}{2n+1}\pi$$

或は，

$$2\left(1-\cos\frac{2s-1}{2n+1}\pi\right)=\alpha Mp^2$$

或は，$4\sin^2\dfrac{2s-1}{2(2n+1)}\pi=\alpha Mp^2$

これから

$$p_s=\frac{2}{\sqrt{\alpha M}}\sin\frac{(2s-1)\pi}{2(2n+1} \quad \cdots\cdots (41)$$

從つて又固有振動週期は，

$$T_s=\frac{2\pi}{p_s}=\pi\sqrt{\alpha M}\operatorname{cosec}\frac{(2s-1)\pi}{2(2n+1)}$$

(2)式の α の値を代入すれば

$$T_s=\pi\sqrt{\frac{Mh^2}{12(m+1)EK}}\operatorname{cosec}\frac{(2s-1)\pi}{2(2n+1)} \quad \cdots\cdots (42)$$

$$(s=1,\ 2,\cdots\cdots n)$$

高層ラーメンに對しては，$x=$ が小なる時

$$\operatorname{cosec} x \fallingdotseq \frac{1}{x}$$

なる故これを用い近似的に

$$T_s=\frac{2(2n+1)}{2s-1}\sqrt{\frac{Mh^2}{12(m+1)EK}} \quad \cdots\cdots (43)$$

この近似式による誤差は5層ラーメンの第1次振動にをいて0.34％，10層ラーメンでは0.093％にすぎない。

強制振動：

$$y_0=a_0\cos(p_0t-\xi_0) \quad \cdots\cdots (44)$$

なる地動による強制振動にをいては

$$\left.\begin{aligned} V(t)&=a_0\cos(p_0t-\xi_0)\\ U_r&=A\cos r\varphi\ B\sin r\varphi \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (45)$$

これに $r=0$ の時 $U_0=1$
$r=n$ の時 $U_n=U_{n+1}$ $\Big\}$ $\cdots\cdots$ (46)

なる境界條件を用い

$$A=1$$

$$A\cos n\varphi+B\sin n\varphi=A\cos(n+1)\varphi+B\sin(n+1)\varphi$$

之よりAとBを求め(45)に代入して整理すれば，

$$U_r=\frac{\cos\{2(n-r)+1\}\varphi/2}{\cos(2n+1)\varphi/2}\cdots\cdots(47)$$

從つて

$$y_r=a_0\frac{\cos\{2(n-r)+1\}\varphi/2}{\cos(2n+1)\varphi/2}\cos(p_0t-\xi_0)\cdots\cdots(48)$$

尙共鳴時には固有振動週期と地動の週期が一致する場合でこの時には$U_r=\infty$であるから(47)式の分母が零となる場合である。即ち

$$\cos(2n+1)\varphi/2=0$$

これからも固有振動週期が求められる。

6 其の他の解法其の一

今迄取扱つた特殊ラーメンより少しく一般的なもので，柱の剛度がすべてK，桁の剛度はこのk倍のkKなるm張間n層ラーメンにをいて，振動時，ラーメンに働く震力と桁によつて柱に加えられる曲げモーメントはいづれも連續的に柱に加はるものとして振動方程式をつくると

$$EIF_m(k)\frac{\partial^4y}{\partial x^4}-\frac{12EK}{h}\frac{\partial^2y}{\partial x^2}+\frac{1}{m+1}(1+F_m(k))\frac{w}{g}\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=0\cdots\cdots(49)$$

これを解いて固有振動週期の式として

$$T_s=\frac{D_s}{\sqrt{12}}\left\{n+0.5-\sqrt{\frac{F_m(k)}{12}}\right\}\sqrt{1+F_m(k)}\sqrt{\frac{Mh^2}{(m+1)EK}}\cdots\cdots(50)$$

なる式を土木學會誌26卷4號457頁に著者が誘導してある。

こゝに

$$\frac{wh}{g}=M$$

$$D_s=\frac{4}{2s-1}\cdots\cdots(51)$$

$F_m(k)$は張間數によりて，

$$\left.\begin{array}{ll}1\text{張間ラーメンに對しては，} & F_1(k)=\dfrac{2}{k}\\[2ex] 2\text{張間ラーメンに對しては，} & F_2(k)=\dfrac{2(k+3)}{k(k+4)}\\[2ex] 3\text{張間ラーメンに對しては，} & F_3(k)=\dfrac{5k+12}{3k(k+3)}\\[2ex] 4\text{張間ラーメンに對しては，} & F_4(k)=\dfrac{31k^2+156k+180}{2k(10k^2+57k+72)}\end{array}\right\}\cdots\cdots(52)$$

5 張間ラーメンに對しては，　$F_5(k)=\dfrac{8(2k^2+9k+9)}{k(11k^2+56k+60)}$

6 張間以上の m 張間ラーメンに對しては，$F_m(k)=\dfrac{m+1}{mk}$

である。(50) 式の固有振動週期の式は (49) 式の振動方程式の正解ではなくその正解の結果に多少の近似計算を行つて求めたものであるが桁の剛度が特に大なる場合即ち $F_m(k)$ が零と見做される場合には正解となる。

(50) 式にをいて $F_m(k)=0$ とし更に D_s の値を入れるとこれ迄取扱つていたような特殊ラーメンに對する固有振動週期の式として

$$T_s=\frac{4}{(2s-1)\sqrt{12}}(n+0.5)\sqrt{\frac{Mh^2}{(m+1)EK}}$$

形をかえて，

$$T_s=\frac{2(2n+1)}{2s-1}\sqrt{\frac{Mh^2}{12(m+1)EK}} \quad\cdots\cdots (53)$$

となりさきにもとめた (4?) 式の近似式である (43) 式と全く同じとなる。

7　其の他の振動解法其の他二

第一次固有振動週期のみを求むる場合，エナジー法による一般式があつてこれは

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\Sigma My_r^2}{\Sigma Wy_r}} \quad\cdots\cdots (54)$$

であり，この式は一様なる外力 W がラーメンの左側節點のすべてに水平に働く場合の撓み曲線をもつて振動曲線と假定してエナジー法によつて導かれた熟知の式である。

こゝに取扱つているm 張間 n 層特殊ラーメンにおいては，下から數え第 r 層の柱の廻轉角は，この外力によつて

$$R_r=(n-r+1)\frac{Wh}{12(m+1)EK}\cdots\cdots(55),\quad\therefore\ y_r=\frac{1}{2}\left\{(2n+1)r-r^2\right\}\frac{Wh^2}{12(m+1)EK}\cdots\cdots(56)$$

$$\sum_1^n y_r=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\frac{Wh^2}{12(m+1)EK} \quad\cdots\cdots (57)$$

$$y_r^2=\frac{1}{4}\left\{(2n+1)^2r^2-2r^3(2n+1)+r^4\right\}\left\{\frac{Wh^2}{12(m+1)EK}\right\}^2 \quad\cdots\cdots (58)$$

$$\begin{aligned}\sum_1^n y_r^2&=\frac{1}{4}\left\{(2n+1)^2\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2(2n+1)\frac{1}{4}n^2(n+1)^2\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)\right\}\left\{\frac{Wh^2}{12(m+1)EK}\right\}^2\\&=\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(2n^2+2n+1)\left\{\frac{Wh^2}{12(m+1)EK}\right\}^2 \quad\cdots\cdots (59)\end{aligned}$$

(57) と (59) の兩式を (54) 式に代入すれば

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{15}}\sqrt{2n^2+2n+1}\sqrt{\frac{Mh^2}{(m+1)EK}}\cdots\cdots(60)$$

なお前節にても取扱つた桁の剛度が柱のそれの k 倍なるラーメンに對し多少近似計算を行つて(54)式から求めると

$$T=\frac{\pi}{\sqrt{15}}\sqrt{2n^2+n+1}\cdot\sqrt{1+F_m(k)}\cdot\sqrt{\frac{Mh^2}{(m+1)EK}}\cdots\cdots(61)$$

となりこゝに $F_m(k)$ は前節に示した(52)式と同様のものである。これについては土木會誌26巻1號21頁に著者が既にのべたところで，この式の $F_m(k)$ を零とおいて桁の剛度の極めて大きい特殊ラーメンの固有振動週期として(60)式と同じものがえられる。

表—I　固有振動週期の數値表　　係數：$\sqrt{\frac{Mh^2}{(m+1)EK}}$

層數 n	精解値 (42式)			略算値 (43式) (53式)			エナジー法による略算値 (60式)
	第1次振動	第2次振動	第3次振動	第1次振動	第2次振動	第3次振動	第1次振動
1	1.814	—	—	1.732	—	—	1.814
2	2.935	1.121	—	2.887	0.962	—	2.925
3	4.075	1.455	1.007	4.041	1.347	0.808	4.056
4	5.223	1.814	1.184	5.196	1.732	1.039	5.194
5	6.372	2.183	1.385	6.351	2.117	1.270	6.335
6	7.524	2.557	1.596	7.506	2.502	1.501	7.478
7	8.676	2.935	1.814	8.660	2.887	1.732	8.623
8	9.829	3.314	2.035	9.815	3.272	1.963	9.768
9	10.982	3.694	2.258	10.970	3.657	2.194	10.913
10	12.136	4.076	2.482	12.124	4.041	2.425	12.059
20	23.677	7.908	4.763	23.671	7.890	4.734	23.523
30	35.222	11.752	7.046	35.218	11.739	7.044	34.992
40	46.768	15.597	9.368	46.765	15.588	9.353	46.463
50	58.315	19.445	11.674	58.312	19.437	11.662	57.933

語　　結

以上各種の方法によつて，各桁の剛度が特に大きい任意の張間數と層數を有する特殊ラーメンの振動問題を取り扱つたのであるが第1節から第4節にのべた方法によるときはいずれも同一の階差方程式を解くことになり，第6節にのべた方法では假定がことなるため同一結果にはならないがそれでもその固有週期の式は前者の方法によりえられたうちの近似式(43)式と一致した。最後のエナジー法によるものは振動曲線を初めから假定している關係上ことなつた結果を與えたがこれは當然のことである。表—1に各種の方法によつて求めた固有振動週間を種

々ことなる層數に對し計算し結果をしめした。

妹澤，金井兩博士が，昭和9年度地震研究所彙報804頁にをいて棒の撓み振動の微分方程式からこゝに取扱つたものと同樣のラーメンに對し，一層から四層までのものにつき，階差方程式の解法によらず多大の手數をかけて固有振動週期の精解値を求められているが，こゝに階差方程式の形になをして求めた(42)式の結果と同じになるべきものである。

尙振動時にをける水平變位 y_r が求まれば，振動時にをける各部材の曲げモーメント，剪斷力等も撓角式などを用いて計算できる。終りにこの研究は文部省科學研究費による著者の特殊不靜定構造物の應力研究の一部をなすものであることを附記する。