三次元応力問題の解法について

秦　　謹　　一

（昭和30年9月30日受理）

On the Methods for Solving Three-Dimensional Stress Problems.

Kin-ichi HATA

Abstract

The main purpose of this paper is to maintain that most of the various modes of approach to the three-dimensional stress problem should be equivalent to J. Boussinesq's approach, and, if one applies the method of the type of H. Neuber's, one will be compelled to have recourse to a cumbersome, mathematical manipulation in order to obtain correct solutions, but concerning methods of the type of H. Neuber's there will be no lack of generality by virtue of the existence of this manipulation. It will be worth noting that J. Boussinesq's basic solutions can be readily transformed in the forms similar to H. Neuber's (2.14) of this paper, and the third term of formula (2.14) can be derived certainly by integrating displacement differential equations of equilibrium, and, further, this term may be merged in other basic harmonic functions with ease at the expense of computational facility. J. Boussinesq's basic solutions in the forms of H. Neuber's may be called the generalization of H. Neuber's. In any event, it will be evident from many reasons that it is advisable to resort to the methods analogous to J. Boussinesq's or the generalized methods of the type of H. Neuber's. The remarks in this paper are chiefly concerned with general stress state and with exact solutions to the three-dimensional stress problems. As an illustration, we treated the problems of a short column with rectangular and circular cross section briefly.

目　　次

§1. 緒　　　言

曩に三次元応力問題の一解法に関する覚書と題して報告[1]したが，これは直角座標に依るものであり，その中で得られた解の形式は H. Neuber[2] の解法に依り得られることが望ましいことを述べたが，そのことに関して或る結果が得られたので述べたいと思う．筆者は迂濶にも多くの三次元的解法が H. Neuber の解法と等価なものとのみ考えていたので，前述の直角座標系に依る三次応力問題の解が簡単に H. Neuber の解法により得られる筈のものと思つていた処，これは J. Boussinesq の解法により得られることを指摘された[3]ので，三次応力問題の解法に就いて一般的な考察を行つて見た次第である．勿論筆者は J. Boussinesq の解法は H. Neuber の解法と等価なものと思つていた訳であるが，そのような証明は今までになされていないように聞いているし，又簡単にそのように云うことは適当でなく，寧ろ全ての解法は J. Boussinesq の解法に一致する筈のものであり，若し H. Neuber の解法及びそれに等価な解法を使用するならば，条件を附加するか，或いは使用に細心の注意をして特別な操作を行うべきであるという結果を得た．

三次元応力問題の解法は種々あり，例えば A. E. H. Lone[4] や渋谷博士[5]の著書や論文に見られる通りである．無論根本的には皆同一のものである可きであり，筆者としてはそれ等は一応 J. Boussinesq の解法に一致すべきものと考えている．dilatation や rotation に重きを置く三次元的解法も結構ではあるが，此処では J. Boussinesq, H. Neuber, B. Galerkin[6], P. F. Papkovitch[7] の解法等について主として述べる．所謂 three-functions approach の中でこれ等は尤も使用し易いものであろう．J. Boussinesq の解法を除く上記三つの解法が一致することは容易に証明される．又例えば渋谷博士の解法も H. Neuber の解法と一致することが示され[8]ている．これ等の解法に依らなくとも，変位に関する釣合方程式を積分するか，応力に関する釣合式と適合条件式とより解いてもよい訳であるが，支障のない限り上記諸解法を使用する方が望ましいことは明かなことである．以下に於いて H. Neuber に等価な諸解法は実は J. Boussinesq の解法に一致すべきものであり，而して J. Boussinesq の解法に等価な解法は形式的に H. Neuber の解法に一致せしめることが出来るものであり，又他の考慮によつて H. Neuber の解法のみで充分であり，それに関聯して three-functions approach の三つの調和函数等の，解法に固有な基本的な調和函数の所謂個数のことについて一言すると共に，J. Boussinesq の解法に等価な解法の効用性につきその一端を述べる．外力の存在しない場合の等方等質の物体に関する微少変位論の範囲に於いて論ずるものであることは断るまでもないと思う．

§2. J. Boussinesq の解と一般化された H. Neuber の解に就いて

本節の題目中の一般化されたという言葉の意味が稍々制限されたものであることは，後述せられる処により瞭かなことと思う．

先づ直角座標系に依る J. Boussinesq の解法は，よく知られているように，次の如きものである．

$$2G\ (u_1,\ v_1,\ w_1) = \mathrm{grad} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}, \tag{2.1 a}$$

$$2G\ (u_2,\ v_2,\ w_2) = 2\ \mathrm{rot} \begin{bmatrix} \vartheta_1, & 0, & 0 \\ 0, & \vartheta_2, & 0 \\ 0, & 0, & \vartheta_3 \end{bmatrix}, \tag{2.1 b}$$

$$2G\ (u_3,\ v_3,\ w_3) = \mathrm{grad} \begin{bmatrix} x\lambda_1 \\ y\lambda_2 \\ z\lambda_3 \end{bmatrix} - 4\,(1-\nu) \begin{bmatrix} \lambda_1, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & 0 \\ 0, & 0, & \lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{2.1 c}$$

G : shear modulus, ν : Poisson 比,

$u,\ v,\ w$ は夫々 $x,\ y,\ z$ 方向変位,

$\varphi_i,\ \vartheta_i,\ \lambda_i,\ (i = 1,\ 2,\ 3)$ は三次元的調和函数,

変位記号に附けた 1, 2, 3 の suffix により夫々第一，第二，第三変位形式とする．三つの変位形式を相加したものが一般的変位表現である．

上記の如き表現は本質的に云つて大した意味はなく，纒めて書いても同じことである．

$$2G\ (u_1,\ v_1,\ w_1) = \mathrm{grad}\,(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3), \tag{2.2 a}$$

$$2G\ (u_2,\ v_2,\ w_2) = 2\,\mathrm{rot}\,(\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3) \tag{2.2 b}$$

$$2G\ (u_3,\ v_3,\ w_3) = \mathrm{grad}\,(x\lambda_1 + y\lambda_2 + z\lambda_3) - 4(1-\nu)(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3) \tag{2.2 c}$$

(2.1) や (2.2) の表現中の

$(u,\ v,\ w)$, $(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$ の如き形はベクトルを意味することは云うまでもない．上記の形をすこしく簡略に書けば次のようになる．

$$\boldsymbol{u} = (u,\ v,\ w),\ \boldsymbol{\vartheta} = (\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3),\ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3),$$
$$\boldsymbol{r} = (x,\ y,\ z),\ \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3,\ \text{とすると} \tag{2.3}$$

三表現を相加した形に書いて (2.2) は

$$\begin{aligned} 2G\,\boldsymbol{u} &= 2G\,(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) \\ &= \mathrm{grad}\,\varphi + 2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta} + \mathrm{grad}\,(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\lambda}) - 4\,(1-\nu)\,\boldsymbol{\lambda}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

となる．以上，J. Boussinesq の解を三種類にあらわしておいた．

而して H. Neuber の解はよく知られているように，次のものである．

$$2Gu = -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\,\Phi_1,\quad F = \Phi_0 + x\,\Phi_1 +$$

$$2Gv = -\frac{\partial F}{\partial y} + 4(1-\nu)\,\Phi_2,\qquad + y\Phi_2 + z\Phi_3, \tag{2.5}$$

$$2Gw = -\frac{\partial F}{\partial z} + 4(1-\nu)\,\Phi_3,$$

Φ_0, Φ_i, $(i=1,\ 2,\ 3)$ は，調和函数，(2.5) をベクトル形式で書いて

$$2G\boldsymbol{u} = -\operatorname{grad} F + 4(1-\nu)\,\bar{\Phi}, \tag{2.6}$$

但し　$F = \Phi_0 + \nu\cdot\bar{\Phi},\ \bar{\Phi} = (\Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3)$.

上記解中の諸函数は変位ポテンシャル，歪ポテンシャル或いは応力函数等と呼ばれ，ベクトル形式で云えばスカラーポテンシャル，ベクトルポテンシャルがあることになる．然し以上のような名称は余り適当と思えない点もあるようである．変位ポテンシャルの置き方は慎重でなければならない．本報文もそのことに関している訳である．たとえばよく次の置き方をする．但し $2G$ は他の釣合上附けた．

$$2Gu = \frac{\partial F}{\partial x},\quad 2G\nu = \frac{\partial F}{\partial y},\quad 2Gw = \frac{\partial F}{\partial z}. \tag{2.7}$$

これは単は (2.5) 式で右辺第二項を除外したものと云うように考えることは出来ない．即ち変位に依る釣合方程式をベクトル形式で書けば

$$\left(\nabla^2 + \frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\cdot\operatorname{div}\right)\boldsymbol{u} = 0, \tag{2.8}$$

但し　$\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ は Laplacian,

(2.7) を (2.8) に代入すれば

$$\operatorname{grad}\cdot\nabla^2 F = 0,\quad \text{即ち}\quad \nabla^2\boldsymbol{u} = 0, \tag{2.9}$$

これでは変位は調和函数であることになり，(2.7) の表式は応力状態が調和函数であるような比較的簡単な問題にしか使用出来ないものであり，より一般的な問題に対しては不適当な表現である．但し例えば熱応力問題の特別解は (2.7) の置き方により導出し得ることはその釣合方程式

$$\nabla^2\boldsymbol{u} + \frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\,\alpha\operatorname{grad} T \tag{2.10}$$

但し　α は考えている物体の線膨張係数,

$T \equiv T(x,\ y,\ z)$ は温度の分布函数,

を一見すれば明白である．即ち (2.7) と (2.10) より

$$\operatorname{grad}\left(\nabla^2 F - \frac{E\alpha}{1-\nu}\,T\right) = 0,\quad \text{或いは}\quad \nabla^2 F = \frac{E\alpha}{1-\nu}\,T, \tag{2.11}$$

(2.11) の特別解だけが必要である． $F(x,\ y,\ z)$ は求め得る筈であるから，(2.7) の表現は正

しい訳でありポテンシャルを有する物体力が作用する場合も同様なること明かである. (2.10) の右辺はポテンシャル力の形をしている. 表現の正しいことを種々な面より確めなければならない. 熱応力問題としてはその F の特別解と J. Boussinesq の解法等の諸解を補助解として用いればよいこと明かである[9].

渋谷博士[10] は H. Neuber の解は, 二次元弾性理論における解[11]

$$2Gu = -\frac{\partial \chi}{\partial x} + \xi,\quad 2Gv = -\frac{-\partial \chi}{\partial y}\,\eta,$$

$$\text{但し}\quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y},\quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{-\partial \eta}{\partial x} = -2G\omega = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)}\,\frac{\varDelta}{(1-2\nu)} \tag{2.12}$$

$$= (1-\nu)\nabla_1{}^2\chi,\quad \text{rotation}\ \omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\text{dilatation}\ \varDelta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\nabla_1{}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

を三次元的解に拡張したものであると云つておられる. H. Neuber 教授が如何にして (2.5), (2.6) 式を導出されたかは詳かではないが, 教授の著書の切欠応力論に示されているようなものとすれば, 最初より大体の形を置き, 単に $4(1-\nu)$ なる係数を釣合方程式に代入して決定したに過ぎず, 完全な導出法とは遠いものである. 併しその置き方は渋谷博士の申されるとおり, (2.12) 式より容易に推知されるものであるかも知れない.

今 (2.4) 式に於いて

$$\begin{aligned} &\varphi = -\varPhi_0,\quad \boldsymbol{\lambda} = -\bar{\varPhi} = -(\varPhi_1,\ \varPhi_2,\ \varPhi_3), \\ &F = \varPhi_0 + \boldsymbol{r}\cdot\bar{\varPhi}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

と置くことは何等一般性を害しない. 勿論 $\varPhi$ 函数や F は H. Neuber の (2.5) 式と同記号のものである. (2.13) の置換に依り, J. Boussinesq の解 (2.4) 式は次の形となる.

$$2G\boldsymbol{u} = -\operatorname{grad}F + 4(1-\nu)\bar{\varPhi} + 2\operatorname{rot}\boldsymbol{\vartheta}, \tag{2.14}$$

$$\text{但し}\quad F = \varPhi_0 + \boldsymbol{r}\cdot\bar{\varPhi}_0$$

(2.14) 式は第3項 $2\operatorname{rot}\vartheta$ を除けば (2.5), (2.6) の H. Neuber の解法と全く同形式である. 而して (2.14) は J. Boussinesq の解と云うことが出来ることは勿論である. 即ち H. Neuber の解に $2\operatorname{rot}\vartheta$ を附加したものが J. Boussinesq の解ということになる. 以後 (2.14) をも J. Boussinesq の解, 又は H. Neuber の解の拡張, 或いは一般化された H. Nuber の解と呼ぶことにする.

(2.14) 式の第三項は J. Boussinesq の解 (2.1), (2.2) の第二変位形式 $2G\boldsymbol{u}_2$ であり, $\boldsymbol{u}_2$ は $\boldsymbol{u}_1$ と共に単なる調和函数或いは調和ベクトルであり, それ等に属する dilatation は消える.

即ち，$\operatorname{div} \boldsymbol{u}_1 = \operatorname{div} \boldsymbol{u}_2 = 0$. 併しそれ等に属する rotation は $\boldsymbol{u}_1$ に就いては消え，$\boldsymbol{u}_2$ に就いては消えない．即ち

$$2G \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_1 = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0, \quad G \operatorname{rot} \boldsymbol{u}_2 = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vartheta = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vartheta \neq 0.$$

$\boldsymbol{u}_2$ は捩れに依る shear に関聯するものであることは明かであり，廻転対称問題である捩れの解はこれのみで充分である．第一変位形式と第二変位形式は上述のように瞭かに本質的に異り，この二つのみに関する限り，一方をもつて他方を代用することは出来ない．兎角 (2.14) の第三項は何等の理由を示さずに，無視したり除外することは避くべき事柄である．軸対称問題で torsion-free であれば，J. Boussinesq の解の第二変位形式又は (2.14) の第三項は不要であることはよく知られている．然し軸対称問題は特殊な問題である．この第三項は，一般的な問題に対する基本解としては，一先づ重要な項である．J. Boussinesq の解法は一般に認められ，よく使用せられるものである． H. Neuber の解法もまたよく使用されているのであるから，ここに深い考察が必要であると思う．M. A. Sadowsky & E. Sternberg[12] 両教授はその論文で次のように云つておられる．即ち H. Neuber 教授が three-functions approach の変形体を新しく導出し，完全な対称性を有する基礎解を計算上の利便を犠牲にして得られたと．確に (2.14) の第三項 $2 \operatorname{rot} \vartheta$ は対称性を損うものである．然し両教授も J. Boussinesq の解の方が計算に便であることを暗に云つておられるようである．即ち H. Neuber の解に第三項 $2 \operatorname{rot} \vartheta$ を附加した方が便利であるという訳である． three-functions approach の three functions の意味は分明でないが，所謂三次元応力問題の解法には，一般的に云つて，三個の基本的な調和函数が必要であるということに基いているように思へる．但し Maxwell 或いは Morera[13] の応力函数は形式上 3 個であり，そのように応力と直接結びつく 3 個の函数も three functions の中に這入つているかも知れないが，一先づこの三つの函数は調和函数の意味にして置きたい．斯くして調和函数が 3 個本質的に必要であるということの意味については後述したい．兎角無造作に (2.14) より $2 \operatorname{rot} \vartheta$ をとり外して，完全な対称性を有する有用な解を得るとは考え難いことであり，そのことをも以下に述べる．次節に於いて変位であらわした釣合微分方程式より積分すれば，必然的に上記の $2 \operatorname{rot} \vartheta$ 項は現われるものであり，換言すれば (2.14) の J. Boussinesq の解は，如何なる積分法に依るも，容易に導出されるものであることを云う．

§3. 二，三の積分法に依る (2.14) の J. Boussinesq の解の導出に就いて

J. Boussinesq が如何なる導出法に依つて，氏の名の冠する解を得たかは筆者は知らない．Comptes Rendus 中の氏の諸論文を探しても，それらしいものは見当らなかつた．恐らく文献と注意の処に示した氏の著書中[3] に導出法が記載されていることと思う．

先づ P. F. Papkonitch[14] の解の導出法に依れば，(2.8) の釣合式より

$$\nabla^2 \boldsymbol{u} = \frac{-1}{1-2\nu} \text{grad div } \boldsymbol{u}, \tag{3.1}$$

(3.1) の両辺に演算子 divergence を作用させると

$$\nabla^2 \text{div } \boldsymbol{u} = \frac{-1}{1-2\nu} \nabla^2 \text{div } \boldsymbol{u}, \quad \text{これより}$$

$$\nabla^2 \text{div } \boldsymbol{u} = 0, \tag{3.2}$$

即ち dilatation である処の

div $\boldsymbol{u}$ は調和函数．(3.2) に依り (3.1) に ∇^2 を作用させて

$$\nabla^2\nabla^2 \boldsymbol{u} = \nabla^4 \boldsymbol{u} = 0, \tag{3.3}$$

(3.2) と (3.3) は示す迄もないが．次に (3.1) の形よりして

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{B} + \text{grad } F, \tag{3.4}$$

と置き得る．第一項は (3.1) の補助解，第二項はその特別解の趣であり，後者については，第2節に少しく述べた．

$$\boldsymbol{B} = (B_1,\ B_2,\ B_3),\ \nabla^2 B_i = 0,\ (i = 1,\ 2,\ 3),\ F \equiv F(x,\ y,\ z)$$

(3.4) を (3.1) に代入して
$$\nabla^2 F = \frac{-1}{2(1-\nu)} \text{div } \boldsymbol{B}, \tag{3.5}$$

而して (3.3) により F は重調和函数であり，又 $\boldsymbol{B}$ は調和ベクトルであるから，公式

$$\nabla^2 (xf) = 2 \frac{\partial}{\partial x} f,\quad \nabla^2 f = 0\ ,\ f \equiv f(x \cdot y \cdot z). \tag{3.6}$$

を利用して，(3.5) 式は次のように積分される．

$$F = \frac{-1}{4(1-\nu)} (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B} + \varphi_0),\ \nabla^2 \varphi_0 = 0, \tag{3.7}$$

この (3.7) を (3.4) に代入したものが P. F. Papkovitch の解であり，明かにそれは H. Neuber の解と等価である．然し (3.5) を積分する際に基本公式

$$\text{div rot } \boldsymbol{A} = 0,\qquad \boldsymbol{A} = (A_1,\ A_2,\ A_3) \tag{3.8}$$

を考慮すれば，$\boldsymbol{B}$ の中より rot $\boldsymbol{A}$ 型の調和ベクトルを最初より分離して置くべきことが考えられる．故に今次の如く $\boldsymbol{B}$ を置きなおせば，

$$2\,G\,\boldsymbol{B} = 4\,(1-\nu)\,\bar{\boldsymbol{\Phi}} + 2\,\text{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}, \tag{3.9}$$

但し $\bar{\boldsymbol{\Phi}}$ や $\boldsymbol{\vartheta}$ は前節に定義した調和ベクトルである．

(3.5) 式は

$$2\,G\,\nabla^2 F = -\,2\,\text{div}\,\bar{\boldsymbol{\Phi}}, \tag{3.10}$$

となり，これより直ちに $2\,GF = -\,(\boldsymbol{r} \cdot \bar{\boldsymbol{\Phi}} + \Phi_0),$ (3.11)

$$,\ \nabla^2 \Phi_0 = 0$$

と積分されて，(3.4) 式より (3.9) と (3.11) を用いて

$$2\,G\,\boldsymbol{u} = -\,\text{grad}\,(\Phi_0 + \boldsymbol{r} \cdot \bar{\boldsymbol{\Phi}}) + 4\,(1-\nu)\,\bar{\boldsymbol{\Phi}} + 2\,\text{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}, \tag{3.12}$$

が導出され，これは (2.14) の J. Boussinesq の解と同じものである．(3.9) 式の如く，(3.5) 式に代入すれば当然消失する項を最初より分離しておいたからとて，異議のある筈はないと思う．或はまた宮本先生[15] の三次元応力解の導出法に依れば，同様に (2.14) を得る．即ち変位は廻転が消失する部分と，その発散或いは dilatation が零となる部分とに分けられるから，次のように置ける．

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_s + \boldsymbol{u}_v, \quad (\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_s = 0, \ \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_v = 0) \tag{3.13}$$

先づ $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{u}_s = 0$ の条件に着目して，これより次のように置き得る．

$$2G\, \boldsymbol{u}_s = \mathrm{grad}\, E, \quad (E \equiv E(x,\ y,\ z)) \tag{3.14}$$

但し (3.3) によつて　$\nabla^2\nabla^2 E = 0$　である．釣合方程式 (2.8) と上記諸式を用いて，

$$2G\nabla^2 \boldsymbol{u}_v = \nabla^2 \left\{ \frac{-2(1-\nu)}{1-2\nu}\, \mathrm{grad}\, E \right\}, \tag{3.15}$$

(3.15) を積分して，

$$2G\boldsymbol{u}_v = \boldsymbol{H} - \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\, \mathrm{grad}\, E\,, \tag{3.16}$$

但し　$\boldsymbol{H} = (H_1,\ H_2,\ H_3)$ は harmonic vector.

E は重調和函数であることは前述した．故に

$$E = (1-2\nu)\,(\varPhi_0 + \boldsymbol{r}\cdot\bar{\varPhi}), \tag{3.17}$$

$\varPhi$ 函数は前節に定義した様なもの．(3.17) を (3.16) に代入し，得られる $\boldsymbol{u}_v$ に対して (3.13) の $\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_v = 0$ の条件を使用して，次式が求められる．

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{H} = 4\,(1-\nu)\, \mathrm{div}\, \bar{\varPhi}. \tag{3.18}$$

(3.18) を積分する際に (3.8) の基本公式を考慮すれば，

$$\boldsymbol{H} = 4\,(1-\nu)\, \bar{\varPhi} + 2\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\vartheta}, \tag{3.19}$$

となり，それを考慮しなければ H. Neuber の解に等価な解を得ることは容易に証し得る．このようにして (3.13) 式は (3.14), (3.16), (3.17), (3.19) を使用して，

$$\begin{aligned} 2G\boldsymbol{u} = 2G\,(\boldsymbol{u}_s + \boldsymbol{u}_v) &= \boldsymbol{H} - \frac{1}{1-2\nu}\, \mathrm{grad}\, E \\ &= -\, \mathrm{grad}\,(\varPhi_0 + \boldsymbol{r}\cdot\bar{\varPhi}) + 4\,(1-\nu)\,\bar{\varPhi} + 2\, \mathrm{rot}\, \boldsymbol{\vartheta}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

この方法に依れば，(3.20) の第3項の導出のされ方は，(3.18) の形から見て，可成り判然としているように見える．

又 R. D. Mindlin 教授[16] の方法に従うと，次の表現より出発することが出来る．

$$2G\boldsymbol{u} = \mathrm{grad}\,\phi + \mathrm{rot}\, \boldsymbol{S}.^{17)}\ (\mathrm{div}\, \boldsymbol{S} = 0) \tag{3.21}$$

この (3.21) 式を (2.8) の釣合式に代入すれば，

$$\nabla^2 \left\{ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\, \mathrm{grad}\,\phi + \mathrm{rot}\, \boldsymbol{S} \right\} = 0. \tag{3.22}$$

故に左辺 brace 中の式は調和函数であるが，後にこの表現に divergence を作用させる必要があるため (3.8) 式を最初より考慮して，その調和函数を二つに分離し次のように置ける．

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,\phi+\mathrm{rot}\,\boldsymbol{S}=4(1-\nu)\,\bar{\boldsymbol{\Phi}}+2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}. \tag{3.23}$$

(3.23) 式に演算子 divergence を作用させると，

$$\Delta^2\phi=2\,(1-2\nu)\,\mathrm{div}\,\bar{\boldsymbol{\Phi}}. \tag{3.24}$$

(3.6) を用いて (3.24) より $\phi=(1-2\nu)\,(\boldsymbol{\Phi}_0+\boldsymbol{r}\cdot\bar{\boldsymbol{\Phi}})$，$(\nabla^2\boldsymbol{\Phi}_0=0)$ (3.25)

(3.25) 式と $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{S}$ に対しては (3.23) 式より求めたものを使用して，(3.21) 式は次のようになる．

$$2\,G\boldsymbol{u}=\mathrm{grad}\,\phi+\mathrm{rot}\,\boldsymbol{S}=-\,\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{\Phi}_0+\boldsymbol{r}\cdot\bar{\boldsymbol{\Phi}})+4(1-\nu)\,\bar{\boldsymbol{\Phi}}+2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}, \tag{3.26}$$

$F=\boldsymbol{\Phi}_0+\boldsymbol{r}\cdot\bar{\boldsymbol{\Phi}}$，と置いて (2.14) 式を得る．

物体力のない場合，(3.21) 式に於ける

$\mathrm{div}\,\boldsymbol{S}=0$，の条件を用いないで (3.26) 式が得られている故，宮本先生の (3.13) の置き方と R. D. Mindlin の (3.21) の置き方は $\mathrm{div}\,\{\mathrm{rot}\,\boldsymbol{S}\}=0$，を見れば全く等価であることが判る．但し R. D. Mindlin は (3.23) のような手順で求めている．斯くして，

$$\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=0,\ \ \mathrm{rot}\ \mathrm{grad}\,\phi=0$$

の如き重要な基本的公式の前者を無視するようなことをしなければ，J. Boussinesq の解 (2.14) の形は得られるように思う．

§4. B. Galerkin の解法に就いて

B. Galerkin[18] の解の導出はいささか唐突に最初の部分がすすめられているようで，到底その導出法そのままでは，(2.14) の第3項 $2\,\mathrm{rot}\,\vartheta$ に相当するものは得られない．H. Neuber 教授の解の導出と似たような点があるのである．

即ち

$$2\,G\boldsymbol{u}=(\alpha\nabla^2-\mathrm{grad}\ \mathrm{div})\,\boldsymbol{W}, \tag{4.1}$$
$$\boldsymbol{W}=(X,\ Y,\ Z)$$

のように，最初より変位に関するベクトル形式の釣合方程式に現れる第2 order の演算子に関する考慮より，直に α を未定係数として式をたて，釣合方程式により α を決定するような方法は危惧を懐かせる手法である．B. Galerkin の解法は H. Neuber の解法と等価なることは容易に示し得るが，その性質も稍々異るのでこの解法につき少しく述べたい．R. D. Mindlin[19] の考え方に従えば，容易に且つ合理的に B. Galerkin の解が導出せられると共に，又 J. Boussinesq の解の第二変位形式即ち (2.14) の第3項 $2\,\mathrm{rot}\,\vartheta$ に相当するものが附加されて来ることが判る．

即ち3節に述べたように，

$$2Gu = \operatorname{grad}\phi + \operatorname{rot}\boldsymbol{S},\quad (\operatorname{div}\boldsymbol{S} = 0). \tag{4.2}$$

(4.2) を釣合式 (2.8) に代入して，

$$\nabla^2\left\{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\operatorname{grad}\phi + \operatorname{rot}\boldsymbol{S}\right\} = 0. \tag{4.3}$$

(4.1) の $\operatorname{div}\boldsymbol{S} = 0$ を考慮して，$\boldsymbol{S}$ は次のように置き得る

$$\boldsymbol{S} = -2(1-\nu)\operatorname{rot}\boldsymbol{W} + \{2\boldsymbol{\vartheta} - \operatorname{grad}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\vartheta}_0)\}, \tag{4.4}$$

但し $\boldsymbol{W} = (X,\ Y,\ Z)$，$\vartheta$ は2節に定義したもの，

$$\nabla^2\vartheta_0 = 0.$$

(4.4) より

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{S} = -2(1-\nu)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{W} + 2\operatorname{rot}\boldsymbol{\vartheta}. \tag{4.5}$$

R. D. Mindlin は Galerkin の解を導出する際に，単に $\boldsymbol{S} = -\operatorname{rot}\boldsymbol{W}$，と置いたが，明かに (4.4) の方がより一般的であるように思う．

(4.4) の第2項の発散 (divergence) は消えることは容易に証し得る．物体力はない故，$\boldsymbol{S}$ は重調和ベクトルであるから，ϑ は調和ベクトルでなければならない．無論 ϑ_0 はなくとも差し支えないものである．(4.4) については後述する．(4.5) を (4.3) に代入すると，

$$\nabla^2\left\{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\operatorname{grad}\phi - 2(1-\nu)(\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{W} - \nabla^2\boldsymbol{W}) + 2\operatorname{rot}\boldsymbol{\vartheta}\right\} = 0, \tag{4.6}$$

而して $\nabla^2\operatorname{rot}\vartheta = 0$，$\nabla^2\nabla^2 W = 0$，であるから，

(4.6) は，積分されて，

$$\phi = (1-2\nu)\operatorname{div}\boldsymbol{W} + \phi_0, \tag{4.7}$$

$\nabla^2\phi_0 = 0$ であるが，この ϕ_0 は結果的に見て，不用なものであること瞭かである．故に $\phi_0 = 0$ とする．　　　(4.7) と (4.5) を (4.2) に代入して，

$$2Gu = 2(1-\nu)\nabla^2\boldsymbol{W} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{W} + 2\operatorname{rot}\boldsymbol{\vartheta}, \tag{4.8}$$

但し $W = (X,\ Y,\ Z)$．

(4.8) を成分で書けば，

$$\begin{aligned}
2Gu &= -\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\boldsymbol{W} + 2(1-\nu)\nabla^2 X + 2\left(\frac{\partial\vartheta_3}{\partial y} - \frac{\partial\vartheta_2}{\partial z}\right),\\
2Gv &= -\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\boldsymbol{W} + 2(1-\nu)\nabla^2 Y + 2\left(\frac{\partial\vartheta_1}{\partial z} - \frac{\partial\vartheta_3}{\partial x}\right),\\
2Gw &= -\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\boldsymbol{W} + 2(1-\nu)\nabla^2 Z + 2\left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x} - \frac{\partial\vartheta_1}{\partial y}\right),
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$(\nabla^4\boldsymbol{W} = 0,\quad \nabla^2\boldsymbol{\vartheta} = 0.)$$

(4.8) と (4.9) の右辺の第3項を欠いたものは B. Galerkin の解である．斯くして B. Galerkin

の解と雖も，矢張り釣合方程式より正確に導出すれば $2\,\mathrm{rot}\,\vartheta$ 項は現れる．依つて一応 (4.8), (4.9) は B. Galerkin の解の拡張と云い得る．

今次の如く置けば，

$$X = x\,\Phi_1' + \varphi_1,\quad \nabla^2\Phi_i' = \nabla^2\varphi_i = 0,\ (i = 1, 2, 3)$$

$$Y = y\,\Phi_2' + \varphi_2,\quad \frac{\partial}{\partial x}\Phi_1' = \Phi_1,\ \frac{\partial}{\partial y}\Phi_2' = \Phi_2,\ \frac{\partial}{\partial z}\Phi_3' = \Phi_3,$$

$$Z = z\,\Phi_3' + \varphi_3,\quad \sum_i \Phi_i' + \mathrm{div}\,\varphi = \Phi_0,\ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$

$$F = \Phi_0 + \boldsymbol{r}\cdot\bar{\Phi},\ \bar{\Phi} = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3), \tag{4.10}$$

(4.8) 式は

$$2G\,u = -\,\mathrm{grad}\,F + 4\,(1-\nu)\,\bar{\Phi} + 2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}, \tag{4.11}$$

となりこれは (2.14) の J. Boussinesq の解と同型である．即ち一般化された B. Galerkin の解は J. Boussinesq の解或いは一般化された H. Neuber の解と等価なることが示された．第3節に述べた R. D. Mindlin の P. F. Papkovitch の解の導出法では，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{S}$ の $\boldsymbol{S}$ に関する条件 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{S} = 0$, を使用せず，寔に釈然としないものがあるが，上述の如く先づ B. Galerkin の解を導出して (4.11) に至る過程を踏めば，その $\mathrm{div}\,\boldsymbol{S} = 0$ に関しては疑点がないように思える．斯くして，他の方法に依る積分の結果から推しても，$\boldsymbol{S} = -\,2\,(1-\nu)\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{W}$, のように置くことはいささか一般性に欠けるようで，一見この置き方で正しいように思えることから考えても，ベクトル形式に依る積分は便利であるが，慎重であることを要すると思う．

次に B. Galerkin の解法に関聯して，円壔座標に依る軸対称問題につき一言したい．よく知られているように，軸対称問題（応力状態が θ に依存しないという意味の）では，変位 (u_r, u_z) に関する応力状態と u_θ に関する応力状態は分離的である．J. H. Michell[20] の軸対称問題の解法は前者の (u_r, u_z) に関するものであり，u_θ については何も云つていないようである．前者は axial symmetry を，後者は rotational symmetry を有するものと云えるだろう．然しこの二つの言葉はよく混同使用される．J. H. Michell の解は次のものである．

円壔座標 (r, θ, z) に従つて，

$$2\,Gu_r = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z},\quad 2\,G\,u_z = \left\{(1-2\nu)\,\nabla^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right\}$$

$$= \left\{2(1-\nu)\,\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi\right\}, \tag{4.12}$$

但し　$\nabla^2\nabla^2\Phi = 0,\ \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}.$

これに関する応力表現は省く．この J. H. Michell の解は B. Galerkin の解より容易に導けることは直に判る．(4.9) 式を円壔座標系に依るものに変換し（或いは (4.8) そのものより）$\mathrm{W} = (R,\ \Theta,\ Z)$ として，今 (4.8) の第3項を落し，

$$W=(0,\ 0,\ Z)=(0,\ 0,\ \Phi), \tag{4.13}$$

と置けば，　div $W=\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}$　なる故直に書き下せて，

$$\left.\begin{aligned}
&2Gu_r=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z},\quad 2Gu_\theta=-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta\partial z},\\
&2Gu_z=2\,(1-\nu)\,\nabla^2\Phi-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Phi,\qquad \nabla^4\Phi=0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

(4.14) に於いて軸対称問題を考えれば，　$u_\theta=0$ となること明かで，　(4.14) は J. H. Michell の解となる.

依つて J. H. Michell の解は当然 H. Neuber の解より導出し得る筈のものである．而して前述の rotational symmetry の問題，即ち，軸対称物体或いは廻転体の対称軸に関する純粋捩れ問題の解は上記の B. Galerkin の解 (4.8) の右辺第3項の 2 rot ϑ より出るものである．勿論第3項以外からも出るが，これについては後述する．

次に牟岐鹿楼氏[21]が J. H. Michell の解を非軸対称問題に拡張したものを考えられているが，これは (4.8) の B. Galerkin の解の拡張より導出されうる．これは単に第3項 2 rot $\boldsymbol{\vartheta}'$ を (4.14) に附加して導出される．即ち

$\vartheta'=(0,\ 0,\ \psi)$ として，

$$\left.\begin{aligned}
&2G\,u_r=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad 2Gu_z=2(1-\nu)\nabla^2\Phi+\\
&2G\,u_\theta=-\frac{\partial^2\Phi}{r\partial\theta\partial z}-2\frac{\partial\psi}{\partial r},\qquad\qquad -\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},\\
&\qquad\nabla^4\Phi=0,\quad \nabla^2\psi=0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

(4.15) は牟岐氏が J. H. Michell の拡張解として使用されたものである．而して，この (4.15) は導出過程より明かな様に，それ自身のみでは三次元応力問題の基本解として充分なものでないこと明かである．即ち $W=(R,\ \Theta,\ Z)$, $\boldsymbol{\vartheta}'=(\vartheta_1',\ \vartheta_2',\ \vartheta_3')$ のうちの Z と ϑ_3' を使用したに過ぎないからである．これは例えば (2.1) の J. Boussinesq の解の右辺の第三行表現しか使用していないことに相当しているからである．但し J. H. Michell の解は軸対称問題の基本解として充分なものであるが，問題自身が特別なものであるからである．何れにしても (4.8), (4,9) の第3項の 2 rot $\boldsymbol{\vartheta}$ 項は必要なものであることは明かである．

以上の記述よりして，変位に関する釣合式を正しく積分すれば，必然的に 2 rot $\boldsymbol{\vartheta}$ の項は導出されて，多くの三次元応力問題の解法は J. Boussinesq の解法に等価なるべきことが一応考えられる．斯くて従来多くの解法が H. Neuber に一致することが云われていたが，ここに釣合微分方程式より積分して出る解としては，全て J. Boussinesq の解に一致すべきことが知られたものと思う．依つて以上のように必然的に導出される第3項 2 rot $\boldsymbol{\vartheta}$ を無視したり，又は後述す

るように他の函数中に繰り込むには，そのようなことを為しても解の一般性或いは完全性を損はないという証明が厳密に云えば必要なことと思える．

§5. J. Boussinesq の解及びこれに等価な解を H. Neuber の解及びそれに等価な解の形式に変形することに就いて

第3項の $2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}$ は必然的に導出されて，所謂 three-functions approach の多くは全て J. Boussinesq の approach に等価なるべきことは上述の通りであるが，この第3項を他の諸函数中に繰りこんで形式上 H. Neuber の解及びこれに等価な解の形にすることが出来る．即ち第3節の P. F. Papkovitch の解の導出法に関して，(3.9) に於いて次の如く置けば，

$$2\,G\boldsymbol{B} = 4(1-\nu)\,\bar{\boldsymbol{\Phi}} + 2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta} = 4\,(1-\nu)\,\bar{\boldsymbol{\Phi}}', \tag{5.1}$$

(3.12) 式は　　$(\bar{\boldsymbol{\Phi}}' = (\Phi', \Phi_2', \Phi_3'))$,

$$2\,G\boldsymbol{u} = -\,\mathrm{grad}\left[\boldsymbol{r}\cdot\bar{\boldsymbol{\Phi}}' + \left\{\Phi_0 - \frac{1}{2(1-\nu)}\,\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}\right\}\right] + 4\,(1-\nu)\,\bar{\boldsymbol{\Phi}}', \tag{5.2}$$

となる．而して

$$\nabla^2\,(\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Phi}) = 0,\quad (\nabla^2\boldsymbol{\Phi} = 0) \tag{5.3}$$

は (3.6) 式により明かなる故，(5.2) の brace 中の表現は調和函数である．これに依り次の如く置けば，

$$\left.\begin{aligned} &\left\{\Phi_0 - \frac{1}{2(1-\nu)}\,\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}\right\} = \bar{\Phi}_0', \\ &\Phi_0' + \boldsymbol{r}\cdot\bar{\boldsymbol{\Phi}}' = F', \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

(5.2) 式は

$$2\,G\boldsymbol{u} = -\,\mathrm{grad}\,F' + 4\,(1-\nu)\,\bar{\boldsymbol{\Phi}}', \tag{5.5}$$

dash は外してもよいもの故，(5.5) は H. Neuber の解と同形或いはそのものである．

次に宮本先生の導出法についても単に (3.19) 式に於いて，

$$\boldsymbol{H} = 4\,(1-\nu)\,\bar{\boldsymbol{\Phi}} + 2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta} = 4\,(1-\nu)\,\bar{\boldsymbol{\Phi}}', \tag{5.6}$$

と置けば，ただ (3.20) の結果に就いて前と同様に処理されるだけである．

又 R. D. Mindlin の導出法に於いても，(3.23) 式より

$$\begin{aligned} \left\{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,\phi + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{S}\right\} &= 4\,(1-\nu)\,\bar{\boldsymbol{\Phi}} + 2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta} \\ &= 4\,(1-\nu)\,\bar{\boldsymbol{\Phi}}', \end{aligned} \tag{5.7}$$

と置けば，全く同様にして H. Neuber の形式にし得る．

又 B. Galerkin の解 (4.8) について云えば，これは (4.11) まで変形してしまえば，J. Boussinesq として上述の如く処理されるので問題はない．即ち (4.11) に於いて，

$$4\,(1-\nu)\,\bar{\boldsymbol{\Phi}} + 2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta} = 4\,(1-\nu)\,\bar{\boldsymbol{\Phi}}', \tag{5.8}$$

とすればよいだけである．(4.8)，(4.9) の第3項を他の函数中に繰り込むことを考えて見る．

先づ (4.4) の右辺を次の如く置いても，

$$\boldsymbol{S} = -2(1-\nu)\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{W} + \{2\boldsymbol{\vartheta} - \mathrm{grad}\,(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\vartheta} + \vartheta_0)\}$$
$$= -2(1-\nu)\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{W}', \tag{5.9}$$

B. Galerkin の解の原形に変形出来ないことは容易に判る．依つて (4.8) 式に於いて，

$$2(1-\nu)\nabla^2 W + 2\,\mathrm{rot}\,\vartheta = 2(1-\nu)\nabla^2 W', \tag{5.10}$$
$$W' = (X',\ Y',\ Z'),$$

と置けば，(5.10) より

$$\nabla^2(W' - W) = \frac{1}{(1-\nu)}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}, \tag{5.11}$$

と書き直して，(5.11) は (3.6) を考慮して容易に積分される．

$$W' - W = \frac{1}{2(1-\nu)}\,[\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{\vartheta}] + \boldsymbol{\vartheta}_0, \tag{5.12}$$

$[\boldsymbol{r}\cdot\vartheta]$ は $\boldsymbol{r}$ と ϑ の vector product である．

但し $\boldsymbol{r} = (x,\ y,\ z)$，$\nabla^2\boldsymbol{\vartheta}_0 = 0$.

故に (4.8) は次のように変形される．

$$2G\boldsymbol{u} = 2(1-\nu)\nabla^2 W' - \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\left\{W' - \frac{1}{2(1-\nu)}\,[\boldsymbol{r}\,\vartheta] - \boldsymbol{\vartheta}_0\right\} \tag{5.13}$$

而して $\mathrm{div}\,[\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{\vartheta}] = \boldsymbol{\vartheta}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}$

$$= -\boldsymbol{r}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}, \tag{5.14}$$

故に $\mathrm{div}\,[\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\vartheta}]$ は (5.3) 式に依り調和函数である．

而して

$$-\mathrm{div}\left\{\frac{1}{2(1-\nu)}\,[\boldsymbol{r}\,\vartheta] + \boldsymbol{\vartheta}_0\right\}, \tag{5.15}$$

は調和函数として，(4.10) の記号で云えば $\sum_i \Phi_i + \mathrm{div}\,\varphi$，の如き処に附加されるのみであり，又 W' 中の調和函数部分に適宜繰りこめることは明かである．(5.10) の W' の置き方は W' の調和函数部分を制限しないものであり，調和ベクトル ϑ_0 はこれに相当するものであるが，(5.13) の右辺第1項は W' 中の調和函数部分を含まないので，処理はそれだけ容易であつても，(5.13) 中の brace の中の W' にそのまま繰り込めると云うことでなく (5.15) の形として，それが調和函数なる故何れかの部分に繰り込めると考えられる．結局 (5.15) は弾性学的に見て無視してもよい調和函数である．結局 (5.13) は

$$2G\boldsymbol{u} = 2(1-\nu)\nabla^2 W' - \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\,W', \tag{5.14}$$

と書ける．

以上のようにして，第3項 $2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}$ は容易に他の調和函数中に繰り込めるのであるが，この事

実は J. Boussinesq の解及びこれに等価な解が H. Neuber の解及びこれに等価な解に弾性学上等価なことを示すとは簡単に云えぬように思う．今 (2.14) の J. Boussinesq の解について考えると，$\boldsymbol{\Phi}_0$, $\bar{\boldsymbol{\Phi}}$, $\boldsymbol{\vartheta}$ の諸函数は独立であり，例えば grad $\boldsymbol{\Phi}_0$ より出る一つの函数形と 2 rot ϑ より出る或る一つの函数形を等しからしめることが出来るが，$\boldsymbol{\Phi}_0$ と ϑ は互いに独立であるから，この二つの函数に異なる係数を附し得る．$\boldsymbol{\Phi}_0$, $\bar{\boldsymbol{\Phi}}$, $\boldsymbol{\vartheta}$ の調和函数は基本解の中にあつて何等の制限を受けない一般的なものであるが，(2.14) の 2 rot $\boldsymbol{\vartheta}$ を省略しておいて，例えば $\boldsymbol{\Phi}_0$ に関して同じ函数を二つとり，それに異なる係数を附することが出来ないことは自明の理である．第3項 2 rot ϑ を省いたり又他の函数中に繰り込み塗り潰してしまえば，ϑ 函数に関する独立性が消失してしまつたのも同然である．(4.8) の B. Galerkin の解の拡張の場合についても同じ事情である．

唯繰り込む時の過程を明示しておけば，H. Neuber の解及びこれに等価な解でも無論差し支えないと思える．例えば (5.1), (5.6), (5.7) と (5.4) の条件を H. Neuber 等の解に附加しておけば，J. Boussinesq 等の解と同じものと云えるかも知れない．(5.4) の条件は本質的には重要なものではない．即ち H. Neuber の解及びこれに等価な解は 2 rot $\boldsymbol{\vartheta}$ を附加して一般化するか，或いは上記の如き条件を附加することが望ましい．然し附加条件等をつけるよりは単に 2 rot ϑ を変位式につけておく方がより適当と思える．而して H. Neuber の解及びこれに等価な解を使用するならば，第3項 2 rot $\boldsymbol{\vartheta}$ が本質的に不要な特別な場合，例えば前述の如き torsion-free の軸対称問題，或いは単なる廻転対称問題である捩れの場合等を除き，且つ後述するような特別な方法を採用しなければ，その得られる問題の解は本質的に近似的なものと考えられる．

§6. 直方体の弾性問題の解法について

直方体或いは矩形断面短柱の表面荷重の問題について第1節に述べたが，(2.14) の H. Neuber の解の拡張に関聯して更に説明する．筆者は上記物体に対して直角座標系に依り，三次元応力問題の解を，境界条件を満足し易いように，応力であらわした釣合方程式と適合条件式を用いて得た[22]．例として σ_z に対する表現を示せば，

$$\begin{aligned}\sigma_z = &\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\cos k_n z\cos\beta_s y\,(A_{ns}\cosh l_{ns}x + B_{ns}x\sinh l_{ns}x) + \\ &+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\cos k_n z\cos\alpha_r x\,(C_{nr}\cosh m_{nr}y + D_{nr}y\sinh m_{nr}y) + \\ &+\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\cos\alpha_r x\cos\beta_s y\,(E_{rs}\cosh\gamma_{rs}z + F_{rs}z\sinh\gamma_{rs}z).\end{aligned}\tag{6.1}$$

但し座標の原点は物体の中心におき，座標軸を左図の如くとる．x, y, z 方向の厚さは夫々 $2a$, $2b$, $2h$ とし，表面荷重は $x=0$, $y=0$, $z=0$ 面に関して対称的な分布をしている最も簡単

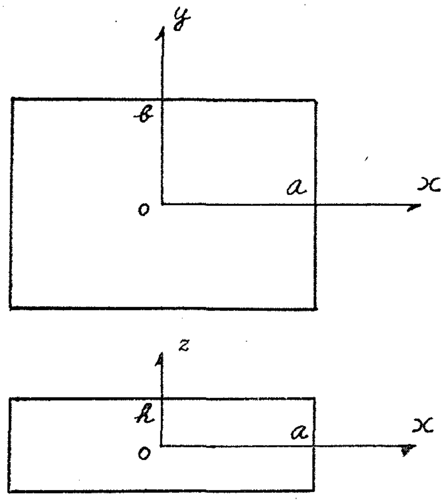

Fig. 1

な場合である．

$$\alpha_r = \frac{r\pi}{a},\quad \beta_s = \frac{s\pi}{b},\quad k_n = \frac{n\pi}{h},$$

$r,\ s,\ n$ は 0 を含む正整数,

$$l_{ns}^2 = k_n^2 + \beta_s^2,\quad m_{nr}^2 = k_n^2 + \alpha_r^2, \qquad (6.1)'$$

$$\gamma_{rs}^2 = \alpha_r^2 + \beta_s^2.$$

surface tractions の分布函数を重 Fourier 級数に展開することを考慮して，(6.1) の形にした．重 Fourier 級数を使用するとしても，S. Woinowsky-Krieger[23] が試みられたようにしては，充分な結果は得られない．(6.1) 式の第1，第2，第3行の表現は互いに独立であり，以後簡単のために第1行の表現に関してのみ説明することにする．(6.1) の表現が $x,\ y,\ z$ の三変数について対称的であり，無論そうでなければならない．

(6.1) の解の形は，H. Neuber の解 (2.6) からは，後述のような特別な方法を講じなければ得られないのである．即ち (6.1) の第1行の形より $\bar{\Phi}$ は $\bar{\Phi} = (\Phi_1,\ 0,\ 0)$ でなければならないから，使用出来る調和函数は Φ_0 と Φ_1 の二つのみである．故に先づ

$$\Phi_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \cos k_n z \cos \beta_s y\,(A'_{ns}\cosh l_{ns}x),$$
$$\Phi_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \cos k_n z \cos \beta_s y\,(C'_{ns}\sinh l_{ns}x), \qquad (6.2)$$

が選ばれる．境界条件を満足せしむるには $\{A'_{ns}\}$, $\{C'_{ns}\}$ の外に更にもう一つの係数系列，計三つの係数系列を必要とする．而して第5節の末尾に於いて述べたように，Φ_0, Φ_1 については (6.2) と同種のものはこれ以上とれないから，一見した処では，(2.6) H. Neuber の解法に依る時，到底問題が解けないように見える．(6.1) の応力表現が正しいことや (6.1) の $\{A_{ns}\}$, $\{B_{ns}\}$ が三つの他の係数系列により表わされることは既に示されている[22]．此処で若し (2.14) の一般化された H. Neuber の解を使用すれば，ϑ は他の調和函数と独立であるから，自由に選べて次のように置ける．

$$\vartheta = (\vartheta_1,\ 0,\ 0)\ \text{として},$$
$$\vartheta_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \sin k_n z \sin \beta_s y\,(B'_{ns}\cosh l_{ns}x). \qquad (6.3)$$

而して H. Neuber の切欠応力論中の一般応力表式を使用すれば

$$\sigma_z = -\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial y\partial z} + 2\nu\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - x\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}, \qquad (6.4)$$

であるから，(6.1) の Φ_0 と (6.3) の ϑ_1 は σ_z (6.4) に対して同じ函数形を寄与し係数のみ

異なる．無論変位表現についても，この二つは同じ函数形を寄与する． ϑ_1 が Φ_0 と独立であるから，このようにして $\{B'_{ns}\}$ 系列を一つ得たのである．故にこの $2\,\mathrm{rot}\,\vartheta$ 項は重要な項であることは明瞭である．(6.4) に (6.2)，(6.3) を代入して(6.1)と比較すれば，次の関係式を得る．

$$\left.\begin{aligned} A_{ns} &= k_n^2 A'_{ns} - 2 k_n \beta_s B'_{ns} + 2 \nu l_{ns} C'_{ns}, \\ B_{ns} &= k_n^2 C'_{ns}. \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

即ち (6.5) に見られるように，A_{ns}, B_{ns} は A'_{ns}, B'_{ns}, C'_{ns} によりあらわされ，因つて問題は解けることになるのである．(2.14) を使用し，(6.2)，(6.3) のように置いて得られる係数系列は，既に初等的解法に依つて得た係数系列と全く等価なものであることは容易に検証される．初等的解法の労苦は多大である．このようにして (2.6) の H. Neuber の解法は，method of series に依り問題を解く場合，不適当なものであることは明かのようである．此処では極く簡単に説明するにとどめたが，余りにも明白な事柄とも云えるので，これで充分と思う．

§7. 重調和函数を用いて作製した調和函数の使用と H. Neuber の解の一般性について

第5節において，第3項の $2\,\mathrm{rot}\,\vartheta$ を他の調和函数中に繰りこみ，形式的に H. Neuber の解の形としたが，この操作の結果問題を正確に解く場合非常な不便を来すことになるが，然し H. Neuber の解及びそれに等価な解は，三次元弾性問題の解法として，確に充分な一般性だけは有していることが，次に述べることに依り，確められているのではないかと考えられる．その一般的証明は困難なことと思う．前節の直方体の surface tractions の問題に就いて説明する．(6.1) の σ_z の表現中の $\{A_{ns}\}$，$\{B_{ns}\}$ を他の三つの独立な係数系列であらわさなければならないのであるが，(2.6) の H. Neuber の解法に依る以上 Φ_0, Φ_1 しか使用出来ないから，残る可能性は重調和函数を用いて作つた調和函数を Φ_0 の処に使用する以外は先づ考えられない．その重調和函数には (6.2)，(6.3) の Φ_0, Φ_1 と同種の調和函数を用いる以上作製せられた調和函数は明らかに (6.2)，(6.3) の調和函数とは独立である．故にこの調和函数を他の係数と異る係数を附けて Φ_0 の中に用いることが出来る．

先づ

$f \equiv f(x, y, z)$，$(\nabla^2 f = 0)$ なる函数をとり，(3.6) 式を考慮すれば，

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{grad}\, f) &= \nabla^2 \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= 2 \nabla^2 f = 0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

故に

$$F = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = \boldsymbol{r}\cdot \mathrm{grad}\, f, \tag{7.2}$$

は重調和函数を用いて調和函数を作製する一つの一般的な方法と云えるであろう．

勿論 (5.3) 式により

$$\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{rot}\,\vartheta, \quad (\nabla^2\vartheta = 0) \tag{7.3}$$

もその一つと思える．

今

$$f = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \cos k_n z \cos \beta_s y\, (\overline{A}_{ns} \cosh l_{ns} x), \tag{7.4}$$

とすれば，(7.1) により一つの調和函数を得る．これを Φ_0^2 とする．

$$\Phi_0^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \overline{A}_{ns}\,(l_{ns}x \sinh l_{ns}x \cos\beta_s y \cos k_n z + \\ - \beta_s y \cosh l_{ns}x \sin\beta_s y \cos k_n z - k_n z \cosh l_{ns}x \cos\beta_s y \sin k_n z), \tag{7.5}$$

而して他の Φ 函数の置き方は，σ_z の基礎表現 (6.4) と (6.1) の表現を見較べて，次のように置けばよいことが判る．

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_0^1 &= \sum_n\sum_s A'_{ns} \cos k_n z \cos\beta_s y \cosh l_{ns}x, \\
\Phi_1 &= \sum_n\sum_s C'_{ns} \cos k_n z \cos\beta_s y \sinh l_{ns}x, \\
\Phi_2 &= \sum_n\sum_s D_{ns} \cos k_n z \sin\beta_s y \cosh l_{ns}x, \\
\Phi_3 &= \sum_n\sum_s E_{ns} \sin k_n z \cos\beta_s y \cosh l_{ns}x, \\
&\text{但し}\quad \Phi_0 = \Phi_0^1 + \Phi_0^2.
\end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

このようにして Φ_2, Φ_3, を用いて Φ_0^2 中の y と z を有する重調和函数項の不必要な影響を消すようにする．先づ応力表現によつて考えれば，例えば，

$$\sigma_z = \nabla^2 F - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2\,(1-\nu)\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial y}\right), \tag{7.7}$$

$$F = \Phi_0 + \boldsymbol{r}\cdot\overline{\Phi}.$$

(7.7) に (7.5), (7.6) を代入して，

$$D_{ns} = \beta_s \overline{A}_{ns}, \quad E_{ns} = k_n \overline{A}_{ns}, \tag{7.8}$$

と置けば，目的が達せられて，σ_z は次のようになる．

$$\sigma_z = \sum_n\sum_s \cos k_n z \cos\beta_s y\,[\{k_n^2 A'_{ns} + 2\beta_s D_{ns} + 2 k_n E_{ns} + \\ + 2 l_{ns} C'_{ns} + 2\,(1-\nu)\,((k_n^2 - \beta_s^2)\,\overline{A}_{ns} - l_{ns} C'_{ns})\} \cosh l_{ns}x + \\ + k_n^2\,(l_{ns}\overline{A}_{ns} + C'_{ns})\, x \sinh l_{ns}x]. \tag{7.9}$$

故に (6.1) の σ_z 表現中の A_{ns}, B_{ns} は次のように新に表わされることになる．

$$\left.\begin{aligned}
A_{ns} &= 2\,\{(2-\nu)\,k_n^2 + \nu\beta_s^2\}\,\overline{A}_{ns} + k_n^2 A'_{ns} + 2\nu l_{ns} C'_{ns}, \\
B_{ns} &= k_n^2 l_{ns}\overline{A}_{ns} + k_n^2 C'_{ns}.
\end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

実際に (7.8) の関係式を出すには，(2.5) の F 式に (7.5)，(7.6) を代入して，不必要な重調和函数項を消すように係数間の関係を決定すればよいこと明かである．無論変位表現に代入しても同じことである．故に最初に述べた目的は達せられた訳である．

又 (7.10) 中の $\{\overline{A}_{ns}\}$，$\{A'_{ns}\}$，$\{C'_{ns}\}$ の三箇の係数系列が，第6節中の (2.14) 式に依る (6.5) 中の $\{A'_{ns}\}$，$\{B'_{nn}\}$，$\{C'_{ns}\}$ の三箇の係数系列と等価なものであることの直接の検証は面倒のようであるが，筆者の得た応力表現の中の係数系列間の関係式を使用すれば，容易にそのことを証し得る．このような煩雑な操作を行うことに依り，$2\,\mathrm{rot}\,\vartheta$ 項は無くても正しい解の表現を得るこが出来る故，H. Neuber の解法は計算上の利便の点は兎角として，充分一般性のあるものと云えるであろう．H. Neuber の解の一般性に欠ける処があると主張する人も[24] いるようであるが，その説く処に理解し難い点を含むように思える．

勿論 (7.3) の $\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}$ の形の調和函数を用いれば，少しく簡単になる．上述の例に対しては $\boldsymbol{\vartheta}=(\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3)$ の三つの成分のうち ϑ_3 か ϑ_2 のみを使用すればよいから (7.4) の代りに次のように置き得る．

$$\vartheta_3=\sum\sum\overline{A}_{ns}\sin\beta_s y\cos k_n z\sinh l_{ns}x,\quad(\vartheta_1=\vartheta_2=0). \tag{7.11}$$

よつて Φ_0^2 として，

$$\Phi_0^2=\left(x\frac{\partial\vartheta_3}{\partial y}-y\frac{\partial\vartheta_3}{\partial x}\right)=\sum_n\sum_s\overline{A}_{ns}\left\{\beta_s x\sinh l_{ns}x\cos\beta_s y\cos k_n z+\right.$$
$$\left.-\,l_{ns}y\sin\beta_s y\cos k_n z\cdot\cosh l_{ns}x\right\}, \tag{7.12}$$

をとり得る．

而して (7.6) に於いて $\Phi_3\equiv 0$，として Φ_0^1，Φ_1，Φ_2，はその儘使用出来る．(7.8) のような関係式は無論 $F=(\Phi_0^1+\Phi_0^2)+x\Phi_1+y\Phi_2$，の中の重調和函数部分を見て，$y$ に調和函数を乗じたものを消すように係数間の関係を定めればよい．直に

$$D_{ns}=l_{ns}\overline{A}_{ns}\,, \tag{7.13}$$

を得る．斯くして $\{\overline{A}_{ns}\}$，$\{A'_{ns}\}$，$\{C'_{ns}\}$ の三つの係数系列を (7.4) に依る Φ_0^2 を使用した場合と同様に用意し得て，問題を解くことが出来る．(7.3) 式を用いれば，形式上 Φ_0，Φ_1，Φ_2 の3箇の調和函数だけで，上述の例に対して足りるのである．

使用する座標系が定まれば，product forms やその他の形の幾種類かの調和函数が決定される．その幾種類かの調和函数は互いに独立である．そして一種類の調和函数に対して，兎角三個の係数或いは係数系列が属していることが先に直方体の弾性問題に関して示された．而して three-functions approach に依る時，その解法中の基本的な調和函に対して一種類の調和函数のみを使用する場合，$2\,\mathrm{rot}\,\vartheta$ 項を是非必要とする．(2.6) の H. Neuber の解及びこれに等価な解をもし強いて使用せんとするならば，その一種類の調和函数をもつて作製した重調和函数を

加え集めて作つた調和函数を必要とする．場合に依つては一種類の調和函数に属する多重調和函数を用いて作つた調和函数を必要とする場合もあろう．問題を解く場合何種類かの調和函数を使用しなければならないが，(7.2) や (7.3) に依つて或る種類の調和函数に属する重調和函数による調和函数を作製する場合は，もしもこの或る種類の調和函数が product forms の調和函数ならばなおのこと，それを重調和函数の処まで解き放し得て便利であり，このようなものが尤も重要で尤も簡単なものであろう．而して兎角 2 rot ϑ 項を援用する仕方と前述した $\Phi_0 = \Phi_0^1 + \Phi_0^2$ のようにして Φ_0^1 と Φ_0^2 の独立性を利用して目的を達する仕方とは明らかに別種のものであり，この第二の方法を考慮することなしに，釣合方程式より積分する際に 2 rot ϑ を脱落せしめて置いて，得られた基本解が three-functions approach として，J. Boussinesq 等の解と同等のものであると主張することは出来ないものと考えられる．而して前述したように Φ_0^2 等に依る特殊な方法は一応煩雑であり，矢張り J. Boussinesq の解 (2.14) 或いは H. Neuber の解に等価な解を一般化したものに依ることが適当であること明かである．一般に従来 Φ_0^2 のような或る調和函数に属する重調和函数により作られた調和函数を使用することは稀のように思う．依つて H. Neuber の解及びこれに等価な解法を用いた場合，近似的取り扱いをしていることが多いと思う，勿論 2 rot ϑ 項の ϑ 函数の独立性に Φ_0 に於いて使用する重調和函数或いは多重調和函数に依つて作つた調和函数の独立性が代り得ることは充分考えられることであり，当然のことと云えるが，実際上如何なる形で 2 rot ϑ 項と同様な役目をするかは，現在の処興味もないのでその儘にして置きたい．

§8. 三次元応力問題の基本的な解に於ける調和函数の箇数に就いて

three-functions approach の threefunctions の意味が判然としないことは前述したが，三次元応力問題の基本的解法に於ける 3 箇或いは 3 種類の basic harmonic function の意味であるようであり，これは H. Neuber[25] が云われる処の，一般的応力状態に於いて，Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3, の 4 箇の調和函数のうちの一つを零と置いても，完全性を損わないという言葉にも関聯していると思われる．此処に云う調和函数の箇数の意味は甚だ漠然とした曖昧なもののようであるが，特に説明は要しないと考えられる．而して第 7 節で説明したように，例えば或る座標系に関する Laplace 方程式の product form の解即ち調和函数の種類は何箇かある訳で，その 1 種類について，境界条件に関聯する物体表面の応力 (traction) は 3 箇，無論変位なら 3 箇であることのために，函数の偶性奇性の別も考えて一般に 3 箇の係数或いは係数列が属する事実に依り，H. Neuber の云われる箇数の意味の 3 箇の調和函数が必要なことは明白である．この場合 (2.14) の解法を使用して，先づ特殊の場合を除き Φ_0 と 2 rot ϑ は是非必要で，残りの

Φ_1, Φ_2, Φ_3, のうちの一つを必要として，計3箇の調和函数が兎角必要であるが，然し最初に述べた意味での (2.6) の H. Neuber 解法を使用し，而もその4箇の調和函数のうちのどの一つを零と置いても構わない，即ちそれで一般に問題が解ける，ということは別問題のことと考えられる．勿論以上のことは一般に三次元弾性問題を正確に解く場合に就いて云つているのであつて，近似的に問題を処理する場合は除外している．

第7節で述べたように (2.6) の H. Neuber の解法に依る時は，$\Phi_0=\Phi_0^1+\Phi_0^2$ のようにせざるを得ないので，3箇の調和函数で足る筈もない．兎角 Φ 函数全部を一般に問題全体として，必要としているのである．第6節の直方体の例によつても明かなように，Φ 函数を必要とする以上，Φ_0, $\bar{\Phi}$, ϑ 即ち J. Boussinesq の記号なら φ, λ, ϑ の3種類の調和函数を three-functions と云い，この意味で3箇の調和函数が必要とするならば或いは合理的かも知れないが，3箇の調和函数の必要の意味は前述したようなものであろう．

Φ_0, $\bar{\Phi}$, ϑ では計7箇と云うことになるが，これでは一見する処数が多過ぎて，前述のように H. Neuber が4箇のうち一つを零としてよい等と主張しておられる処より見れば，寔に (2.14) 式は扱い難いものと思われるが，実際上1種類の調和函数に対して3箇しか必要としないので，他を零とすればよいだけであり，そのようなことは問題にならない．箇数の少くない，例えば H. Neuber の解 (2.6) では計算の困難に遭遇するのである．

而も H. Neuber の前述の言葉の意味が判然としない許りでなく，その言葉に対する著書中に記載せられている証明が感心しないもののようである．即ち，Φ_0 を零と置き得るという証明を考察する．次のように置けば，

$$\left.\begin{aligned}\Phi_0 &= 4\,(1-\nu)\,\Phi_0' - \left(x\frac{\partial\Phi_0'}{\partial x}+y\frac{\partial\Phi_0'}{\partial y}+z\frac{\partial\Phi_0'}{\partial z}\right),\\ \Phi_1 &= \frac{\partial\Phi_0'}{\partial x}+\Phi_1',\quad \Phi_2=\frac{\partial\Phi_0'}{\partial y}+\Phi_2',\quad \Phi_3=\frac{\partial\Phi_0'}{\partial z}+\Phi_3',\\ &\nabla^2\Phi_0'=0,\ \nabla^2\bar{\Phi}'=0,\ \bar{\Phi}'=(\Phi_1',\ \Phi_2',\ \Phi_3'),\end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

(2.6) の H. Neuber の解はベクトル形式で書いて，

$$2\,G\boldsymbol{u} = -\,\mathrm{grad}\,(\boldsymbol{r}\cdot\bar{\Phi}') + 4\,(1-\nu)\,\bar{\Phi}', \tag{8.2}$$

となる．即ち (8.2) の中には Φ_0' は現れていない．(8.2) は dash を外して，H. Neuber の解と考えてよいと，或いは (2.6) で $\Phi_0=0$, としてよいと主張されていのである．上記の証明は全く形式的なもので，慎重にこの証明を調べれば不完全であることは明白と思う．(2.6) の H. Neuber の解に於いて，$\Phi_0=0$ とし而も $2\,\mathrm{rot}\,\vartheta$ 項は最初より欠いており，このような状態で，例えば第6節の直方体の弾性問題の解を得る可能性は全く無いと云つてよい．

次に (8.1) の変換式中の

$$\Phi_0 = 4\,(1-\nu)\,\Phi_0' - \boldsymbol{r}\cdot\mathrm{grad}\,\Phi_0', \tag{8.3}$$

について考えて見る．(8.3) の第２項は (7.1) 式で示すように，明らかに調和函数ではあるが，前節で説明したように，(8.3) の第１項と第２項は互いに独立であり，而も Φ_0' を共通に持つており，且つ定数の係数を有していて，このようなことは変換に対する重要な制限である．今第７節の例について考えれば，

$\Phi_0 = \Phi_0^1 + \Phi_0^2$, のようにしており，$\Phi_0^1$ と Φ_0^2 の関係は上述の如きものである．即ち (7.5)，(7.6) により

$$f_{ns} = \cos k_n z \cos \beta_s y \cosh l_{ns} x, \tag{8.4}$$

とすれば

$$\Phi_0 = \Phi_0^1 + \Phi_0^2 = \sum_n \sum_s A'_{ns} f_{ns} + \sum_n \sum_s \overline{A}_{ns}\,(\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{grad}\, f_{ns}), \tag{8.5}$$

となる．$\{A'_{ns}\}$ と $\{\overline{A}_{ns}\}$ は C'_{ns} と共に境界条件により決定せらるべき独立な係数系列であり，(8.5) の Φ_0 に対して (8.3) の変換を適用せんとして，(8.3) の Φ_0' を見出すことが出来ないことは明白である．(2.6) H. Neuber の解法は，本質的に云つて Φ_0 が $\Phi_0 = \Phi_0^1 + \Phi_0^2$ のようなものでなければならない解法であるとしても，(8.3) の Φ_0' と $\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{grad}\,\Phi_0'$ が定数係数を有するような変換であることは一つの重要な制限である．H. Neuber は Φ_0^2 の如きものを考えておられない模様であり，そうすればなおこのと，Φ_0' と $\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{grad}\,\Phi_0'$ の独立性により (8.3) のような変換が考えられないことになる．

次に別な考え方をして，(2.6) の解に於いて $\Phi_0 = 0$ として問題を解き，上述の記号に依れば Φ_1', Φ_2', Φ_3' が定つたとする．次に (8.1) の変換により Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3 を求めんとするのに，先づ Φ_0' が決定されなければならないが．Φ_0' を決定すべき何等の条件は存在していない．$\overline{\Phi}'$ のみで充分というからである．たとえ (Φ_0, $\overline{\Phi}$) の問題に対する選択の一義性はなくとも，Φ_0' は任意のものでよいという理由は絶対にない．何れにしても (8.1) の変換は極めて制限されたもので，一般には斯かる変換は弾性学的見地よりして存在しない．一般に Φ_0 が無くとも問題が解けるということは考えられないものである．一般性を損う変換により得られた結果であるから，それも当然なことではある．即ち Φ_0 が無くとも，理論の完全性を損うことはないというようなことはあり得ないと考えられる．

又，H. Neuber はその著書中に Φ_3 を抜く証明をしておられる．即ち

$$\Phi_3 = \frac{\partial \Phi_3'}{\partial z},\quad \Phi_2 = \frac{\partial \Phi_3'}{\partial y} + \Phi_2',\quad \Phi_1 = \frac{\partial \Phi_3'}{\partial x} + \Phi_1', \tag{8.6 a}$$

$$\Phi_0 = \{4\,(1-\nu)\,\Phi_3' - (\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{grad}\,\Phi_3')\} + \Phi_0', \tag{8.6 b}$$

但し $\nabla^2 \Phi_0' = 0$, $\nabla^2 \overline{\Phi}' = 0$, ($\overline{\Phi}' = (\Phi_1', \Phi_2', \Phi_3')$) と置けば，(2.6) の H. Neuber の解は

$$\left.\begin{aligned} 2G\boldsymbol{u} &= -\,\mathrm{grad}\,(\Phi_0' + \boldsymbol{r}\cdot\overline{\Phi}'') + 4\,(1-\nu)\,\overline{\Phi}'' \\ &\text{但し}\quad \overline{\Phi}'' = (\Phi_1',\ \Phi_2',\ 0), \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

となり，(8.7) 式中には Φ_3' が含まれていない．変換式 (8.6 a) の Φ_2, Φ_1, に関しては問題はない．今 (8.6 a) の Φ_3 に関する変換が一般性ありと考えるならば，(8.6 b) 式は Φ_0' があるから一般性があるように見えるが，(8.6 b) の第1項即ち brace 中の表現は (8.3) と全く同形であるから，このように特異な項を (8.6 b) の変換が含むこと自体が一つの重要な制限であることは前述の説明により瞭かなことと思うので再述しない．

次に (8.7) 式が一般性ある正しい式として，この式により問題を解いたとして，次に如何なる条件により Φ_3' を決定して，(8.6) の変換により Φ_0, $\bar{\Phi}$ を求めるかに就いて迷うのである．この条件は存在しないである．H. Neuber はこの Φ_3' に特に触れておられるが，その言葉は不可解である．即ち (8.6) の変換は一般性に乏しい極めて制限された変換であり，その変換に依つて得た処の一般に Φ_3 を抜いてもよいというようなことは明かに不合理なものである．

故に H. Neuber の云われるような Φ_0, $\bar{\Phi}$, の4箇の basic harmonic functions 中，実際には3箇の調和函数のみが必要であつて，一般にこの4箇の函数のうちどの一つが零と置かれようとも，それはどうでもよいことであるという考えは不合理とせざるを得ない．即ち H. Neuber 型の解法では $\Phi_0^1+\Phi_0^2$ を2箇に数えて一般に最小4箇の調和函数は是非必要であり．J. Boussinesq 型の解法では一般に φ, λ_i, ϑ_j, の3箇の調和函数を使用するのが無理のない処であることが説明されたと思う．調和函数の箇数というものは寔に明確を欠く点を有し，この節は説明が困難なので，些か冗長に流れたことを遺憾に思う．

§9. 短円柱の三次元応力問題について

第6節に直方体の例に就いて一言したので，この節で短円柱の弾性問題にも触れたいと思う．(2.14)の一般化した H. Neuber の解の円壔座標に於ける表現に就いて云えば，第3項の $2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}$ に相当するものは無論必要で，第7節の Φ_0^2 の如きものの使用は煩に堪えない．(2.14) 式を円壔座標 $(r,\ \theta,\ z)$ であらわしたものをベクトル形式に書けば，

$$2G\boldsymbol{u}=2G\,(u_r,\ u_\theta,\ u_z)=-\,\mathrm{grad}\,F'+4\,(1-\nu)\,\bar{\Phi}'+2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}', \tag{9.1}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{但し}\quad F=F'=\Phi_0'+r\Phi_1'+z\Phi_3',\quad \bar{\Phi}'=(\Phi_1',\ \Phi_2',\ \Phi_3'),\\
\Phi_1'=\cos\theta\cdot\Phi_1+\sin\theta\cdot\Phi_2,\qquad \Phi_0'=\Phi_0,\\
\Phi_2'=-\sin\theta\Phi_1+\cos\theta\cdot\Phi_2,\qquad \Phi_3'=\Phi_3,\\
\vartheta'=(\vartheta_1',\ \vartheta_2',\ \vartheta_3'),\\
\quad\vartheta_1'=\cos\theta\cdot\vartheta_1+\sin\theta\cdot\vartheta_2,\qquad \vartheta_3'=\vartheta_3,\\
\Phi\ \text{函数},\ \vartheta\ \text{函数は (2.14) に定義されたもの},
\end{array}\right\} \tag{9.1}$$

$$\mathrm{grad}=\left(\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta},\ \frac{\partial}{\partial z}\right),\quad \mathrm{rot}\,A=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta}-\frac{\partial A_\theta}{\partial z},\right.$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r},\ \frac{A_\theta}{r}+\frac{\partial A_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\Big),\quad A=(A_r,\ A_\theta,\ A_z).$$

(9.1) 式において第3項 $2\,\mathrm{rot}\,\vartheta$ を外したものは H. Neuber の解である．軸対称，廻転対称問題に対しては，H. Neuber の解で充分である．このことについて先づ考えて見る．

(9.1) 中の F' は $r,\ z$ のみの函数で，無論重調和函数である．$2Gu_\theta$ 中の $-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \theta}=0$, となり，而して，$\Phi_1',\ \Phi_2'$ 中の $\cos\theta,\ \sin\theta$ は消されなければならない故，次のように置けば，

$$\Phi_1=\cos\theta\, f^1(r,\ z),\quad \Phi_2=\sin\theta\, f^1(r,\ z),\tag{9.2}$$

$$但し\quad \nabla^2\{\cos\theta\, f^1(r,\ z)\}=0,$$

$\Phi_1'=f^1(r,\ z),\quad \Phi_2'=0$ となり，(9.1) の $2\,\mathrm{rot}\,\vartheta'$ を外した式より，

$$\begin{aligned}2\,Gu_r&=-\frac{\partial}{\partial r}F+4\,(1-\nu)\,f^1(r,z),\\ 2\,Gu_\theta&=0,\\ 2\,Gu_z&=-\frac{\partial F}{\partial z}+4\,(1-\nu)\,\Phi_3,\end{aligned}\tag{9.3}$$

$$(F=\Phi_0+r\,f^1(r,z)+z\Phi_3)$$

を得て，軸対称問題の基本解を得る．次に下のように置けば，

$$\begin{aligned}&\Phi_1=-\sin\theta\cdot f^2(r,\ z),\quad \Phi_2=\cos\theta\cdot f^2(r,z),\\ &\qquad 但し\quad \nabla^2\{\sin\theta\, f^2(r,\ z)\}=0,\\ &(\Phi_0=\Phi_3=0)\end{aligned}\tag{9.4}$$

$\Phi_1'=0,\ \Phi_2'=f^2(r,\ z)$ となり，変位の式は

$$u_r=u_z=0,\quad 2\,Gu_\theta=4(1-\nu)\,f^2(r,\ z).\tag{9.5}$$

(9.5) の解は捩れ問題の解であり，rotational symmetry を有するものである．以上のようなことは (9.1) の形を一見すれば判る．(9.5) の導出は廻転楕円面座標による廻転対称問題である純粋捩れ[26]の導出と同じものである．

勿論廻転対称問題としての捩れは (9.1) の $2\,\mathrm{rot}\,\vartheta'$ のみで充分である．即ち

$$\begin{aligned}2\,Gu_r&=\frac{2}{r}\frac{\partial\,\vartheta_3'}{\partial\theta}-\frac{\partial\,\vartheta_2'}{\partial z},\\ 2\,Gu_\theta&=2\frac{\partial\,\vartheta_1'}{\partial z}-2\frac{\partial\,\vartheta_3}{\partial r},\\ 2\,Gu_z&=2\frac{\partial\,\vartheta_2'}{\partial r}-\frac{2}{r}\Big(\sin\theta\,\frac{\partial\,\vartheta_2}{\partial\theta}+\cos\theta\,\frac{\partial\,\vartheta_1}{\partial\theta}\Big).\end{aligned}\tag{9.6}$$

而して，$\dfrac{\partial\,\vartheta_3}{\partial\theta}=0$ なる故，ϑ_3 はその儘使用出来る．

$$\vartheta_1=\cos\theta\,\bar f\,(r,\ z),\quad \vartheta_2=\sin\theta\,\bar f\,(r,\ z),\tag{9.7}$$

$$但し\quad \nabla^2\{\cos\theta\,\bar f\,(r,\ z)\}=0,$$

とすれば，$\vartheta_1' = \bar{f}(r, z)$，$\vartheta_2' = 0$　であり，変位は

$$Gu_0 = \frac{\partial}{\partial z}\bar{f}(r, z) - \frac{\partial \vartheta_3}{\partial r}. \tag{9.8}$$

$u_r = u_z = 0$,　　となる．

又 H. Neuber は直角座標に依る Saint Venant の純粋捩れ解に対し，Φ 函数を撰んでおられる[27]．捩れ解は壔体母線の方向を z 軸として，

$$u = -\tau zy, \quad v = \tau xz, \quad w = \tau\varphi(x, y), \tag{9.9}$$

$$\tau \text{ は捩れ比角}, \quad \nabla_1^2\varphi(x, y) = 0.$$

である．H. Neuber の Φ 函数は

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_0 = -\frac{G\tau}{\alpha} z\varphi(x, y), \ \Phi_1 = -\frac{G\tau}{\alpha} yz, \\ &\Phi_2 = \frac{G\tau}{\alpha} xz, \ \Phi_3 = \frac{G\tau}{\alpha}\varphi(x, y), \\ &F = 0, \qquad ((\alpha = 2(1-\nu)). \end{aligned}\right\} \tag{9.10}$$

であるが，(9.9) 式は (2.14) の第3項 $2\,\mathrm{rot}\,\vartheta$ より容易に導出される．

$G(u, v, w) = \mathrm{rot}\,\vartheta$．であり ϑ 函数は次のようなものである．

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta_1 = G\tau\frac{x}{2}\left(z^2 - \frac{1}{3}x^2\right), \quad \frac{\partial\varphi'(x,y)}{\partial x} = \varphi(x, y) \\ &\vartheta_2 = G\tau\varphi'(x,y), \qquad \nabla_1^2\varphi'(x,y) = 0 \\ &\vartheta_3 = G\tau\frac{z}{2}\left(-y^2 + \frac{1}{3}z^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

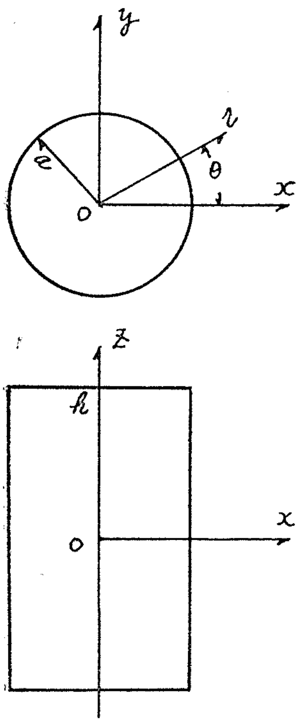

Fig. 2

(9.9) 式は Saint Venant の仮設に依る捩れ解であり，廻転対称の解ではないので，本来なら $2\,\mathrm{rot}\,\vartheta$ だけで導出出来る筈のものでないが，そのような事情で $2\,\mathrm{rot}\,\vartheta$ だけから得られたので，特別な場合である．

次に左図のような短円柱の純粋捩れについて一言する．円壔座標 (r, θ, z) の原点は中心に置く．座標軸は図の如くとる．

(9.7)，(9.8) 式を使用する．依つて次の如く置ける．

$$\left.\begin{aligned} &\cos\theta\cdot\bar{f}(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n I_1(k_n r)\sin k_n z\cdot\cos\theta, \\ &\vartheta_3 = \sum_{s=1}^{n} B_s J_0(\alpha_s r)\cosh\alpha_s z. \end{aligned}\right\} \tag{9.12}$$

荷重は $z=0$ 面に関して対称であること明かである．

$$k_n = \frac{n\pi}{h}, \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \cdots), \quad \alpha_s \equiv \frac{\gamma_s}{a},$$

γ_s は$J_{0-1}(z)=0$ の第s番目の零.

$I_1(k_nr)$ は第1次の第1種 modified Bessel function, $J_0(\alpha_sr)$ は 0 次 Bessel function.

(9.12) を (9.8) に代入して,

$$Gu_0=\sum_{n=0}^{\infty}k_n E_n I_1(k_nr)\cos k_nz+\sum_{s=1}^{\infty}\alpha_s B_s J_1(\alpha_sr)\cosh\alpha_s z, \tag{9.13}$$

を得る. 故に,

$$\begin{aligned}\tau_{\theta z}&=G\frac{\partial u_0}{\partial z}=\sum_s\alpha_s^2B_sJ_1(\alpha_sr)\sinh\alpha_sz-\sum_{n=0}^{\infty}k_n^2E_nI_1(k_nr)\sin k_nz,\\ \tau_{r0}&=G\left(\frac{\partial u_0}{\partial r}-\frac{u_0}{r}\right)=-\sum_{s=1}^{\infty}\alpha_s^2B_sJ_2(\alpha_sr)\cosh\alpha_sz+\\ &\qquad+\sum_n k_n^2E_nI_2(k_nr)\cos k_nz.\end{aligned} \tag{9.14}$$

勿論 H. Neuber の解法の (9.4), (9.5) に依るならば, 例えば, 次のように置けばよいことになる.

$$f^2(r,z)=\sum_n\frac{k_nE_n}{2(1-\nu)}I_1(k_nr)\cos k_nz+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha_sB_s}{2(1-\nu)}J_1(\alpha_sr)\cosh\alpha_sz, \tag{9.15}$$

(9.15) により (9.14) 式を得ることになる.

(9.14) 式は Fig. 2 のような短円柱の rotational symmetry を有する捩れ問題の基本解であり, 有限体の三次元応力問題中尤も容易なものであろう. 以上捩れ問題に対して, H. Neuber の解法に依るものと 2 rot ϑ より求める二つを示したが, 後者の方法は前述の H. Neuber の廻転楕円面座標に依る純粋捩れ問題に対して適当と云い難く, 使用が困難のようである.

よく知られている短円柱の軸対称問題の基本解は, H. Neuber の方法に依れば次の如くなり, この他に特に附加すべき項はないようである. 式のみを羅列する. 応力状態は $z=0$, 面に関して対称とする.

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{0,3}&=\sum_{s=1}^{\infty}A_sJ_0(\alpha_sr)\cosh\alpha_sz,\\ \Phi_3&=\sum_{s=1}^{\infty}C_sJ_0(\alpha_sr)\sinh\alpha_sz,\\ \Phi'_{0,1}&=-\sum_{n=0}^{\infty}D_nI_0(k_nr)\cos k_nz,\\ \Phi_1'&=-\sum_{n=1}^{\infty}F_nI_1(k_nr)\cos k_nz,\quad \Phi_2'=0.\end{aligned}\right\} \tag{9.16}$$

この問題に対する変位は次のもの.

$$\begin{aligned}2Gu_r&=\sum_{s=1}^{\infty}\alpha_sJ_1(\alpha_sr)(A_s\cosh\alpha_sz+C_sz\sinh\alpha_s)+\\ &\quad+\sum_{n=0}^{\infty}\cos k_nz\left[\{k_nD_n-(3-4\nu)F_n\}I_1(k_nr)+F_nr\frac{\partial}{\partial r}I_1(k_nr)\right],\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}2Gu_z &= \sum_{s=1}^{\infty} J_0(\alpha_s r)\,[\{(3-4\nu)\,C_s - \alpha_s A_s\}\sinh\alpha_s z - C_s\alpha_s z\cosh\alpha_s z] + \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin k_n z\,\{D_n I_0(k_n r) + F_n r I_1(k_n r)\}.\end{aligned}\right\}\quad(9.17)$$

又応力表現は次のものとなる.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha_s}{2}\,[J_0(\alpha_s r)\{(\alpha_s A_s+4\nu C_s)\cosh\alpha_s z + \alpha_s C_s z\sinh\alpha_s z\} + \\ &\qquad - \alpha_s J_2(\alpha_s r)\,\{A_s\cosh\alpha_s z + C_s z\sinh\alpha_s z\}] + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n}{2}\cos k_n z\,[(k_n D_n + 4F_n)I_0(k_n r) + \{4(\nu-1)F_n + k_n D_n\}\,I_2(k_n r) \\ &\qquad + 2k_n F_n r\,I_1(k_n r)], \\ \sigma_\theta &= \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha_s}{2}\,[J_0(\alpha_s r)\,\{(\alpha_s A_s+4\nu C_s)\cosh\alpha_s z + \alpha_s C_s z\sinh\alpha_s z\} + \\ &\qquad + \alpha_s J_2(\alpha_s r)\,(A_s\cosh\alpha_s z + C_s z\sinh\alpha_s z)] + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k_n}{2}\cos k_n z\,[(k_n D_n-2F_n)I_0(k_n r) + \{-k_n D_n+4(1-\nu)F_n\}I_2(k_n r)], \\ \sigma_z &= \sum_{s=1}^{\infty}\alpha_s J_0(\alpha_s r)\,[\{-\alpha_s A_s + 2(1-\nu)C_s\}\cosh\alpha_s z - \alpha_s C_s z\sinh\alpha_s z] + \\ &\qquad - \sum_{n=0}^{\infty} k_n\cos k_n z\,\{(k_n D_n+2\nu F_n)\,I_0(k_n r) + k_n F_n r I_1(k_n r)\}.\end{aligned}\right\}\quad(9.18)$$

以上軸対称，廻転対称の場合で，$(u_r,\ u_z)$，(u_θ) の二つの変位の組に解が分離される特別な場合であつて，H. Neuber の解法で充分な場合である．然し非軸対称問題になれば最早や解の分離等は有り得ないことであり，(9.1) 等の解法に依らなければ，煩雑を極めることになる．第7節の $\Phi_0 = \Phi_0^1 + \Phi_0^2$ の如き方法は直角座標に依る以外は避けたい．

Fig. 2 の短円柱が非軸対称荷重を受ける問題の解の形を求める．但し荷重分布は $z=0$ に関して対称とする．この場合6箇の係数系列を必要とし，(9.1) の一般化した H. Neuber の解法に依り解を求めるに，次の如く置き得る．

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{0,3} &= -\sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} A_{ms} J_m(\alpha_s r)\sin m\theta\cosh\alpha_s z, \\ \Phi_3 &= -\sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} C_{ms} J_m(\alpha_s r)\sin m\theta\sinh\alpha_s z, \\ \vartheta_3 &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} B_{ms} J_m(\alpha_s r)\cos m\theta\cosh\alpha_s z,\end{aligned}\right\}\quad(9.19)$$

但し　$\alpha_s \equiv \alpha_{ms} = \dfrac{\gamma_{ms}}{a}$，　γ_{ms} は $J_{m-1}(z) = 0.$ の s 番目の zero,

$J_m(z)$ は m 次 Bessel 函数, $\left(\begin{matrix} m = \dfrac{t}{2}, & (t = 0,\ 1,\ 2,\ 3\cdots\cdots), \\ (s = 1,\ 2,\ 3\cdots\cdots) & \end{matrix}\right)$.

又他の種類の Φ 函数及び ϑ 函数は次の形に置き得る. (9.1) 式に関して,

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{0,1}' = \Phi_{0,1} &= -\sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} D_{mn} I_m(k_n r)\sin m\theta\cos k_n z, \\ \Phi_1 &= -\sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} F_{mn} I_m(k_n r)\sin m\theta\cos k_n z, \\ \vartheta_1' &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\cos m\theta\sin k_n z\,\{E_{m+1,n} I_{m+1}(k_n r) - E_{m-1,n} I_{m-1}(k_n r)\}, \\ \vartheta_2' &= \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin m\theta\sin k_n z\,\{E_{m+1,n} I_{m+1}(k_n r) + E_{m-1,n} I_{m-1}(k_n r)\}, \end{aligned}\right\} \tag{9.20}$$

但し $I_m(k_n r)$, は m 次第1種 modified Bessel function,

$k_n = \dfrac{n\pi}{h}$, $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3\cdots\cdots)$, 而して以下に記述する表現に於いて下記の如く規約する.

$$E_{0,n} = E_{-\frac{1}{2},n} = E_{-1,n} = 0\ ;\quad F_{0,n} = F_{-\frac{1}{2},n} = F_{-1,n} = 0. \tag{9.21}$$

斯くして (9.19) を用いた時の変位表現は次のようになる.

$$\left.\begin{aligned} 2Gu_r^1 &= \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} J_{m+1}(\alpha_s r)\sin m\theta\,\frac{(-\alpha_s)}{2}\,\{(A_{ms}+2B_{ms})\cosh\alpha_s z + C_{ms} z\sinh\alpha_s z\} + \\ &\quad + \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} J_{m-1}(\alpha_s r)\sin m\theta\,\frac{\alpha_s}{2}\,\{(A_{ms}-2B_{ms})\cosh\alpha_s z + C_{ms} z\sinh\alpha_s z\}, \\ 2Gu_\theta^1 &= \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} J_{m+1}(\alpha_s r)\cos m\theta\,\frac{\alpha_s}{2}\,\{(A_{ms}+2B_{ms})\cosh\alpha_s z + C_{ms} z\sinh\alpha_s z\} + \\ &\quad + \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} J_{m-1}(\alpha_s r)\cos m\theta\,\frac{\alpha_s}{2}\,\{(A_{ms}-2B_{ms})\cosh\alpha_s z + C_{ms} z\sinh\alpha_s z\} + \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\infty} 2B_{0s}\,\alpha_s J_1(\alpha_s r)\cosh\alpha_s z, \\ 2Gu_z^1 &= \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} J_m(\alpha_s r)\sin m\theta\,[\{\alpha_s A_{ms} + (4\nu-3)C_{ms}\}\sinh\alpha_s z + \\ &\qquad + \alpha_s C_{ms}\,z\cosh\alpha_s z]. \end{aligned}\right\} \tag{9.22}$$

次に (9.20) に依る変位表現は下記のものである.

$$\begin{aligned} 2Gu_r^2 &= \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sin m\theta\cos k_n z\cdot\frac{1}{2}\,[\{k_n D_{mn} - 4k_n E_{m+1,n} - (3-4\nu)F_{m+1,n}\} I_{m+1}(k_n r) + \\ &\qquad + \{k_n D_{mn} - 4k_n E_{m-1,n} - (3-4\nu)F_{m-1,n}\} I_{m-1}(k_n r) + \\ &\qquad + \frac{k_n}{2}\{(F_{m+1,n}+F_{m-1,n})\,r I_m(k_n r) + F_{m+1,n}\,r I_{m+2}(k_n r) + F_{m-1,n}\,r I_{m-2}(k_n r)\}], \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}2Gu_\theta^2 &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\cos m\theta\cos k_nz\cdot\frac{1}{2}[\{-k_nD_{mn}+4k_nE_{m+1,n}+(m+4-4\nu)F_{m+1,n}\}\times\\&\quad\times I_{m+1}(k_nr)+\{k_nD_{mn}-4k_nE_{m-1,n}+(m-4+4\nu)F_{m-1,n}\}I_{m-1}(k_nr)],\\2Gu_z^2 &= \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin m\theta\sin k_nz\cdot\frac{k_n}{2}[2\{-D_{mn}+2(E_{m+1,n}+E_{m-1,n})\}I_m(k_nr)+\\&\quad-\{F_{m+1,n}rI_{m+1}(k_nr)+F_{m-1,n}rI_{m-1}(k_nr)\}],\end{aligned}\right\}\quad(9.23)$$

但し $u=(u_r,\ u_\theta,\ u_z)=u_1+u^2,\ u^1=(u_r^1,\ u_\theta^1,\ u_z^1),\ u^2=(u_r^2,\ u_\theta^2,\ u_z^2)$.

而して応力表現は (9.22) 式に関するものとして，例えば

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r^1 &= \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}J_{m+2}(\alpha_sr)\sin m\theta\cdot\frac{\alpha_s^2}{4}\{(A_{ms}+2B_{ms})\cosh\alpha_sz+C_{ms}z\sinh\alpha_sz\}+\\&\quad+\sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}J_{m-2}(\alpha_sr)\sin m\theta\,\frac{\alpha_s^2}{4}\{(A_{ms}-2B_{ms})\cosh\alpha_sz+C_{ms}z\sinh\alpha_sz\}+\\&\quad+\sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}J_m(\alpha_sr)\sin m\theta\,\frac{(-\alpha_s)}{2}\{(\alpha_sA_{ms}+4\nu C_{ms})\cosh\alpha_sz+\alpha_sC_{ms}z\sinh\alpha_sz\},\\\tau_{rz}^1 &= \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}J_{m+1}(\alpha_sr)\sin m\theta\cdot\frac{(-\alpha_s)}{2}[\{\alpha_sA_{ms}+\alpha_sB_{ms}-(1-2\nu)C_{ms}\}\sinh\alpha_sz+\\&\qquad+\alpha_sC_{ms}z\cosh\alpha_sz]\\&\quad+\sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}J_{m-1}(\alpha_sr)\sin m\theta\cdot\frac{\alpha_s}{2}[\{\alpha_sA_{ms}-\alpha_sB_{ms}-(1-2\nu)C_{ms}\}\sinh\alpha_sz+\\&\qquad+\alpha_sC_{ms}z\cosh\alpha_sz],\\\tau_{r\theta}^1 &= \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}J_{m+2}(\alpha_sr)\cos m\theta\frac{(-\alpha_s^2)}{4}\{(A_{ms}+2B_{ms})\cosh\alpha_sz+C_{ms}z\sinh\alpha_sz\}+\\&\quad+\sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}J_{m-2}(\alpha_sr)\cos m\theta\frac{\alpha_s^2}{4}\{(A_{ms}-2B_{ms})\cosh\alpha_sz+C_{ms}z\sinh\alpha_sz\}+\\&\quad+\sum_{s=1}^{\infty}(-1)\alpha_s^2B_{0s}J_2(\alpha_sr)\cosh\alpha_sz.\end{aligned}\right\}\quad(9.24)$$

次に変位 (9.23) に関する応力表現は，例えば，

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\theta^2 &= \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sin m\theta\cos k_nz\cdot\frac{k_n}{4}[\{-k_nD_{mn}+4k_nE_{m+1,n}+(4-4\nu+m)F_{m+1,n}\}\times\\&\quad\times I_{m+2}(k_nr)+\{-k_nD_{mn}+4k_nE_{m-1,n}+(4-4\nu-m)F_{m-1,n}\}I_{m-2}(k_nr)+\\&\quad+\{2k_nD_{mn}-4k_n(E_{m+1,n}+E_{m-1,n})-(2+m)F_{m+1,n}+(-2+m)F_{m-1,n}\}\times\\&\qquad\times I_m(k_nr)],\\\tau_{rz}^2 &= \sum_{m=\frac{1}{2}}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sin m\theta\cos k_nz\cdot\frac{(-k_n)}{2}[\{k_nD_{mn}-3k_nE_{m+1,n}-k_nE_{m-1,n}+(2\nu-1)F_{m-1,n}\}\times\\&\quad\times I_{m+1}(k_nr)+\{k_nD_{mn}-k_nE_{m+1,n}-3k_nE_{m-1,n}+(2\nu-1)F_{m-1,n}\}I_{m-1}(k_nr)+\\&\quad+F_{m+1,n}\,r\frac{\partial}{\partial r}I_{m+1}(k_nr)+F_{m-1,n}\,r\frac{\partial}{\partial r}I_{m-1}(k_nr)],\end{aligned}\right\}\quad(9.25)$$

$$\tau_{r\theta}^2 = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\cos m\theta\cos k_nz\cdot\frac{k_n}{4}[\{-k_nD_{mn}+4k_nE_{m+1,n}+(m+4-4\nu)F_{m+1,n}\}I_{m+2}(k_nr)+$$

$$+\{k_nD_{mn}-4k_nE_{m-1,n}+(m-4+4\nu)F_{m-1,n}\}I_{m-2}(k_nr)+$$
$$+m\{F_{m+1,n}+F_{m-1,n}\}I_m(k_nr)].$$

affix 1 と affix 2 を附した表現を相加したものが求める解の形である．この例に於いても，明かに 2 rot ϑ' が必要であり，これは理論上無くとも差し支えないとして無視する訳にも行かないようである．兎角第3項 2 rot ϑ' を附加しておいて，本質的に必要でない場合や，近似的に問題を解く場合には単に除去すればよいので，(2.14) や (9.1) に 2 rot ϑ や 2 rot ϑ' を附加して置くことに異議ある理由はないものと思える．

§10. 結　語

J. Boussinesq の解が簡単な変形により (2.14) の H. Neuber の解の拡張したものになることは，先づ重要な点と考えられる．J. Boussinesq の解法を認める以上，又 (2.14) の一般化された H. Neuber の解法を認めなければならないであろう．そしてその 2 rot ϑ 項は，微分方程式を積分する際に，必然的に導出されることと，その項が他の諸調和函数中に繰り込み得ることは注目すべきことと思う．兎角諸種の三次元的応力問題の解法が J. Boussinesq の解法に一致すべきことが示されることは特に指摘したい処である．2 rot ϑ を他の函数中に繰り込めば，式の対称性は増し，外見上使用し易いように見えても，計算上の不利益を齎すようでは益ないことである，何れにしても繰り込まなければならない本質的な理由は存在しないので，2 rot ϑ を附加して (2.14) のようにして置く方が賢明である．繰り込みの過程を附記しておけば，それでよい筈であるが余分な手数である．而して H. Neuber 型の解法を用いる以上第7節に説明した $\Phi_0=\Phi_0^1+\Phi_0^2$ の如き操作が必要で，而も一般に問題全体として Φ 函数全部を用いなければならないことも重要な点と考える．問題を正確に解く一般的な場合について，そのようなことを述べているのであり，誤解のないように希望する．H. Neuber 型の解法では Φ_0^2 のような調和函数を考慮しない限り不完全で，2 rot ϑ 項を必要とすることを強調したい．第8節に三次元応力問題の解法の中で基本となる一般的な調和函数の箇数について述べたが，そのことに関聯して，調和函数の 箇数 に拘泥し，J. Boussinesq 型の解法の基本的な調和函数の箇数は7箇であり，H. Neuber 型の解法ではそれは3乃至4箇であると云つて，H. Neuber 型の解法の方が有利であるとするようなことは意味の薄いものと考えることは前述の通りであるが，比較的多くの人々がそのように云われるようなので，このことを結語中に特に述べた次第である．H. Neuber の解の一般性或いは完全性については，第7節のような Φ_0^2 の如きものを考えて処理すればよいので，第7節の例は直方体に関するものであるが，有限体の問題に就いて完全性に疑点がないのであるから，例え無限部分があつてもこの型の解法は完全であると考えられる．前述の通り，H. Neuber 型の解法は不完全な点を有するとする人もあるようであるが，不可解である．

この点に就いては後に考えたいと思う．然し完全性は損われていないが，Φ_0^2 に依る処理が面倒なうえ，従来の解例にそのようなことが行われていることが極めて寡い以上，解法が完全であるということのみでは不足である．H. Neuber 型の解法は 2 rot ϑ 項を附加して拡張して置く可きものと思う．贅言ではあるが，(2.14) の如く H. Neuber の解法に単に 2 rot ϑ を附したものであるから，(2.14) の Φ_0 を $\Phi_0=\Phi_0^1+\Phi_0^2$ のように扱えば係数系列がそれだけ余計になる理であるが，そのようなことはしないようにするだけで，多重調和函数に依る調和函数を使用すれば幾らでも係数は増すだけであるから，そのようにすることは又当然である．以上 J. Boussinesq 型と H. Neuber 型の解法に関して考察した処のものを述べた．

終に臨み，御指導を戴く藤井教授，本報文の第7節に関し有益な御注意を賜つた久野教授，原稿を読んで戴いた半沢助教授，種々御厄介になる機械科の諸先生，又御注意を戴いた名大工学部の大久保教授，東大工学部の鵜戸口教授，特に御厄介になつた千葉工大の宮本助教授，慶大工学部大学院の牟岐鹿楼氏に感謝の意を表します．

文献及び注意

1) 秦 謙一： 北海道大学工学部研究報告，11 号，105 頁，(昭和 29 年 12 月).
2) H. Neuber: "Kerbspannungslehre," Julius Springer, S. 19, (1937).
3) J. Boussinesq: "Applications des Poténtiels," Gauthier-Villars, Paris, France, 1885.
この事は千葉工大宮本博助教授，慶大工学部大学院学生牟岐鹿楼氏並に応用力学連合講演会論文審査委員会が御教示下さつたもの.
4) A. E. H. Love: "The Mathematical Theory of Elasticity," Cambridge University Press, London, 4 th Edition, (1934).
5) 渋谷 巌： 日本機械学会論文集，14 巻，48 号，25 頁，(昭和 23 年).
同 上 16 巻，55 号，104 頁，(昭和 25 年).
6) B. Galerkin: Comptes Rendus, 190, 1047, (1930).
7) P. F. Papkovitch: C. R., 195, 513 (1932).
8) 文献 5) の昭和 25 年の論文中 div (F. G. H) = 0 の条件の使用に就いて疑点がある様に思われる.
9) 牟岐鹿楼： Proceedings of the Faculty of Engineering, Keiō University, Vol. 6, No. 20, p. 11, (1953).
E. Melan & H. Parkus: "Wärmespannungen," Wien, Springer Verlag S. 7, (1953).
10) 渋谷 巌： 同 上 33 頁，(昭和 23 年),
11) A. E. H. Love: ibid., p. 205.
12) M. A. Sadowsky & E. Sternberg: Journal of Applied Mechanics, A. S. M. E. Vol. 14, No. 3, A-196, (1947).
13) A. E. H. Love: ibid., p. 88.
14) P. F. Papkovitch: ibid.
15) 宮本 博： 第4回応用力学連合講演会，前刷第1部，41 頁 (昭和 29 年 9 月).
16) R. D. Mindlin: Bulletin of American Mathematical Society, Vol. XLII, p. 373, (1936).
17) A. E. H. Love: ibid., p. 47; p. 183.

18) B. Galerkin: ibid.
H. M. Westergaard: "Theory of Elasticity and Plasticity," John Wiley & Sons, Inc. p. 119, (1952).
19) R. D. Mindlin: ibid.
20) A. E. H. Love: ibid., foot note, p. 276.
21) 牟岐鹿楼： 第5回応用力学聯合講演会, 前刷第1部 38 頁, (昭和 30 年 9 月 8 日).
22) 秦 謹一： ibid.
23) S. Woinowsky-krieger: Ingenieur Archiv, IV Band, Heft 3 und 4, (1933).
24) M. G. Slovodiansky: Prikladnaia Matematika i Mekhanika, Vol. 18, No. 1 p. 55, (1954).
25) H. Neuber: ibid., S. 22.
26) H. Neuber: ibid., S. 90.
27) H. Neuber: ibid., S. 131.

* この報文の内容は昭和 30 年 9 月 8 日第5回応用力学連講合演会及び同年 9 月 18 日日本機械学会札幌臨時大会に於いて講演.