HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	はりに対する衝撃ダンパの防振効果
Author(s)	百々, 寛洋; 入江, 敏博
Citation	北海道大學工學部研究報告, 57, 101-114
Issue Date	1970-10-31
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/41007
Type	bulletin (article)
File Information	57_101-114.pdf

Instructions for use

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

はりに対する衝撃ダンパの防振効果

百々寛洋*　入江敏博*

(昭和45年5月7日受理)

Effects of Impact Damper on the Vibration of Beam

Kan-yo DODO　Toshihiro IRIE

Abstract

Studying the steady-state vibration of an impact damper attached to a beam vibrating under the action of a harmonic exciting displacement, conditions for maintaining a stable periodic vibration were obtained.

From the results of numerical calculations and experiments carried out on the vibration of a beam-damper system whose frequency is close to the resonant vibration of the fundamental vibration of the beam, it was found that ranges of parameters for which asymptotic stability is assured become small, but the amplitude of beam can be small, when the free path of the damper mass is short and the mass ratio of the damper to beam and the restitution coefficient between the damper mass and the container are large.

1. まえがき

衝撃ダンパは可動質量を入れた容器を振動する物体に取り付け，容器内の質量を壁面に衝突させることによって防振の目的を達しようとするものである。タービン翼，飛行機翼，工作機械などこの防振装置の応用は広く，したがってこの問題に関する研究も多く発表されている。最初の研究は A. Paget[1] の定性的な実験に始まる (1937) ようであるが，以下年代を追ってその概略を述べてみよう。P. Lieber と D. P. Jensen[2] はダンパと容器は非弾性的な衝突をするものとして，解析と実験を行ない (1945)，C. Grubine[3] はダンパと容器の間の反発係数を導入して等間隔周期振動を解析している (1956)。その後 R. N. Arnold[4] はダンパによる衝突力をフーリェ級数に展開して定常な周期解を求め (1956)，また G. B. Warburton[5] は同じ系についていっそう簡明な手法を用いて定常解を得ている (1957)。

これまでの研究ではまだ安定性の概念が導入されていなかったが，A. E. Кобринский[6] ははじめてこれを導入し (1957)，この問題に新しい進歩をもたらした。その後 H. G. Kaper[7] はダンパに対する重力の影響を考え (1961)，また K. Kuphal[8),9] は Warburton と同じ手法で定常解を求めると同時に安定性を論じている(1965)。M. M. Sadek[10),11] は衝突力をフーリェ展開して，不等間隔衝突を論じ，工作機械への応用例を示しており (1966)，H. Dittrich[12] は安定な等間隔と不等間隔振動に関するくわしい計算と議論を展開している (1966)。実際にダンパを利用した例として粟屋，西口[13] のフライスのびびり振動に対する防振効果を実験したものもある (1966)。同じ頃

* 機械工学第二学科　機械力学講座

S. F. Masri と T. K. Caughey[14], D. M. Egle[15] も同様な問題を論じ (1967), さらに Masri[16] はアナログ計算機によって正弦波やランダム入力に対するダンパの挙動を調べ (1967), ごく最近多数個のダンパを用いたときの防振効果を論じている[17] (1969)。

しかし以上はすべて一自由度系に衝撃ダンパを取り付けた場合の議論であって，連続体を対象としているものではない。得丸，小寺[18] が，最近，連続体とくに先端に集中質量を有するコイルばねの振動を論じている (1969) ほか，この問題を取り扱っているものがほとんど見当たらない。本論文ははりの横振動を防止するために，これに取り付けた衝撃ダンパの運動を論じ，とくに共振点付近の振動をくわしく計算し，安定にして周期的な運動が起る条件を明らかにしたものである。

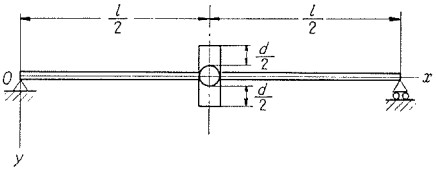
2. 仮　　定

本報告では，図-1 のような両端を単純支持し，かつ両端にはりと直角方向に調和変位を与えたときの一様なはりの横振動を取り扱うが，問題を簡単にするためつぎの仮定を設ける。

(1) はりは線型振動系であって，これに作用する外部抵抗や内部摩擦などは一切省略する。

(2) ダンパ質量ははりの中央部に設けられた容器内をはりと直角方向に摩擦なく運動し，容器の壁と一定の時間間隔をおいて衝突を繰返す。

(3) ダンパ容器の質量ははりの質量に比べてかなり小さいものとして省略する。



図—1　両端支持はりの中央に設けた衝撃ダンパ

(4) はりやダンパの振動に対する重力の影響は考えない。

(5) はりとダンパは衝突の際変形せず，かつ衝突は瞬間的に起るものとする。

(6) 両者の衝突前後の相対速度の間には，物体の性質によって決まる一定の関係がある。

3. 周期運動が起る条件

横振動するはりの運動方程式はつぎのように表わされる。

$$\rho \frac{\partial^2 (y+z)}{\partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + F(x,\ t) \tag{1}$$

ただし x: はりの一端を原点とし，これに沿って測った長さ，$y(x,\ t)$: はりの横変位，$z(t) = a\cos(\omega t + \varphi)$: はりの両端に作用する起振変位，$\rho$: はりの単位長さ当たりの質量，$EJ$: はりの曲げこわさ，$F(x,\ t)$: はりの単位長さに作用する分布荷重である。

はりの変位を固有関数 $Y_j(x)\,(j=1,\ 2,\ \cdots)$ で展開して

$$y(x,\ t) = \sum_{j=1}^{\infty} Y_j(x)\, q_j(t) \tag{2}$$

と書く。式 (2) を式 (1) へ代入したのち，両辺に $Y_j(x)$ を乗じて積分し，固有関数の直交性を用いれば

$$\ddot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = \frac{1}{M/2} \int_0^l \left\{ z(t) + F(x,\ t) \right\} Y_j(x)\, dx \tag{3}$$

ただし l: はりの全長，M: はりの全質量，$\omega_j = (j\pi/l)^2 \sqrt{EJ/\rho}$: 固有振動数である。両端支持はりの固有関数は

$$Y_j(x)=\sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right) \tag{4}$$

ダンパの衝突によって起る衝撃力は Dirac のデルタ関数を用いて

$$F(x,\ t)=P(t)\ \delta(x-l/2) \tag{5}$$

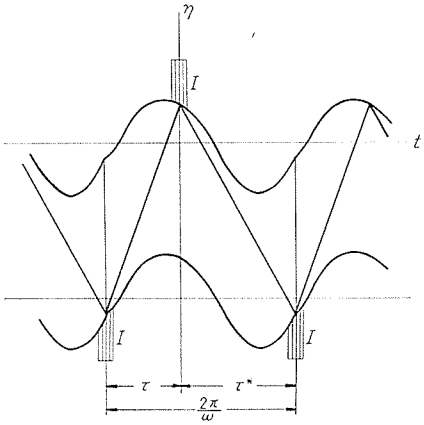
と書けるから，式 (3) は

$$\ddot{q}_j(t)+\omega_j^2 q_j(t)=\frac{1}{M/2}\left\{\frac{2\rho l}{j\pi}\ a\omega^2\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\cos(\omega t+\varphi)+P(t)\right\}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right) \tag{6}$$

となる。ここで $P(t)$ ははりに対するダンパの衝撃力である。ダンパが起振変位の1サイクルの間に容器の両側の壁に1度ずつ衝突する場合を考え，衝突時刻のどれか一つを図-2のように時間の原点にとり，$P(t)$ をフーリエ展開すれば

$$P(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I\omega}{\pi}\left\{\cos n\omega t-\cos n\omega(t+\tau)\right\} \tag{7}$$

τ, τ^* は衝突時間間隔，I は衝撃のインパルスである。式 (7) を式 (6) へ代入し，$q_j(t)$ を求めることによって，はりの変位は



図—2　はりに働くインパルス

$$y(x,\ t)=2\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{2a\omega^2}{j\pi(\omega_j^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\cos(\omega t+\varphi)\right.$$
$$\left.+\frac{I\omega}{\pi M}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_j^2-\omega^2}\left\{\cos n\omega t-\cos n\omega(t+\tau)\right\}\right]\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right) \tag{8}$$

$(\omega\neq\omega_j)$ となる。式 (8) 右辺の [　] 内の級数は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_j^2-\omega^2}\left\{\cos n\omega t-\cos n\omega(t+\tau)\right\}$$
$$=\frac{\pi}{2\omega\omega_j}\ \frac{\cos\omega_j(t\pm\pi/\omega)-\cos\omega_j(t+\tau-\pi/\omega)}{\sin(\pi\omega_j/\omega)}\ \begin{pmatrix}-\tau\leq t\leq 0\\ 0\leq t\leq\tau^*\end{pmatrix} \tag{9}$$

のような値をもつから，はりの第 j 次振動の変位は

$$\underset{(j=\mathrm{odd})}{y_j(x,\ t)}=\left\{\frac{4a\omega^2}{j\pi(\omega_j^2-\omega^2)}\cos(\omega t+\varphi)\right.$$
$$\left.+\frac{I}{M}\ \frac{\cos\omega_j(t\pm\pi/\omega)-\cos\omega_j(t+\tau-\pi/\omega)}{\omega_j\sin(\pi\omega_j/\omega)}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\right\}\sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right)\begin{pmatrix}-\tau<t<0\\ 0<t<\tau^*\end{pmatrix} \tag{10}$$

$$y_j(x,\ t)=0\quad(j=\mathrm{even}) \tag{11}$$

となり，この場合偶数次の振動は発生しない。はりの速度は式 (10) を微分することによって

$$\underset{(j=\mathrm{odd})}{\frac{\partial y_j}{\partial t}(x,\ t)}=\left\{-\frac{4a\omega^3}{j\pi(\omega_j^2-\omega^2)}\sin(\omega t+\varphi)\right.$$
$$\left.-\frac{I}{M}\ \frac{\sin\omega_j(t\pm\pi/\omega)-\sin\omega_j(t+\tau-\pi/\omega)}{\sin(\pi\omega_j/\omega)}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\right\}\sin\left(\frac{j\pi x}{l}\right)\begin{pmatrix}-\tau<t<0\\ 0<t<\tau^*\end{pmatrix} \tag{12}$$

となる。はりの防振に当たって，ある次数の共振点付近の振動だけが問題となる場合が多いので，以下では第 j 次振動のみを取り扱い，混乱のおそれのない限り添字 j を省略する。

衝突の際のはりの中央部の変位は

$$\eta = y_j\left(\frac{l}{2},\ 0\right) = \frac{4a\omega^2}{j\pi\,(\omega_j^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\cos\varphi + \frac{I}{M}\,\frac{\cos(\pi\omega_j/\omega)-\cos\omega_j(\tau-\pi/\omega)}{\omega_j\sin(\pi\omega_j/\omega)} \tag{13}$$

$$\eta^* = y_j\left(\frac{l}{2},\ \tau^*\right) = \frac{4a\omega^2}{j\pi\,(\omega_j^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\cos(\omega\tau^*+\varphi) - \frac{I}{M}\,\frac{\cos(\pi\omega_j/\omega)-\cos\omega_j(\tau^*-\pi/\omega)}{\omega_j\sin(\pi\omega_j/\omega)} \tag{14}$$

衝突直前と直後の速度は

$$u_{\mp 0} = \frac{\partial y_j}{\partial t}\left(\frac{l}{2},\ \mp 0\right) = -\frac{4a\omega^3}{j\pi\,(\omega_j^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\sin\varphi + \frac{I}{M}\left\{\mp 1+\frac{\sin\omega_j(\tau-\pi/\omega)}{\sin(\pi\omega_j/\omega)}\right\} \tag{15}$$

$$u^*_{\mp 0} = \frac{\partial y_j}{\partial t}\left(\frac{l}{2},\ \tau^*\mp 0\right) = -\frac{4a\omega^3}{j\pi\,(\omega_j^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\sin(\omega\tau^*+\varphi) - \frac{I}{M}\left\{\mp 1+\frac{\sin\omega_j(\tau^*-\pi/\omega)}{\sin(\pi\omega_j/\omega)}\right\} \tag{16}$$

一方ダンパの速度は

$$v_{-0} = v^*_{+0} = \frac{\eta-\eta^*+d}{\tau} = \frac{4a\omega^2}{j\pi\,(\omega_j^2-\omega^2)\,\tau}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\left\{\cos\varphi-\cos(\omega\tau-\varphi)\right\} + \frac{2I}{M\tau}\,\frac{\cos(\pi\omega_j/\omega)-\cos\omega_j(\tau-\pi/\omega)}{\omega_j\sin(\pi\omega_j/\omega)} + \frac{d}{\tau} \tag{17}$$

$$v_{+0} = v^*_{-0} = -\frac{\eta-\eta^*+d}{\tau^*} = -\frac{4a\omega^2}{j\pi\,(\omega_j^2-\omega^2)\,\tau^*}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\left\{\cos\varphi-\cos(\omega\tau^*+\varphi)\right\} - \frac{2I}{M\tau^*}\,\frac{\cos(\pi\omega_j/\omega)-\cos\omega_j(\tau^*-\pi/\omega)}{\omega_j\sin(\pi\omega_j/\omega)} - \frac{d}{\tau^*} \tag{18}$$

d はダンパの自由行程である。

衝突の際のダンパの運動量の変化より

$$\begin{aligned} I &= -m(v_{+0}-v_{-0}) = m(v^*_{+0}-v^*_{-0}) \\ &= m\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau^*}\right)\left[\frac{4a\omega^2}{j\pi\,(\omega_j^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\left\{\cos\varphi-\cos(\omega\tau-\varphi)\right\} + \frac{2I}{M}\,\frac{\cos(\pi\omega_j/\omega)-\cos\omega_j(\tau-\pi/\omega)}{\omega_j\sin(\pi\omega_j/\omega)}+d\right] \end{aligned} \tag{19}$$

式 (19) より I を解いて

$$I = M\,\frac{\dfrac{4a\omega^2}{j\pi\,(\omega_j^2-\omega^2)}\sin\left(\dfrac{j\pi}{2}\right)\left\{\cos\varphi-\cos(\omega\tau-\varphi)\right\}+d}{\dfrac{1}{\mu\,(1/\tau+1/\tau^*)}-2\,\dfrac{\cos(\pi\omega_j/\omega)-\cos\omega_j(\tau-\pi/\omega)}{\omega_j\sin(\pi\omega_j/\omega)}} \tag{20}$$

$\mu=m/M$ ははりの全質量に対するダンパ質量の比である。

はりとダンパの衝突前後の相対速度の間に，反発係数 e で決まる関係

$$u_{+0}-v_{+0} = -e(u_{-0}-v_{-0}),\qquad u^*_{+0}-v^*_{+0} = -e(u^*_{-0}-v^*_{-0}) \tag{21}$$

があるとすれば，この式に式 (15)～(18) を代入し，整理することによって

$$C_1\cos\varphi + S_1\sin\varphi = D_1 d,\qquad C_2\cos\varphi + S_2\sin\varphi = D_2 d \tag{22}$$

のような起振変位の位相角 φ とダンパの自由行程 d に関する式を得る。ただし

$$C_1=\frac{4a\omega^2}{j\pi(\omega_j^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\left\{\left(\frac{1}{\tau^*}-\frac{e}{\tau}\right)+\frac{p_1}{\gamma}\right\}(1-\cos\omega\tau)$$

$$C_2=\frac{4a\omega^2}{j\pi(\omega_j^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\left[\left\{-\left(\frac{e}{\tau^*}-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{p_2}{\gamma}\right\}(1-\cos\omega\tau)-(1+e)\,\omega\sin\omega\tau^*\right]$$

$$S_1=\frac{4a\omega^2}{j\pi(\omega_j^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\left[-\left\{\left(\frac{1}{\tau^*}-\frac{e}{\tau}\right)-\frac{p_1}{\gamma}\right\}\sin\omega\tau-(1+e)\,\omega\right]$$

$$S_2=\frac{4a\omega^2}{j\pi(\omega_j^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\left[-\left\{\left(\frac{e}{\tau^*}-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{p_2}{\gamma}\right\}\sin\omega\tau-(1+e)\,\omega\cos\omega\tau^*\right]$$

$$D_1=\left(\frac{1}{\tau^*}-\frac{e}{\tau}\right)+\frac{p_1}{\gamma},\qquad D_2=\left(\frac{e}{\tau^*}-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{p_2}{\gamma}$$

そして

$$p_1=\frac{1+e}{2}\,\frac{\sin\omega_j(\tau-\pi/\omega)}{\sin(\pi\omega_j/\omega)}+\left(\frac{1}{\tau^*}-\frac{e}{\tau}\right)\frac{\cos(\pi\omega_j/\omega)-\cos\omega_j(\tau-\pi/\omega)}{\omega_j\sin(\pi\omega_j/\omega)}+\frac{1-e}{2}$$

$$p_2=-\frac{1+e}{2}\,\frac{\sin\omega_j(\tau-\pi/\omega)}{\sin(\pi\omega_j/\omega)}+\left(\frac{e}{\tau^*}-\frac{1}{\tau}\right)\frac{\cos(\pi\omega_j/\omega)-\cos\omega_j(\tau-\pi/\omega)}{\omega_j\sin(\pi\omega_j/\omega)}-\frac{1-e}{2}$$

$$\gamma=\frac{1}{2\mu(1/\tau+1/\tau^*)}-\frac{\cos(\pi\omega_j/\omega)-\cos\omega_j(\tau-\pi/\omega)}{\omega_j\sin(\pi\omega_j/\omega)}$$

式 (22) より φ について解くと

$$\cos\varphi=\frac{D_1S_2-D_2S_1}{C_1S_2-C_2S_1}\,d,\qquad \sin\varphi=\frac{D_2C_1-D_1C_2}{C_1S_2-C_2S_1}\,d \tag{23}$$

φ を消去することによって，周期運動が起るためのダンパの自由行程

$$d=\frac{|C_1S_2-C_2S_1|}{\sqrt{(D_1S_2-D_2S_1)^2+(D_1C_2-D_2C_1)^2}} \tag{24}$$

が決定できる。またこのときの位相角は

$$\tan\varphi=\frac{D_2C_1-D_1C_2}{D_1S_2-D_2S_1} \tag{25}$$

より求められる。周期運動が起るためには，この他になおダンパが常に容器内で運動するための条件

$$\left.\begin{aligned}&\eta(t)>v_{-0}t+\eta>\eta(t)-d\qquad(-\tau<t<0)\\&\eta(t)>v_{+0}t+\eta>\eta(t)-d\qquad(0<t<\tau^*)\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

を満足する必要があるが，これは計算の過程で判定する以外に求めることができない。

式 (21) では反発係数 e を仮定したが，衝突に関与するはりの質量部分はつぎのように計算できる。すなわち運動量の保存則によって

$$\left.\begin{aligned}&mv_{-0}+\int_0^l\rho\frac{\partial y}{\partial t}(x,-0)\,dx=mv_{+0}+\int_0^l\rho\frac{\partial y}{\partial t}(x,+0)\,dx\\&mv^*_{-0}+\int_0^l\rho\frac{\partial y}{\partial t}(x,\tau^*-0)\,dx=mv^*_{0+}+\int_0^l\rho\frac{\partial y}{\partial t}(x,\tau^*+0)\,dx\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

なる関係があるから，式 (27) に式 (12) を代入し，積分を計算することによって

$$\left.\begin{aligned}&\nu M\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)u_{-0}+mv_{-0}=\nu M\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)u_{+0}+mv_{+0}\\&\nu M\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)u^*_{-0}+mv^*_{-0}=\nu M\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)u^*_{+0}+mv^*_{+0}\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

したがってはりの全質量の $\nu=2/j\pi$ だけの部分が衝突に関与することとなる。衝突前後の速度を

$$\left.\begin{aligned} u_{+0} &= \sigma_1 u_{-0} + \sigma_2 v_{-0}, \quad & v_{+0} &= \sigma_3 u_{-0} + \sigma_4 v_{-0} \\ u^*_{+0} &= \sigma_1 u^*_{-0} + \sigma_2 v^*_{-0}, \quad & v^*_{+0} &= \sigma_3 u^*_{-0} + \sigma_4 v^*_{-0} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

と書けば

$$\sigma_1 = \frac{\nu - \mu e}{\nu + \mu}, \quad \sigma_2 = \frac{\mu(1+e)}{\nu+\mu}; \quad \sigma_3 = \frac{\nu(1+e)}{\nu+\mu}, \quad \sigma_4 = \frac{-\nu e + \mu}{\nu+\mu} \tag{30}$$

4. 周期運動の安定性

上記で述べた周期運動が存在するためには，運動が安定でなければならない。これは運動中に生じた微小なかく乱が時間の経過とともに消失するか（安定），成長するか（不安定）によって判定される。

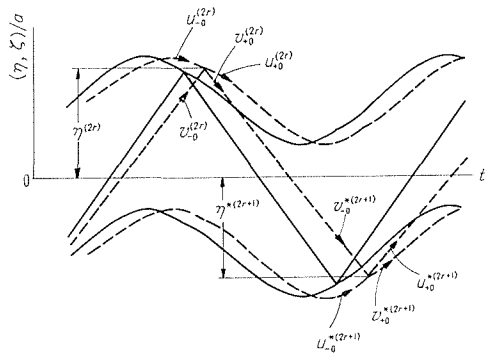
運動の安定性を調べるために，まずはりの第 j 次（奇数）振動における中央点の変位を式(10)によって

$$\eta(t) = y\left(\frac{l}{2}, t\right) = A \sin \omega_j t + B \cos \omega_j t + \frac{4a\omega^2}{j\pi(\omega_j^2 - \omega^2)} \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right) \cos(\omega t + \varphi) \tag{31}$$

ダンパの変位を

$$\zeta(t) = Ct + D \tag{32}$$

と書いておく。A, B; C, D はすべて各衝突の間では定数であるが，図-3に示すようにかく乱によってその値が変化し，ある衝突区間 $t^{(2r)} \leq t \leq t^{*(2r+1)}$ では



図—3 周期運動とかく乱された運動

$$\left.\begin{aligned} \eta^{(2r)}(t) &= (A + \Delta A^{(2r)}) \sin \omega_j t \\ &\quad + (B + \Delta B^{(2r)}) \cos \omega_j t \\ &\quad + \frac{4a\omega^2}{j\pi(\omega_j^2 - \omega^2)} \sin\left(\frac{j\omega}{2}\right) \\ &\quad \times \cos(\omega t + \varphi) \\ \zeta^{(2r)}(t) &= (C + \Delta C^{(2r)}) t \\ &\quad + D + \Delta D^{(2r)} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

となる。ある衝突時刻 $t^{(2r)} + \Delta t^{(2r)}$（$\Delta t^{(2r)}$ は衝突時刻のかく乱）の直後における変位と速度のかく乱 $\Delta\eta^{(2r)} = \Delta\zeta^{(2r)}$; $\Delta u_{+0}^{(2r)}$, $\Delta v_{+0}^{(2r)}$ を用いて $\Delta A^{(2r)}$, $\Delta B^{(2r)}$; $\Delta C^{(2r)}$, $\Delta D^{(2r)}$ を求め，つぎの衝突直前のかく乱 $\Delta\eta^{*(2r+1)} = \Delta\zeta^{*(2r+1)}$; $\Delta u_{-0}^{*(2r+1)}$, $\Delta v_{-0}^{*(2r+1)}$ を与える式に入れることによって

$$\left.\begin{aligned} \Delta\eta^{*(2r+1)} &= \frac{1}{\omega_j}(\Delta u_{+0}^{(2r)} + \alpha \Delta t^{(2r)}) \sin \omega_j \tau^* \\ &\quad + (\Delta\eta^{(2r)} - u_{+0} \Delta t^{(2r)}) \cos \omega_j \tau^* + u^*_{-0} \Delta t^{*(2r+1)} \\ \Delta u_{-0}^{*(2r+1)} &= (\Delta u_{+0}^{(2r)} + \alpha \Delta t^{(2r)}) \cos \omega_j \tau^* \\ &\quad - \omega_j (\Delta\eta^{(2r)} - u_{+0} \Delta t^{(2r)}) \sin \omega_j \tau^* - \alpha^* \Delta t^{*(2r+1)} \\ \Delta\eta^{*(2r+1)} &= \Delta v_{+0}^{(2r)} \tau^* + \Delta\eta^{(2r)} - v_{+0} \Delta t^{(2r)} + v^*_{-0} \Delta t^{*(2r+1)} \\ \Delta v_{-0}^{*(2r+1)} &= \Delta v_{+0}^{(2r)} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

ただし

$$\alpha = \omega_j^2 \eta - \frac{4a\omega^2}{j\pi} \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right) \cos \varphi$$

衝突前後の速度のかく乱に関して

$$\Delta u_{+0}^{(2r)} = \sigma_1 \Delta u_{-0}^{(2r)} + \sigma_2 \Delta v_{-0}^{(2r)}, \qquad \Delta v_{+0}^{(2r)} = \sigma_3 \Delta u_{-0}^{(2r)} + \sigma_4 \Delta v_{-0}^{(2r)} \tag{35}$$

容器の他の壁から最初の壁へ移る間 $t^{*(2r+1)} \leq t \leq t^{(2r+2)}$ においても，以上と同様に

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\eta^{(2r+2)} &= \frac{1}{\omega_j}(\Delta u_{+0}^{*(2r+1)} + \alpha^* \Delta t^{*(2r+1)}) \sin \omega_j \tau \\
&\qquad + (\Delta\eta^{*(2r+1)} - u_{+0}^* \Delta t^{*(2r+1)}) \cos \omega_j \tau + u_{-0} \Delta t^{(2r+2)} \\
\Delta u_{-0}^{(2r+2)} &= (\Delta u_{+0}^{*(2r+1)} + \alpha^* \Delta t^{*(2r+1)}) \cos \omega_j \tau \\
&\qquad - \omega_j (\Delta\eta^{*(2r+1)} - u_{+0}^* \Delta t^{*(2r+1)} \sin \omega_j \tau - \alpha \Delta t^{(2r+2)} \\
\Delta\eta^{(2r+2)} &= \Delta v_{+0}^{*(2r+1)} \tau + \Delta\eta^{*(2r+1)} - v_{+0}^* \Delta t^{*(2r+1)} + v_{-0} \Delta t^{(2r+2)} \\
\Delta v_{-0}^{(2r+2)} &= \Delta v_{+0}^{*(2r+1)}
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

ただし

$$\alpha^* = \omega_j^2 \eta^* - \frac{4a\omega^2}{j\pi} \sin\left(\frac{j\pi}{2}\right) \cos(\omega\tau^* + \varphi)$$

また

$$\Delta u_{+0}^{*(2r+1)} = \sigma_1 \Delta u_{-0}^{*(2r+1)} + \sigma_2 \Delta v_{-0}^{*(2r+1)}, \qquad \Delta v_{+0}^{*(2r+1)} = \sigma_3 \Delta u_{-0}^{*(2r+1)} + \sigma_4 \Delta v_{-0}^{*(2r+1)} \tag{37}$$

式 (34)～(37) において $\Delta Z^{(r)} = Z\lambda^r$ ($Z = \eta, \eta^*$; $u_{\mp 0}, u_{\mp 0}^*$; $v_{\mp 0}, v_{\mp 0}^*$; t, t^*) とおいて Z を消去することによって，つぎの特性方程式

$$\begin{vmatrix}
-u_{+0}\cos\omega_j\tau^* + (\alpha/\omega_j)\sin\omega_j\tau^* & u_{-0}^*\lambda & (1/\omega_j)\sin\omega_j\tau^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\omega_j u_{+0}\sin\omega_j\tau^* + \alpha\cos\omega_j\tau^* & -\alpha^*\lambda & \cos\omega_j\tau^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-v_{+0} & v_{-0}^*\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\omega_j\tau^* & -\lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & -\omega_j\sin\omega_j\tau^* & 0 \\
u_{-0}\lambda & -u_{+0}^*\cos\omega_j\tau + (\alpha^*/\omega_j)\sin\omega_j\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\lambda \\
-\alpha\lambda & \omega_j u_{+0}^*\sin\omega_j\tau + \alpha^*\cos\omega_j\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\
v_{-0}\lambda & -v_{+0}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \cos\omega_j\tau \\
0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_j\sin\omega_j\tau \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & -\lambda & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \tau^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & (1/\omega_j)\sin\omega_j\tau & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \cos\omega_j\tau \\
-\lambda & 0 & 0 & \cos\omega_j\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_j\sin\omega_j\tau \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tau & 0 & -\lambda & 1 \\
0 & 0 & -\lambda & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\sigma_1 & 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sigma_3 & -1 & \sigma_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & \sigma_1 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & -1 & \sigma_4 & 0 & 0
\end{vmatrix} = 0 \tag{38}$$

を得る。これを展開したものは λ の8次式である。

5. 等間隔振動

5.1 周期運動が起る条件

この場合は $\tau=\tau^*=\pi/\omega$, したがって式 (13), (14) によってはりの中央点の変位は

$$-\eta^*=\eta=\frac{4a\omega^2}{j\pi(\omega_j^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\cos\varphi-\frac{I}{M\omega_j}\tan\left(\frac{\pi\omega_j}{2\omega}\right) \tag{39}$$

式 (15)〜(18) より速度は

$$-u^*_{\mp 0}=u_{\pm 0}=-\frac{4a\omega^3}{j\pi(\omega_j^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\sin\varphi\mp\frac{I}{M} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}-v^*_{-0}=v^*_{+0}=v_{-0}=-v_{+0}=&\frac{8a\omega^3}{j\pi^2(\omega_j^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\cos\varphi\\&+\frac{2I\omega}{M\pi\omega_j}\tan\left(\frac{\pi\omega_j}{2\omega}\right)+\frac{\pi d}{\omega}\end{aligned} \tag{41}$$

式 (20) よりインパルスは

$$I=M\frac{\dfrac{4a\omega^2}{\omega_j^2-\omega^2}\sin\left(\dfrac{j\pi}{2}\right)\cos\varphi+\dfrac{d}{2}}{\dfrac{\pi}{4\mu\omega}-\dfrac{1}{\omega_j}\tan\left(\dfrac{\pi\omega_j}{2\omega}\right)} \tag{42}$$

また

$$C_1=-C_2=C=\left\{\frac{\omega}{\pi}(1-e)+\frac{p}{\gamma}\right\}\frac{8a\omega^2}{j\pi(\omega_j^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right),$$

$$S_1=-S_2=S=-(1+e)\frac{4a\omega^3}{j\pi(\omega_j^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)$$

$$D_1=-D_2=D=\frac{\omega}{\pi}(1-e)+\frac{p}{\gamma}$$

$$p_1=-p_2=p=(1-e)\left\{\frac{1}{2}-\frac{\omega}{\pi\omega_j}\tan\left(\frac{\pi\omega_j}{2\omega}\right)\right\},\quad \gamma=\frac{\pi}{4\mu\omega}+\frac{1}{\omega_j}\tan\left(\frac{\pi\omega_j}{2\omega}\right)$$

式 (22) によって

$$C\cos\varphi+S\sin\varphi=Dd \tag{43}$$

となり，ダンパの自由行程が与えられているとき，式 (43) より位相角 φ の値が決定する。この値が存在し，したがって周期運動が起るのは $|\cos\varphi|<1$ ($|\sin\varphi|<1$) のときである。あるいはこれから

$$0<d\leq\frac{4a\omega^2}{j\pi|\omega_j^2-\omega^2|}\frac{1}{\left|\dfrac{\omega}{\pi}(1-e)+\dfrac{p}{\gamma}\right|}\sqrt{4\left\{\frac{\omega}{\pi}(1-e)+\frac{p}{\gamma}\right\}^2+(1+e)^2\omega^2} \tag{44}$$

が導かれる。

5.2 周期運動の安定性

等間隔振動では

$$-\alpha^*=\alpha=\omega_j^2\eta\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)-\frac{4a\omega^2}{j\pi}\sin\left(\frac{j\pi}{2}\right)\cos\varphi \tag{45}$$

式 (34), (35) あるいは式 (36), (37) は

$$\left.\begin{aligned}
&-\Delta\eta^{(2r+1)}=\frac{1}{\omega_j}(\Delta u_{+0}^{(2r)}+\alpha\Delta t^{(2r)})\sin\omega_j\tau+(\Delta\eta^{(2r)}-u_{+0}\Delta t^{(2r)})\cos\omega_j\tau-u_{-0}\Delta t^{(2r+1)}\\
&-\Delta u_{-0}^{(2r+1)}=(\Delta u_{+0}^{(2r)}+\alpha\Delta t^{(2r)})\cos\omega_j\tau-\omega_j(\Delta\eta^{(2r)}-u_{+0}\Delta t^{(2r)})\sin\omega_j\tau+\alpha\Delta t^{(2r+1)}\\
&-\Delta\eta^{(2r+1)}=\Delta v_{+0}^{(2r)}\tau+\Delta\eta^{(2r)}-v_{+0}\Delta t^{(2r)}-v_{-0}\Delta t^{(2r+1)}\\
&-\Delta v_{-0}^{(2r+1)}=\Delta v_{+0}^{(2r)},\quad \Delta u_{+0}^{(2r)}=\sigma_1\Delta u_{-0}^{(2r)}+\sigma_2\Delta v_{-0}^{(2r)},\quad \Delta v_{+0}^{(2r)}=\sigma_3\Delta u_{-0}^{(2r)}+\sigma_4\Delta v_{-0}^{(2r)}
\end{aligned}\right\}\tag{46}$$

となり，したがって式 (38) に相当する特性方程式は

$$\begin{vmatrix}
-u_{+0}\cos\omega_j\tau+(\alpha/\omega_j)\sin\omega_j\tau-u_{-0}\lambda & (1/\omega_j)\sin\omega_j\tau & 0 & 0 & 0 & \cos\omega_j\tau+\lambda\\
\omega_j u_{+0}\sin\omega_j\tau+\alpha\cos\omega_j\tau+\alpha\lambda & \cos\omega_j\tau & \lambda & 0 & 0 & -\omega_j\sin\omega_j\tau\\
-v_{+0}-v_{-0}\lambda & 0 & 0 & \tau & 0 & 1+\lambda\\
0 & 0 & 0 & 1 & \lambda & 0\\
0 & -1 & \sigma_1 & 0 & \sigma_2 & 0\\
0 & 0 & \sigma_3 & -1 & \sigma_4 & 0
\end{vmatrix}=0\tag{47}$$

展開すれば

$$\lambda^4+a_1\lambda^3+a_2\lambda^2+a_3\lambda+a_4=0\tag{48}$$

ここで係数は

$$a_1=c_{11}+c_{12}\cos(\pi\omega_j/\omega)+\left\{c_{13}+c_{14}\sin(\pi\omega_j/\omega)\right\}\alpha/u_{-0}$$

$$a_2=c_{21}+c_{22}\cos(\pi\omega_j/\omega)+c_{23}\sin(\pi\omega_j/\omega)+\left\{c_{24}\cos(\pi\omega_j/\omega)+c_{25}\sin(\pi\omega_j/\omega)\right\}\alpha/u_{-0}$$

$$a_3=c_{31}+c_{32}\cos(\pi\omega_j/\omega)+c_{33}\sin(\pi\omega_j/\omega)\,\alpha/u_{-0},\qquad a_4=c_{41}$$

$$c_{11}=\sigma_4+(1-\sigma_3+\sigma_4)/(1+\sigma_2+\sigma_4),\qquad c_{12}=\sigma_1+\left\{\sigma_1+\sigma_3-e(\sigma_3+\sigma_4)\right\}\Big/(1+\sigma_3+\sigma_4)$$

$$c_{13}=-\pi\sigma_3(1+\sigma_4)/\left\{\omega(1+\sigma_3+\sigma_4)\right\},\qquad c_{14}=-(1-\sigma_1)(1+\sigma_4)/\left\{\omega_j(1+\sigma_3+\sigma_4)\right\}$$

$$c_{21}=\left\{\sigma_4(1-\sigma_3+\sigma_4)+\sigma_1(\sigma_1+\sigma_2)-e\sigma_1(\sigma_3+\sigma_4)\right\}\Big/(1+\sigma_3+\sigma_4)$$

$$c_{22}=-e(1+\sigma_3+\sigma_4)+\left\{\sigma_1(1-\sigma_3+\sigma_4)+\sigma_4(\sigma_1+\sigma_3)-e\sigma_4(\sigma_3+\sigma_4)\right\}\Big/(1+\sigma_2+\sigma_4)$$

$$c_{23}=\pi\omega_j\sigma_3\left\{1-\sigma_1+\sigma_4+e(\sigma_3+\sigma_4)\right\}\Big/\left\{\omega(1+\sigma_3+\sigma_4)\right\}$$

$$c_{24}=-2\pi\sigma_3(1+\sigma_4)\Big/\left\{\omega(1+\sigma_3+\sigma_4)\right\}$$

$$c_{25}=-(1+\sigma_4)\left\{e(\sigma_3+\sigma_4)-(1-\sigma_1+\sigma_4)\right\}\Big/\left\{\omega_j(1+\sigma_3+\sigma_4)\right\}$$

$$c_{31}=-e(\sigma_3+\sigma_4)\left\{(\sigma_1+\sigma_3)-e(\sigma_3+\sigma_4)\right\}\Big/(1+\sigma_3+\sigma_4)$$

$$c_{32}=-e\sigma_4-e(1-\sigma_3+\sigma_4)(\sigma_3+\sigma_4)/(1+\sigma_3+\sigma_4)$$

$$c_{33}=-(1+\sigma_4)\left\{e(\sigma_3+\sigma_4)-\sigma_4\right\}\Big/\left\{\omega_j(1+\sigma_3+\sigma_4)\right\},\qquad c_{41}=e^2(\sigma_3+\sigma_4)$$

運動が安定であるためには，式 (48) の根 λ がすべて 1 より小さくなければならない。そのための条件は

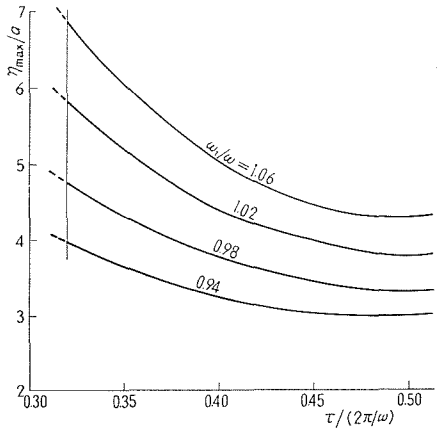
$$\left.\begin{aligned}
&1+a_1+a_2+a_3+a_4>0,\qquad 1-a_1+a_2-a_3+a_4>0\\
&(1-a_4)^2(1+a_4-a_2)-(a_1-a_3)(a_4a_1-a_3)>0\\
&a_3-a_1-2(1-a_4)<0,\qquad a_3-a_1+2(1-a_4)>0
\end{aligned}\right\}$$

である[19]。

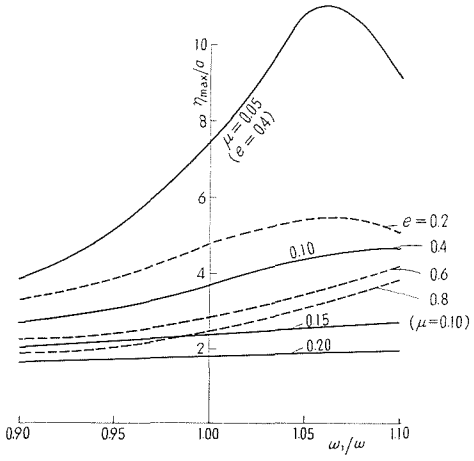
6. 数値計算と実験例

実際の問題では，基本（第1次）振動が最も重要なので，以上の理論にもとづいて計算した2, 3の例を図-4以下に示す。

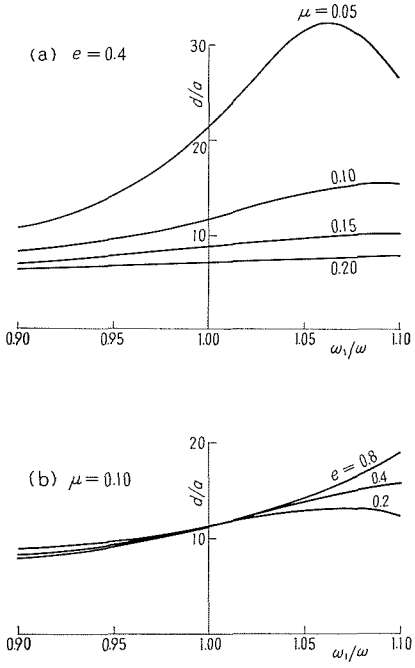
まず図-4は不等間隔比 $\tau/(2\pi/\omega)$ をかえたときの，共振点付近のはりの中央点の変位を示したものであるが，不等間隔比が小さい（衝突間隔が不そろいな）ものほど大きくなる。しかし式(26)の制約があって，不等間隔比に一定の限界があり，これより小さいものでは周期運動は起らない。図-5は不等間隔比が一定な運動におけるはりの変位，図-6は起振変位に対するダンパの自由行程比を示す。はりの変位はダンパの質量比，反発係数が大きいとき小さくなり，また自由



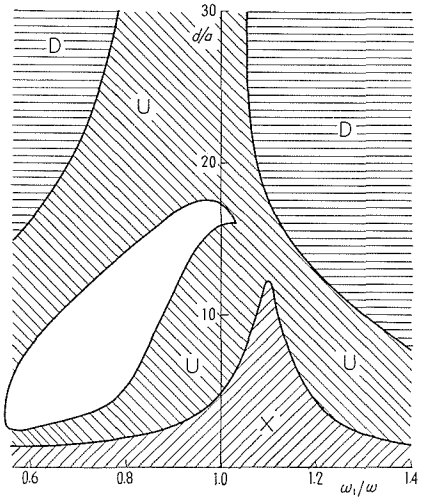
図—4 はりの最大変位（$\mu=0.1$, $e=0.4$）



図—5 はりの最大変位（$\tau/(2\pi/\omega)=0.46$）



図—6 ダンパの自由行程（$\tau/(2\pi/\omega)=0.46$）



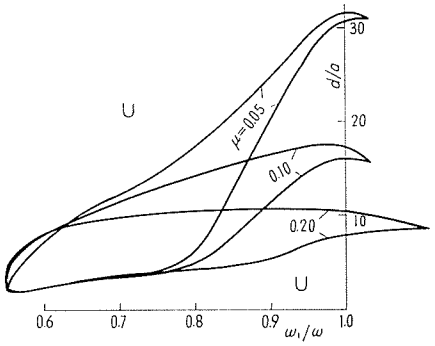
図—7 安定な周期的等間隔振動の存在領域（$\mu=0.1$, $e=0.4$）

行程はダンパの質量比が大きく，反発係数が小さいとき，小さい値に調整する必要があることがわかる。はりの最大変位は共振点 ($\omega_1/\omega=1$) よりずれて，振動数比 ω_1/ω が高い側で大きい値を示すが，ダンパの質量が加わってはりの固有振動数が低くなる（この場合 ω_1 は一定）からであると考えられる。

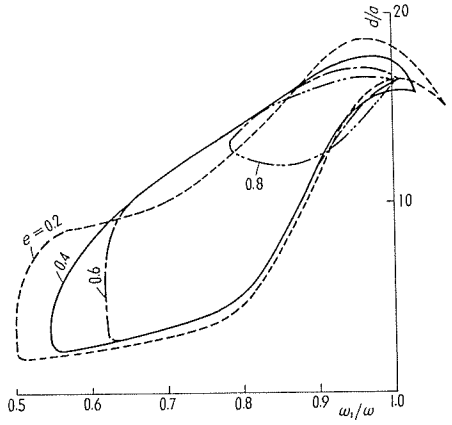
図-7 以下は等間隔振動について計算したものであるが，安定な周期運動はある決った $\omega_1/\omega-d/a$ 領域（たとえば図-7 の白い領域）内にしか存在しない。この領域を求めるためには，まず式 (44) によって横線の D 部分を除き，つぎに式 (26) によって計算の過程で斜線 X の領域を除く。さらに式 (49) によって斜線 U の領域が不安定領域となるので，これを除いて白い領域だけが残るのである。この領域は図-8, 9 に示したように，ダンパ質量比が大きくなるにしたがってダンパの自由行程が小さいところに存在し，かつ振動数比 (ω_1/ω) がいくらか高い方に伸びてくる。また反発係数が大きくなると領域は縮まり，共振点付近だけに限定されてくる。

図-10 と 11 の実線は安定な周期運動をするはりの最大変位を，破線は制振率（ダンパのないはりの変位に対するダンパ付きはりの変位の比）を示す。ダンパの自由行程が大きくなるにしたがって共振点付近に大きい変位が発生するが，制振率としては小さい値をもつにいたる。またダンパ質量が大きくなるとはりの最大変位，したがって制振率も小さくなってくる。

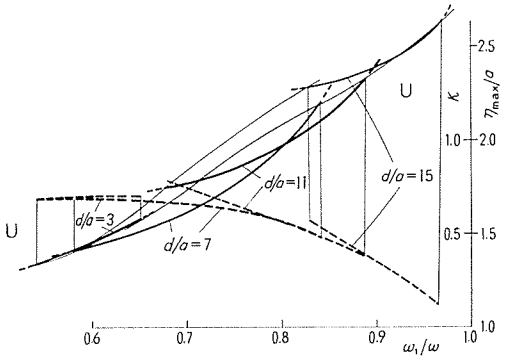
図-12 ははりに作用するインパルスを示したものであるが，当然ながらダンパの自由行程，



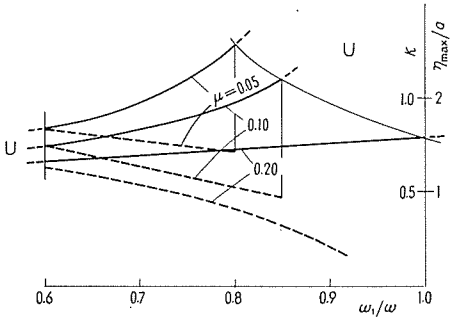
図—8　安定な周期的等間隔振動の存在領域 ($e=0.4$)



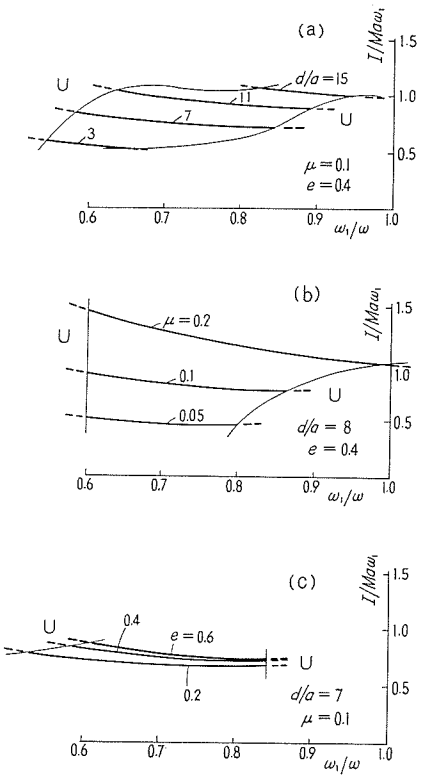
図—9　安定な周期的等間隔振動の存在領域 ($\mu=0.1$)



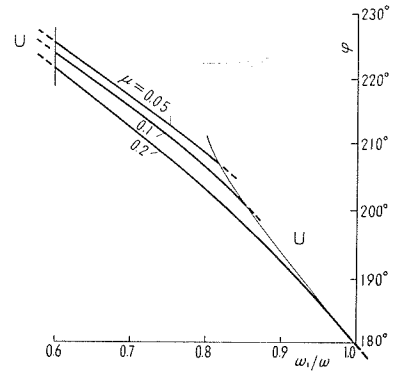
図—10　はりの最大変位と制振率 ($\mu=0.1$, $e=0.4$)



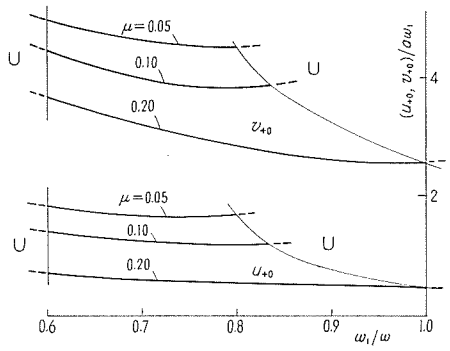
図—11　はりの最大変位と制振率 ($d/a=8$, $e=0.4$)



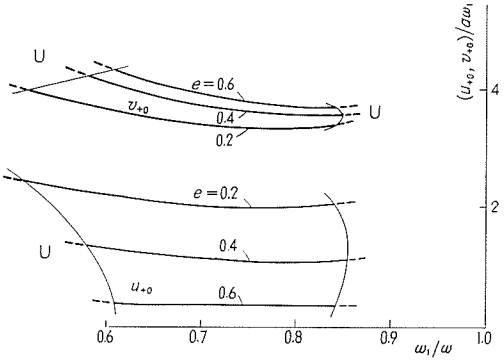
図—12 はりに作用するインパルス



図—13 起振力に対する衝突時刻の位相角 ($d/a=8$, $e=0.4$)



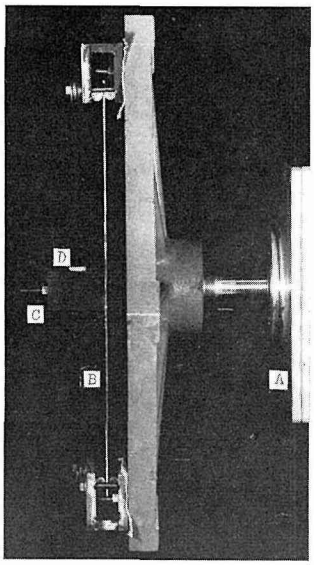
図—14 衝突直後の速度 ($d/a=8$, $e=0.4$)



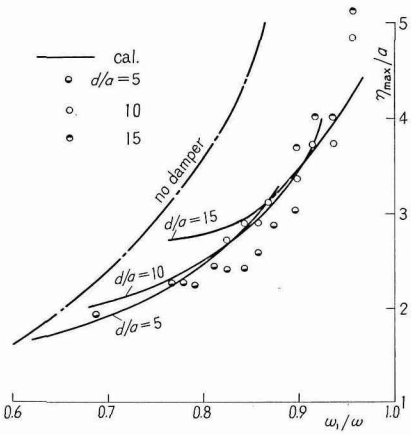
図—15 衝突直後の速度 ($d/a=7$, $\mu=0.1$)

質量比，反発係数が大きいほどインパルスは大きくなる。起振変位に対する衝突時刻の位相角は図-13のように，共振点でほぼ180°，ω_1/ω が小さくなるにしたがって200°を超すにいたる。位相角が180°以下の安定な周期運動は起りにくいように思われる。図-14, 15ははりとダンパの衝突（直後の）速度を示したものであるが，ダンパの質量比が小さいほど速度は大きく，反発係数が小さいとはりの速度が大きいのに対し，ダンパの速度は小さくなる。

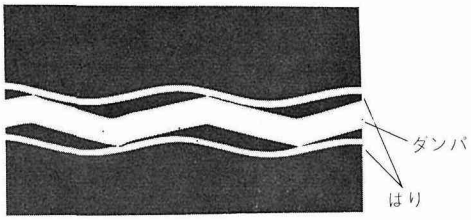
以上の理論とこれによる計算の結果を確かめるため，図-16のように長方形軟鋼板（B）（415×60×1.9 mm）の両端を単純支持し，その中央に鋼球（直径19 mm）を用いた衝撃ダンパ（D）を取り付け，支持端に電気油圧式加振機（A）（鷺宮製作所，EVH 5-100-5型）で起振変位を与えることによって起る振動を計測した。この実験ではダンパ容器（C）の質量（124 gr）ははり（鋼板）の質量に比して十分小さくすることができなかったので，計算に際してはこれをはりの質量の一部に換算しておいた。図-17はこのような実験によって得たはりの最大変位を計算結果と比較した一例である。安定な周期運動が起る領域を実験で決めるのは必ずしも容易でないが，両者の変位は比較的よく一致しており，上記理論と計算の



図—16　加振機とはり，ダンパ系
(A：加振機，B：はり，C：容器，D：ダンパ)



図—17　計算値と実験結果の比較
($\mu=0.07$, $e=0.3$)



図—18　等間隔振動の実験例 ($d/a=10.6$, $\mu=0.095$, $e=0.3$, $\omega_1/\omega=1.08$)

正しさが確認されると同時に，ダンパを用いない場合の変位（同図の鎖線）と比較してダンパが十分の防振効果をもつことがわかる。振動数比 ω_1/ω が1にちかづくにしたがって，実験値が理論値より大きくなる傾向にあるが，不安定な運動が生じているためと思われる。

なお図-18にはりとダンパの挙動を回転カメラで連続撮影した例をあげておいた。

結　　論

両支持端に起振変位が与えられて横振動する単純支持はりの中央に，衝撃ダンパを設けた場合の安定にして周期的な衝突振動を論じ，この運動が起る条件を明らかにした。そして実際問題として重要なはりの基本（1次）振動における共振点付近の運動とダンパの防振効果について数値計算を実施し，つぎの結論を得た。

(1)　等間隔衝突振動にちかいほど，はりの最大変位を小さくすることができる。

(2)　ダンパ質量比が大きくなるにしたがって，ダンパの自由行程が小さいとき安定な周期振動が起る領域が存在する。

(3)　はりとダンパ間の反発係数が小さいほど安定な領域は大きくなる。これに対してダンパ自由行程が小さく，質量比，反発係数が大きくなると，安定な運動の領域が狭くなることもあるが，はりの最大変位を小さくすることができる。

(4)　ダンパの自由行程，質量比，反発係数が大きい方が概してはりに作用するインパルスは大きい。

(5)　ダンパ質量比が小さいほどはりとダンパの衝突速度は大きくなる。また反発係数が小さいとき，はりの速度が大きいのに対して，ダンパの速度は小さくなる。

(6)　長方形鋼板の両端を単純支持し，その中央に鋼球を用いた衝撃ダンパを取り付けて実験し，

理論の結果と比較したところかなりよく一致した。

文　　献

1) Paget, A. L.: Engineering, **17** (1937).
2) Lieber, P., and Jensen, D. P.: Trans. ASME, **67** (1945), p. 523.
3) Grubine, C.: Trans. ASME, **78** (1956), p. 373.
4) Arnold, R. N.: 9th Intern. Congr. Appl. Mech. (1956), p. 407.
5) Warburton, G. B.: Trans. ASME, **79** (1957), p. 322.
6) Кобринский, A. E.: Izv. Akad. Nauk. SSSR, **5** (1957), p. 15.
7) Kaper, H. G.: Appl. Sci. Res., **10** (1961), p. 369.
8) Kuphal, K.: Z. AMM, **45**-2/3 (1965), p. 73.
9) Kuphal, K.: Z. AMM, **45**-6 (1965), p. 419.
10) Sadek, M. M.: Proc. Inst. Mech. Engers., **180** 180 (I)-38 (1966), p. 895.
11) Sadek, M. M., and Mills, B.: Proc. 7th Intern. MTDR. Conf. Univ. Birmingham (1966), p. 234.
12) Dittrich, H.: Ing. Arch. **35** (1966), p. 150.
13) 粟屋正春, 西口　護: 日大工学研究所彙報 (1966), p. 287.
14) Masri, S. F., and Caughey, T. K.: Trans. ASME, **33**-3 (1966), p. 586.
15) Egle, D. M.: ASME Paper, 67-Vibr.-10 (1967), p. 1.
16) Masri, S. F.: Exptl. Mech., **7**-2 (1967), p. 49.
17) Masri, S. F.: J. Acoust. Soc. Amer., **45**-5 (1969), p. 1111.
18) 得丸英勝, 小寺　忠: 機械学会論文集 **35**-277 (1969), p. 1864.
19) Jury, E. I., and Gupta, S. C.: Regelungstechnik, **10** (1962), p. 494.