

Title	外部仕事の熱力学的検討(第1報):外部との熱交換と内部摩擦による発熱の影響の分離
Author(s)	谷口, 博; 若井, 和憲
Citation	北海道大學工學部研究報告, 58, 53-74
Issue Date	1970-12-19
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/41021
Туре	bulletin (article)
File Information	58_53-74.pdf



外部仕事の熱力学的検討(第1報)

-----外部との熱交換と内部摩擦による発熱の影響の分離-----

谷 口 博* 若 井 和 憲* (昭和45年8月31日受理)

Study on Thermodynamical External Work (lst Report)

-----The Influence of External Heat Exchange and Internal Heat Generation from Friction------

> Hiroshi TANIGUCHI Kazunori WAKAI (Received August 31, 1970)

Abstract

In a study of the thenmodynamical performance of a heat engine, the calculation of the external work is of considerable importance. Generally, this calculation of external work is done by considering the external heat exchange or the internal heat generation arising from friction. In small type heat engines or large type gas turbines with internal cooling systems, in which a considerable amount of external heat exchange and internal friction exsists, the above-mentioned factors should be considered at the same time.

In this paper, the authors have dealt with external heat exchange and internal heat generation from friction separately to study their respective influences on the external work. For the purpose mentioned above, a non-dimensional factor x is introduced to express the external heat exchange and also, in the case of a steady-flow process and a non-flow process, the relations among the external work, the external heat exchange and the internal heat generation from friction was analyzed by utilization of an ideal gas as a working medium.

1. まえがき

熱機関について熱力学的検討を行なう場合,外部仕事を求めることが重要な課題の一つである が,通常簡単のため,可逆変化(内部摩擦のない場合など)または断熱変化(外部との熱交換のな い場合)を仮想して解析することが多い^{1),2)}。しかし,小型ガスタービン,高速小型内燃機関のご とく比較的外部放熱と内部摩擦の多い場合,大型ガスタービンでも高温ガスを使用し内部を冷却 する場合,MHD発電ダクトで周囲を冷却する場合などでは,外部との熱交換と内部摩擦を同時 に考慮しなければ不都合である。

本研究はこの点について行なわれたもので,外部との熱交換と内部摩擦による発熱を同時に考慮し,両者の影響を分離して検討することとした。解析に際しては,完全ガスを作動媒体に選び, 外部との熱交換量を表わす無次元数 x³⁾を導入して,定常流動過程,不流動過程について外部仕 事,熱交換量,内部摩擦発生熱量の関係を求め,入口エンタルビまたは内部エネルギーで除し無 次元化して取扱った。

2

2. 外部仕事,外部との熱交換量,内部摩擦による発生熱量の解析

作動媒体は完全ガスとし,外部との熱交換と内部摩擦による発熱を同時に考慮し,定常流動過 程,不流動過程について解析することとした。

2.1 可逆過程と非可逆過程の組合わせによる解析

解析に際しては、定常流動過程,不流動過程とも経路を可逆過程と非可逆過程に分けて検討し、 図1のごとく1から2までの経路を可逆断熱変化,等圧または等容変化,絞り過程の組合わせと 考える³⁾。図1の経路①,②,③,④,⑤について,作動媒体の単位重量当たりの外部仕事,外



部との熱交換量,内部摩擦による発生熱量を求めるが,まず,作動媒体の速度を無視できる場合 について検討し,また,とくに経路③については図2のごとく経路を分割し,その分割数が無限 大となった場合の極限を考えることとした。

(1) 経路① (1~4"~4~2) の場合

図1の1~4"は可逆断熱変化であり、外部仕事は

$$Aw_{es14''} = C_{p}(T_{1} - T_{4''}) = \frac{k}{k-1}AR(T_{1} - T_{4''})$$
$$= \frac{k}{k-1}ART_{1}\left\{1 - x\gamma^{\frac{k-1}{k}} - (1 - x)\gamma^{\frac{n-1}{n}}\right\}$$
(1)

$$Aw_{en14''} = C_v(T_1 - T_{4''}) = \frac{1}{k-1}AR(T_1 - T_{4''})$$
$$= \frac{1}{k-1}ART_1\left\{1 - x\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-1}(1-x)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1}\right\}$$
(2)

ただし A: 仕事の熱当量 w_{es} : 定常流動過程の外部仕事 w_{en} : 不流動過程の外部仕事 C_p : 定圧比熱 C_v : 定容比熱 k: 比熱比 n: ポリトロープ指数 R: ガス定数 T: 温度 P: 圧力 V: 容積 x: 外部との熱交換量を表わす無次元数 $= \frac{T_{2''} - T_{4''}}{T_{2''} - T_{2'}} = \frac{T_{3''} - T_{1''}}{T_{1'} - T_{1''}}$ r: 圧力比 $= P_2/P_1 \epsilon$: 容積比 $= V_2/V_1$ 4"~4 は絞り過程であり、内部摩擦による発生熱量は

$$Q_{f_{54''4}} = Aw_{f_{54''4}} = ART_{4''}\log e\frac{P_{4''}}{P_4}$$
$$= \frac{k}{k-1}ART_1\left\{x\gamma^{\frac{k-1}{k}} + (1-x)\gamma^{\frac{n-1}{n}}\right\}\log e\left\{x + (1-x)\gamma^{\frac{n-1}{n} - \frac{k-1}{k}}\right\}$$
(3)

$$Q_{fn4''4} = Aw_{fn4''4} = ART_{4''}\log e \frac{V_4}{V_{4''}} \\ = \frac{1}{k-1}ART_1 \Big\{ x \Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)^{k-1} + (1-x)\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)^{n-1} \Big\} \log e \Big\{ x + (1-x)\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)^{n-k} \Big\}$$
(4)

ただし Q_{fs}: 定常流動過程の内部摩擦発生熱量 w_{fs}: 同内部摩擦仕事 Q_{fn}: 不流動過程の 内部摩擦発生熱量 w_{fn}: 同内部摩擦仕事

4~2 は等圧または等容変化であり、外部との熱交換量は

$$Q_{es42} = C_p(T_2 - T_4) = \frac{k}{k-1} AR(T_2 - T_4)$$

= $\frac{k}{k-1} ART_1 x \left(r^{\frac{n-1}{n}} - r^{\frac{k-1}{k}} \right)$ (5)

$$Q_{en42} = C_{v}(T_{2} - T_{4}) = \frac{1}{k-1}AR(T_{2} - T_{4})$$
$$= \frac{1}{k-1}ART_{1}x\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-1}\right\}$$
(6)

- ただし Qes: 定常流動過程の外部熱交換量 Qen: 不流動過程の外部熱交換量
- (2) 経路② (1~4"~4~2) の場合
- 図1の1~4"は経路①と同じであり、外部仕事は式(1)または(2)により求められる。 4"~4'は等圧または等容変化であり、外部との熱交換量は

$$Q_{es4''4} = C_p(T_{4'} - T_{4''}) = C_p(T_2 - T_4)$$
(7)

$$Q_{en4''4} = C_{v}(T_{4'} - T_{4''}) = C_{v}(T_{2} - T_{4})$$
(8)

となり、式(5)または(6)と同じになる。

4'~2 は絞り過程であり、内部摩擦による発生熱量は

$$Q_{J_{54'2}} = A_{f_{54'2}} = ART_{4'} \log e \frac{P_{4'}}{P_2}$$

= $\frac{k}{k-1} ART_1 r^{\frac{n-1}{n}} \log e \left\{ x + (1-x)r^{\frac{n-1}{n} - \frac{k-1}{k}} \right\}$ (9)

$$Q_{fn_{4'2}} = A_{fn_{4'2}} = ART_{4'} \log e \frac{V_2}{V_{4'}} \\ = \frac{1}{k-1} ART_1 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1} \log e \left\{ x + (1-x) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-k} \right\}$$
(10)

(3) 経路③ (1~2, ポロリトロープ指数一定)の場合
 図2の1~2を分割し、その分割数が無限大となった場合の極限を考える。
 (3a) (1~8"~8~6~12"~12~10...2)の1~8"、6~12"... は可逆断熱変化であり、外部仕事は

$$Aw_{es_{12}} = \lim_{m \to \infty} C_p\{(T_1 - T_{8''}) + (T_6 - T_{12''})...\}$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{k}{k-1} AR\{(T_1 - T_{8''}) + (T_6 - T_{12''})...\}$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{k}{k-1} ART_1 \left\{ 1 - x\gamma^{\frac{1}{m}\frac{k-1}{k}} - (1-x)\gamma^{\frac{1}{m}\frac{n-1}{n}} \right\} \frac{\gamma^{\frac{n-1}{n}} - 1}{\gamma^{\frac{1}{m}\frac{n-1}{n}} - 1}$$

$$= \left\{ x\frac{n}{n-1} + (1-x)\frac{k}{k-1} \right\} ART_1 \left\{ 1 - \gamma^{\frac{n-1}{n}} \right\}$$
(11)

$$Aw_{\varepsilon n_{12}} = \lim_{m \to \infty} C_a \{ (T_1 - T_{\varepsilon'}) + (T_6 - T_{12'}) \dots \}$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{1}{k - 1} ART_1 \{ 1 - x \ \frac{1}{\varepsilon} \}^{\frac{k - 1}{m}} - (1 - x) \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{n - 1}{m}} \} \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{n - 1} - 1}{\left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{n - 1}{m}} - 1}$$

$$= \{ x \frac{1}{n - 1} + (1 - x) \frac{1}{k - 1} \} ART_1 \{ 1 - \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{n - 1} \}$$
(12)

ただし m: 分割数
$$r^{\frac{1}{m}} = P_1/P_6 = P_6/P_{10}...$$
 $\varepsilon^{\frac{1}{m}} = V_6/V_1 = V_{10}/V_6...$
 $x = \frac{T_{6''} - T_{8'}}{T_{6''} - T_{6'}} = \frac{T_{10''} - T_{12''}}{T_{10''} - T_{10'}}... = \frac{T_{7''} - T_{5''}}{T_{5'} - T_{5''}} = \frac{T_{11''} - T_{9''}}{T_{9'} - T_{9''}}...$

8"~8, 12"~12... は絞り過程であり、内部摩擦による発生熱量は

$$Q_{fs_{12}} = Aw_{fs_{12}} = \lim_{m \to \infty} AR \Big\{ T_{8''} \log e \frac{P_{8''}}{P_8} + T_{12''} \log e \frac{P_{12''}}{P_{12}} \dots \Big\} \\ = \lim_{m \to \infty} \frac{k}{k-1} ART_1 \Big\{ x \gamma^{\frac{1}{m} \frac{k-1}{k}} + (1-x) \gamma^{\frac{1}{m} \frac{n-1}{n}} \Big\} \log e \Big\{ x + (1-x) \gamma^{\frac{1}{m} (\frac{n-1}{n} - \frac{k-1}{k})} \Big\} \frac{\gamma^{\frac{n-1}{n}} - 1}{\gamma^{\frac{1}{m} \frac{n-1}{n}} - 1} \\ = \Big(\frac{n}{n-1} - \frac{k}{k-1} \Big) ART_1 (1-x) \Big(1 - \gamma^{\frac{n-1}{n}} \Big)$$
(13)

$$Q_{fn_{12}} = Aw_{fn_{12}} = \lim_{m \to \infty} AR \Big\{ T_{8''} \log e \frac{V_8}{V_{8''}} + T_{12''} \log e \frac{T_{12}}{T_{12''}} \Big\}$$
$$= \lim_{m \to \infty} \frac{1}{k-1} ART_1 \Big\{ x \Big(\frac{1}{\varepsilon} \Big)^{\frac{k-1}{m}} + (1-x) \Big(\frac{1}{\varepsilon} \Big)^{\frac{n-1}{m}} \Big\} \log e \Big\{ x + (1-x) \Big(\frac{1}{\varepsilon} \Big)^{\frac{n-k}{m}} \Big\} \frac{\Big(\frac{1}{\varepsilon} \Big)^{n-1} - 1}{\Big(\frac{1}{\varepsilon} \Big)^{\frac{n-1}{m}} - 1}$$
$$= \Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{k-1} \Big) ART_1 (1-x) \Big\{ 1 - \Big(\frac{1}{\varepsilon} \Big)^{n-1} \Big\}$$
(14)

8~6, 12~10... は等圧または等容変化であり、外部との熱交換量は

$$Q_{e_{s12}} = \lim_{m \to \infty} C_{p} \{ (T_{6} - T_{8}) + (T_{10} - T_{12}) ... \}$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{k}{k - 1} AR \{ (T_{6} - T_{8}) + (T_{10} - T_{12}) ... \}$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{k}{k - 1} ART_{1} x \left(\gamma^{\frac{1}{m} \frac{n - 1}{n}} - \gamma^{\frac{1}{m} \frac{k - 1}{k}} \right) \frac{\gamma^{\frac{n - 1}{n}} - 1}{\gamma^{\frac{1}{m} \frac{n - 1}{n}} - 1}$$

$$= \left(\frac{n}{n - 1} - \frac{k}{k - 1} \right) ART_{1} x \left(1 - \gamma^{\frac{n - 1}{n}} \right)$$
(15)

$$Q_{en_{12}} = \lim_{m \to \infty} C_{\mathbf{v}} \{ (T_6 - T_8) + (T_{10} - T_{12}) \dots \}$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{1}{k - 1} ART_1 x \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-1}{m}} - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{k-1}{m}} \right\} \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1} - 1}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-1}{m}} - 1}$$

$$= \left(\frac{1}{n - 1} - \frac{1}{k - 1}\right) ART_1 x \left\{ 1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1} \right\}$$
(16)

(3b) (1~8"~8'~6~12"~12'~10...2)の1~8",6~12"は(3a)と同じであり、外部仕事は式(11)または(12)により求められる。

8"~8', 12"~12' は等圧または等容変化であり、外部との熱交換量は

$$Q_{es_{12}} = \lim_{m \to \infty} C_{p} \{ (T_{8'} - T_{8''}) + (T_{12'} - T_{12''}) \dots \}$$

$$= \lim_{m \to \infty} C_{p} \{ (T_{6} - T_{8}) + (T_{10} - T_{12}) \dots \}$$

$$Q_{en_{12}} = \lim_{m \to \infty} C_{v} \{ (T_{8'} - T_{8''}) + (T_{12'} - T_{12''}) \dots \}$$

$$= \lim_{m \to \infty} C_{v} \{ (T_{6} - T_{8}) + (T_{10} - T_{12}) \dots \}$$
(18)

となり、式(15)または(16)と同じになる。

8'~6, 12'~10... は絞り過程であり, 内部摩擦による発生熱量は

$$Q_{fs12} = Aw_{fs12} = \lim_{m \to \infty} AR \left\{ T_{8'} \log e \frac{P_{8'}}{P_6} + T_{12'} \log e \frac{P_{12'}}{P_{10}} \right\}$$
$$= \lim_{m \to \infty} \frac{k}{k-1} ART_1 \gamma^{\frac{1}{m} \frac{n-1}{n}} \log e \left\{ x + (1-x) \gamma^{\frac{1}{m} \frac{n-1}{n} - \frac{k-1}{k}} \right\} \frac{\gamma^{\frac{n-1}{n}} - 1}{\gamma^{\frac{1}{m} \frac{n-1}{n}} - 1}$$
$$= \left(\frac{n}{n-1} - \frac{k}{k-1} \right) ART_1 (1-x) \left(1 - \gamma^{\frac{n-1}{n}} \right)$$
(19)

$$Q_{fn_{12}} = Aw_{fn_{12}} = \lim_{m \to \infty} AR \left\{ T_{8'} \log e \frac{V_6}{V_{8'}} + T_{12'} \log e \frac{V_{10}}{V_{12'}} \dots \right\}$$
$$= \lim_{m \to \infty} \frac{1}{k-1} ART_1 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-1}{m}} \log e \left\{ x + (1-x) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-k}{m}} \right\} \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1} - 1}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-1}{m}} - 1}$$
$$= \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{k-1}\right) ART_1 (1-x) \left\{ 1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1} \right\}$$
(20)

となり、式(13)または(14)と同じになる。

(3c) (1~7'~7''~6~11'~10...2)の1~7',6~11'... は絞り過程であり、内部摩擦による 発生熱量は

$$Q_{fs_{12}} = Aw_{fs_{12}} = \lim_{m \to \infty} AR \left\{ T_{i} \log e \frac{P_{1}}{P_{7'}} + T_{6} \log e \frac{P_{6}}{P_{11'}} \dots \right\}$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{-k}{k-1} ART_{1} \log e \left\{ x + (1-x)r^{\frac{1}{m}\left(\frac{k-1}{k} - \frac{n-1}{n}\right)} \right\} \frac{r^{\frac{n-1}{n}} - 1}{r^{\frac{1}{m}} - 1}$$

$$= \left(\frac{n}{n-1} - \frac{k}{k-1} \right) ART_{1}(1-x) \left(1 - r^{\frac{n-1}{n}} \right) \qquad (21)$$

$$Q_{fn_{12}} = Aw_{fn_{12}} = \lim_{m \to \infty} AR \left\{ T_{1} \log e \frac{V_{7'}}{V_{1}} + T_{6} \log e \frac{V_{11'}}{V_{6}} \dots \right\}$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{-1}{k-1} ART_{1} \log e \left\{ x + (1-x) \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{k-n}{m}} \right\} \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{n-1} - 1}{\left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{n-1}{m}} - 1}$$

$$= \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{k-1}\right) ART_{1}(1-x) \left\{1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1}\right\}$$
(22)

となり、式(13)または(14)と同じになる。

7'~7", 11'~11"…は等圧または等容変化であり、外部との熱交換量は

$$Q_{en12} = \lim_{m \to \infty} C_p \{ (T_{7''} - T_{7'}) + (T_{11''} - T_{11'}) \dots \}$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{k}{k-1} AR \{ (T_{7''} - T_{7'}) + (T_{11''} - T_{11'}) \dots \}$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{k}{k-1} ART_1 x \left\{ r^{\frac{1}{m} \left(\frac{n-1}{n} - \frac{k-1}{k} \right)} - 1 \right\} \frac{r^{\frac{n-1}{n}} - 1}{r^{\frac{1}{m} \frac{n-1}{n}} - 1}$$

$$= \left(\frac{n}{n-1} - \frac{k}{k-1} \right) ART_1 x \left\{ 1 - r^{\frac{n-1}{n}} \right\}$$

$$Q_{en12} = \lim_{m \to \infty} C_v \{ (T_{7''} - T_{7'}) + (T_{11''} - T_{11'}) \dots \}$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{1}{k-1} ART_1 x \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{n-k}{m}} - 1 \right\} \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{n-1} - 1}{\left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{n-1}{m}} - 1}$$

$$= \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{k-1} \right) ART_1 x \left\{ 1 - \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{n-1} \right\}$$

$$(24)$$

となり、式(15)または(16)と同じになる。

7^{*u*}~6, 11^{*u*}~10... は可逆断熱変化であり、外部仕事は

$$Aw_{es12} = \lim_{m \to \infty} C_p\{(T_{7''} - T_6) + (T_{11''} - T_{10})...\}$$

 $= \lim_{m \to \infty} \frac{k}{k-1} \{(T_{7''} - T_6) + (T_{11''} - T_{10})...\}$
 $= \lim_{m \to \infty} \frac{k}{k-1} ART_1 \{(1-x) + x\gamma^{\frac{1}{m}(\frac{n-1}{n} - \frac{k-1}{k})} - \gamma^{\frac{1}{m}\frac{n-1}{n}}\} \frac{\gamma^{\frac{n-1}{n}} - 1}{\gamma^{\frac{1}{m}\frac{n-1}{n}} - 1}$
 $= \{x\frac{n}{n-1} + (1-x)\frac{k}{k-1}\} ART_1 (1-\gamma^{\frac{n-1}{n}})$
(25)
 $Aw_{en12} = \lim C_v\{(T_{7''} - T_6) + (T_{11''} - T_{10})...\}$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{1}{k-1} AR\{(T_{T''} - T_{6}) + (T_{11''} - T_{10})...\}$$

$$= \lim_{m \to \infty} \frac{1}{k-1} ART_{1}\{(1-x) + x\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-k}{m}} - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-1}{m}}\} \frac{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1} - 1}{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-1}{m}} - 1}$$

$$= \left\{x\frac{1}{n-1} + (1-x)\frac{1}{k-1}\right\} ART_{1}\left\{1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1}\right\}$$
(26)

となり、式(11)または(12)と同じになる。

(3d) (1~7~7"~6~11~11"~10…2)の1~7,6~11…は等圧または等容変化であり、外部との熱交換量は

$$Q_{e_{\$12}} = \lim_{m \to \infty} C_p \{ (T_7 - T_1) + (T_6 - T_{11}) ... \}$$

$$= \lim_{m \to \infty} C_p \{ (T_{7''} - T_{7'}) + (T_{11''} - T_{11'}) ... \}$$

$$Q_{e_{n12}} = \lim_{m \to \infty} C_v \{ (T_7 - T_1) + (T_6 - T_{11}) ... \}$$

$$= \lim_{m \to \infty} C_v \{ (T_{7''} - T_7) + (T_{11''} - T_{11'}) ... \}$$
(28)

となり,式(15)または(16)と同じになる。

7~7", 11~11"…は絞り過程であり、内部摩擦による発生熱量は

となり,式(13)または(14)と同じになる。

7"~6, 11"~10...は(<u>3c</u>)と同じであり、外部仕事は式(25)または(26)により求められ、式(11)または(12)と同じになる。

すなわち,分割数が無限大の場合,経路③の($\overline{3a}$),($\overline{3b}$),($\overline{3c}$),($\overline{3d}$)の外部仕事,熱交換量, 内部摩擦発生熱量は互いに一致しており,式(11)または(12),式(15)または(16),式(13)または (14)にて求められることがわかった。

(4) 経路④(1~3'~3''~2)の場合

図1の1~3'は絞り過程であり、内部摩擦による発生熱量は

$$Q_{fs_{13'}} = Aw_{fs_{13'}} = ART_1 \log e \frac{P_1}{P_{3'}} = \frac{-k}{k-1} ART_1 \log e \left\{ x + (1-x)\gamma^{\frac{k-1}{k} - \frac{n-1}{n}} \right\}$$
(31)

$$Q_{Jn13'} = Aw_{fn13'} = ART_1 \log e \frac{V_{3'}}{V_1} \\ = \frac{-1}{k-1} ART_1 \log e \left\{ x + (1-x) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-n} \right\}$$
(32)

3'~3"は等圧または等容変化であり、外部との熱交換量は

$$Q_{ess's''} = C_p(T_{s''} - T_{s'}) = \frac{k}{k-1} AR(T_{s''} - T_{s'})$$
$$= \frac{k}{k-1} ART_1 x \left(r^{\frac{n-1}{n} - \frac{k-1}{k}} - 1 \right)$$
(33)

$$Q_{cn3'3''} = C_{v}(T_{3''} - T_{3'}) = \frac{1}{k-1}AR(T_{3''} - T_{3'})$$
$$= \frac{1}{k-1}ART_{1} x \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-k} - 1 \right\}$$
(34)

3"~2は可逆断熱変化であり、外部仕事は

$$Aw_{es_{3''2}} = C_{p}(T_{3''} - T_{2}) = \frac{k}{k-1}AR(T_{3''} - T_{2})$$
$$= \frac{k}{k-1}ART_{1}\left\{(1-x) + x\gamma^{\frac{n-1}{n} - \frac{k-1}{k}} - \gamma^{\frac{n-1}{n}}\right\}$$
(35)

$$Aw_{en3''2} = C_{v}(T_{3''} - T_{2}) = \frac{1}{k-1}AR(T_{3''} - T_{2})$$
$$= \frac{1}{k-1}ART_{1}\left\{(1-x) + x\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-k} - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1}\right\}$$
(36)

(5) 経路 ⑤(1~3~3"~2)の場合

図1の1~3は等圧または等容変化であり、外部との熱交換量は

$$Q_{es_{13}} = C_p(T_3 - T_1) = C_p(T_{3''} - T_{3'})$$
(37)

$$Q_{en13} = C_{v}(T_{3} - T_{1}) = C_{v}(T_{3''} - T_{3'})$$
(38)

となり、式(33)または(34)と同じになる。

3~3"は絞り過程であり、内部摩擦による発生熱量は

$$Q_{fs_{33''}} = Aw_{fs_{33''}} = ART_3 \log e \frac{P_3}{P_{3''}} \\ = \frac{-k}{k-1} ART_1 \Big\{ (1-x) + x\gamma^{\frac{n-1}{n} - \frac{k-1}{k}} \Big\} \log e \Big\{ x + (1-x)\gamma^{\frac{k-1}{k} - \frac{n-1}{n}} \Big\}$$
(39)

$$Q_{fn33''} = Aw_{fn33''} = ART_3 \log e \frac{V_{3''}}{V_3} \\ = \frac{-1}{k-1} ART_1 \left\{ (1-x) + x \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-k} \right\} \log e \left\{ x + (1-x) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-n} \right\}$$
(40)

3"~2は経路④と同じであり、外部仕事は式(35)または(36)により求められる。

上記図1の各経路①,②,③,④,⑤について任意のxの条件に対し,外部仕事,熱交換量, 内部摩擦発生熱量がそれぞれ異なっているので,単純化した経路①,②,④,⑤による解析は 経路により差があり不都合であることがわかった。ゆえに,熱力学的検討を行なう場合,経路③ による解析が望ましいものと思われる。

しかし, x=0の条件(外部との熱交換のない特別な場合)に対し,外部仕事は各経路について同じ値となる。

$$Aw_{es} = \frac{k}{k-1} ART_1 \left(1 - \gamma^{\frac{n-1}{n}} \right) \tag{41}$$

$$Aw_{en} = \frac{1}{k-1} ART_1 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1} \right\}$$
(42)

また,外部仕事より熱交換量を差引くと,任意の x の条件に対しても,各経路について同じ値となる。

$$Aw_{es} - Q_{es} = \frac{k}{k-1} ART_1 \left(1 - \gamma^{\frac{n-1}{n}} \right)$$
(43)

$$Aw_{en} - Q_{en} = \frac{1}{k-1} ART_1 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1} \right\}$$

$$\tag{44}$$

2.2 熱力学第1法則による検討

前節にて求めた定常流動過程,不流動過程の外部仕事,外部との熱交換量,内部摩擦による発 生熱量の相互関係を熱力学第1法則により検討することとした⁴⁾。図1の1から2までの各経 路に対し,つぎの平衡式が成立する。

$$Aw_{es} + Aw_{fs} = C_{p}(T_{1} - T_{2}) + Q_{es} + Q_{fs}$$

$$= \frac{k}{k-1}AR(T_{1} - T_{2}) + Q_{es} + Q_{fs}$$

$$Aw_{en} + Aw_{fn} = C_{p}(T_{1} - T_{2}) + Q_{en} + Q_{fn}$$
(45)

$$w_{en} + Aw_{fn} = C_v(T_1 - T_2) + Q_{en} + Q_{fn}$$

= $\frac{1}{k-1}AR(T_1 - T_2) + Q_{en} + Q_{fn}$ (46)

また、一般に外部仕事と内部摩擦仕事の和は $-\int_1^2 v dp$ として求められるので、変化経路が経路 ③ のごとくポリトロープ指数一定の条件では

$$Aw_{es} + Aw_{fs} = -\int_{1}^{2} v dp = \frac{n}{n-1} AR(T_{1} - T_{2})$$
(47)

$$Aw_{en} + Aw_{jn} = -\int_{1}^{2} p dv = \frac{1}{n-1} AR(T_{1} - T_{2})$$
(48)

となる。式(45)または(46)に式(47)または(48)を代入して,熱交換量と内部摩擦発生熱量の和を 求めると

$$Q_{es} + Q_{fs} = \left(\frac{n}{n-1} - \frac{k}{k-1}\right) AR(T_1 - T_2)$$
(49)

$$Q_{en} + Q_{fn} = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{k-1}\right) AR(T_1 - T_2)$$
(50)

ここで、式(49)または(50)の熱交換量を分離するため、無次元数2を導入すると

$$Q_{es} = \left(\frac{n}{n-1} - \frac{k}{k-1}\right) ARz (T_1 - T_2) = \left(\frac{n}{n-1} - \frac{k}{k-1}\right) ART_1 z \left(1 - r^{\frac{n-1}{n}}\right)$$
(51)

$$Q_{en} = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{k-1}\right) ARz (T_1 - T_2) = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{k-1}\right) ART_1 z \left\{1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1}\right\}$$
(52)

tett $z = \frac{Q_{es}}{Q_{es} + Q_{fs}} = \frac{Q_{en}}{Q_{en} + Q_{fn}}$

となり,経路③の場合,前節の無次元数 $x \ge z$ が等しくなることがわかる。外部との熱交換量, 内部摩擦による発生熱量は

$$Q_{es} = \left(\frac{n}{n-1} - \frac{k}{k-1}\right) ART_1 x \left(1 - \gamma^{\frac{n-1}{n}}\right)$$
(53)

$$Q_{fs} = \left(\frac{n}{n-1} - \frac{k}{k-1}\right) ART_1(1-x) \left(1 - \gamma^{\frac{n-1}{n}}\right)$$
(54)

$$Q_{en} = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{k-1}\right) ART_1 x \left\{1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1}\right\}$$
(55)

$$Q_{fn} = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{k-1}\right) ART_1(1-x) \left\{1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1}\right\}$$
(56)

外部仕事を求めるため、式(45)または(46)に式(53)または(55)を代入すると

$$Aw_{es} = \left(\frac{n}{n-1} - \frac{k}{k-1}\right) ART_1 x \left(1 - \gamma^{\frac{n-1}{n}}\right) + \frac{k}{k-1} ART_1 \left(1 - \gamma^{\frac{n-1}{n}}\right)$$
$$= \left\{x\frac{n}{n-1} + (1-x)\frac{k}{k-1}\right\} ART_1 \left(1 - \gamma^{\frac{n-1}{n}}\right)$$
(57)

$$Aw_{en} = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{k-1}\right) ART_{1}x \left\{1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1}\right\} + \frac{1}{k-1}ART \left\{1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1}\right\}$$
$$= \left\{x\frac{1}{n-1} + (1-x)\frac{1}{k-1}\right\} ART_{1} \left\{1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{n-1}\right\}$$
(58)

となり,式(11)または(12)と同じになる。この結果は前節の経路③の外部仕事を求める式が妥当 であることを表わしている。

2.3 入口エンタルピまたは内部エネルギーによる無次元化

外部仕事,外部との熱交換量,内部摩擦による発生熱量を検討する場合,無次元化すると好都 合である。また,可逆断熱変化に対する変化過程のずれを表わすため,次式のポリトロープ比*€* または *Ç* を使用することとした⁴⁾。 谷口 博・若井和憲

$$\hat{\xi} = \frac{k}{k-1} / \frac{n}{n-1} = \frac{k(n-1)}{(k-1)n} \quad (\text{定常流動過程})$$
(59)

$$\zeta = \frac{1}{k-1} / \frac{1}{n-1} = \frac{n-1}{k-1} \quad (\text{不流動過程}) \tag{60}$$

式(1)~(16),(31)~(40)を入口エンタルピまたは内部エネルギーで除し無次元化し、ポリトロー プ比 & または くを導入すると

(1) 経路①の場合

$$Aw_{es} = \left\{ 1 - x\gamma^{\frac{k-1}{k}} - (1-x)\gamma^{\frac{k-1}{k}} \right\}$$
(61)

$$q_{es} = x \left(\gamma^{\xi \frac{k-1}{k}} - \gamma^{\frac{k-1}{k}} \right) \tag{62}$$

$$q_{fs} = \left\{ x \gamma^{\frac{k-1}{k}} + (1-x) \gamma^{\frac{k-1}{k}} \right\} \log e \left\{ x + (1-x) \gamma^{\frac{(k-1)k-1}{k}} \right\}$$
(63)

$$Aw_{en} = \left\{ 1 - x \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-1} - (1-x) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\zeta(k-1)} \right\}$$
(64)

$$q_{en} = x \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\zeta(k-1)} - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-1} \right\}$$
(65)

$$q_{fn} = \left\{ x \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-1} + (1-x) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\zeta(k-1)} \right\} \log e \left\{ x + (1-x) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(\zeta-1)(k-1)} \right\}$$
(66)

- ただし wes:定常流動過程の無次元外部仕事 qes:同無次元外部熱交換量 qfn:同無次元内 部摩擦発生熱量 wen:不流動過程の無次元外部仕事 qen:同無次元外部熱交換量 qfn:同無次元内部摩擦発生熱量
- (2) 経路②の場合

$$Aw_{es} = \left\{ 1 - xr^{\frac{k-1}{k}} - (1-x)r^{\frac{k-1}{k}} \right\}$$
(67)

$$q_{es} = x \left(\gamma^{\frac{k-1}{k}} - \gamma^{\frac{k-1}{k}} \right) \tag{68}$$

$$q_{fs} = \gamma^{\xi \frac{k-1}{k}} \log e\left\{ x + (1-x)\gamma^{(\xi-1)\frac{k-1}{k}} \right\}$$
(69)

$$Aw_{en} = \left\{ 1 - x \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-1} - (1-x) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\zeta(k-1)} \right\}$$
(70)

$$q_{en} = x \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\zeta(k-1)} - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{k-1} \right\}$$
(71)

$$q_{fn} = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\zeta(k-1)} \log e\left\{x + (1-x)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(\zeta-1)(k-1)}\right\}$$
(72)

(3) 経路③の場合

$$Aw_{es} = \left\{ x \frac{1}{\xi} + (1-x) \right\} \left(1 - \gamma^{\xi^{\frac{k-1}{k}}} \right)$$
(73)

$$q_{es} = \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) x \left(1 - \gamma^{\xi^{\frac{k-1}{k}}}\right) \tag{74}$$

$$q_{fs} = \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)(1 - x)\left(1 - r^{\frac{k}{k}}\right)$$
(75)

$$Aw_{en} = \left\{ x \frac{1}{\zeta} + (1-x) \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\zeta(k-1)} \right\}$$
(76)

$$q_{en} = \left(\frac{1}{\zeta} - 1\right) x \left\{ 1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\zeta(k-1)} \right\}$$
(77)

$$q_{fn} = \left(\frac{1}{\zeta} - 1\right)(1 - x)\left\{1 - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\zeta(k-1)}\right\}$$
(78)

(4) 経路④の場合

$$Aw_{es} = \left\{ (1-x) + x\gamma^{(\xi-1)\frac{k-1}{k}} - \gamma^{\xi\frac{k-1}{k}} \right\}$$
(79)

$$q_{es} = x \left\{ r^{(\xi_{-1})\frac{k-1}{k}} - 1 \right\}$$
(80)

$$q_{fs} = -\log e\left\{x + (1-x)r^{(1-\xi)\frac{k-1}{k}}\right\}$$
(81)

$$Aw_{en} = \left\{ (1-x) + x \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(\zeta-1)(k-1)} - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\zeta(k-1)} \right\}$$
(82)

$$q_{en} = x \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(\zeta-1)(k-1)} - 1 \right\}$$
(83)

$$q_{fn} = -\log e\left\{x + (1-x)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(1-\zeta)(k-1)}\right\}$$
(84)

(5) 経路⑤の場合

$$Aw_{es} = \left\{ (1-x) + x\gamma^{(\xi-1)\frac{k-1}{k}} - \gamma^{\xi\frac{k-1}{k}} \right\}$$
(85)

$$q_{es} = x \left\{ \gamma^{(\xi-1)\frac{k-1}{k}} - 1 \right\}$$
(86)

$$q_{fs} = -\left\{ (1-x) + x\gamma^{(\xi-1)\frac{k-1}{k}} \right\} \log e\left\{ x + (1-x)\gamma^{(1-\xi)\frac{k-1}{k}} \right\}$$
(87)

$$Aw_{en} = \left\{ (1-x) + x \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(\zeta-1)(k-1)} - \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\zeta(k-1)} \right\}$$
(88)

$$q_{en} = x \left\{ \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(\zeta-1)(k-1)} - 1 \right\}$$
(89)

$$q_{fn} = -\left\{ (1-x) + x \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\zeta(-1)(k-1)} \right\} \log e\left\{ x + (1-x) \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{(1-\zeta)(k-1)} \right\}$$
(90)

3. 外部仕事,外部との熱交換量,内部摩擦による発生熱量の計算結果

計算に先立ち,使用するパラメータのうちポリトロープ比および x について予め検討することとした。まず,ポリトロープ比は

n=k のとき *ξ*=1, *ζ*=1
n=0 のとき *ξ*=0, *ζ*=0
であり、また、比熱比を 5/3 (1 原子分子)~4/3 (3 原子分子)の範囲に選ぶと、図3のごとき関係を有することがわかる⁴⁾。つぎに、x は

断熱変化 のとき x = 0

可逆変化 のとき x=1

であり、またxのとり得る範囲を膨張 過程について調べると、図 4 \sim 6 のご とくになることがわかる⁴。

外部仕事,外部との熱交換量,内部 摩擦による発生熱量の計算は無次元化 した式 (61)~(90) により行ない,計算







結果を下記に述べる。

3.1 経路の異なる場合の計算結果

圧力比または容積比,比熱比を一定値とし,xの各値に対しポリトロープ比をパラメータとして,外部仕事,外部との熱交換量,内部摩擦による発生熱量を計算した。図7,8は定常流動過程,図9,10は不流動過程の場合の経路①,②,③、④、⑤における計算結果を示したもので,図1の1から2までの変化において,始点と終点が同じでも経路が異なると,計算結果が相当異なる













ことがわかった。

また,外部との熱交換量により外部仕事が変ることを示すために,圧力比または容積比,比熱 比,ポリトロープ比を一定値とし,xをパラメータとして整理した。図11は定常流動過程,図12 は不流動過程の場合を示したものであり,外部仕事に与える影響は経路の相異よりxの方が大き いことがわかった。

上記の結果より,熱機関について熱力学的検討を行なう場合,単純化した経路①,②,④,⑤ の計算結果はそれぞれ異なり,経路③の計算結果とも異なっているので,前章にて述べたとおり 経路の選定は重要であり,また,外部との熱交換の影響は相当大きいので,これを正しく評価す ることも必要であろう。

3.2 経路③の場合の計算結果

前章にて述べたように、熱力学的検討は経路③について行なうことが妥当であるので、この経路についてさらに詳しく各パラメータの影響を調べた。 圧力比を 0.1, 0.25, 0.5 または容積比を 10, 4, 2 の一定値に保ち, x が 0.5, 1.0, 1.5 の各値に対し、比熱比およびポリトロープ比をパラ メータとして外部仕事、外部との熱交換量、内部摩擦による発生熱量を計算した。図 13~21 は 定常流動過程, 図 22~30 は不流動過程の場合の計算結果を示したものであり、いずれも、外部 仕事, 熱交換量, 内部摩擦発生熱量は x と同様比熱比によっても大きく影響されていることがわ かる。

また,外部との熱交換量により外部仕事が影響されることを示すために,圧力比または容積比, 比熱比を一定値とし,ポリトロープ比, *x* をパラメータとして整理した。図 31 は定常流動過程, 図 32 は不流動過程の場合を示したものである。





























4. 結 び

完全ガスを作業媒体に選び,外部との熱交換と内部摩擦を分離して検討するため無次元数 x を 導入し,可逆断熱変化に対する変化過程のずれを表わすポリトロープ比を使用して,外部仕事, 外部との熱交換量,内部摩擦による発生熱量を解析した。その結果を要約するとつぎのとおりと なる。

(1) 定常流動過程,不流動過程の場合において,経路①,②,③,④,⑤の外部仕事,熱交換 量,内部摩擦発生熱量を求める式を導いた。

(2) 各経路について計算し図示したが,それぞれ計算結果が異なっていることが示された。また,外部仕事に与える影響は経路の相異より x の方が大きいことも示されている。

(3) 熱機関について熱力学的検討を行なう場合は、各経路中の経路③による解析が妥当である ことを示した。

(4)経路③において,外部仕事,熱交換量,内部摩擦発生熱量におよぼす x,比熱比,ポリト ロープ比の影響をさらに詳しく調べ図示したが,x と同様比熱比によっても大きく影響されてい ることが示されている。

今後は本報にて検討した結果を熱機関サイクルの計算に応用し、外部との熱交換と内部摩擦に よる発熱の影響を考慮した解析などを行なう予定である。

本研究は北海道工業大学 黒岩保学長の示唆により始められたもので 研究を進めるに際し, 北海道大学工学部 斎藤武教授よりご指導いただいた。また,計算を行なうに際し,北海道大学 大型計算機センターおよび本学部学生塚原洋輝君の協力を得た。ここに深く謝意を表する次第で ある。

文 献

- 1) ステーチキン、ベ.エス、浜島操訳:ジェットエンジン理論 (1964-10), コロナ社.
- 2) Wood, H.J.: SAE paper 660161, Vol. 75 (1967).
- 3) 谷口 博, 檜佐彰一: 機械学会第 46 期総会講演会論文集, 208(1969-4), P. 61.
- 4) 谷口 博, 若井和憲: 機械学会第 47 期総会講演会論文集, 700-6 (1970-4), P. 17.