



Title	異方性媒質を満たしたファブリ・ペロー共振器の異常光線に対する最適反射鏡面とその応用
Author(s)	田中, 捷樹; 鈴木, 道雄
Citation	北海道大學工學部研究報告, 59, 121-132
Issue Date	1971-03-10
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/41025">http://hdl.handle.net/2115/41025</a>
Type	bulletin (article)
File Information	59_121-132.pdf



[Instructions for use](#)

# 異方性媒質を満たしたファブリ・ペロー共振器の 異常光線に対する最適反射鏡面とその応用

田中捷樹\* 鈴木道雄\*

(昭和45年9月30日受理)

## Optimum Reflecting Mirrors of the Fabry-Perot Resonator filled with Anisotropic Medium and its Application

Toshiki TANAKA Michio SUZUKI

Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering,  
Hokkaido University, Sapporo, Japan

(Received September 30, 1970)

### Abstract

The confocal Fabry-Perot resonator is known as a resonator with considerably low diffraction loss. However, in the case where the medium in the resonator is anisotropic, the diffraction loss increases to a large amount, because the path of the extraordinary light is different from that of the ordinary light in the isotropic medium.

In this paper, we consider a confocal Fabry-Perot resonator which is constructed by two counter reflecting mirrors in the anisotropic medium, and have obtained theoretically optimum shapes of the reflecting mirrors which restrain the diffraction loss from increasing. We have also estimated the conversion efficiency of the second harmonic generator for laser light, as one of its applications.

### 1. ま え が き

ファブリ・ペロー共振器(以下FP共振器と略す)は、光周波数帯においてレーザー発振器用あるいは光高調波発生などの一連の電気光学的効果を調べるための共振器として、またマイクロ波、ミリ波帯においても、媒質定数測定用の共振器として広く用いられており、幾何学的寸法が波長にくらべて非常に大きいこと、構造が開放的であることがマイクロ波帯でよく用いられる空洞共振器と著しく異なっている。FP共振器の内部媒質が等方性の場合については、多数の理論的解析がなされており<sup>1),2),3),4)</sup>、マイクロ波帯で共焦点型FP共振器を導波管で励振した場合の現象についての理論解析もなされている<sup>5)</sup>。

共焦点型FP共振器は回折損失の非常に小さな共振器として知られているが、共振器の内部媒質が異方性を有し<sup>6)</sup>、異常光線(図1において $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_x$ 成分を有する光)を共振させる場合には、異常光線の通路が等方性媒質中における場合と異なるため、等方性媒質が満たされている場合の共焦点型FP共振器をそのまま用いたのでは回折損失が極端に大きくなり十分な共振が起こらない。これは、媒質が異方性の場合、異常光線の反射鏡面における反射が *Refraction Symmetry* ではないことにより生ずるものであるが、筆者等は、この点を考慮し、異常光線を共振させる場合について、異方性の効果を打ち消して回折損失を等方性の場合と同程度にするための最適反射

\* 電子工学科 電波応用工学講座

鏡面の形を理論的に求め先に報告した<sup>7)</sup>。本論文は得られた結果を光二次高調波発生器<sup>8),9)</sup>に適用し、最適反射鏡面を用いることにより、基本波から二次高調波への変換効率がどの程度改善されるかを求めたものである。

## 2. 最適反射鏡面の決定

ここでは Dyadic 誘電率が

$$\underline{\varepsilon} = \sum_{i=1}^3 \sum_{i'=1}^3 \mathbf{n}_i \mathbf{n}_{i'} \varepsilon_{ii'} \quad (1)$$

(ただし  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  はそれぞれ  $x, y, z$  方向の単位ベクトルであり、 $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = 0$  とする) で与えられる異方性媒質中に、図1のように  $x$  方向には無限長の放物面反射鏡を対向させて得られる FP 共振器を考える。鏡面  $S_1, S_2$  の方程式をそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= g_1(y) = \frac{1}{4p_0}y^2 + By - c \\ z_2 &= g_2(y) = -\frac{1}{4p_0}y^2 + Ay + c \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

と仮定する。ここに  $p_0, A, B$  は後に決定される未知定数であり図1に示されるように  $c = b/2$  である。

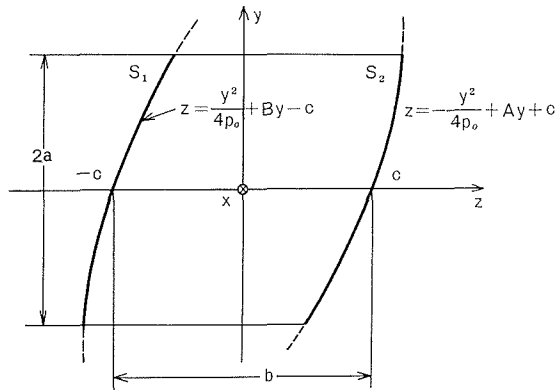


図1 Fabry-Perot resonator constructed by two counter parabolic reflecting mirrors in anisotropic medium.

共振器内部に既知の電流分布  $J_y(y, z)$  がある場合の共振器内部の全電界  $E_{t,y}(y, z)$  は、 $J_y(y, z)$  だけによる電界  $E_{s,y}(y, z)$  と鏡面  $S_1, S_2$  上に誘起される電流  $J_1(y, z), J_2(y, z)$  による電界  $E_{m,y}(y, z)$  の和で与えられ、 $J_1(y, z), J_2(y, z)$  は  $E_{t,y}(y, z)$  の各鏡面における境界条件から導かれる連立積分方程式により決定され、かつ最適反射鏡面の方程式が導出される。

$z$  方向を一様線路とみなす *Uniform Transmission Line* 表示を用いると、鏡面上に仮定された電流  $\mathbf{J}_1(y, z) \simeq \mathbf{n}_2 J_1(y, z)$ ,  $\mathbf{J}_2(y, z) \simeq \mathbf{n}_2 J_2(y, z)$  による共振器内電界  $E_{m,y}(y, z)$  は次式のようになる<sup>10)</sup>。

$$E_{m,y}(y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} V_1(\beta, z) e^{-j\beta y} d\beta \quad (3)$$

ここで姿態電圧  $V_1(\beta, z)$  は伝送方程式

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial V_1}{\partial z} &= ja_1 I_1 + b_1 V_1 \\ -\frac{\partial I_1}{\partial z} &= jc_1 V_1 + d_1 I_1 + i_1 \delta(z - z'_1) + i_2 \delta(z - z'_2) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{\omega^2 \epsilon_{33} \mu_0 - \beta^2}{\omega \epsilon_{33}}, & c_1 &= \omega \left( \epsilon_{22} - \frac{\epsilon_{23}^2}{\epsilon_{33}} \right) \\ b_1 &= d_1 = -j \beta \frac{\epsilon_{23}}{\epsilon_{33}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a J_1(y') e^{j\beta y'} dy' \\ i_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a J_2(y') e^{j\beta y'} dy' \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$\delta(z)$ ; Delta Function

の解で次式で与えられる。

$$V_1(\beta, z) = -\frac{Z_1}{2} \left[ i_1 e^{j\{q\beta(z-z'_1) - \kappa_1|z-z'_1|\}} + i_2 e^{j\{q\beta(z-z'_2) - \kappa_1|z-z'_2|\}} \right] \quad (7)$$

ただし、

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{k^2 - \beta^2}{\omega \epsilon_{33} \kappa_1}, & \kappa_1 &= \sqrt{k^2 - p\beta^2} \\ k^2 &= \omega^2 \epsilon_{22} \mu_0 \left( 1 - \frac{\epsilon_{23}^2}{\epsilon_{22} \epsilon_{33}} \right), & p &= \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{33}}, & q &= \frac{\epsilon_{23}}{\epsilon_{33}} \end{aligned}$$

である。式(7)を(3)に代入し(6)を考慮すると

$$E_{m,y}(y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a J_1(y') Z_1(y, z; y', z'_1) dy' - \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a J_2(y') Z_2(y, z; y', z'_2) dy' \quad (8)$$

を得る。ここに

$$\left. \begin{aligned} Z_i(y, z; y', z'_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} Z_i(\beta) e^{j\{q\beta(z-z'_i) - \kappa_1|z-z'_i| - \beta(y-y')\}} d\beta \\ i &= 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

であり、 $\beta$  積分において、位相項については  $\kappa_1 \simeq k - p\beta^2/2k$  と展開し、振幅項  $Z_i(\beta)$  については  $\beta = 0$  とおき近軸光近似を用い計算すると

$$\left. \begin{aligned} Z_i(y, z; y', z'_i) &\simeq R_0 \sqrt{\frac{2\pi k}{p|z-z'_i|}} \cdot e^{-j \left[ k|z-z'_i| + \frac{k}{2p|z-z'_i|} \{y-y' - p(z-z'_i)\} - \frac{\pi}{4} \right]} \\ i &= 1, 2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

と求められる。ただし

$$R_0 = \frac{k}{\omega \epsilon_{33}}$$

式(10)を(8)に代入し鏡面方程式(2)を考慮すると、鏡面  $S_1, S_2$  上の電界  $E_{m,y}(S_1), E_{m,y}(S_2)$  は、

$$\left. \begin{aligned} E_{m,y}(S_1) &= -\frac{R_0}{2} \left[ J_1(y) + \int_{-a}^a J_2(y') K_{21}(y, y') dy' \right] \\ E_{m,y}(S_2) &= -\frac{R_0}{2} \left[ \int_{-a}^a J_1(y') K_{12}(y, y') dy' + J_2(y) \right] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

と得られる。ただし、ここに

$$\left. \begin{aligned} K_{12}(y, y') &= \sqrt{\frac{k}{2\pi p|g_2(y) - g_1(y')|}} \cdot e^{-j \left[ k|g_2(y) - g_1(y')| + \phi_{12}(y, y') - \frac{\pi}{4} \right]} \\ K_{21}(y, y') &= \sqrt{\frac{k}{2\pi p|g_1(y) - g_2(y')|}} \cdot e^{-j \left[ k|g_1(y) - g_2(y')| + \phi_{21}(y, y') - \frac{\pi}{4} \right]} \\ \phi_{12}(y, y') &= \frac{k}{2p|g_2(y) - g_1(y')|} \cdot [(y-y') - q\{g_2(y) - g_1(y')\}]^2 \\ \phi_{21}(y, y') &= \frac{k}{2p|g_1(y) - g_2(y')|} \cdot [(y-y') - q\{g_1(y) - g_2(y')\}]^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である。

次に内部電流分布  $J_y(y, z)$  による電界は、伝送方程式(3)において  $i_1\delta(z-z'_1) + i_2\delta(z-z'_2)$  のかわりに

$$i(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int J_y(y', z) e^{i\beta y'} dy'$$

とおいた式を解いて得られる姿態電圧を用い、 $E_{m,y}(y, z)$  を求めた場合と同様にして計算され、次の様になる。

$$E_{s,y}(y, z) \simeq - \int_v J_y(y', z') \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{k}{2\pi p|z-z'|}} e^{-i\left[k|z-z'| + \frac{k\{(y-y')-q(z-z')\}^2}{2f|z-z'|}\right]} dy' dz' \quad (13)$$

ただし  $v$  は  $J_y(y', z')$  の存在する領域である。

ここで、鏡面  $S_1, S_2$  における境界条件を導入するが、このとき、 $E_{s,y}(y, z)$  が  $S_1$  上では無視できる程度に小さくなるように  $J_y(y, z)$  が分布していると仮定すれば、鏡面  $S_1, S_2$  上においてそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} E_{m,y}(S_1) - Z_{S_1} J_1(y) &= 0 \\ E_{m,y}(S_2) + E_{s,y}(S_2) - Z_{S_2} J_2(y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

が成立する。ただし  $Z_{S_1}, Z_{S_2}$  はそれぞれ鏡面  $S_1, S_2$  のインピーダンスであり  $Z_{S_1} = R_{S_1} + jX_{S_1}$ ,  $Z_{S_2} = R_{S_2} + jX_{S_2}$  である。式(14)にすでに求められた  $E_{m,y}(S_1), E_{m,y}(S_2)$  を代入し、鏡面方程式(2)を考慮して  $y = at$  と変数変換すれば、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{2Z_{S_1}}{R_0}\right) J_1(t) + \int_{-1}^1 J_2(t') K_{21}(t, t') dt' &= 0 \\ \int_{-1}^1 J_1(t') K_{12}(t, t') dt' + \left(1 + \frac{2Z_{S_2}}{R_0}\right) J_2(t) &= E'_{s,y}(t) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} K_{12}(t, t') &= \sqrt{\frac{c_1}{2\pi}} e^{-j\phi_{12}(t, t')} \\ K_{21}(t, t') &= \sqrt{\frac{c_1}{2\pi}} e^{-j\phi_{21}(t, t')} \\ \phi_{12}(t, t') &= kb_a - \frac{\pi}{4} + \frac{c_0}{2}(t^2 + t'^2) - c_1 t t' + c_2 t - c'_2 t' \\ \phi_{21}(t, t') &= kb_a - \frac{\pi}{4} + \frac{c_0}{2}(t^2 + t'^2) - c_1 t t' - c'_2 t + c_2 t' \\ c_0 &= ka \left( \frac{1}{pb} - \frac{1}{2p_0} \right), \quad c_1 = \frac{ka^2}{pb} \\ c_2 &= ka^2 \left( A - \frac{q}{p} \right), \quad c'_2 = ka \left( B - \frac{q}{p} \right), \quad b_a = b \left( 1 + \frac{q^2}{2p} \right) \\ E_{s,y}(t) &= \frac{2E_{s,y}(S_2)}{R_0} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

FP 共振器において回折損失が最も小さくなるのは鏡面が共焦点条件を満足する場合であり、そのとき最も鋭い共振が得られる。式(15)で与えられる積分方程式が、鏡面上未知電流  $J_1(y), J_2(y)$  を決定するものであるが、この積分方程式が等方性媒質を満たした共焦点型 FP 共振器の場合と同じ形になるためには、その核関数  $K_{12}(t, t'), K_{21}(t, t')$  について、 $c_0 = c_2 = c'_2 = 0$ , すなわち

$$p_0 = pb = \frac{\epsilon_{22} b}{\epsilon_{33}} \quad (17)$$

$$A = B = \frac{q}{p} = \frac{\epsilon_{23}}{\epsilon_{22}} \quad (18)$$

が成立しなくてはならず、式(1)で示された異方性媒質を満たした FP 共振器で異常光線の最大

の共振を得るには

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{\epsilon_{33}}{2\epsilon_{22}b}y^2 + \frac{\epsilon_{23}}{\epsilon_{22}}y - \frac{b}{2} \\ z_2 &= -\frac{\epsilon_{33}}{2\epsilon_{22}b}y^2 + \frac{\epsilon_{23}}{\epsilon_{22}}y + \frac{b}{2} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

なる形の鏡面を用いればよい。

媒質が等方性である場合には  $\epsilon_{33} = \epsilon_{22}$ ,  $\epsilon_{23} = 0$  であり式(19)は

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2b}y^2 - \frac{b}{2} \\ z_2 &= -\frac{1}{2b}y^2 + \frac{b}{2} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

となって、良く知られた共焦点型 FP 共振器の鏡面方程式が得られる。図2に式(19), (20)で与えられる鏡面の関係を示してある。

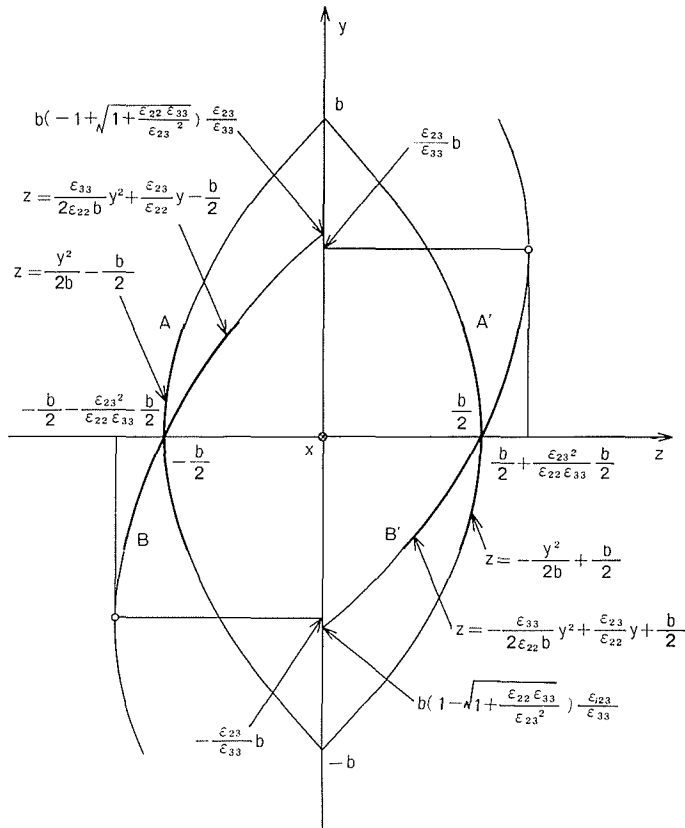


図2 Geometrical arrangement of the reflecting mirrors of two Fabry-Perot resonators. A pair of mirrors A and A' construct a usual confocal Fabry-Perot resonator. Mirrors B and B' are the optimum reflecting mirrors of the Fabry-Perot resonator filled with anisotropic medium.

### 3. 共振器より取り出し得る電力

本章では、式(19)で示される最適反射鏡面を持つFP共振器に異常光線を共振させ、反射鏡に有限の透過率をもたせて電力を取り出す場合について、取り出し得る電力を求める。

式 (17), (18) が満足される場合, 積分方程式 (15) は,

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{2Z_{S1}}{R_0}\right) J_1(t) + \int_{-1}^1 J_2(t') \sqrt{\frac{c_1}{2\pi}} e^{-j(kba - \frac{\pi}{4} - c_1 t')} dt' &= 0 \\ \int_{-1}^1 J_1(t') \sqrt{\frac{c_1}{2\pi}} e^{-j(kba - \frac{\pi}{4} - c_1 t')} dt' + \left(1 + \frac{2Z_{S2}}{R_0}\right) J_2(t) &= E'_{S,y}(t) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

となる。ここで  $J_1(t), J_2(t)$  を

$$\dot{z}_m \varphi_m(t) = \int_{-1}^1 \varphi_m(t') \sqrt{\frac{c_1}{2\pi}} e^{j(\frac{\pi}{4} + c_1 t')} dt' \quad (22)$$

で与えられる積分方程式の規格化固有関数  $\varphi_m(t)$  を用いて

$$J_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{1m} \varphi_m(t), \quad J_2(t) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m} \varphi_m(t) \quad (23)$$

と展開する。ただし

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}_m &= e^{j\frac{\pi}{2}(\frac{1}{2} + m)} \sqrt{\frac{2c_1}{\pi}} R_{0m}^{(1)}(c_1, 1) \\ \varphi_m(t) &= M_m S_{0m}(c_1, 1) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

であり, ここに  $R_{0m}^{(1)}(c_1, 1)$  と  $S_{0m}(c_1, t)$  はそれぞれ *Radial Prolate Spheroidal Function*, *Angular Prolate Spheroidal Function* であり,  $M_m$  は規格化係数である。

$c_1 \gg 1$  が成立する場合,  $\varphi_m(t)$  は

$$\left. \begin{aligned} \varphi_m(t) &= N_m \phi_m(\tau_0 t) \\ \tau_0 &= \sqrt{2c_1}, \quad N_m = \sqrt{\frac{\tau_0}{\sqrt{2\pi} m!}} \\ \phi_m(x) &= e^{-\frac{x^2}{4}} H_m(x) \\ H_m(x); &\text{ Hermite Function} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

と近似できて

$$\int_{-1}^1 \varphi_m(t) \varphi_n(t) dt \simeq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(t) \varphi_n(t) dt = \delta_{mn}$$

$\delta_{mn}$ ; Kronecker Delta

が成立する。

式 (23) を (21) に代入し, 得られた式の両辺に  $\varphi_n(t)$  を乗じて  $-1 \leq t \leq 1$  で積分すれば

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{2Z_{S1}}{R_0}\right) A_{1n} + \dot{z}_n e^{-jkb_a} A_{2n} &= 0 \\ \dot{z}_n e^{-jkb_a} A_{1n} + \left(1 + \frac{2Z_{S2}}{R_0}\right) A_{2n} &= \int_{-1}^1 E'_{S,y}(t) \varphi_n(t) dt \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

を得る。これを  $A_{2n}$  について解くと

$$A_{2n} = \frac{\left(1 + \frac{2Z_{S1}}{R_0}\right) \int_{-1}^1 E'_{S,y}(t) \varphi_n(t) dt}{\left(1 + \frac{2Z_{S1}}{R_0}\right) \left(1 + \frac{2Z_{S2}}{R_0}\right) - (\dot{z}_n e^{-jkb_a})^2} \quad (27)$$

となる。

ここで鏡面  $S_1, S_2$  としては *Grating* を用いるものとし, そのリアクタンスを  $jX_1, jX_2$  とすると, 鏡面のインピーダンス  $Z_{Si} = R_{Si} + jX_{Si}$  ( $i = 1, 2$ ) は,

$$R_{Si} = \frac{R_0 X_i^2}{R_0^2 + X_i^2}, \quad X_{Si} = \frac{R_0 X_i}{R_0^2 + X_i^2}$$

で与えられる。このような場合の  $S_2$  面の透過損失電力、すなわち  $S_2$  面を通して外部へ取り出し得る電力  $P_t$  は

$$P_t = \frac{1}{2} a R_{S_2} \int_{-1}^1 |J_2(t)|^2 dt \simeq \frac{1}{2} a R_{S_2} \sum_{n=0}^{\infty} |A_{2n}|^2 \quad (28)$$

となる。光領域においては  $c_1 = ka^2/pb$  は著しく大きな値となり、このとき  $|x_n|$  は  $n$  のきわめて大きな値までほぼ 1 に保たれるため式 (28) は

$$\begin{aligned} P_t &\simeq \frac{1}{2} a R_{S_2} \left| 1 + \frac{2Z_{S_1}}{R_0} \right|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left| \int_{-1}^1 E'_{s,y}(t) \varphi_n(t') dt' \right|^2}{\left| 1 + \frac{2Z_{S_1}}{R_0} \left( 1 + \frac{2Z_{S_2}}{R_0} \right) - (x_n e^{-jkba})^2 \right|^2} \\ &\simeq \frac{1}{2} a R_{S_2} \frac{\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 E'_{s,y}(t) E'_{s,y}(t') \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) \varphi_n(t') dt dt'}{\Gamma^2} \end{aligned} \quad (29)$$

と近似できる。ただし

$$\Gamma \simeq \frac{2}{R_0} (R_{S_1} + R_{S_2}) \quad (30)$$

である。ここで

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) \varphi_n(t') = \sqrt{\frac{c_1}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n(\tau_0 t) \psi_n(\tau_0 t')}{n!} = \frac{\sqrt{2c_1}}{\tau_0} \delta(t-t') = \delta(t-t')$$

を用いると式 (29) は

$$P_t \simeq \frac{1}{2} a R_{S_2} \frac{\int_{-1}^1 |E'_{s,y}(t)|^2 dt}{\Gamma^2} \quad (31)$$

となる。

#### 4. 光二次高調波発生器への応用

前節において、異方性媒質を満たした FP 共振器の最適反射鏡面を求め、異常光線に共振させた場合の透過出力を計算したが、本章ではその一応用例として、光高調波発生器の第二次高調波出力を計算する。

ここでは、異方性媒質として KDP (*Potassium Dihydrogen Phosphate*;  $\text{KH}_2\text{PO}_4$ ) を使い、図 3 で示されるように常光線基本波として  $\omega$  角周波数のレーザ・ビームを最適反射鏡面を持つ共振器内に入射させ、発生する  $2\omega$  角周波数の異常光線を共振させて  $S_2$  面から取り出す場合を考える。(以下サフィックス  $\omega, 2\omega$  をつけて、それぞれ  $\omega, 2\omega$  角周波数に関する量を区別して表わす。)

図 3 に示されるように結晶の光軸と  $z$  軸とのなす角を  $\theta$  とし、媒質の常光線、異常光線に対する屈折率をそれぞれ  $n_o, n_e$  とすれば、式 (1) で示される *Dyadic* 誘電率は

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= n_o^2 \epsilon_0 \\ \epsilon_{22} &= n_o^2 \epsilon_0 \cos^2 \theta + n_e^2 \epsilon_0 \sin^2 \theta \\ \epsilon_{33} &= n_o^2 \epsilon_0 \sin^2 \theta + n_e^2 \epsilon_0 \cos^2 \theta \\ \epsilon_{23} &= \epsilon_{32} = (n_e^2 - n_o^2) \epsilon_0 \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

で与えられる。



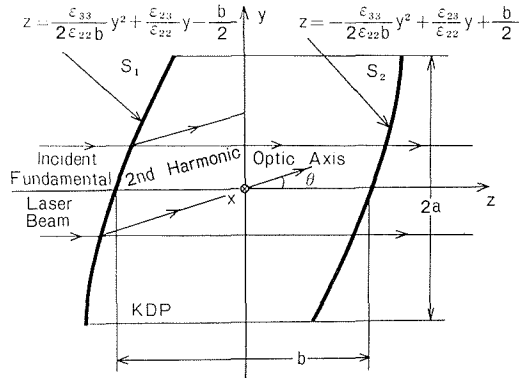


図3 Second harmonic generator constructed by the Fabry-Perot resonator with the optimum reflecting mirrors. Mirrors  $S_1$  and  $S_2$  are transparent to the fundamental and highly reflecting to the harmonic.

共振器内の  $\omega$  角周波数レーザ常光線電界を

$$E_{o,r,x}(y, z) = E_0 e^{-\frac{1}{2}\alpha_0 y^2 - j(k_{\omega} z + \frac{1}{2}\alpha_0 \beta_0^2 y^2)} \quad (33)$$

とする。ただし  $\alpha_0, \beta_0$  は電界分布を与える定数であり、また

$$k_{\omega}^2 = \omega^2 \epsilon_{33} \mu_0$$

である。このとき、共振器内 KDP の非線形効果により共振器内に生ずる  $2\omega$  角周波数の電流  $J_{2\omega,y}(y, z)$  は

$$J_{2\omega,y}(y, z) = j2\omega \chi_{211} \{E_{o,r,x}(y, z)\}^2 \quad (34)$$

で与えられる<sup>11)</sup>。ただし  $\chi_{211}$  は媒質の非線形分極率テンソルの成分である。

式 (33) を (34) に代入し、結果を (13) に入れて鏡面  $S_1, S_2$  上における電界を計算するとそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} E_{S_1,y}(S_1) &\simeq 0 \\ E_{S_2,y}(S_2) &\simeq -(j2\omega \chi_{211} E_0^2) \frac{k_{2\omega}}{4\omega \epsilon_{33}} e^{-j k_{2\omega} \frac{1}{2} b} F(y) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$F(y) = \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left[-j(2k_{\omega} - k_{2\omega})z' - \alpha_0(1 + j\beta_0^2)\left\{y - q\left(\frac{b}{2} - z'\right)\right\}^2\right] dz' \quad (36)$$

となる。ただし

$$k_{2\omega}^2 = (2\omega)^2 \epsilon_{22} \mu_0 \left(1 - \frac{\epsilon_{23}^2}{\epsilon_{22} \epsilon_{33}}\right)$$

である。式 (36) 中の  $p_m = 2k_{\omega} - k_{2\omega}$  なる項は基本波と第二次高調波との位相整合の状態をあらわすもので  $p_m = 0$  のとき式 (35) で示される鏡面  $S_2$  における電界が最大になる<sup>12), 13)</sup>。図3において光軸と  $z$  軸とのなす角を適当に調節し位相整合の条件

$$2k_{\omega} = k_{2\omega}$$

が満足されるようにした場合、式 (36) はつぎのようになる。

$$F(y) = \frac{1}{q \sqrt{\alpha_0(1 + j\beta_0^2)}} \left[ \operatorname{erf}\left\{\sqrt{\alpha_0(1 + j\beta_0^2)} y\right\} - \operatorname{sgn}\left\{\sqrt{\alpha_0(1 + j\beta_0^2)}(y - qb)\right\} \right] \quad (37)$$

ただし

$$\operatorname{erf}(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$\operatorname{sgn} f(x) = \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ -f(x) & x < 0 \end{cases}$$

である。

さて鏡面  $S_2$  を通して共振器外部に取り出し得る第二次高調波電力  $P_{t,2\omega}$  は式 (31) を用いて

$$P_{t,2\omega} \simeq \frac{1}{2} a R_{S_2} \frac{(2\omega \chi_{211} E_0^2)^2}{\Gamma^2} \int_{-1}^1 |F(t)|^2 dt \quad (38)$$

となる。ここに、 $F(t)$  は (37) において  $y = at$  と変数変換したものである。入射レーザー常光線が  $2a$  の幅をもつ平面波に近い場合を考えると式 (33) において

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= 0 \\ \sqrt{\alpha_0} a &\ll 1, \quad \sqrt{\alpha_0} \left| 1 - q \frac{b}{a} \right| \ll 1 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

となり、 $x \ll 1$  のとき  $\operatorname{erf} x \simeq x$  であるから式 (37) は

$$F(t) \simeq b \quad (40)$$

と近似される。

一方、入射  $\omega$  角周波数電界振幅  $E_0$  と共振器内への入射電力  $P_{i,\omega}$  との間には、式 (39) が成立する場合

$$E_0^2 \simeq \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_{33}}} P_{i,\omega} \quad (41)$$

の関係がある。

式 (40) および (41) を (38) に代入することにより、求める第二次高調波出力は

$$P_{t,2\omega} \simeq 2a R_{S_2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\omega \chi_{211} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_{33}}}\right)^2 \left(\frac{P_{i,\omega}}{\Gamma}\right)^2 \quad (42)$$

となる。もし共振器を用いないものとすれば図 3 で示される共振器と同体積の媒質から取り出し得る二次高調波電力は

$$P'_{t,2\omega} \simeq 2a R_{0,2\omega} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\omega \chi_{211} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_{33}}}\right)^2 P_{i,\omega}^2 \quad (43)$$

となる。従って最適反射鏡面を持つ共振器を用いたための効果はだいたい

$$\frac{P_{t,2\omega}}{P'_{t,2\omega}} \simeq \frac{R_{S_2}/R_{0,2\omega}}{\Gamma^2} \quad (44)$$

で与えられる。

媒質として KDP を用いた場合、その非線形分極率  $\chi_{211}$  は

$$\chi_{211} = 7.40 \times 10^{-24} \quad \text{Coulomb/V}^2$$

であり<sup>11)</sup>、位相整合の条件式は  $\theta = 52^\circ$  で満足される<sup>12)</sup>。このとき

$$\epsilon_{33,s} \simeq 2.15$$

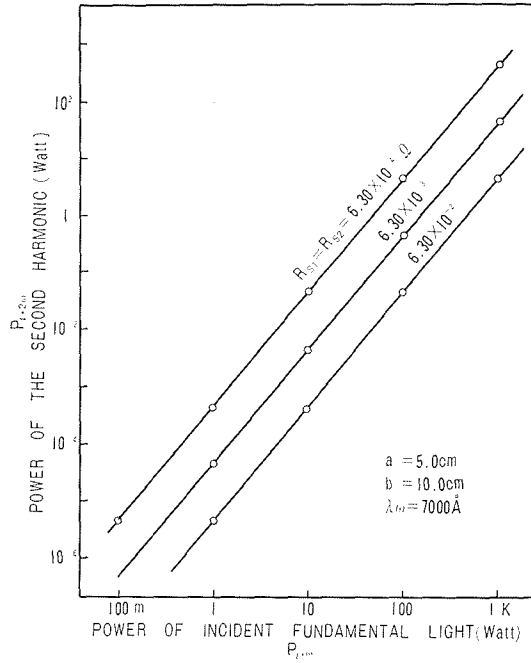
となり

$$R_{0,2\omega} \simeq 2.57 \times 10^2 \Omega$$

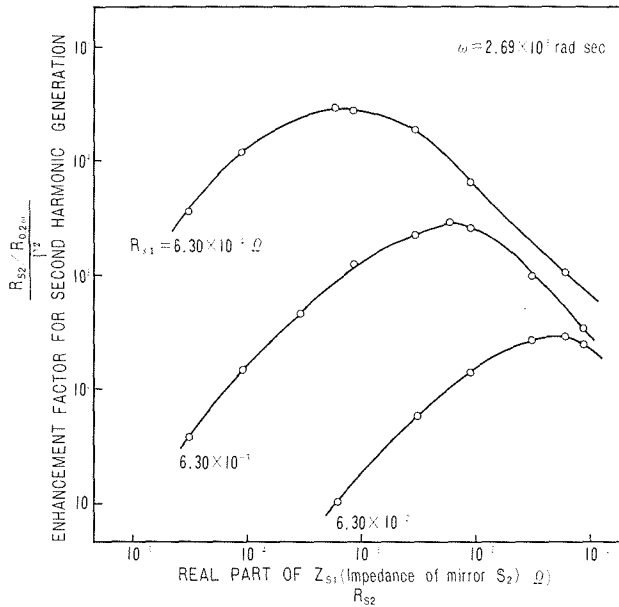
を得る。式 (42) に従えば、最適共振条件式 (17)、(18) が満足されている場合、鏡面からの透過電力は

$$R_{S_1} = R_{S_2} = 0 \quad (45)$$

のとき無限大になるがこの結果は式 (29) 第一式において  $1 - (\chi_n e^{-jkb a})^2$  で示される回折損失項が十分小さいとして省略したためであり、実際には、 $R_{S_1} = R_{S_2}$  の最適値が存在し、透過電力はある値におさえられる。また  $P_{t,2\omega}$  は  $P_{i,\omega}^2$  に比例し、 $P_{i,\omega}$  が大きくなるにつれて  $P_{t,2\omega}$  も増加し、ついには  $P_{t,2\omega}/P_{i,\omega}$  が 1 を超えることになるが、 $P_{i,\omega}$  のある値より大きな領域では、もはや、非



⊠ 4 Power of the second harmonic from the Fabry-Perot resonator with optimum reflecting mirrors vs. power of the incident fundamental laser light. ( $R_{S_1}$ ; equivalent resistance of mirror  $S_1$ , parameter)



⊠ 5 Enhancement factor for second harmonic generation vs. equivalent resistance  $R_{S_2}$ . ( $R_{S_1}$  parameter)

線形分極より導きだされる式 (34) は成立せず、結晶の破壊を生ずるなどして、 $P_{i,2\omega}/P_{i,\omega} \geq 1$  というようなことは起こり得ない。

入射常光線波長および共振器寸法については

$$\lambda_{\omega} = 7000 \text{ \AA} \quad (\omega \simeq 2.69 \times 10^{15} \text{ rad/sec})$$

$$a = 5.0 \text{ cm}$$

$$b = 10.0 \text{ cm}$$

とすると式 (42) は次の様になる。

$$P_{i,2\omega} = 5.23 \times 10^{-11} \frac{R_{S2}}{I^2} P_{i,\omega}^2$$

図 4 に  $R_{S1} = R_{S2}$  をパラメータとした  $P_{i,\omega}$  と  $P_{i,2\omega}$  の関係、図 5 に  $R_{S1}$  をパラメータとした  $R_{S2}$  と  $R_{S2}/R_{0,2\omega} \cdot I^2$  の関係が示してある。

## 5. あとがき

以上、異方性媒質を満たした FP 共振器で最大の異常光線共振を得るための鏡面形状を求め、そのような鏡面を用いた場合、共振器より外部へ取り出し得る異常光線電力を計算し、またその一応用例として異方性媒質が KDP である場合の光二次高調波発生器について、最適反射鏡面を持つ FP 共振器を用いることにより、基本波から第二次高調波への変換率がどの程度改善されるかを求めた。

本論文では解析の簡単のため共振器の内外空間をすべて異方性媒質で満たした場合を考えたが、今後、共振器内だけを異方性媒質で満たした場合、あるいは共振器の一部に異方性媒質板を挿入した場合についても、異方性の効果を打ち消すような最適反射鏡面について解析を行なう予定である。

光高調波発生器については媒質中で発生する二次高調波(異常光線)に共振させる方法の他に、共振器には基本波(常光線)を共振させる方法も考えられ、この場合には、普通の共焦点型 FP 共振器あるいは平行平板型の共振器を用いなければならない。光二次高調波発生器についてもいずれ実験を行ない結果を報告する予定である。

## 謝 辞

おわりに、本論文の発表の機会を与えて下さった、電子工学科諸先生に感謝するとともに、原稿をお読みいただいた桜庭教授に心からお礼申し上げます。

## 文 献

- 1) A. G. Fox and T. Li: "Resonant modes in a maser interferometer," Bell. Sys. Tech. J., Vol. 40, pp. 453-488, March 1961.
- 2) G. D. Boyd and J. P. Gordon: "Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers," Bell Sys. Tech. J., Vol. 40, pp. 489-508, March 1961.
- 3) G. D. Boyd H. W. Kogelnik: "Generalized confocal resonator theory," Bell Sys. Tech. J., Vol. 41, pp. 1347-1369, July 1962.
- 4) 熊谷, 松原: "レーザ・ビーム波の共振系と導波系," 電子通信学会誌, Vol. 51, pp. 471-478, April 1968 (FP 共振器の回折損失等については多数の論文があるので、それらを概説した上記論文をあげておく)。
- 5) 榎戸, 鈴木, 松本, 上村: "無限長楕円筒状反射鏡よりなるファブリ・ペロー共振器の入力アドミタンス," 電子通信学会誌, Vol. 51-B, pp. 95-101, March 1968.
- 6) 榎戸, 鈴木: "異方性媒質を満たしたファブリ・ペロー共振器," 電子通信学会マイクロ波研究会資料, 昭 42-09-26, September 1967.
- 7) 田中, 鈴木, 松本: "異方性媒質を満たしたファブリペロー共振器の異常光線に対する最適共振条件," 電子通信学会誌, Vol. 53-B, pp. 57-61, February 1970.

- 8) P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters and G. Weinreich: "Generation of optical harmonics," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 7, pp. 118-119, August 1961.
- 9) P. A. Franken and J. F. Ward: "Optical harmonics and nonlinear phenomena," *Rev. of Mod. Phys.* Vol. 35, pp. 14-17, January 1963.
- 10) 松本, 鈴木: "可変パラメータ異方性媒質を含む導波管内の電磁界," *電気通信学会誌*, Vol. 45, pp. 1680-1688, December 1962.
- 11) R. H. Kingston and A. L. McWhorter: "Electromagnetic mode mixing in nonlinear media," *Proc. of the IEEE*, Vol. 53, pp. 4-12, January 1965.
- 12) P. D. Maker, R. W. Terhune, M. Nisenoff and C. M. Savage: "Effects of dispersion and focusing on the production of optical harmonics," *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 8, pp. 21-22, January 1962.
- 13) A. Ashkin, G. D. Boyd and J. M. Dziedzic: "Observation of continuous optical harmonic generation with gas masers," *Phys. Rev. Lett.* Vol. 11, pp. 14-17, July 1963.