混成木グラフとその均衡性

仙　石　正　和*

(昭和47年4月28日受理)

Hybrid Tree Graphs and the Balance of Them

Masakazu SENGOKU
Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering,
Hokkaido University, Sapporo, Japan

Abstract

In graph theory, a tree or a cotree is an important concept not only for the sake of its applications to many different fields, but also to graph theory itself. A hybrid tree in a linear graph is a generalized concept of a tree and a cotree. And thus, to examine the properties of hybrid trees seems to be of considerable importance.

In this paper, a set of hybrid trees in a linear graph is classified according to the number of edges in the element of it, and a *hybrid tree graph* is defined as a linear graph which represents the relations among the elements of the set of hybrid trees. And it is shown that a hybrid tree graph is balanced. Using this property, the relationships between the above classification of a set of hybrid trees and the structure of the hybrid tree graph are presented. These results are useful in the realization of a hybrid tree graph.

1. 緒　　言

グラフ理論において，木 (tree) または補木 (co-tree) は最も基本的な概念の一つであり，グラフ理論の多くの応用分野において重要な役割を果たしている。そのためグラフの木集合および補木集合の性質を調べることが，グラフ理論およびその応用分野にとって重要な課題となっている。一方，混成木[1),2)] (hybrid tree) は木と補木両方の性質を有する概念であり，その特別の場合として木，補木が定義できる (ある応用分野，特に回路網理論に対する応用では木または補木より混成木を用いた方が大変有利な場合がある)。そのため，木集合または補木集合の性質を調べる代わりに混成木の性質を調べればよく，その結果は木，補木によるより，より一般的となるばかりでなく混成木特有の性質が見出される可能性がある。

本文では，混成木集合の要素間の関係を表現する混成木グラフ (hybrid tree graph) を定義し，それが従来定義されてきた木グラフ[3)] (補木グラフ) をその特別の場合として含むこと，さらに混成木グラフが均衡していることを示し，その性質から混成木集合の要素の枝数による類別と混成木グラフの構造との関係を明らかにしている。

---

*　電子工学科　電波伝送工学講座

2. 混成木集合の類別

ここで取扱うグラフは連結，無向とし，グラフ $G=(V, E)$ の枝集合を二つの部分 E_y, E_z に分割し，$E=E_y\cup E_z$, $E_y\cap E_z=\phi$ とする。$\mathcal{E}_z$ を，$\mathcal{E}_z$ はグラフ G のカットセットを含まず，かつ $\overline{\mathcal{E}}_z\,(\overline{\mathcal{E}}_z=E_z-\mathcal{E}_z)$ は G の閉路を含まぬような，E_z の任意の部分集合とする。$\mathcal{E}_z$ を開放除去，$\overline{\mathcal{E}}_z$ を短絡除去してできたグラフの極大無閉路集合を t_y とするとき，$\mathcal{E}_z\cup t_y$ からなる部分グラフをグラフ G の E_y に関する混成木 (ht) という。この場合，$E_z=\phi$ に対しては $\mathcal{E}_z=\phi$, $\overline{\mathcal{E}}_z=\phi$ となるため，混成木 ht はグラフ G の極大無閉路集合となりこれは木と一致する。また $E_y=\phi$ の場合，$ht=\mathcal{E}_z$ となり $\mathcal{E}_z$ はカットセットを，$\overline{\mathcal{E}}_z$ は閉路を含まぬように選んでいるため，ht は極大無カットセット集合となりこれは補木と一致する。このように混成木は木，補木を含む概念となっている。

この混成木の定義において $\overline{\mathcal{E}}_z\cup t_y=t$ (t はグラフ G の木) となっており，混成木は $ht=t\oplus E_z$ と表わされる。したがってグラフ G の混成木集合 HT はつぎのように表わされる。

$$HT=\{ht|ht=t\oplus E_z,\ t\in T\} \tag{1}$$

また，

$$HT=\{ht|ht=\tilde{t}\oplus E_y,\ \tilde{t}\in CT\} \tag{2}$$

のようにも表わされる。ここで T, CT はそれぞれグラフ G の集合，補木集合である。

一般に混成木集合 HT の要素 (混成木) は同一の枝数から成っていない。

[定理 1] 非可分グラフにおいては，混成木集合 HT の要素がすべて同数の枝から成るのは HT が木または補木集合に一致するときである。

(証明) 混成木集合 HT が $T\,(E_z=\phi)$ または $CT\,(E_y=\phi)$ に一致するときは明らかに HT の要素はすべて同数の枝から成っている。また可分グラフの木集合は，$T=T_1\times T_2\times\cdots\cdots\times T_k$ ($T_1, T_2, \cdots, T_k$ は可分グラフ G の可分成分 $G_1, G_2, \cdots, G_k$ の木集合) で表わされる。$G_1, G_2, \cdots, G_k$ の枝集合をそれぞれ $E_1, E_2, \cdots, E_k$ とし，$E_i=E_z$ (または E_y) $(1\leqq i\leqq k)$ 等とおくと，HT の要素は同数の枝からなる。つぎに E_y (または E_z) からなる部分グラフが (可分) 成分でないとする。つまり非可分グラフでは $E_z\neq\phi$ かつ $E_y\neq\phi$ の場合である。E_y, E_z からなる部分グラフをそれぞれ G_1, G_2 とする。非可分グラフとは，その任意の部分グラフがその補グラフと少なくとも 2 つ以上の節点を共有することであるから，G_1 と G_2 の共通の節点を v_1, v_2 とすると v_1, v_2 を含み G_1, G_2 両方の枝を含むグラフ G の閉路が必ず存在する。その一つの閉路を L_1 とし，$e_i, e_j\in L$, $e_i\in E_y$, $e_j\in E_z$ とすると，部分グラフ (L_1-e_i) および (L_1-e_j) はいずれも G の木の部分となりうる。つまり，すべてのグラフ G の木は E_y (または E_z) と同数の共通枝 (または非共通枝) をもたない。このことから非可分グラフの混成木集合 HT のすべての要素は HT が木集合または補木集合と一致しない限り同数の枝からなることはない。(証明終)

混成木集合 HT の要素に含まれる枝数に従って類別する。つまり，

$$hT_k=\{ht||ht|=k,\ ht\in HT\} \tag{3}$$

とし，HT の中で最大枝数，最小枝数からなる混成木の部分集合をそれぞれ hT_m, hT_l で表わすことにする。

[定理 2] hT_{k+1} または hT_{k-1} が存在する場合 hT_k は存在しない。$(l+1\leqq k\leqq m-1)$

(証明) グラフ G の階数を ρ とし，$E_z=\{e_{z_1}, e_{z_2}, \cdots, e_{z_n}\}$ とする。$n=1$ のとき，$HT=HT\binom{e_{z_1}}{1}$

$\cup HT\binom{e_{z_1}}{0}$ と表わされる。ここで $A\binom{e_i}{1}$, $A\binom{e_i}{0}$ はそれぞれ e_i を含む，e_i を含まぬ A の部分集合である。定義から，$HT\binom{e_{z_1}}{1}=hT_{p+1}=hT_m$, $HT\binom{e_{z_1}}{0}=hT_{p-1}=hT_l$ となりこの定理は成立する。$n-1$ までつまり，$E_z=\{e_{z_1}, e_{z_2}, \cdots, e_{z_{n-1}}\}$ まで成立したとして，その混成木集合を HT' とする。任意の k に対して HT' の部分集合を hT'_k とすると，$hT'_k=hT'_k\binom{e_{z_n}}{1}\cup hT'_k\binom{e_{z_n}}{0}$, e_{z_n} を新たに E_z に加えると $hT'_k\binom{e_{z_n}}{1}$ は hT_{k-1} に，$hT'_k\binom{e_{z_n}}{0}$ は hT_{k+1} になる。また，$hT_{k+2}(hT'_{k+2}\subset HT')$ は hT_{k+1}, hT_{k+3} に，$hT'_{k-2}(hT_{k-2}\subset HT')$ は hT_{k-1}, hT_{k-3} になり，hT_k は存在しない。(証明終)

この定理から混成木集合 HT をつぎのように類別することができる。

$$HT=\{hT_m, hT_{m-2}, \cdots, hT_{l+2}, hT_l\} \qquad (4)$$

この (4) の混成木集合 HT の類別は，枝集合 E の分割 (E_y, E_z) を変えても l, m の値が変わるだけで形は不変である。今後の議論では，E の分割 (E_y, E_z) は固定して考える。

3. 混成木グラフの定義

混成木集合 HT の (4) のような類別に対して，混成木グラフをつぎのように定義する。

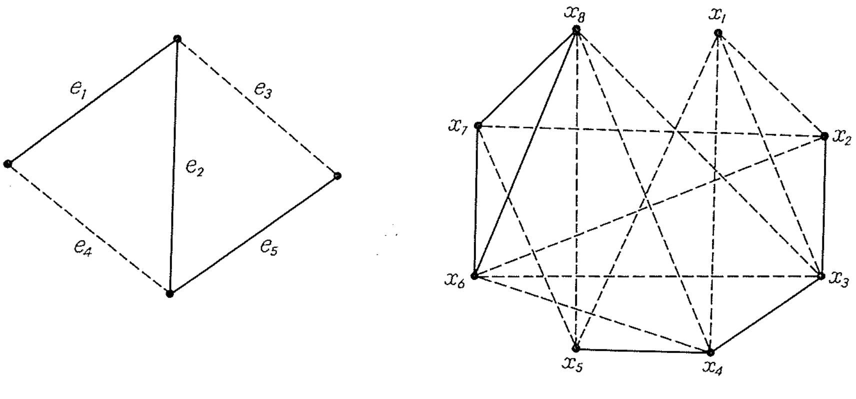
[定義]　混成木グラフ $HT_g=(X, B)$:

混成木集合 HT の要素を節点に対応させ，

$$ht_l = ht_n \oplus \{e_i, e_j\}$$
$$(ht_l, ht_n \in HT,\ e_i, e_j \in E)$$

の関係にある混成木 (ht_l) の節点 x_l と混成木 (ht_n) の節点 x_n を無向枝 $b_i=(x_l, x_n)$ で結んでできるグラフを混成木グラフ $HT_g=(X, B)$, $(b_i\in B,\ x_l, x_n\in X)$ という。ただし，$B=P\cup N$, $P\cap N=\phi$ とし，$|ht_l|=|ht_n|$ のとき $b_i=(x_l, x_n)\in P$, $|ht_l|\neq|ht_n|$ のとき $b_i=(x_l, x_n)\in N$ とする。(定義終)

混成木グラフ Ht_g には並列枝を含まない ($\because ht_i\neq ht_j,\ i\neq j$) ので枝を単に (x_i, x_j) と表わすことにする。つぎに混成木グラフを例によって説明する。図 1 の (a) の混成グラフを考える。



(a)　混成グラフ　*A hybrid graph*

(b)　混成木グラフ　*A hybrid tree graph*

図 1　混成グラフと混成木グラフ

Fig. 1.　A hybrid graph and a hybrid tree graph

$$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$
$$E_y=\{e_1, e_2, e_5\}, \quad E_z=\{e_3, e_4\}$$

とすると，混成木集合 HT はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} HT &= \{e_1 e_2 e_3 e_4 e_5,\ e_1 e_2 e_4,\ e_1 e_4 e_5,\ e_1 e_3 e_5,\ e_2 e_3 e_5,\ e_1,\ e_2,\ e_5\} \\ &= \{ht_1, ht_2, ht_3, ht_4, ht_5, ht_6, ht_7, ht_8\} \\ &= \{hT_5, hT_3, hT_1\} \end{aligned}$$

この混成木集合 HT の混成木グラフは図1の (b) のようになる。ここで，実線枝は P の枝，破線枝は N の枝で，

$$P=\{(x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_5), (x_6, x_7), (x_6, x_8), x_7, x_8\},$$
$$\begin{aligned} N=\{&(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_1, x_5), (x_2, x_6), (x_2, x_7), \\ &(x_3, x_6), (x_3, x_8), (x_4, x_6), (x_4, x_8), (x_5, x_7), (x_5, x_8)\} \end{aligned}$$

である。

さて，$HT_g=(X, B)$ において，$B=P\cup N$, $P\cap N=\phi$ としたとき，P に属する枝を“正の枝” (positive edge)，N に属する枝を“負の枝” (negative edge) とよぶ。

[定理 3] 混成木グラフ $HT_g=(X, B)=(X;P, N)$ の枝 P, N の区別を無視し，すべて正の枝としたグラフは木または補木グラフと同形である。

(証明) 木グラフは木を節点に，木の枝が一つだけ異なる木 (節点) と木 (節点) を一本の枝で結んだものである。つまり，$t_l=t_n\oplus\{e_i, e_j\}$, $(t_l, t_n\in T)$ の関係にある t_l の節点と t_n の節点を枝で結んだものである。ところで，混成木の定義から $ht_l=t_l\oplus E_z$ であるので，$ht_l=ht_n\oplus\{e_i, e_j\}$ から，$t_l\oplus E_z=t_n\oplus E_z\oplus\{e_i, e_j\}$ となり $t_l=t_n\oplus\{e_i, e_j\}$ が導かれ，逆に $t_l=t_n\oplus\{e_i, e_j\}$ から，$t_l\oplus E_z=t_n\oplus\{e_i, e_j\}\oplus E_z$ となり，$ht_l=ht_n\oplus\{e_i, e_j\}$ が導かれるから，$ht_l=ht_n\oplus\{e_i, e_j\}$ の関係にある ht_l, ht_n に対応する節点を結んでできる混成木グラフは木グラフと同形である。補木グラフについても同様である。(証明終)

この定理3から，木 (補木) グラフは混成木グラフの特別の場合であり，混成木グラフは木，補木グラフの一般化概念である。

4. 混成木グラフの均衡性

3. において，木グラフ (補木グラフ) は混成木グラフの特別の場合として定義できることが示された。そのため，木グラフ (補木グラ) フの位相幾何学的性質はすべて混成木グラフが有することになる。さらにここでは混成木グラフ独特の性質を調べる。

	+	−
+	+	−
−	−	+

表1 乗法表

Table 1. A multiplication table

混成木グラフ $HT_g=(X;P, N)$ の枝に符号を付けて考える。すなわち，P に属する枝 (正の枝) に正 (+)，N に属する枝 (負の枝) に負 (−) の符号を付けることにする。また，混成木グラフ HT_g の道または閉路の符号をそれぞれの道または閉路に含まれる枝の符号の積で定義する。ただし，その積は表1の乗法表による。

$S(x_i, x_j)$ を枝 (x_i, x_j) の符号とすると，図1の (b) の混成木グラフの道 (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4) の符号は，$S(x_1, x_2)\times S(x_2, x_3)\times S(x_3, x_4)=(-)\times(+)\times(+)=(-)$ となる。また閉路 (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), (x_4, x_1) の符号は $S(x_1, x_2)\times S(x_2, x_3)\times S(x_3, x_4)\times S(x_4, x_1)=(-)\times(+)\times(+)\times(-)=(+)$ となる。

つぎに，均衡グラフをつぎのように定義[4]する。

均衡グラフ：　グラフ G のすべての閉路の符号が正ならば，このグラフは均衡しているといい，そのグラフのことを均衡グラフ (balanced graph) という。

さて，上述のように混成木グラフの枝に符号を付けると，つぎのような性質を得る。

[定理 4]　混成木グラフ $HT_g=(X;\ P,N)$ は均衡している。

(証明)　HT_g の任意の一つの閉路を $L=\{(x_{l_1},x_{l_2}),(x_{l_2},x_{l_3}),\cdots,(x_{l_k},x_{l_1})\}$ とする。$ht_{l_i}\in hT_n$, $(1\leqq i\leqq k-1)$ とすると，$ht_{l_{i+1}}=ht_{l_i}\oplus\{e_{j_i},e_{j_{i+1}}\}$ で得られる $ht_{l_{i+1}}$ は hT_n か hT_{n+2} または hT_{n-2} に含まれる。つまり，$ht_{l_{i+1}}=ht_{l_i}\oplus\{e_{j_i},e_{j_{i+1}}\}$ の演算によって ht_{l_i} から $ht_{l_{i+1}}$ が得られるが，それが含まれる混成木集合 HT の部分集合 ((4) の類別による。) の変化は，せいぜい前 (hT_{n-2})，後 (hT_{n+2}) に移るだけである。hT_{n-2} に移ったとすると，その枝 $(x_{l_i},x_{l_{i+1}})$ の符号は負となる。その場合，L は閉路であるので，L の枝にはその両端の節点に対応する混成木が含まれる部分集合が hT_{n-2} から hT_n へ移るような枝も含まれなければならない。つまり，L の中には $(ht_{l_j}\in hT_n,\ ht_{l_{j+1}}\in hT_{n-2})$ の条件を満足する枝 $(x_{l_j},x_{l_{j+1}})$ の数と同数の $(ht_{l_i}\in hT_{n-2},\ ht_{l_{i+1}}\in hT_n)$ を満足する枝 $(x_{l_i},x_{l_{i+1}})$ が存在する。$ht_{l_{i+1}}$ が hT_{n+2} に移った場合も同様である。このことから閉路 L の中には N に含まれる枝が偶数個含まれることになり，その符号は正となる。(証明終)

例えば，図 1 の (b) の混成木グラフにおいて，どの閉路を考えてもその符号は正であることがわかる。ところで，混成木グラフ HT_g の一つの木 t の枝の符号が既知であるとする。t の補木 E の枝を一つ t に加えると一つの閉路ができる。その閉路では加えた補木の一つの枝以外は木 t の枝であり，また閉路の符号が正であることから補木の枝の符号が定められる。このことからつぎの系を得る。

[系]　混成木グラフ HT_g の一つの木の枝の符号がわかれば，HT_g のすべての枝の符号がわかる。(系終)

定理 4 において，混成木グラフは均衡しているという結果を得たが，その性質からつぎの定理[4)]が得られる。

[定理 5]　混成木グラフ $\mathrm{HT}_g=(X;\ P,N)$ の節点集合 X を二つの部分集合に分割，つまり $X=X^1\cup X^2$, $X^1\cap X^2=\phi$ とし，$x_i\in X^1$, $x_j\in X^1$ (または，$x_i\in X^2$, $x_j\in X^2$) のとき x_i, x_j 間の道の符号は正，$x_i\in X^1$, $x_j\in X^2$ (または，$x_i\in X^2$, $x_j\in X^1$) のとき負とすることができる。

(証明)　X の部分集合 X^1 をつぎのように作る。任意の一点を取り X^1 に入れる。その点と負の道で結ばれていない点を X^1 に加える。さらに X^1 に含まれる点と負の道で結ばれていない点を X^1 に加える。この操作を続けて，X^1 に含まれる点と負の道で結ばれていない点がなくなったとする。このとき X^1 の X に関する補集合を X^2 とする。X^1 の節点間の道の符号はすべて正，つまり X^1 の節点間の枝はすべて正の枝である。$x_i\in X^1$, $x_j\in X^2$ の 2 点を考える。x_i と x_j の間の道の符号が正とする。この場合 x_j との道の符号が負である節点 $x_k\,(\in X^1)$ が少なくとも一つ存在するはずである。何故ならば，そうでないと x_j は X^1 に含まれることになるからである。この場合 $x_i\to x_j\to x_k$ という負の道が存在する。ところが x_i と x_k の間の道の符号はすべて正であったので ($\because$ $x_i\in X^1$, $x_k\in X^1$) これは矛盾を生じ x_i と x_j 間の道の符号は負となる。つぎに，$x_i\in X^2$, $x_j\in X^2$ の 2 点を考える。節点 $x_k\,(\in X^1)$ を考えると，x_i と x_k, x_j と x_k の間の道の符号はいずれも負である。混成木グラフ HT_g のすべての閉路の符号は正である (定理 4) ことから，任意の 2 点間のすべての道は同じ符号をもつことに注意して，$x_i\to x_k\to x_j$ の道の符号が正であるので x_i と x_j 間のすべての道の符号は正となる。(証明終)

この定理 5 の X の分割 (X^1,X^2) と混成木集合 HT の類別 ((4)) との関係はつぎのようになる。

[補題 1]　HT の類別 $HT=\{hT_m,hT_{m-2},\cdots,hT_l\}$ に対して，$hT_n\,(n=m,\ m-2,\cdots,l)$ の要

素に対応する HT_g の節点はすべて，X の分割 (X^1, X^2) に対して同じ部分集合 (X^1 または X^2) に含まれる。

(証明) hT_n の任意の二つの混成木 ht_i, ht_j に対応する HT_g の節点を x_i, x_j とすると，x_i と x_j 間の道の符号は正である。(定理4の証明と同様にして証明される。) ゆえに，定理5から明らか。(証明終)

この補題を用いてつぎの定理を得る。

[定理 6] hT_n の要素に対応する節点が X^1 に含まれるとき，hT_{n+2}, hT_{n-2} の要素に対応する節点は X^2 に含まれる。

(証明) 補題1から，hT_n の節点が X^1 に含まれているとし，その任意の一つの節点を x_i とする。hT_{n+2} の一つの節点を x_j とすると，x_i と x_j 間の道の符号は負であるので x_j は X_2 に含まれる。hT_{n-2} の要素と x_i との間の道も負となり，hT_{n-2} の要素も X^2 に含まれる。(証明終)

この定理から，$HT=\{hT_m, hT_{m-2}, \cdots, hT_l\}$ に対して，hT_n に対応する HT_g の節点の部分集合を $X_n (n=m, m-2, \cdots, l)$ とすると，

$$X^1 = \{X_m,\ X_{m-4},\ X_{m-8},\ \cdots\} \tag{5}$$

$$X^2 = \{X_{m-2},\ X_{m-6},\ X_{m-10},\ \cdots\} \tag{6}$$

となる。例えば，図1の (b) の混成木グラフでは，

$$X^1 = \{X_5, X_1\} = \{x_1, x_6, x_7, x_8\}, \qquad X^2 = \{X_3\} = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

となる。

5. 結　　言

グラフ理論上の基本概念である混成木の性質を調べるために，一つのグラフ G の混成木集合の属性を示す混成木グラフを定義し，その性質を調べた。その結果混成木グラフ $HT_g=(X\,;\,P, N)$ は均衡していることがわかり，その性質から混成木集合の要素の枝数による類別と混成木グラフの構造との関係を明らかにした。この結果は混成木グラフの実現問題に重要な役目をはたす。混成木グラフの実現問題は混成木集合の要素間の関係のみから，もとのグラフを実現しようとするものであるが，これについては別の機会に譲る。

なお，混成木グラフの均衡性は，回路網を位相幾何学的立場から考察しようとする場合に重要な要素になると思われる。

謝　　辞

御指導いただいた電子工学科黒部貞一教授，小川吉彦助教授，および現在御指導，御助言をいただいている松本正教授に感謝の意を表します。

参 考 文 献

1) 仙石正和，黒部貞一，小川吉彦："混成木集合の実現について"，電子通信学会論文誌 (A)，昭 47-02.
2) 仙石正和，黒部貞一，小川吉彦："混成木とその性質"，電子通信学会論文誌 (A)，昭 46-06.
3) R. L. Cummins: "Hamilton Circuits in Tree Graphs", IEEE Trans, CT-13, March. 1966.
4) C. Flament: "Applications of Graph Theory to Group Structure", Prentice-Hall, Inc. 1963.
5) M. Sengoku, Y. Ogawa and T. Kurobe: "On Hybrid Trees", 北大工学部研究報告, No. 59, 昭 46, 3.