



Title	混成木グラフの実現について
Author(s)	仙石, 正和
Citation	北海道大學工學部研究報告, 66, 35-42
Issue Date	1973-03-30
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/41113
Type	bulletin (article)
File Information	66_35-42.pdf



[Instructions for use](#)

混成木グラフの実現について

仙 石 正 和*

(昭和47年9月30日受理)

On the Realization of a Hybrid Tree Graph

Masakazu SENGOKU

Department of Electronic Engineering, Faculty of Engineering,
Hokkaido University, Sapporo, Japan

(Received September 30, 1972)

Abstract

A hybrid tree on a linear graph is a generalized concept of a tree and a cotree. A hybrid tree graph is a linear graph which represents the relations among the elements of the set of hybrid trees.

In this paper, some properties of a hybrid tree graph of a connected linear graph G are investigated. And an algorithm for finding a cut set matrix of the graph which realizes the given subgraph (the local subgraph) of a hybrid tree graph is presented. An interesting property of a hybrid tree graph HT_g of G , that is, HT_g is balanced, is used for classification of edges in G . These results show that only a local subgraph of the hybrid tree graph HT_g and the sign of edges of a tree on the subgraph are the sufficient knowledge for the realization of the set of hybrid trees.

1. 緒 言

混成木¹⁾は木、補木をその特別の場合として含む概念であり、グラフ理論およびその応用上、特に回路網理論においては有用な概念の一つである。混成木グラフ²⁾は一つのグラフの混成木集合の要素間の関係を表わすものである。混成木集合を与えて、その混成木集合をもつものグラフを実現する問題は既に解決され³⁾ているが、その際、混成木集合 HT のすべての要素が必要ではなく、ある基準混成木 ht_0 から、 $ht_0 \oplus \{e_i, e_j\} = ht'$ によって得られる ht' の集合 (混成木集合の部分集合) が与えられればよいことを知った。この ht' からなる HT の部分集合を基準混成木 ht_0 に対するローカル集合とよぶ。この ht_0 に対するローカル集合は、混成木グラフ $HT_g = (X, B)$ では、 ht_0 に対応する節点 $x_0 (\in X)$ から距離1にある節点の集合に対応している。この x_0 から距離1にある節点を含み、それらの節点を両端点とする枝からなる HT_g の部分グラフをローカルグラフとよぶ、(このローカルグラフは木グラフにおける概念³⁾であるが、混成木が木に一致するとき同一概念となるので、ここでは同じ用語を用いる。)

木グラフのローカルグラフからものグラフを実現する問題は行なわれている³⁾が、混成木グラフでは枝の類別が重要なポイントとなる。本論文は、混成木グラフ HT_g のある一つの節点 x_0 (基準節点) のローカルグラフが与えられた場合にもとのグラフの基本カットセット行列を求める

* 電子工学科 電波伝送工学講座

一方法を述べる。これは、混成木集合の実現にはそのすべての要素が必要ではなく、単に一部の要素間の関係だけが必要であることを示すものである。また、枝の類別には、混成木グラフが均衡している²⁾という性質が用いられる。

2. 準備

グラフ G の混成木集合 HT の任意の一つの要素を ht_0 とし、 ht_0 に対するローカル集合を $H_0 (H_0 \subset HT, ht_0 \in H_0)$ とする。 H_0 の任意の部分集合を H_s とするとき、記号 $HT_{g_0}[H_s]$ で HT_g の ht_0 に対するローカルグラフの H_s の要素に対応する節点を含み、その節点を両端点とするすべての枝からなる部分グラフを表わす。この記号を用いると、 ht_0 に対するローカルグラフは $HT_{g_0}[H_0]$ となる。

さて、グラフ G の枝集合 E を二つの部分に分け $E = E_y \cup E_z$, $E_y \cap E_z = \phi$ とする。 $ht_0 = \varepsilon_y \cup \varepsilon_z$, $\varepsilon_y \cap \varepsilon_z = \phi$, $\varepsilon_y \subset E_y$, $\varepsilon_z \subset E_z$, $\hat{\varepsilon}_y = E_y - \varepsilon_y$, $\varepsilon_z = E_z - \varepsilon_z$ とし、

$$\varepsilon_y = \{e_{y_1}, e_{y_2}, \dots, e_{y_r}\} \quad (1)$$

$$\varepsilon_z = \{e_{z_1}, e_{z_2}, \dots, e_{z_s}\} \quad (2)$$

$$\hat{\varepsilon}_y = \{e_{y_1}, e_{y_2}, e_{y_r}\} \quad (3)$$

$$\hat{\varepsilon}_z = \{e_{z_1}, e_{z_2}, \dots, e_{z_s}\} \quad (4)$$

とする。

ところで、文献 (4) において ht_0 に対するローカル集合 H_0 は $HT(e_{y_j})$ と $HT(e_{z_j})$ または $HT(e_{y_i})$ と $HT(e_{z_i})$ から求まることを示した、つまり、

$$H_0 = \left\{ \bigcup_{j=1}^p HT(e_{y_j}) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{j=1}^s HT(e_{z_j}) \right\} \quad (5)$$

または、

$$H_0 = \left\{ \bigcup_{j=1}^r HT(e_{y_j}) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{j=1}^q HT(e_{z_j}) \right\} \quad (6)$$

$HT(e_{y_j})$, $HT(e_{z_i})$, $HT(e_{y_j})$, $HT(e_{z_i})$ の性質からつぎの補題を得る。

〔補題 1〕 $HT_{g_0}[HT(e_{y_j})]$, ($1 \leq j \leq p$), $HT_{g_0}[HT(e_{z_i})]$, ($1 \leq i \leq s$), $HT_{g_0}[HT(e_{y_i})]$, ($1 \leq i \leq r$), $HT_{g_0}[HT(e_{z_j})]$, ($1 \leq j \leq q$) はいずれも完全部分グラフ (完全グラフをなしている部分グラフであるのでこのように言い、節点一個または唯一つの枝の場合も含める。)である。

(証明) $HT(e_{y_j})$ は文献 (4) の性質 4 の (a) の演算によって求まる混成木の集合で、この中の要素は互いに $ht_n \oplus \{e_i, e_j\} = ht_m$, ($ht_n, ht_m \in HT(e_{y_j})$) の関係で結びつけられることから明らかである。 $HT(e_{z_j})$, $HT(e_{y_j})$, $HT(e_{z_i})$ も同様である。(証明終)

$$HT(e_{y_j}) \cap HT(e_{y_k}) = \phi, (j \neq k) \quad (7)$$

$$HT(e_{z_i}) \cap HT(e_{z_k}) = \phi, (j \neq k) \quad (8)$$

$$HT(e_{y_j}) \cap HT(e_{y_k}) = \phi, (j \neq k) \quad (9)$$

$$HT(e_{z_j}) \cap HT(e_{z_k}) = \phi, (j \neq k) \quad (10)$$

$$HT(e_{y_j}) \cap HT(e_{z_k}) = \phi \quad (11)$$

$$HT(e_{y_j}) \cap HT(e_{z_k}) = \phi \quad (12)$$

であることから、つぎの補題を得る。

〔補題 2〕 $HT_{g_0}[HT(e_{y_j})]$, $HT_{g_0}[HT(e_{y_k})]$, $HT_{g_0}[HT(e_{z_m})]$, $HT_{g_0}[HT(e_{z_n})]$, (ただし、 $j \neq k$, $m \neq n$) は共通部分を持たない。また、 $HT_{g_0}[HT(e_{y_j})]$, $HT_{g_0}[HT(e_{y_k})]$, $HT_{g_0}[HT(e_{z_i_m})]$, HT_{g_0}

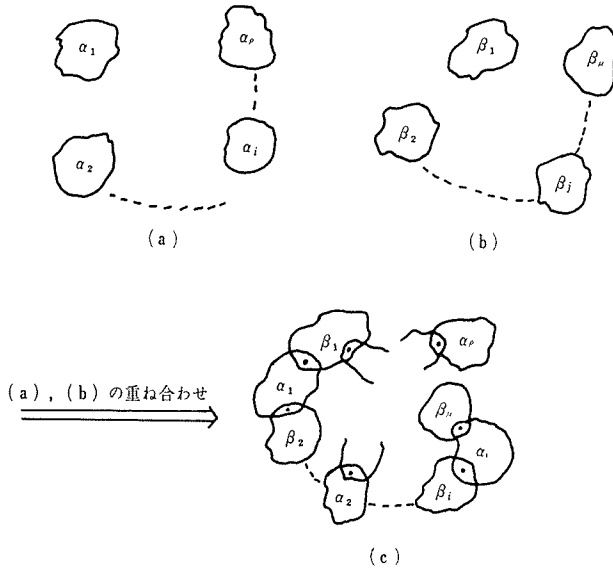


図1 混成木グラフの分解

Fig. 1. Partition of a hybrid tree graph.

混成木に対応する節点唯一であり、これは、 e_{z_j} を含み $\varepsilon_y, \varepsilon_y$ に属する枝からなるカットセットに $e_{y_k}(e_{z_{ik}})$ が含まれるとき、そのときに限る。

以上をまとめると、基準混成木 $ht_0[HT_g]$ では x_0 に対するローカルグラフは、補題1、補題2から図1の(a)または(b)のように ρ 個 (ρ : グラフ G の階数) または μ 個 (μ : G の零度) の完全グラフに分解できる。図1の(a)の $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ は $HT_{g_0}[HT(e_{v_{ij}})]$, ($1 \leq j \leq p$), $HT_{g_0}[HT(e_{z_j})]$, ($1 \leq j \leq s$) に対応する ρ 個 ($\rho = p + s$) の完全部分グラフであり、図(b)の $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu$ は $HT_{g_0}[HT(e_{v_j})]$, ($1 \leq j \leq r$), $HT_{g_0}[HT(e_{z_{ij}})]$, ($1 \leq j \leq q$) に対応する μ 個 ($\mu = r + q$) の完全部分グラフである。(5), (6) から $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ および $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu$ の中にはローカルグラフの節点すべてを含んでいる。そこで図1の(a), (b)の対応する節点と節点を重ね合わせてできるグラフ図1の(c) (これがもとのローカルグラフである) では、補題3から α_i と β_j ($1 \leq i \leq \rho$, $1 \leq j \leq \mu$) の共通部分が唯一の節点からなっている。

さて、ある一つの枝に関する最大完全部分グラフをその枝を含むような完全グラフのすべての和として定義すると、以上の結果からつぎの定理を得る。

〔定理1〕 ローカルグラフ $HT_{g_0}[H_0]$ の任意の一つの枝に関する最大完全部分グラフは完全部分グラフであって、 $HT_{g_0}[HT(e_{v_{ij}})]$, ($1 \leq j \leq p$), $HT_{g_0}[HT(e_{z_j})]$, ($1 \leq j \leq s$), $HT_{g_0}[HT(e_{v_j})]$, ($1 \leq j \leq r$), $HT_{g_0}[HT(e_{z_{ij}})]$, ($1 \leq j \leq q$) のうちの一つである。

〔証明〕 図1のローカルグラフの分解からわかるように、 $HT_{g_0}[H_0]$ の任意の一つの枝は $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ または $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu$ のいずれかに含まれなければならない。また、補題3から、一つの枝に関する最大完全部分グラフは完全グラフの和ではなくて、それ自身完全部分グラフとなっている。(完全グラフの和とすると、それらの完全グラフがその枝の両端点つまり2節点を共通とすることになるから) これらのことと、 α_i ($1 \leq i \leq \rho$), β_j ($1 \leq j \leq \mu$) がいずれもそれ自身完全部分グラフであることから明らかである。(証明終)

この定理によって、 $HT_{g_0}[H_0]$ が一意的に完全部分グラフに分解されることが証明された。

つぎに、 $ht_0 \in hT_k$ とすると、ローカルグラフ $HT_{g_0}[H_0]$ の節点は、 hT_k に含まれる混成木と

$[HT(e_{z_{in}})]$, (ただし、 $j \neq k, m \neq n$) は共通部分を持たない。

また、つぎの補題が成立する。

〔補題3〕 $HT_{g_0}[HT(e_{v_{ij}})]$ と $HT_{g_0}[HT(e_{v_k})]$, (または $HT_{g_0}[HT(e_{z_{ik}})]$) が共通部分を持つとすれば、 $ht_0 \oplus \{e_{v_{ij}}, e_{v_k}\}$ (または、 $ht_0 \oplus \{e_{v_{ij}}, e_{z_{ik}}\}$) によって得られる混成木に対応する節点唯一である。これは、 $e_{v_{ij}}$ を含み $\varepsilon_y, \varepsilon_y$ に属する枝からなるカットセットに $e_{y_k}(e_{z_{ik}})$ が含まれるとき、そのときに限る。また、 $HT_{g_0}[HT(e_{z_j})]$ と $HT_{g_0}[HT(e_{v_k})]$ (または、 $HT_{g_0}[HT(e_{z_{ik}})]$) が共通部分を持つとすれば、 $ht_0 \oplus \{e_{z_j}, e_{v_k}\}$ (または、 $ht_0 \oplus \{e_{z_j}, e_{z_{ik}}\}$) によって得られる混

$hT_{k\pm 2}$ に含まれる混成木に対応する節点とに分けられる⁴⁾。 $HT_{g_0}[H_0]$ の節点集合を X_0 とし、 $hT_k, hT_{k\pm 2}$ に含まれる混成木に対応する節点をそれぞれ $X_0^k, X_0^{k\pm 2}$ とする。ここで $X_0 = X_0^k \cup X_0^{k\pm 2}, X_0^k \cap X_0^{k\pm 2} = \phi$ である。

〔定理 2〕 ローカルグラフ $HT_{g_0}[H_0]$ の節点集合 X_0 を 2 分割し、 $X_0 = X_0^1 \cup X_0^2, X_0^1 \cap X_0^2 = \phi$ として、 X_0^1 の節点間および X_0^2 の節点間の道の符号を正、 X_0^1 と X_0^2 の節点間の道の符号を負とするようにしたとき、 $X_0^1 = X_0^k, X_0^2 = X_0^{k\pm 2}$ または $X_0^1 = X_0^{k\pm 2}, X_0^2 = X_0^k$ である。

〔証明〕 $HT_{g_0}[H_0]$ は混成木グラフ HT_g の部分グラフであるので文献 (2) の定理 2 から、均衡しており、そのため同じく文献 (2) の定理 3 から、節点集合 X_0 を 2 分割し、 $X_0 = X_0^1 \cup X_0^2, X_0^1 \cap X_0^2 = \phi$ として、 X_0^1 の節点間および X_0^2 の節点間の道の符号を正、 X_0^1 と X_0^2 の節点間の道の符号を負とするようにできる。また、 X_0 は $ht_0 \in hT_k$ とすると、 hT_k と $hT_{k\pm 2}$ に属する混成木に対応する節点だけしか含んでいない。(文献 (4) から) そのため文献 (2) の定理 4 から、 $X_0^1 = X_0^k, X_0^2 = X_0^{k\pm 2}$ または、 $X_0^1 = X_0^{k\pm 2}, X_0^2 = X_0^k$ である。(証明終)

この定理によってローカルグラフ $HT_{g_0}[H_0]$ の節点の ($ht_0 \in hT_k$ とするとき) hT_k の混成木に対応する節点か、 $hT_{k\pm 2}$ の混成木に対応する節点かの類別ができる。また、文献 (2) の定理 5 から $HT_{g_0}[H_0]$ のすべての枝の符号は必要なく、 $HT_{g_0}[H_0]$ の一つの木の枝の符号だけが必要であることに注意すべきである。

3. 混成木グラフ実現の手順

以上の準備で得た結果を用いて、ローカルグラフ $HT_{g_0}[H_0]$ の位相幾何学的構造と、その中の一つの木の枝の符号が与えられた場合に、この $HT_{g_0}[H_0]$ を含む混成木グラフ HT_g を持つようなもとのグラフ G のカットセット行列(または閉路行列)を求めることができる。ここでは、カットセット行列を求める一つのアプローチを与える。

ローカルグラフ $HT_{g_0}[H_0]$ の位相幾何学的構造と、その中の一つの木の枝の符号が与えられたとする。

〔手順 1〕 $HT_{g_0}[H_0]$ の節点に適当に名札を付け、その節点の集合を $X_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ とする。そして、 X_0 の部分集合 X_0^1 をつぎのように作る。任意の一つの節点 x_1 を選び X_0^1 に入れる。 x_1 と正の道(符号の与えられている木の枝をたどる道)で結ばれているすべての節点を X_0^1 に加える。 X_0^1 の X_0 に関する補集合を X_0^2 とする。

〔手順 2〕 $HT_{g_0}[H_0]$ の任意の一つの枝 $b_1 = (x_{i_1}, x_{j_1}), (i_1 \neq j_1, 1 \leq i_1, j_1 \leq n)$ を選び、 b_1 に関する最大完全部分グラフを求めこれを θ_1 とする。つぎに θ_1 に属さない任意の枝 $b_2 = (x_{i_2}, x_{j_2}), (i_2 \neq j_2, 1 \leq i_2, j_2 \leq n)$ を選び、 b_2 に関する最大完全部分グラフを求めこれを θ_2 とする。この操作を続けて、 $HT_{g_0}[H_0]$ のすべての枝がいずれかの最大完全部分グラフに属するようにしたときの最大完全部分グラフの集合を $A_1 = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l\}$ とする。

つぎに、 A_1 の唯一つの要素(完全部分グラフ)にしか含まれないような節点のすべてを求めこれを $A_2 = \{\theta_{l+1}, \theta_{l+2}, \dots, \theta_m\}$ とする。(この A_2 の要素は唯一つの節点からなる完全部分グラフであることに注意) A_1 と A_2 の和集合をとって、 $A = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l, \theta_{l+1}, \dots, \theta_m\}$ とする。

〔手順 3〕 $X_0^k = X_0^1, X_0^{k\pm 2} = X_0^2$ とおく、 m 個の枝の集合 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ を考え、枝対 $(e_i, e_j), (1 \leq i, j \leq m)$ の集合 $E_{p_k}, E_{p_{k\pm 2}}$ をつぎのように作る。 A の共通部分をもつ任意の 2 つの要素(完全部分グラフ) $\theta_{i_1}, \theta_{i_2}, (1 \leq i_1, i_2 \leq m)$ を選び、 $\theta_{i_1}, \theta_{i_2}$ の共通部分が唯一つの節点 $x_j (1 \leq j \leq n)$ であって、 $x_j \in X_0^k$ のとき枝対 (e_{i_1}, e_{i_2}) を $E_{p_k}, x_j \in X_0^{k\pm 2}$ のとき枝対 (e_i, e_j) を $E_{p_{k\pm 2}}$

の要素とする。この操作を続けて A の要素と要素の共通部分になる節点なくなるまで行なう。(これで得られた枝対集合 $E_{pk}, E_{pk\pm 2}$ の全要素数は n 個である)。

つぎに、 $X_0^k = X_0^2, X_0^{k\pm 2} = X_0^1$ として、同様に枝対集合を求め、 $E'_{pk}, E'_{pk\pm 2}$ とする。ただし、 $E'_{pk} = E_{pk\pm 2}, E'_{pk\pm 2} = E_{pk}$ であるので、実際には E_{pk} と $E_{pk\pm 2}$ を求める操作だけでよい。

〔手順4〕 $E_{pk}, E_{pk\pm 2}$ (または、 $E'_{pk}, E'_{pk\pm 2}$) を得たので、文献(4)の(iii)の場合の手順に続く。

以上、手順1~手順4によって、ローカルグラフ $HT_{g_0}[H_0]$ の位相幾何学的構造と、その中の一つの木の枝の符号が与えられた場合もとのグラフの実現問題を文献(4)の(iii)の枝対集合 $E_{pk}, E_{pk\pm 2}$ が与えられた場合の実現問題に帰着させることができた。

4. 例 題

3. で述べた混成木グラフ実現のアルゴリズムを実際の例に適用してみる。

図2のグラフをローカルグラフとする混成木グラフを持つもとのグラフ G を求める。図2のグラフで太線と破線の枝で一つの木をなしているが、太線の枝の符号は正、破線の枝の符号は負であり、その他の符号は与えられていない。

〔手順1〕

図3のように節点に名札をつけ、

$$X_0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}\}$$

とする。 X_0 を与えられた木の枝の符号から、 X_0^1 と X_0^2 に分割する。

$$X_0^1 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}$$

$$X_0^2 = \{x_3, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}\}$$

〔手順2〕

図3のように $HT_{g_0}[H_0]$ を完全部分グラフに分割し、 $A_1 = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8\}, A_2 = \{\theta_9, \theta_{10}\}$

$$A = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8, \theta_9, \theta_{10}\}$$

となる。

〔手順3〕

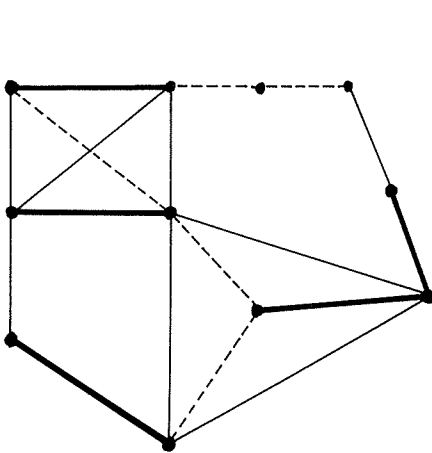


図2 与えられた $HT_{g_0}[H_0]$
Fig. 2. Prescribed graph $HT_{g_0}[H_0]$

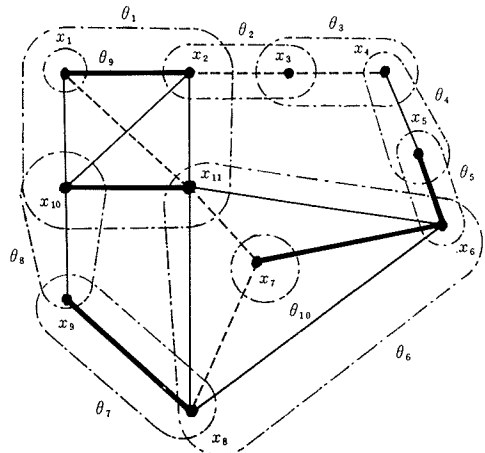


図3 $HT_{g_0}[H_0]$ の分解
Fig. 3. Partition of $HT_{g_0}[H_0]$

$$X_0^k = X_0^1 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7\}$$

$$X_0^{k\pm 2} = X_0^2 = \{x_3, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}\}$$

として,

$$E_{p_k} = \{e_1e_2, e_1e_9, e_3e_4, e_4e_5, e_5e_6, e_6e_{10}\}$$

$$E_{p_{k\pm 2}} = \{e_1e_6, e_1e_8, e_2e_3, e_6e_7, e_7e_8\}$$

を得る。 $X_0^k = X_0^2$, $X_0^{k\pm 2} = X_0^1$ とした場合は,

$$E'_{p_k} = E_{p_{k\pm 2}} = \{e_1e_6, e_1e_8, e_2e_3, e_6e_7, e_7e_8\}$$

$$E'_{p_{k\pm 2}} = E_{p_k} = \{e_1e_2, e_1e_9, e_3e_4, e_4e_5, e_5e_6, e_6e_{10}\}$$

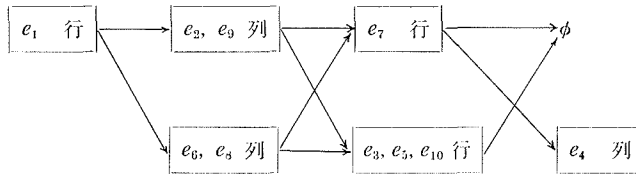
となる。

〔手順 4〕

文献 (4) の (iii) の手順を用いて、枝対集合 E_{p_k} , $E_{p_{k\pm 2}}$ (または E'_{p_k} , $E'_{p_{k\pm 2}}$) からもとのグラフのカットセット行列を求める。

(a) E_{p_k} , $E_{p_{k\pm 2}}$ の場合

$$\begin{matrix} & e_2 & e_9 & e_6 & e_8 & e_4 \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_3 \\ e_5 \\ e_7 \\ e_{10} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{1} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$



ゆえに,

$$\begin{cases} E_y = \{e_1, e_2, e_7, e_9\} \\ E_z = \{e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, e_{10}\} \end{cases}$$

または,

$$\begin{cases} E_y = \{e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, e_{10}\} \\ E_z = \{e_1, e_2, e_7, e_9\} \end{cases}$$

(b) E'_{p_k} , $E'_{p_{k\pm 2}}$ の場合

(a) と同様に,

$$\begin{cases} E_y = \{e_2, e_3, e_5, e_9, e_{10}\} \\ E_z = \{e_1, e_4, e_6, e_7, e_8\} \end{cases}$$

または,

$$\begin{cases} E_y = \{e_1, e_4, e_6, e_7, e_8\} \\ E_z = \{e_2, e_3, e_5, e_9, e_{10}\} \end{cases}$$

(a) の最初の $E_y = \{e_1, e_2, e_7, e_9\}$, $E_z = \{e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, e_{10}\}$ を用いると、もとのグラフのカットセット行列 D_1 は

$$D_1 = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \varepsilon_y & & \bar{\varepsilon}_z & & \bar{\varepsilon}_y & & \varepsilon_z & \\ e_1 & e_7 & e_8 & e_5 & e_{10} & e_2 & e_7 & e_4 & e_6 & e_8 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = [U_1 N]$$

となる。(U_1 は単位行列) この D_1 を満足する混成グラフを図4に示す。実線枝は E_y の枝、破線枝は E_z の枝である。

D_1 の他に、 $D_2 = [U_2 N_2]$ (U_2 は単位行列) (D_1 の双対グラフ) としてもよく、また、 $E_y = \{e_3, e_4, e_5, e_6, e_8, e_{10}\}$, $E_z = \{e_1, e_2, e_7, e_9\}$ の場合はいま得られたグラフの E_y の枝と E_z の枝を交換して (ε_y と $\bar{\varepsilon}_z$, $\bar{\varepsilon}_y$ と ε_z を交換) 得られる。

(b) の $E_y = \{e_2, e_3, e_5, e_9, e_{10}\}$, $E_z = \{e_1, e_4, e_6, e_7, e_8\}$ の場合、もとのグラフのカットセット行列 D'_1 は、

$$D'_1 = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} \varepsilon_y & & \varepsilon_z & & \bar{\varepsilon}_y & & \varepsilon_z & \\ e_3 & e_5 & e_{10} & e_1 & e_7 & e_2 & e_9 & e_4 & e_6 & e_8 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) = [U_1 N]$$

となる。この D'_1 を満足するグラフを図5に示す。実線枝は E_y , 破線枝は E_z の枝である。

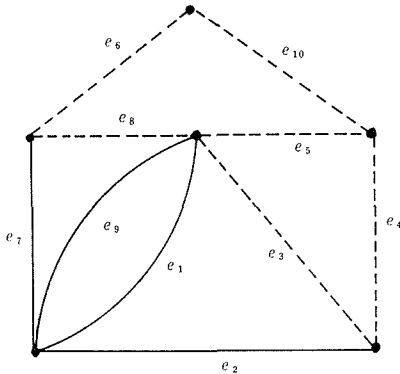


図4 D_1 を満足する混成グラフ

Fig. 4. A hybrid graph G_1 corresponding to cut set matrix D_1

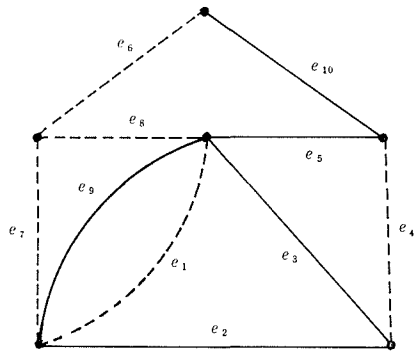


図5 D'_1 を満足する混成グラフ

Fig. 5. A hybrid graph G'_1 corresponding to cut set matrix D'_1

D'_1 は D_1 の ε_y と $\bar{\varepsilon}_z$ を交換したものであることに注意すべきである。 D'_1 の他に $D'_2 = [U'_2 N']$ (双対グラフ) としてもよく、また $E_y = \{e_1, e_4, e_6, e_7, e_8\}$, $E_z = \{e_2, e_3, e_5, e_9, e_{10}\}$ の場合は D'_1 の E_y と E_z つまり、 ε_y と $\bar{\varepsilon}_z$, $\bar{\varepsilon}_y$ と ε_z を交換して得られるグラフである。

5. 結 言

混成木グラフの部分グラフ $HT_{g_0}[H_0]$ が与えられた場合に、その $HT_{g_0}[H_0]$ を部分グラフとする混成木グラフをもつようなもとのグラフ G を求める一つのアルゴリズムを与えた。この混成木グラフ HT_g の部分グラフ $HT_{g_0}[H_0]$ からもとのグラフを求める問題は、混成木集合 HT を与えなくとも、 HT の一部の要素間の関係だけから、もとのグラフが実現できることを示すものである。さらに、混成木グラフの枝の符号の決定には、その均衡性²⁾から、 $HT_{g_0}[H_0]$ のすべての枝の符号は必要ではなく、一個の木の枝の符号だけが必要であることを利用している。また、この混成木グラフの枝（道）の符号を用いて、もとのグラフの枝の類別を行なった。

この結果、 $HT_{g_0}[H_0]$ が与えられた場合、得られるグラフは互いに 2-同形、またはその双対（平面グラフのとき）、またはそれらの ε_y と $\bar{\varepsilon}_z$ 、 $\bar{\varepsilon}_y$ と ε_z を交換したもの、あるいは ε_y と $\bar{\varepsilon}_z$ を交換したものであるという結論を得た。ただし、可分枝と自己閉路を含むグラフの場合、その $HT_{g_0}[H_0]$ は可分枝、自己閉路を除いても同形であるので、得られたグラフに任意の可分枝、自己閉路を加えることができる。

謝辞：本研究を行なうにあたり御指導いただいた本学電子工学科黒部貞一教授、小川吉彦助教および現在御指導いただいている松本正教授に感謝の意を表します。

文 献

- 1) 仙石正和, 黒部貞一, 小川吉彦: “混成木とその性質” 電子通信学会誌 (A) 54-A (昭46-07).
- 2) 仙石正和: “混成木グラフの均衡性” 北大工学部研究報告 第65号 (昭47-12).
- 3) G. Kishi and Y. Kajitani: “On the realization of tree graphs”, IEEE Trans. CT-51 (Sept. 1968).
- 4) 仙石正和, 黒部貞一, 小川吉彦: “混成木集合の実現について” 電子通信学会誌 (A) 55-A (昭47-02).