



Title	グラフ理論的手法による回路網解析のプログラミング
Author(s)	田原, 米起; 干場, 敬典; 仙石, 正和; 小川, 吉彦; 黒部, 貞一
Citation	北海道大學工學部研究報告, 67, 101-108
Issue Date	1973-06-30
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/41119">http://hdl.handle.net/2115/41119</a>
Type	bulletin (article)
File Information	67_101-108.pdf



[Instructions for use](#)

# グラフ理論的手法による回路網解析のプログラミング

田原米起<sup>\*†</sup> 干場敬典<sup>\*\*\*</sup> 仙石正和<sup>\*\*</sup>

小川吉彦<sup>\*</sup> 黒部貞一<sup>\*</sup>

(昭和47年11月30日受理)

## Programming of Network Analysis by Graph Theoretical Technique

Yoneki TAHARA, Takanori HOSHIBA, Masakazu SENGOKU, Yoshihiko OGAWA, Teiichi KUROBE

(Received November 30, 1972)

### Abstract

Recently, a state-variable technique is frequently applied to network analysis (DC, transient, and frequency characteristics) with the aid of a digital computer.

We have established programs for obtaining transient and frequency characteristics of a network which contains both passive elements and transistors. In these programs, the graph theoretical method proposed by W. Mayeda, S. Seshu and M. B. Reed which differs from the above was used.

This report is devoted exclusively to programming carried out to find all trees in a network by an efficient method without duplications and to determine the sign of common trees appearing in the voltage graph and also in the current graph of a network.

### 1. ま え が き

グラフ理論を用いてシステムを解析する事は、多方面にわたって行なわれている。経済でのPERT, 遺伝学, 言語学, サイバネテックス等への応用はさかんに行なわれている<sup>1)</sup>。工学方面では、特にめざましく、回路解析, 通信網, 交通制御, スイッチ回路網, IC パターンの自動設計, システムの故障診断等があげられる。

この報告では、グラフ理論を回路解析に用いた場合のプログラミング構成法について述べている。すでに D. A. Calahan<sup>2)</sup> によって高度のプログラムが成されているが、ここで述べる木の打ち出しプログラムは効率がよく、演算時間も短い。

プログラム言語はフォートランを用い、トランジスタを含む回路解析の結果を示す。

### 2. 回路網解析の手法

計算機で回路解析をする場合、必要とされるものが直流特性, 過渡特性, 周波数特性, 伝達関数なのにかよって色々なプログラム化が行なわれている。普通一般には、状態変数解析の手法<sup>3)</sup>が用いられる。グラフ的には、C-基準木, L-基準木を求め、物理的制限のもとに変数縮約し、

\* 電子工学科 電子回路工学講座

\*\* 電子工学科 電波伝送工学講座

\*\*\* 日本 IBM 株式会社

† 現在：日本電信電話公社

状態方程式  $dx/dt = \phi(x, u, t)$  にする事である。この方法は、初期値を与えて積分と行列演算を行なうことが主になる。過渡解析も直流解析も、能動素子のモデルを変化させる事で解く事が出来る。

状態変数解析では、大きな回路網を取り扱う事が出来るが、過渡特性を求める際行列演算と積分が入る。全くグラフ理論的な手法を用いると、行列演算が Binet-Cauchy の定理で木のアドミタンス積和となり伝達関数が多項式の比として直ちに求まる。グラフ理論的手法による回路解析の大きな処理手順の流れは Fig. 1 の様になる。

今回の報告段階では、大きな回路の解析は木の生成数が大きくなり困難であるが、プログラム言語の選択と記憶容量が大きくなると可能になると思われる。

Fig. 1 でも明らかな様に、グラフ理論的手法を用いる際は、すべての木を効率よくしかも重複のない様に打ち出すことが重要となる。

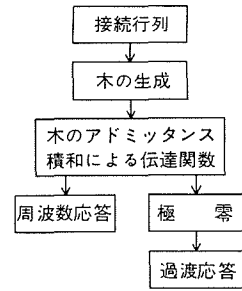


Fig. 1 グラフ理論的手法による処理手順



Fig. 2 4端子回路網 (0; 基準節点)

### 3. グラフ理論による回路解析

#### 3.1 回路網表示<sup>4,5)</sup>

グラフ理論的手法を用いる際にも当然の事ながらキルヒホッフの電圧律、電流律が基本である。与えられた回路網の節点数  $N$ 、枝数  $NE$  とすると接続行列は  $(N-1, NE)$  行列となる。グラフ理論的な手法で能動素子（ここでは、伝達コンダクタンス）を含む回路を解析する場合、アドミタンス行列  $Y$  を対角化するために電圧グラフと電流グラフにわけると

カットセット解析を用いると

$$V_n = (A_i Y A_v)^{-1} I_n \tag{1}$$

$A_i, A_v$  は各々電流グラフ、電圧グラフの接続行列であり、 $I_n$  はカットセット電流源、 $V_n$  は基準節点に対する他の節点の電位である。

(1) 式を Fig. 2 の 4 端子回路網に適用すると次式になる。

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} V_{io} \\ V_{jk} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_{ii} & \Delta_{ji} - \Delta_{ki} \\ \Delta_{ij} - \Delta_{ik} & \Delta_{jj} + \Delta_{kk} - \Delta_{jk} - \Delta_{kj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{io} \\ I_{jk} \end{pmatrix} \\ \Delta &\equiv \det(A_i Y A_v) \\ \Delta_{ij}; \Delta \text{ の } (i, j) \text{ 余因子} \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

(2) 式はグラフ理論的に考えると、 $\Delta_{ij}$  は  $A_i$  で  $i$  行を除き、 $A_v$  で  $j$  列を除く事であるから、電流グラフで節点  $i$  を基準点  $o$  に短絡除去し、電圧グラフで節点  $j$  を  $o$  に短絡除去したグラフを考えるとよい。従ってピネコーシーの定理を用いると、 $\Delta_{ij}$  は各々対応する節点を短絡したグラフの共通木 (2-木) のアドミタンス積和となる。表示法として  $\Delta_{ij} = W_{j,o}^{i,o}$  を用いると、(2) 式の表示は、

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} V_{io} \\ V_{jk} \end{pmatrix} &= \frac{1}{V} \begin{pmatrix} W_{i,o}^{i,o} & W_{i,o}^{j,k} \\ W_{j,k}^{i,o} & W_{j,k}^{j,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{io} \\ I_{jk} \end{pmatrix} \\ V: \Sigma \text{ (共通木のアドミタンス積)} \\ W: \Sigma \text{ (共通 2-木 " )} \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

今回はトランジスタ回路を考えているので出力側節点  $k$  も基準点  $o$  とすると、3 端子網と考える事が出来る。

(3) 式でサフィクス  $k \rightarrow o$  として3端子表示と考える。この時、式から明らかな様にグラフ理論的な手法で解析する場合は電圧グラフ、電流グラフのすべての木をみつけないという事が基本的問題となる。線形素子 (L, C, R) ばかりより成る回路では回路網の電圧グラフと電流グラフは一致するという事と、ビネコーシーの行列式展開定理から明らかな様に、 $V, W$  は次の性質を有する。

(i)  $V$  (木),  $W_{i,o}^{i,o}, W_{j,o}^{j,o}$  (2-木) は、木の枝がすべて線形素子よりなると枝アドミタンス積の符号は正である。符号を調べる必要があるのは伝達コンダクタンスを含む木である。

(ii)  $W_{j,o}^{i,o}, W_{i,o}^{j,o}$  に関しては、(i) は成立しない。何故なら、電流グラフ、電圧グラフでは短絡除去する節点異なるため、線形素子よりなる木でも行列の要素配置異なるためである。

ここで明らかになった様に、能動素子を含む場合、プログラムに際して特に共通木をとり符号を決定しなければならないという事が問題となる。

3.2 木集合の生成の手順

木をみつける手順としては、木を形成する枝の小行列式が  $\pm 1$  になる事を利用した初等代数の方法、道を用いる方法があるが、ここでは時間が短く、重複のない打ち出しとして接続行列を単位行列にした時の、木の初等変換の性質を利用した方法で行なった<sup>6)</sup>。以後のプログラミングの理解のために簡単な例題を上げる。

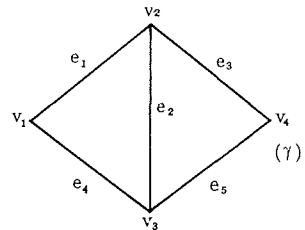


Fig. 3 例題のグラフ

[例題]

Fig. 3 で示されるグラフの接続行列で基準木を  $(e_1 e_2 e_3)$  とした時の基本カットセット行列  $Q$  は、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

重複のない打ち出しのために、初等変換で出る枝との共通集合をとるため  $M(e_1) = \{e_4\}$ ,  $M(e_2) = \{e_4, e_5\}$ ,  $M(e_3) = \{e_5\}$  としておく。Q より直ちに  $T(1) = \{e_4 e_2 e_3\}$ ,  $T(2) = \{e_1 e_4 e_3 e_5, e_3 e_5\}$ ,  $T(3) = \{e_1 e_2 e_3\}$  と求まる。

次に  $T(12)$  を求める場合  $T(1)$  の木の部分が単位行列になる様にする。それを  $Q'$  とすると

$$Q' = \begin{matrix} & e_4 & e_2 & e_3 & e_1 & e_5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$T(12)$  は  $M(e_2)$  と  $Q'$  で  $e_2$  の枝の代わりになる補木の枝  $\{e_1 e_5\}$  との共通集合をとると重複しない。従って  $T(12) = \{e_4 e_3 e_3\}$  と求まる。他のも同様にして求めると木集合は、

$$T = \{e_1 e_2 e_3, e_4 e_2 e_3, e_1 e_4 e_3, e_1 e_5 e_3, e_1 e_2 e_5, e_4 e_2 e_5, e_1 e_4 e_5\}$$

(例題終)

上の例題で明らかになったが、 $T(1, 2), T(1, 3), \dots, T(1, N-1)$  等は  $T(1)$  を単位行列にした時直ちに求められるのでその様にプログラム化すると効率が良い。重複のない効率的な木の打ち出しプログラムの概略を述ベフローチャートを示す。(Fig. 4)

入力データとしては枝の接続行列を入れる。接続行列から基準点に対するカットセットを除去し、基準木の枝に対する小行列を単位行列になる様にする。この時共通集合をとるための補木の

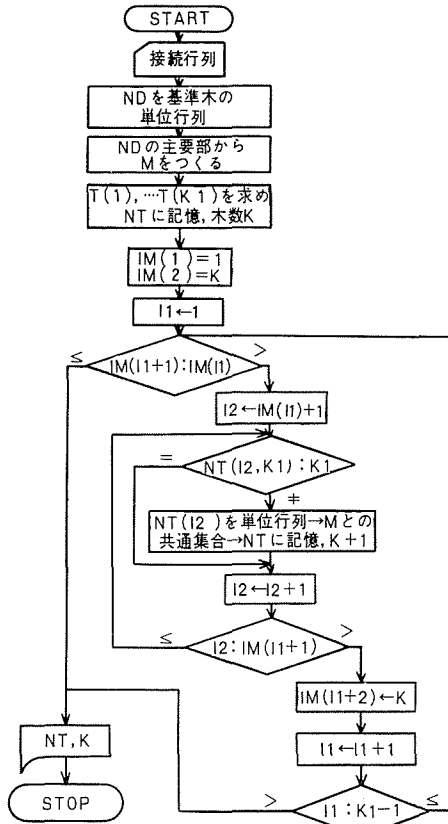


Fig. 4 木の生成のフローチャート

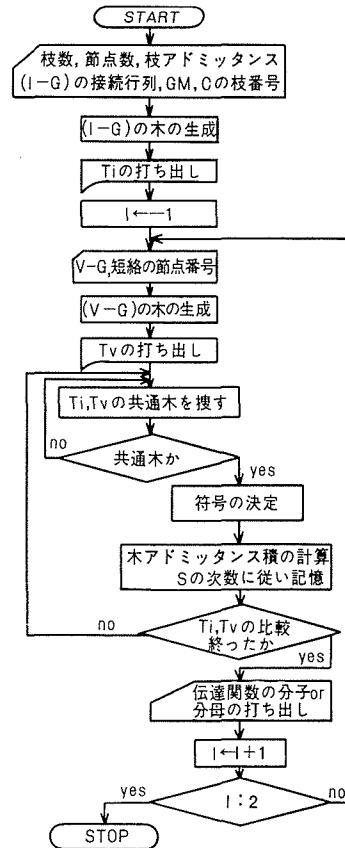


Fig. 5 伝達関数決定のフローチャート

部分の枝番号を領域 M に記憶する。それと同時に基準木の枝と 1 枝異なった木を領域 NT に記憶する。この時の木の数 IM(1) とするとこの次の打ち出しは基準木と 2 枝異なった木の打ち出しをする。この時 NT の 1~IM(1) の木の各々に対して、枝の番号を後方からみて基準木と最初に枝番号の異なっているものを見つける。それを  $\alpha$  番目とするとその木を単位行列にした時、 $(\alpha+1)$  以下について共通集合をとる。従ってもし  $\alpha$  が  $(N-1)$  と等しい時は、単位行列にする必要はない。この様に、後方からみて共通集合をとるという操作を入れると演算時間が短く効率がよい。最終的な打ち出しは  $T(1) \dots T(N-1) T(12) \dots T(1N-1) \dots T(123 \dots N-1)$  の形で打ち出される。

今回のプログラムはフォートランで組んだため記憶容量の関係から余り大きな回路の木の打ち出しは行っていないが (伝達関数決定の時、木の上限は電流グラフ、電圧グラフ共 1000 である)、例題の一つでは、468 の木を打ち出すのに演算時間は約 4 秒であった。

### 3.3 伝達関数決定のフローチャート

伝達関数を求める場合一番問題になるのが木の打ち出しと、共通木の符号の決定である。木の打ち出しについては上述したので符号の方について考えてみる。

(2.1) で明らかな様に、電圧-電圧伝達関数は次式で示される。

$$\frac{V_{j_0}}{V_{i_0}} = \frac{W_{j_0}^{i_0}}{W_{i_0}^{i_0}} \tag{4}$$

従って符号については  $W_{i,0}^{i,0}$ ,  $W_{j,0}^{i,0}$  を考える。 $W_{i,0}^{i,0}$  に関しては, (2.1) の性質からわかる様に木の枝がすべて受動素子なら正である。伝達コンダクタンスを含む共通木に対して符号を調べると良い。 $W_{j,0}^{i,0}$  の共通木に関してはすべてについて調べる必要がある。この符号を調べる必要のある共通木の符号は, 基本的には電流グラフ, 電圧グラフの対応する小行列式が同符号なら (+), 異符号なら (-) とすればよい。接続行列の要素は,  $-1, 0, +1$  から成るので小行列式をそのまま求めるのは演算時間の無駄である。ここでは, 接続行列を対応する木に対する単位行列にする時, その小行列式は行の置換の回数と, 対角要素を  $-1$  から  $1$  にかえる符号変換の回数の和を用いて求まる事を利用している。

従って,  $W_{j,0}^{i,0}$  の木の符号について考えると, 電流グラフで節点  $i$  を基準点に短絡除去し, 電圧グラフで節点  $j$  を基準点に短絡除去した時の接続行列を考える。各々接続行列を対応する木の単位行列にする時, 置換と符号変換の回数をカウントし, その和と  $i, j$  の節点番号の和との両者の和が偶数なら共通木の符号は (+) で奇数なら (-) である。 $W_{j,0}^{i,0}$  で伝達コンダクタンスを含む共通木の符号は, 上の場合で  $i=j$  とおくとよい。つまり符号は置換と符号変換の回数に依存する。

この手法を用い, (2.2) の木の生成法を用いた時の伝達関数決定の全体的フローチャートを示す。ただし, このプログラムは一応3端子網のものであるが4端子網になってもプログラム上での本質的な相違はない。

#### 4. 時間応答, 周波数応答

今までグラフ理論的手法により伝達関数を決定する手順について述べてきた。ここではその伝達関数をよく知られている逆ラプラス変換の公式により時間応答を求めた。(Fig. 6) なお周波数応答に関しては, 時間応答のプログラムに組み込まれているが, 周波数を対数的に増加させる以外プログラム上の問題はないのでフローチャートにおいても省略してある。

今回の報告では, 主にグラフ理論による解析を主体にしたため, 逆ラプラス変換に際して極には多重根は存在しないという事を仮定してプログラムを作成した。もし極の打ち出しをみて多重根が存在している様であるところのプログラムは使えない。簡単な例題をいくつか行なったがその様な事は生じなかった。従って単一実根, 単一複素根のもとに初歩的な逆ラプラス変換の公式を適用した。

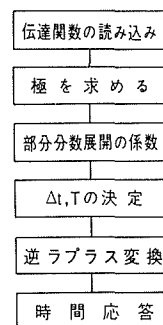


Fig. 6 時間応答の手順

Fig. 6 時間応答の手順

$$F(s) = \frac{W_{j,0}^{i,0}}{W_{i,0}^{i,0}} = \frac{G(s)}{H(s)} \quad (5)$$

とすると, ステップ応答は,

$$f(t) = L^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right) = L^{-1}\left(\frac{G(s)}{Q(s)}\right) \quad (6)$$

ここで単一実根を  $\alpha_i$ , その留数を  $A_i$ , 単一複素根  $b_k = \alpha_k + j\beta_k$ ,  $\bar{b}_k = \alpha_k - j\beta_k$  とするとその留数  $A_k, A_k'$  の間には,  $F(s)$  が  $S$  の多項式の比なので  $A_k = A_k'$  が成立するから (6) 式は次式になる。

$$f(t) = \sum_i A_i \exp(\alpha_i t) + \sum_k 2 \exp(\alpha_k t) (R_e A_k \cos \beta_k t - \text{Imag } A_k \sin \beta_k t) \quad (7)$$

$$A_i = \frac{G(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)} \quad A_k = \frac{G(b_k)}{Q'(b_k)} \quad (8)$$

これに従ってプログラム化を行なった。時間の増分  $\Delta t$  と、最終値  $T$  は次の様に設定した。

$$\left. \begin{aligned} \Delta t_k &= \frac{0.1}{\max |\alpha_k|} & \Delta t'_k &= \frac{0.1}{\max |\beta_k|} \\ \Delta t &= \min(\Delta t_1, \dots, \Delta t_m, \Delta t'_1, \dots, \Delta t'_n) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ただし、実根は  $\Delta t_k$  のみ求める。

$$\left. \begin{aligned} T_k &= \frac{10}{\min |\alpha_k|} & T'_k &= \frac{6}{\min |\beta_k|} \\ T &= \max(T_1, \dots, T_m, T'_1, \dots, T'_n) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

又このプログラムでは、極を FACOM 230-60 のライブラリーを使用して求めたが、実数部と虚数部のオーダーが非常に異なる時、虚数部を零とおいて実根として逆変換を行なっている。

### 5. 例 題

#### 【例題 1】

簡単な回路を解析したので結果を示す。Fig. 7 はコレクター接地-ベース接地回路である。Fig. 8 はその時の時間応答と周波数応答である。

この時の素子値は、

$$\begin{aligned} g_x &= 8 \times 10^{-3}(\text{r}) & g_{d_1} &= g_{d_2} = 4 \times 10^{-3}(\mathcal{G}) \\ C_{d_1} &= C_{d_2} = 10^{-10}(F) & g_1 &= g_2 = 10^{-2}(\mathcal{G}) \\ g_{b_2} &= 2 \times 10^{-2}(\mathcal{G}) & g_B &= 1.667 \times 10^{-3}(\mathcal{G}) \\ g_m &= 0.2(\mathcal{G}) & C_{c_1} &= C_{c_2} = 3 \times 10^{-12}(F) \end{aligned}$$

この時の木の数は、

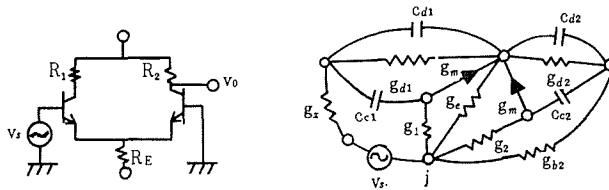


Fig. 7 例題 (1) の回路

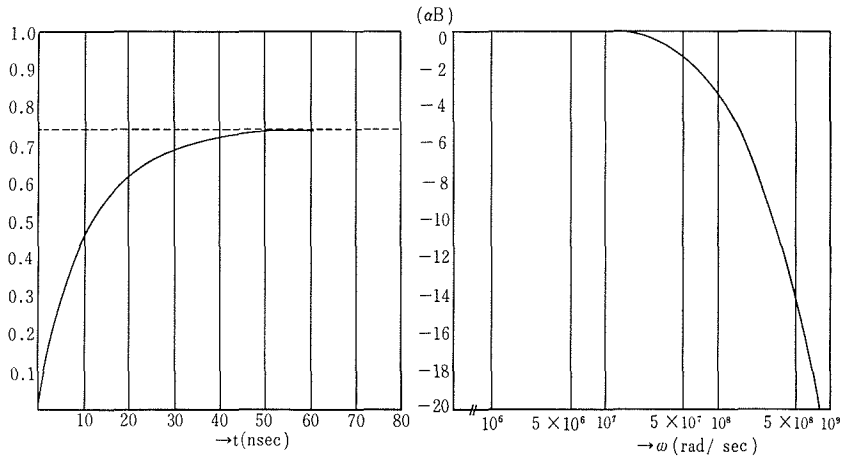


Fig. 8 例題 (1) の時間応答, 周波数応答

入力端子短絡電流グラフ	407
入力端子短絡電圧グラフ	243
$W_{i,0}^{i,0}$ の共通木	208
出力短絡電圧グラフ	92
$W_{j,0}^{j,0}$ の共通木	24

求まった伝達関数は,

$$F(s) = \frac{0.720 \times 10^{-45}s^4 + 0.534 \times 10^{-35}s^3 + 0.224 \times 10^{-25}s^2 + 0.616 \times 10^{-16}s + 0.653 \times 10^{-7}}{0.447 \times 10^{-44}s^4 + 0.430 \times 10^{-34}s^3 + 0.121 \times 10^{-23}s^2 + 0.616 \times 10^{-13}s + 0.886 \times 10^{-8}}$$

### [例題 2]

Fig. 9 は MOS 型トランジスタ 2 段の回路である。同じ 2 段であるが上の例題の木の生成数とかなり違う事に注意されたい。

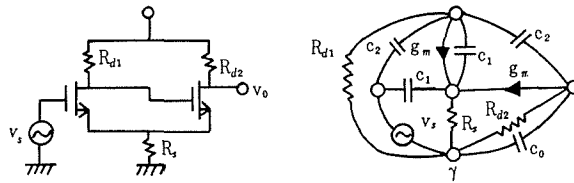


Fig. 9 例題 (2) のグラフ

入力短絡電流グラフ	70
入力短絡電圧グラフ	58
$W_{i,0}^{i,0}$ の共通木	50
出力短絡電圧グラフ	30
$W_{j,0}^{j,0}$ の共通木	12

素子値を次の値とした時の伝達関数は,

$$\begin{aligned} R_{d1} = R_{d2} &= 3 \times 10^4 (\Omega) & R_s &= 10^3 (\Omega) \\ C_1 &= 10^{-12} (F) & C_0 &= 10^{-11} (F) \\ C_2 &= 10^{-12} (F) & g_m &= 1.2 \times 10^{-4} (g) \end{aligned}$$

のとき,

$$F(s) = \frac{0.120 \times 10^{-36}s^3 + 0.244 \times 10^{-28}s^2 - 0.200 \times 10^{-13}s + 0.146 \times 10^{-10}}{0.412 \times 10^{-34}s^3 + 0.133 \times 10^{-25}s^2 + 0.330 \times 10^{-18}s + 0.897 \times 10^{-12}}$$

## 6. 結 論

今回の報告時点では、簡単な回路解析しか行なわれてなく、まだこの段階で論じるのは尚早かもしれないが若干気がついた事を述べる。グラフ理論的手法の過渡解析における最大の欠点は、大きな回路を扱う場合、記憶容量が膨大なものになるという事である。この点に関しては、容量が大きくなるアセンブラ言語によるビット記憶を用いれば、かなりの回路の解析が可能と思われる。そして、最大の利点は行列演算をしなくても、組み合わせ演算で伝達関数が決定出来るという点である。現在の記憶容量のもとでも素子感度を考慮した回路設計には有効な手段になると思われる。また、状態変数解析でも同じであるが、能動素子のモデリング手法が問題になろう。

最後に今回の計算は、北大計算機センターの FACOM 230-60 を用いて行なった。



## 参 考 文 献

- 1) R. G. Busacker, and T. L. Saaty: Finite Graphs and Networks; Introduction with Applications, (1965) McGraw-Hill.  
矢野, 伊理共訳: グラフ理論とネットワーク; 基礎と応用, (昭45) 培風館。
- 2) D. A. Calahan, : Computer-Aided Network Design. (1972) McGraw-Hill.
- 3) 渡部 和: 線形回路論 (昭46) 昭晃堂。
- 4) W. Mayeda, : Topological Formulas for Active Networks, (1958) Interim Tech. Rept. 8, U. S. Army Contact DA-11-022, Ord-1983.
- 5) S. Seshu, and M. B. Reed: Linear Graphs and Electrical Networks. (1961) Addison-Wesley.
- 6) W. Mayeda, and S. Seshu: Generation of Trees without Duplications. (1965) IEEE Trans. Circuit Theory CT-12.